

Zur Anwendung der SPS-Technologie im Bahnbrückenbau

Vom
Fachbereich 13 - Bau- und Umweltingenieurwissenschaften
der Technischen Universität Darmstadt

zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte

Dissertation

vorgelegt von
Pascal José Manuel Händler, M.Sc.
aus Frankfurt am Main

Referent:

Prof. Dr.-Ing. Jörg Lange

Korreferent:

Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Kurz

Darmstadt 2023

D 17

Pascal Händler:

Zur Anwendung der SPS-Technologie im Bahnbrückenbau
Darmstadt, Technische Universität Darmstadt

Jahr der Veröffentlichung der Dissertation auf TUpriints: 2023

Tag der Einreichung: 12.12.2022

Tag der mündlichen Prüfung: 22.03.2023

URN: urn:nbn:de:tuda-tuprints-241439

URI: <https://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de/id/eprint/24143>

Veröffentlicht unter CC BY-SA 4.0 International

<https://creativecommons.org/licenses/>

Kurzfassung

Für den Neubau von trogförmigen Bahnbrücken aus Stahl existieren nur wenige Bauformen zur Ausbildung der Fahrbahnplatte. Das *Sandwich Plate System* (SPS) könnte eine Alternative zu den etablierten Varianten sein. Das SPS ist ein Verbundsystem aus zwei stählernen Deckschichten verbunden durch einen massiven Kern aus einem speziellen Polyurethan (PUR). Die vorliegende Arbeit widmet sich auf zwei Ebenen den offenen Fragen zur Anwendung des Sandwich Plate Systems im Neubau von Bahnbrücken.

Im ersten Teil wird auf der Werkstoff-Ebene das spezielle PUR im Kern des SPS hinsichtlich seiner veränderlichen Steifigkeit in Abhängigkeit von der Temperatur und der Zeit experimentell charakterisiert. Dafür werden mithilfe von Dynamisch-Mechanisch-Thermischen Analysen (DMTA) die viskoelastischen Eigenschaften des speziellen PUR in Abhängigkeit von der Zeit und der Temperatur sowie deren Veränderung durch Tempern und Nachvernetzen untersucht. Neben der konventionellen Auswertung über eine rein horizontale Zeit-Temperatur-Verschiebung (ZTV) wird eine neue Methode erprobt, um die strukturelle Veränderung des PUR innerhalb eines Versuchs zu berücksichtigen. Je nach Methode ergeben sich aus den DMT Analysen unterschiedliche Zusammenhänge für die veränderliche Steifigkeit des PUR. Im Vergleich mit weiteren Kriech- und Relaxationsversuchen an dem PUR zeigt sich die konventionelle Art der Auswertung als zuverlässiger. Auf Basis des verallgemeinerten Maxwell-Modells und mithilfe eines semi-kontinuierlichen Ansatzes für die Prony-Reihe wird ein Materialmodell zur Berechnung der Steifigkeit des PUR entwickelt, welches danach an den experimentellen Ergebnissen validiert wird. In einigen der Versuche werden außerdem Beobachtungen zur Grenze des linear-viskoelastischen Bereichs für das PUR gemacht.

Im zweiten Teil werden auf der Bauteil-Ebene die Auswirkungen des veränderlichen Kernmaterials auf die Tragwirkung von SPS-Elementen theoretisch betrachtet. Dabei wird der zuvor gefundene Zusammenhang für die Steifigkeit des PUR in Abhängigkeit von der Zeit und der Temperatur berücksichtigt. In einer Voruntersuchung werden zunächst Verfahren zur Berechnung von Sandwichelementen exemplarisch verglichen und hinsichtlich ihrer Eignung zur Anwendung auf SPS-Elemente mit verschiedenen Kernsteifigkeiten untersucht. Anschließend wird an drei für Fahrbahnplatten relevanten Einfeld-Sandwich-Systemen mithilfe der Sandwichtheorie dicker Deckschichten eine analytische Studie zu den Auswirkungen einer veränderlichen Kernsteifigkeit durchgeführt. Dabei werden das (visko-)elastische Tragverhalten anhand der Verformung und die Beanspruchung der Deckschichten anhand der Randspannung betrachtet. Aus den gewonnenen Erkenntnissen werden sowohl ein Leitfaden für den Entwurf von SPS-Elementen mit veränderlicher Kernsteifigkeit als auch Grenzen für deren Anwendung im Bahnbrückenbau formuliert.

Abstract

For the construction of open railway bridges made of steel, only a few construction forms exist for the formation of the deck plate. The *Sandwich Plate System* (SPS) could be an alternative to the established variants. The SPS is a composite system consisting of two steel sheets bonded by a solid core made of a special polyurethane (PUR). The present work addresses the open questions to the application of the Sandwich Plate System in the new construction of railway bridges on two levels.

In the first part, the special PUR in the core of the SPS is investigated on the material level with regard to its variable stiffness as a function of temperature and time. For this purpose, the viscoelastic properties of the special PUR as a function of time and temperature, as well as their changes due to annealing and post-crosslinking are investigated with the aid of Dynamic-Mechanical-Thermal Analyses (DMTA). In addition to the conventional evaluation via a purely horizontal Time-Temperature Superposition (TTS), a new method is being tested to take into account the structural change of the PUR within a trial. Depending on the method, the DMT Analyses result in different correlations for the variable stiffness of the PUR. In comparison with other creep and relaxation tests on the PUR, the conventional method of evaluation proves to be more reliable. On the basis of the generalised Maxwell model and with the help of a semi-continuous approach for the Prony series, a material model for calculating the stiffness of the PUR is developed, which is then validated on the experimental results. In some of the experiments, observations are also made on the limit of the linear viscoelastic range for the PUR.

In the second part, the effects of the variable core material on the load-bearing behaviour of SPS elements is considered theoretically on the component level. Here the previously found correlation for the stiffness of the PUR as a function of time and temperature is taken into account. In a preliminary investigation, methods for the calculation of sandwich elements are compared and investigated with regard to their suitability for the application on SPS elements with different core stiffnesses. Subsequently, an analytical study of the effects of a variable core stiffness is carried out on three single-span sandwich systems relevant for deck slabs using the sandwich theory with thick faces. Therein the (visco-)elastic load-bearing behaviour is considered on the basis of the deflection and the load on the surface layers on the basis of the edge stress. The findings are used to develop a guideline for the design of SPS elements with variable core stiffness as well as limits for their application in railway bridge construction are formulated.

„Alles bewegt sich fort und nichts bleibt.“

Heraklit von Ephesos

Für Heinz-Peter

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Stahlbau und Werkstoffmechanik der Technischen Universität Darmstadt. Auf dem Weg zur Promotion trugen viele Persönlichkeiten direkt und indirekt zu der Entstehung bei, denen ich auf diesem Wege meinen Dank aussprechen möchte. Herrn Prof. Dr.-Ing. Jörg Lange danke ich sehr dafür, dass er mir als Doktorvater die Möglichkeit gab diesen besonderen Weg zu beschreiten und als Mentor immer ein offenes Ohr sowie wertvolles Feedback für mich hatte. Herrn Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Kurz danke ich für die Übernahme des Korreferats und den fachlich wertvollen Austausch. Den Firmen SPS-Technologie, vertreten durch Herrn Dr. Neil Little, sowie BASF Polyurethanes, vertreten durch Herrn Dr. Andre Kamm, danke ich für die Kooperation und Hilfe bei der Herstellung der Probekörper. Ein warmherziger Dank gilt allen ehemaligen Kolleginnen und Kollegen am Fachgebiet Stahlbau, dem IfSW und den anderen Instituten. Die freundschaftliche Atmosphäre und der Zusammenhalt ließen diesen beruflichen Abschnitt für mich zu einem der schönsten werden. Ein besonderer Dank gilt hierbei meinen ehemaligen Kolleginnen Dr.-Ing. Miriam Schuster und M.Sc. Sonja Steineck. Mit vielen fruchtbaren Diskussionen trugen sie sowohl fachlich als auch redaktionell zum Gelingen dieser Arbeit bei. Den Kollegen im Forschungslabor danke ich außerdem für ihr tatkräftiges Engagement bei der Konzeption und Umsetzung der Versuche. Auch den Studierenden, deren Abschlussarbeiten ich fachlich begleiten durfte, danke ich für ihre Unterstützung bei den Versuchen und die Inspirationen zu neuen Fragestellungen. Meiner Familie und meinen Freunden danke ich für den Rückhalt und das Verständnis, vor allem in der entbehrungsreichen Phase des Schreibens. Besonders gilt dieser Dank meiner Frau Isabel, die auf dem langen Weg mit großer Geduld und Teilnahme stets eine liebevolle Stütze war. Abschließend danke ich meinem Großvater Heinz-Peter, dem ich diese Arbeit widme. Seine Erziehung und seine Begeisterung für Technik lehrten mich die nötige Beharrlichkeit und das ingenieurmäßige Denken, die es für ein solches Unterfangen braucht.

Inhaltsverzeichnis

Symbole und Abkürzungen	XIII
1 Einführung	1
1.1 Der Ersatzneubau von kurzen Eisenbahnbrücken	2
1.1.1 Trogbrücken aus Stahl und ihre Fahrbahn	2
1.1.2 Alternative Fahrbahnen aus SPS	5
1.2 Das Sandwich Plate System (SPS)	7
1.2.1 Bauarten und Herstellung	7
1.2.2 Entwicklung und bisherige Anwendungen	8
1.3 Problemstellung und Zielsetzung	13
1.4 Aufbau der Arbeit	15
I Charakterisierung des viskoelastischen Verhaltens des PUR im SPS	
2 Grundlagen zu Kunststoffen und dem PUR im SPS	19
2.1 Grundlagen zu Kunststoffen und deren Mechanik	19
2.1.1 Aufbau und Struktur von Polymeren	19
2.1.2 Viskoelastisches Materialverhalten	23
2.1.3 Die Beschreibung des Langzeitverhaltens von Polymeren	28
2.1.4 Dynamisch-Mechanisch-Thermische Analyse (DMTA)	31
2.1.5 Das Zeit-Temperatur-Verschiebungsprinzip (ZTV)	36
2.2 Das im Sandwich Plate System verwendete Polyurethan	41
2.2.1 Die Eigenschaften des speziellen PUR im SPS	42
2.2.2 Bisherige experimentelle Untersuchungen zum PUR im SPS	47
2.2.3 Vergleich und Schlussfolgerungen	53
3 Grundlagen zu den Untersuchungen und Vorversuche am PUR	57
3.1 Grundlagen zu den experimentellen Untersuchungen	57
3.1.1 Zielsetzung und Methodik von Teil I	57
3.1.2 Die Probekörper und ihre Herstellung	61
3.2 Versuche zum Vergleich mit bisherigen Arbeiten	64
3.2.1 Druckversuche bei verschiedenen Temperaturen	64
3.2.2 Zugversuche bei verschiedenen Temperaturen	69
3.2.3 Dynamisch-Mechanisch-Thermische Analysen	71
3.2.4 Schlussfolgerungen	72

4	Experimentelle Untersuchung der viskoelastischen Eigenschaften	75
4.1	DMT Analysen zur Charakterisierung der viskoelastischen Eigenschaften	75
4.1.1	Temperatur-Sweeps (D-TS)	75
4.1.2	Temperatur-Frequenz-Sweeps (D-TFS)	79
4.1.3	Schlussfolgerungen	96
4.2	Versuche unter Zug zur Charakterisierung der viskoelastischen Eigenschaften .	97
4.2.1	Langzeit-Kriechen unter konstantem Zug bei Raumtemperatur (TC) . .	97
4.2.2	Kurzzeit-Relaxation unter konstanter Zugdeformation (TR-TTS)	103
4.2.3	Schlussfolgerungen	106
4.3	Versuche unter Schub zur Charakterisierung der viskoelastischen Eigenschaften	108
4.3.1	Langzeit-Relaxation unter Schubdeformation (SR)	108
4.3.2	Kurzzeit-Relaxation unter Schubdeformation (SR-TTS)	113
4.3.3	Schlussfolgerungen	115
5	Ein viskoelastisches Materialmodell für das PUR im SPS	117
5.1	Das Zeit-Temperatur-Verschiebungs-Gesetz (ZTV)	117
5.1.1	Der Ansatz nach Arrhenius	119
5.1.2	Der Ansatz nach Williams, Landel und Ferry (WLF)	121
5.1.3	Ein empirischer Exponential-Ansatz	122
5.1.4	Vergleich und Schlussfolgerungen	124
5.2	Das Relaxationsspektrum in Frequenz- und Zeitbereich	127
5.2.1	Ermittlung der Prony-Parameter im Frequenzbereich	127
5.2.2	Die Prony-Reihen im Zeitbereich	130
5.2.3	Vergleich und Schlussfolgerungen	132
5.3	Ein linear-viskoelastisches Materialmodell für das PUR	136
5.3.1	Ein semi-kontinuierliches Relaxationsspektrum	136
5.3.2	Der Relaxationsmodul in Abhängigkeit von Zeit und Temperatur	139
5.3.3	Vergleich und Schlussfolgerungen	141
II	Das Tragverhalten von Sandwichelementen mit biegesteifen Deckschichten und veränderlichen Kerneigenschaften unter Biegung	
6	Die Berechnung von Sandwichelementen und geeignete Verfahren für das SPS	147
6.1	Sandwichelemente und Verfahren zu deren Berechnung	148
6.1.1	Das Tragprinzip von Sandwichelementen	148
6.1.2	Verfahren zur Berechnung von Sandwichbalken	152
6.1.3	Bisher auf das SPS angewendete Verfahren	157
6.1.4	Die Berücksichtigung einer veränderlichen Kernsteifigkeit	159
6.2	Voruntersuchung zur Berechnung von SPS-Elementen	161
6.2.1	Grundlagen und Randbedingungen der Voruntersuchung	161
6.2.2	Vergleich der Berechnungsverfahren	164
6.2.3	Schlussfolgerungen und Empfehlungen	167

7 Eine analytische Studie zum Tragverhalten von SPS-Elementen	169
7.1 Grundlagen der Studie	169
7.1.1 Systematik, Randbedingungen und betrachtete Systeme	169
7.1.2 Die Grenzfallfunktionen der Steifigkeits- und Spannungsfaktoren	176
7.1.3 Abgrenzung gegenüber dem Knittern der gedrückten Deckschicht	180
7.2 Einflüsse auf das Tragverhalten von Sandwichelementen	184
7.2.1 Die Gesamtsteifigkeit bei unterschiedlichen Deckschichtdicken	185
7.2.2 Die Gesamtsteifigkeit unter sinkender Kernsteifigkeit	189
7.2.3 Die Deckschichtspannung unter sinkender Kernsteifigkeit	194
7.2.4 Der Einfluss der Stirnplattensteifigkeit im System II	199
7.2.5 Schlussfolgerungen	203
7.3 Der überschlägige Entwurf von SPS-Elementen mit veränderlichem Kern	206
7.3.1 Faktoren zum Vergleich mit monolithischen Blechen	206
7.3.2 Die Anwendbarkeit der linearen Viskoelastizität	212
7.3.3 Ein Algorithmus zur Vordimensionierung von SPS-Elementen	215
7.3.4 Schlussfolgerungen	225

Schluss

8 Zusammenfassung und Ausblick	229
8.1 Zusammenfassung zu Teil I	229
8.2 Zusammenfassung zu Teil II	232
8.3 Fazit und Ausblick	234

Literaturverzeichnis	XXIII
-----------------------------	--------------

Anhang	XXXVII
---------------	---------------

Symbole und Abkürzungen

Im Folgenden sind alle Symbole und Abkürzungen dieser Arbeit aufgeführt. Sie werden in Abschnitten getrennt nach griechischen und lateinischen Buchstaben sowie Abkürzungen gegeben. Innerhalb der Abschnitte wird nach *Teil I* und *Teil II* dieser Arbeit unterschieden. Außerdem werden jeweils unter *Allgemein* Symbole und Abkürzungen aufgeführt, die in beiden Teilen, der Einleitung oder dem Schluss zu finden sind. Innerhalb der Unterabschnitte sind die Listen nach Klein- und Großschreibung sowie alphabetisch sortiert.

Die SI-Einheiten der gezeigten Größen werden innerhalb der Arbeit stets mit angegeben, in diesem Verzeichnis jedoch nicht explizit aufgeführt. In Gleichungen werden Ableitungen nach dem Weg bzw. der Länge immer mit einem Strich ($\frac{du}{dx} = u'$) und Ableitungen nach der Zeit immer mit einem Punkt kenntlich gemacht ($\frac{du}{dt} = \dot{u}$).

Griechische Symbole

Allgemein

γ	Schubgleitung, Schubdeformation
ε	Dehnung, Stauchung
ε_1	Erste Hauptdehnung
ρ	Rohdichte
ν	Querdehnzahl, Poissonzahl
π	Kreiszahl (3,14159...)
σ	Normalspannung
τ	Schubspannung
Δ	Operator für eine Änderung auf einem Intervall, Differenz oder Schrittweite
Π	Operator für ein Produkt
Σ	Operator für eine Summe
∂	Operator ¹ für eine partielle Ableitung

Teil I

γ_0	Schubdeformation im Ausgangszustand eines Versuchs oder Amplitude einer zyklisch oszillierenden Schubdeformation (vgl. DMTA)
$\dot{\gamma}$	Deformationsgeschwindigkeit, Schergeschwindigkeit

¹Streng genommen handelt es sich nicht um einen griechischen-, sondern einen kyrillischen Buchstaben (∂). Um nahe den darüber befindlichen mathematischen Operatoren zu stehen, wird er trotzdem hier aufgeführt.

δ	Phasenverschiebung in einem dynamischen Versuch (bspw. DMTA) oder Gesamtverformung in einem Relaxationsversuch
$\tan \delta$	Verlustfaktor
ε_0	Dehnung im Ausgangszustand eines Versuchs oder Dehnung auf der ersten Stufe der Kurzzeit-Kriechversuche unter schrittweise erhöhter Zuglast (TCL)
$\varepsilon_{t,u}$	Bruchdehnung in einem Zugversuch
η	Viskosität, Zähigkeit
λ	Relaxationszeit im Maxwell-Modell
μ	Retardationszeit im Kelvin-Voigt-Modell
σ_0	Normalspannung im Ausgangszustand eines Versuchs
$\sigma_{c,10}$	Druckspannung bei 10% Gesamtdehnung in einem Druckversuch (C)
$\sigma_{c,p}$	Dehngrenze in einem Druckversuch (C) bzw. Druckspannung bei 0,2% plastischer Dehnung ¹
σ_p	Dehngrenze ¹ , Proportionalitätsgrenze
$\sigma_{t,p}$	Dehngrenze in einem Zugversuch (T) bzw. Zugspannung bei 0,2% plastischer Dehnung ¹
$\sigma_{t,u}$	Bruchspannung in einem Zugversuch (T)
τ_0	Schubspannung im Ausgangszustand eines Versuchs oder Amplitude einer zyklischen Schubspannung unter oszillierenden Schubdeformation (vgl. DMTA)
τ_{in}	Elastischer Spannungsanteil in viskoelastischen Stoffen in der DMTA
τ_{out}	Viskoser Spannungsanteil in viskoelastischen Stoffen in der DMTA
ω	Kreisfrequenz
ω_R	Kreisfrequenz bei der Referenztemperatur
ω_S	Kreisfrequenz auf einer betrachteten Temperaturstufe S

Teil II

α	Hilfswert für die Deckschichtbiegesteifigkeit in der Sandwichtheorie nach Stamm u. Witte (1974) oder Lastklassenbeiwert nach DIN EN 1991-2 oder Stabkoeffizient im WGV
α_{cr}	Kritischer Lastfaktor nach DIN EN 1993-1-1
$\alpha_{cr,y}$	Kritischer Lastfaktor unter der Annahme elastischer Ausnutzung des Deckblechquerschnitts
β	Hilfswert für die Schubsteifigkeit in der Sandwichtheorie nach Stamm u. Witte (1974) oder Stabkoeffizient im WGV
β_0	Anteil der Eigenbiegesteifigkeit der Deckschichten an der Gesamtbiegesteifigkeit eines Sandwichelements im Berechnungsverfahren von Wölfel (1987)
γ	Schubwinkel bezogen auf die Schwerlinien der Deckschichten eines Sandwichelements oder Stabkoeffizient im WGV
γ_c	Schubgleitung im Kern eines Sandwichelements
δ	Deckschichtparameter oder Federweg im WGV
ε_f	Dehnung in den Deckschichten im Grenzfall ohne Verbund
ζ	Spannungsquotient
κ	Steifigkeitsquotient
\varkappa	Vorfaktor zur Berechnung der Knitterspannung einer ebenen Deckschicht nach Stamm u. Witte (1974)
λ	Hilfswert in der Sandwichtheorie nach Stamm u. Witte (1974)
λ_f	Mittlere Schlankheit der Deckschichten eines Sandwichelements

¹Wird in der Arbeit die Dehngrenze thematisiert, ist per Definition die aus dem Metallbau bekannte Spannung bei 0,2% plastischer Dehnung $R_{p0,2}$ nach DIN EN ISO 6892-1 2020 gemeint.

$\bar{\lambda}_f$	Bezugsschlankheit der Deckschichten eines Sandwichelements
$\bar{\lambda}_{f,\min}$	Mindestens erforderliche Bezugsschlankheit der Deckschichten, um den Spannungszuwachs infolge Temperaturanstieg zu begrenzen
μ	Unbekannte Weggröße eines Einheits-Verformungs-Zustands im WGV
ν_c	Querdehnzahl des Kernmaterials in einem Sandwichelement
ν_f	Querdehnzahl des Deckschichtmaterials in einem Sandwichelement
ξ	Auf die Länge bzw. Spannweite eines Bauteils bezogene Längskoordinate
ρ_c	Rohdichte des Kernmaterials in einem Sandwichelement
ρ_{ep}	Stirnplattenfaktor
ρ_f	Rohdichte des Deckschichtmaterials in einem Sandwichelement
ρ_S	Sandwichparameter
σ_x	Normalspannung in Längsrichtung eines Bauteils
σ_e	Normalspannung im elastischen Verbund
σ_{Ed}	Designwert einer wirkenden Normalspannung
σ_f	Normalspannung in einer Deckschicht oder im Grenzfall ohne Verbund
σ_i, σ_1 bzw. σ_2	Biegespannung in einer Deckschicht, oben bzw. unten
σ_r	Normalspannung im Grenzfall des starren Verbunds
$\sigma_{S,i}, \sigma_{S,1}$ bzw. $\sigma_{S,2}$	(Sandwich-)Membranspannung in einer Deckschicht, oben bzw. unten
σ_w	Knitterspannung einer Deckschicht in einem Sandwichelement
τ_i, τ_1 bzw. τ_2	Schubspannung in einer Deckschicht aus deren Biegung, oben bzw. unten
τ_S	Schubspannung aus Sandwichtragwirkung
φ	Verdrehung oder Knotendrehwinkel im WGV
φ_t	Kriechbeiwert des Kernmaterials eines Sandwichelements nach DIN EN 14509
ψ	Stabdrehwinkel im WGV
Φ	Dynamischer Beiwert für Lasten aus Eisenbahnverkehr nach DIN EN 1991-2
Φ_2	Dynamischer Beiwert für sorgfältig instandgehaltene Gleise (s.o.)

Lateinische Symbole

Allgemein

i, j und k	Lauf- bzw. Zählvariablen in Reihen, Produkten oder Summen
n	Höchster Index einer Reihe oder höchster Zähler einer Summe
t	Zeit oder Dicke eines Bauteils
A	Querschnittsfläche
C	(Kriech-)Nachgiebigkeit, Kompilanz
E	Elastizitätsmodul bzw. E -Modul
E	Operator für die Exponentialdarstellung von Zahlen (z. B. $1E5 = 1 \cdot 10^5$)
F, F_k und F_d	Allgemeine Kraft bzw. Einzellast, charakteristisch und im Design
G	Schubmodul oder Relaxationsmodul oder Kriechmodul
$G_e \equiv G_\infty$	Gleichgewichtssteifigkeit eines vernetzen Polymers
J	Schubnachgiebigkeit, Scherkompilanz oder Retardationsfunktion
T	Temperatur
\square^T	Operator zum transponieren einer Matrix
W	Wertebereich einer Funktion

Teil I

$a_{i/j}$	Inkrementeller horizontaler Verschiebungsfaktor
$a_{R/S} \equiv a_T$	Horizontaler Verschiebungsfaktor
b_T	Vertikaler Verschiebungsfaktor zur Berücksichtigung der Volumenänderung
c_1 und c_2	Konstanten der WLF-Funktion für eine bestimmte Referenztemperatur
$c(T) \equiv c_T$	Vertikaler Verschiebungsfaktor zur Berücksichtigung des Nachvernetzens
e	Eulersche Zahl (2,71828...)
f	Frequenz
i	Imaginäre Einheit
i und j	Indizes der benachbarten Frequenz-Sweeps bzw. Temperaturstufen eines inkrementellen Verschiebungsfaktors $a_{i/j}$
k_a	Steifigkeit der Versuchsapparatur in den Relaxationsversuchen
m, m_a	Zahl zur Beschreibung der Steigung einer Regressionsfunktion
\bar{p}	Steigung der Näherungsfunktion zur Berechnung der Prony-Parameter
r	Radius der Schulter in Zugprobekörpern
s	Zähler für die Stufen in den Kurzzeit-Kriechversuchen unter schrittweise erhöhter Zuglast (TCL) oder Schrittweite im Algorithmus zur Ermittlung der inkrementellen horizontalen Verschiebungsfaktoren $a_{i/j}$
t_R	Zeit auf der Referenzstufe R bzw. Referenzzeit
t_S	Zeit auf der betrachteten Stufe S
x	Verhältnis der Steifigkeiten von Probekörper und Versuchsapparatur
A_0	Querschnittsfläche eines Probekörpers im unbelasteten Zustand
C	Chemisches Symbol für Kohlenstoff
E_a	Aktivierungsenergie in der Arrhenius-Funktion
E_c	Elastizitätsmodul unter Druck
E_t	Elastizitätsmodul unter Zug
E_{TC}	Aus Zugkriechversuchen (TC) ermittelter (Kriech-)Elastizitätsmodul
F_0	Ausgangsbelastung in einem Relaxationsversuch
F^2	Quadrierter Fehler in der Methode der kleinsten Fehlerquadrate (engl.: Least-Squares Methode oder Least-Squares Fit)
F_g	Ständige Belastung in Zugkriechversuchen (TC)
G_0	Momentanwert des Relaxationsmoduls
\bar{G}_{1s}	Aufpunkt der Näherungsfunktion zur Berechnung der Prony-Parameter
G_D	Vergleichsfunktion des vereinfacht in den Zeitbereich transformierten Speichermoduls aus DMT Analysen
G_i	Prony-Parameter bzw. Relaxationsstärke eines Maxwell-Elements
G_{max}	Funktionswert des maximalen Plateaus der Relaxationsfunktion $G(t,T)$
G_{SR}	Aus Langzeit-Schubrelaxationsversuchen ermittelter Relaxationsmodul
G_{SR-TTS}	In Kurzzeit-Schubrelaxationsversuchen gemessener Relaxationsmodul
G_{ST}	In Kurzzeit-Steifigkeitsversuchen gemessener Relaxationsmodul
G_{TR-TTS}	Aus Kurzzeit-Zugrelaxationsversuchen ermittelter Relaxationsmodul
G_{TC}	Aus Langzeit-Zugkriechversuchen ermittelter Kriechmodul
G'	Speichermodul
G'_M	Messwerte des Speichermoduls aus DMT Analysen
G''	Verlustmodul
G''_M	Messwerte des Verlustmoduls aus DMT Analysen
G^*	Komplexe dynamische Steifigkeit
$ G^* $	Absolutwert der komplexen dynamischen Steifigkeit
H	Chemisches Symbol für Wasserstoff
I_1 und $I_2 \equiv T_\infty$	Invarianten der WLF-Funktion
K_x	Messbare Gesamtsteifigkeit aus Probekörper und Versuchsapparatur

L	Spannweite, Länge oder Bogenlänge im Algorithmus zur Ermittlung der inkrementellen horizontalen Verschiebungsfaktoren $a_{i/j}$
L_0	(Dehn-)Länge eines Probekörpers im unbelasteten Zustand
L_k	Momentanwert der Bogenlänge im Algorithmus zur Ermittlung der inkrementellen horizontalen Verschiebungsfaktoren $a_{i/j}$
L_r	Referenzwert der Bogenlänge im Algorithmus zur Ermittlung der inkrementellen horizontalen Verschiebungsfaktoren $a_{i/j}$
\mathbf{M}	Speichermatrix im Algorithmus zur Ermittlung der inkrementellen horizontalen Verschiebungsfaktoren $a_{i/j}$
N	Chemisches Symbol für Stickstoff
O	Chemisches Symbol für Sauerstoff
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
R	Universelle Gaskonstante (8,3145 J/(mol K))
R	Referenz-(Temperatur-)stufe bzw. Referenz-Sweep(-Kurve)
R bzw. R'	Chemisches Symbol für den Rest eines Moleküls
$R_{p0,2}$	Spannung bei 0,2% plastischer Dehnung gemäß DIN EN ISO 6892-1
S	Betrachtete Temperatur(-stufe) bzw. betrachtete Frequenz-Sweep-Kurve
S	Zähler für die Superposition im Algorithmus zur Ermittlung der inkrementellen horizontalen Verschiebungsfaktoren $a_{i/j}$
T_f	Fließtemperatur eines unvernetzten Polymers
T_g	Glasübergangstemperatur eines Polymers
T_m	Schmelztemperatur der kristallinen Phase eines Polymers (falls vorhanden)
T_R	Referenztemperatur
T_S	Temperatur auf der betrachteten Stufe S
T_z	Zersetzungstemperatur eines vernetzten Polymers
T_α bzw. T_β	Temperatur des α - bzw. β -Übergangs ¹
\mathbf{U}_S	Ursprungsmatrix der Messwerte aus einer DMT Analyse im Algorithmus zur Ermittlung der inkrementellen horizontalen Verschiebungsfaktoren $a_{i/j}$
V_x	Verhältnis der gemessenen zur wahren Steifigkeit eines Probekörpers

Teil II

a	Pfostenabstand in der Fachwerkanalogie nach Davies (1986)
b	Breite eines Sandwichelements oder Balkenbreite
d	Gesamthöhe eines Sandwichquerschnitts
$\det \mathbf{N}$ bzw. $\det \hat{\mu}_1$	Nenner- bzw. Zählerdeterminante im WGV
dx	Länge eines freigeschnittenen Elements
e	Schwerlinienabstand der Deckschichten
e_1 bzw. e_2	Abstand der Deckschichtschwerlinie oben bzw. unten auf die Schwerachse des gesamten Sandwichquerschnitts
f_h	Höhenfaktor
f_k	Steifigkeitsfaktor
$f_{k,ep,f}$	Steifigkeitsfaktor eines Sandwichs im Grenzfall ohne Verbund mit elastischen Stirnplatten, bezogen auf ein baugleiches Sandwich mit starren Stirnplatten
f_m	Massenfaktor
$f_{r,\delta}$	Hilfsfaktor zur Untersuchung der Auswirkungen unterschiedlicher Deckschichtdicken auf die Gesamtsteifigkeit eines Sandwichelements
f_t	Blehdickenfaktor

¹Bei mehreren Relaxationserscheinungen in einem Polymer werden die Übergänge alternativ zu T_g von der Erweichung aus bis zum Glasbereich mit griechischen Buchstaben benannt (Schwarzl 1990, S. 96).

$f_y, f_{y,k}$ und $f_{y,d}$	Streck- bzw. Fließgrenze, charakteristisch und im Design
f_γ	Gleitungsfaktor
f_σ	Spannungsfaktor
g, g_k und g_d	Ständige Strecken- oder Flächenlast, charakteristisch und im Design
i, j und k	Indizes für die Knoten und Einheitsverformungszustände eines Stabwerks in dessen Berechnung mit dem WGV
k_e	Gesamtsteifigkeit eines Sandwichelements mit elastischem Verbund
$k_{ep,f}$	Gesamtsteifigkeit im Grenzfall ohne Verbund mit elastischen Stirnplatten
k_f	Gesamtsteifigkeit im Grenzfall ohne Verbund
k_r	Gesamtsteifigkeit im Grenzfall des starren Verbunds
$k_{rp,f}$	Gesamtsteifigkeit im Grenzfall ohne Verbund mit starren Stirnplatten
k_S	Ersatzsteifigkeit eines Sandwichelements unter zentrischer Einslast
k_W	Steifigkeitsziffer im Berechnungsverfahren von Wölfel (1987)
l	Systemlänge oder Spannweite
m_S	Masse eines Sandwich- bzw. SPS-Elements
m_{sub}	Masse des äquivalenten monolithischen Stahlblechs gleicher Gesamtsteifigkeit
n_y	Zahl der unbekanntten Weggrößen im WGV, kinematische Unbestimmtheit
n_φ	Zahl der unbekanntten Knotendrehwinkel im WGV
n_μ	Zahl der unbekanntten Einheitsverformungszustände im WGV
p, p_k und p_d	Strecken- oder Flächenlast aus Verkehr, charakteristisch und im Design
q, q_k und q_d	Allgemeine Strecken- oder Flächenlast, charakteristisch und im Design
s	Schwerachse im Sandwich oder Stabnummer im WGV oder Systemzahl
t_0	Dauer einer kurzzeitigen Belastung
t_{100}	Dauer einer (ständigen) Belastung von 100 a (bspw. Eigengewicht)
t_i, t_1 bzw. t_2	Dicke der Deckschicht, oben bzw. unten in einem Sandwichelement
t_c	Dicke der Kernschicht in einem Sandwichelement
$t_{c,max}$	Maximal herstellbare Dicke einer monolithischen PUR-Kernschicht im SPS
t_{ep}	Dicke der elastischen Stirnplatten eines Sandwichelements (falls vorhanden)
t_f	Mittlere Dicke der Deckschichten in einem Sandwichelement
t_{sub}	Dicke des äquivalenten monolithischen Stahlblechs gleicher Gesamtsteifigkeit
u, v und w	Verformung in x -, y - und z -Richtung, im Fall von w auch Durchbiegung (für reine Biegung) oder Durchsenkung (aus Sandwichtragwirkung) genannt
w_D	Durchsenkung aus Biegetragwirkung der Deckschichten
w_e	Durchsenkung eines Sandwichelements mit elastischem Verbund
$w_{ep,f}$	Durchbiegung im Grenzfall ohne Verbund mit elastischen Stirnplatten
w_f	Durchbiegung im Grenzfall ohne Verbund
w_M	Partialdurchsenkung aus Biegetragwirkung nach gleichnamiger Methode
w_Q	Partialdurchsenkung aus Schubtragwirkung nach gleichnamiger Methode
w_r	Durchbiegung im Grenzfall des starren Verbunds
$w_{rp,f}$	Durchbiegung im Grenzfall ohne Verbund mit starren Stirnplatten
w_S	Durchsenkung aus Sandwichtragwirkung
$w_{S,M}$	Durchsenkung aus Sandwich-Biegetragwirkung
$w_{S,Q}$	Durchsenkung aus Sandwich-Querkrafttragwirkung
x, y und z	Kartesische Koordinaten für die drei Raumrichtungen
A_D	Ersatz-Fläche der Diagonalen in der Fachwerkanalogie nach Davies (1986)
B	Gesamtbiegesteifigkeit eines Sandwichelements
B_i, B_1 bzw. B_2	Eigenbiegesteifigkeit der Deckschicht eines Sandwichs, oben bzw. unten
$B_D = 2B_f$	Biegesteifigkeit aus beiden Deckschichten ¹ bzw. Gesamt-(biege-)steifigkeit eines Sandwichelements im Grenzfall ohne Verbund

¹Während Wölfel (1987) B_D als die Summe der Eigenbiegesteifigkeiten aus beiden Deckschichten definiert, wird das Symbol B_f in vorliegender Arbeit für die *mittlere* Eigenbiegesteifigkeit aus den Deckschichten verwendet. Die Summe der Eigenbiegesteifigkeiten aus den Deckschichten bzw. die Gesamt-(biege-)steifigkeit im Grenzfall ohne Verbund ergibt sich entsprechend zu $2B_f$.

B_f	Mittlere Eigenbiegesteifigkeit der Deckschichten in einem Sandwichelement
B_r	Gesamt-(biege-)steifigkeit eines Sandwichs im Grenzfall des starren Verbunds
B_S	Biegesteifigkeit aus der Sandwichtragwirkung durch die Steiner-Anteile der Deckschichten bezogen auf die Gesamtschwerlinie des Sandwichelements
B_{sub}	Biegesteifigkeit des äquivalenten monolithischen Stahlblechs gleicher Gesamtsteifigkeit
C_i	Steifigkeitswerte für Stäbe und Federn im WGV
D_i, D_1 bzw. D_2	Dehnsteifigkeit der Deckschicht eines Sandwichs, oben bzw. unten
E_c	Elastizitätsmodul des Kernmaterials in einem Sandwichelement
E_D	Ersatz- E -Modul der Diagonalen in der Fachwerkanalogie nach Davies (1986)
E_f	Elastizitätsmodul des Deckschichtmaterials in einem Sandwichelement
$E_{f,mod}$	Modifizierter Elastizitätsmodul des Deckschichtmaterials zur Berücksichtigung der Plattensteifigkeit der Deckschichten
E_P	Ersatz- E -Modul der Pfosten in der Fachwerkanalogie nach Davies (1986)
EA	Allgemeine Dehnsteifigkeit (bspw. eines Stabs)
EI	Allgemeine Biegesteifigkeit (bspw. eines Stabs)
F_{cr}	Allgemeine kritische Last bzw. Knicklast eines Systems oder eines Stabs
G_c	Schubmodul des Kernmaterials in einem Sandwichelement
G_{ct}	Zeitabhängiger Schubmodul eines Kernmaterials nach DIN EN 14509
G_k	Charakteristische Einzellast aus ständiger Einwirkung wie z.B. Eigengewicht
GA_S	Allgemeine Schubsteifigkeit (bspw. eines Stabs)
I	Flächenträgheitsmoment bzw. Flächenmoment 4. Grades eines Querschnitts
I_i, I_1 bzw. I_2	Eigenträgheitsmoment der Deckschicht eines Sandwichs, oben bzw. unten
I_r	Flächenträgheitsmoment eines Sandwichs im Grenzfall des starren Verbunds
L_Φ	Maßgebende Länge zur Berechnung des dynamischen Beiwerts Φ für ein jeweils zugehöriges Brückenbauteil
M	Allgemeines Biegemoment
M_D	Deckschichtbiegemoment im Berechnungsverfahren von Wölfel (1987)
M_i, M_1 bzw. M_2	Biegemoment in der Deckschicht eines Sandwichs, oben bzw. unten
M_{ik}	Stabendmoment am Knoten i in Richtung des Knotens k im WGV
M_S	Biegemoment aus Sandwichtragwirkung, Sandwichbiegemoment
N	Allgemeine Normalkraft
N_i, N_1 bzw. N_2	Normalkraft in der Deckschicht eines Sandwichs, oben bzw. unten
N_{ik}	Stabnormalkraft zwischen den Knoten i und k im WGV
P, P_k und P_d	Einzellast aus Verkehr, charakteristisch und im Design
Q	Allgemeine Querkraft
Q_i, Q_1 bzw. Q_2	Querkraft in der Deckschicht eines Sandwichs, oben bzw. unten
Q_S	Querkraft aus Sandwichtragwirkung, Sandwichquerkraft
S	Schubsteifigkeit eines Sandwichelements
V, V_1 bzw. V_2	Innerer Versatz in der Modellierung der Deckschichten eines Sandwichs mit Schalenelementen in der FEM
W, W_y bzw. W_z	Widerstandsmoment eines Querschnitts, um seine y - bzw. z -Achse

Abkürzungen

Allgemein

bspw.	beispielsweise
const.	konstant
cos	Cosinus
engl.	englisch

erf.	erforderlich
f.	folgend
ff.	fortfolgend
l.	links
lim	Limes
ln	natürlicher Logarithmus
log	Logarithmus zur Basis 10
m.	Mitte
max	Maximalwert
min	Minimal- oder Mindestwert
o.	oben
r.	rechts
s.	siehe
sin	Sinus
tan	Tangens
u.	unten oder unter
vgl.	vergleiche
z.B.	zum Beispiel
A	Anhang
AG	Aktiengesellschaft
BMVI	Bundesministerium für Verkehr und digitale Infrastruktur
DB	Deutsche Bahn
D-Brücke	Dreiecksträger-Brücke
DIN	Deutsches Institut für Normung
DNVGL	Klassifikationsgesellschaft von <i>Det Norske Veritas</i> und <i>Germanische Lloyd</i>
EBA	Eisenbahn-Bundesamt
EN	Europäische Norm
EÜ	Eisenbahnüberführung
Ex	Existierendes Fahrbahnblech
FAZ	Frankfurter Allgemeine Zeitung
FE	Finite-Elemente
FEM	Finite-Elemente-Methode
Gl.	Gleichung
Hbf	Hauptbahnhof
ISO	International Organization for Standardization
LuFV	Leistungs- und Finanzierungsvereinbarung
LVE-Bereich	Linear-viskoelastischer Bereich
M	Modul
NA	Nationaler Anhang
Nr.	Nummer
Pkt.	Punkt
PUR	Polyurethan ¹
Ril	Richtlinie (der Deutschen Bahn)
RT	Raumtemperatur
S.	Seite
SO	Schienenoberkante
SPS	Sandwich Plate System
VDEI	Verband Deutscher Eisenbahn-Ingenieure e.V.
ZTV-ING	Zusätzliche Technische Vertragsbedingungen und Richtlinien für Ingenieurbauten der Bundesanstalt für Straßenwesen

¹Wenn in der Arbeit *PUR* beschrieben wird, ist das spezifische Polyurethan im SPS gemeint, wohingegen mit der ausgeschriebenen Bezeichnung *Polyurethan* der Stoff im allgemeinen Sinne gemeint ist.

Teil I

e	Index für die Gleichgewichtssteifigkeit (engl.: equilibrium)
mCC-Plot	modifizierter Cole-Cole-Plot
n.a.	nicht auswertbar
r.F.	relative Feuchtigkeit
res	resultierend
vGP-Plot	van Gorp-Palmen-Plot
AS	Amplituden-Sweep(s)
C	Compression (Druckversuch(e))
D	Duroplast
DIC	Digital Image Correlation (Digitale Bildkorrelation)
DMA	Dynamisch-Mechanische Analyse(n)
DMTA bzw. D-...	Dynamisch-Mechanisch-Thermische Analyse(n)
DSC	Differential Scanning Calorimetry (Dynamische Differenzkalorimetrie)
D-TFS	DMTA-Temperatur-Frequenz-Sweep(s)
D-TS	DMTA-Temperatur-Sweep(s)
E	Elastomer
FS	Frequenz-Sweep(s)
L	Laborprobekörper
M1	Methode 1: Rein horizontale (konventionelle) Superposition bzw. Masterung
M2	Methode 2: Vertikale und horizontale Superposition bzw. Masterung
MS	Microsoft
Pr	Prony(-Reihe)
SR	Shear Relaxation (Langzeit-Relaxationsversuch(e) unter konstanter Schubdeformation)
SR-TTS	Shear Relaxation-Time-Temperature Superposition (Kurzzeit-Relaxationsversuch(e) unter konstanter Schubdeformation)
ST	Stiffness (Kurzzeit-Steifigkeitsversuch(e) u. konstanter Schubdeformation)
Stand.abw.	Standardabweichung
Sup	Superposition
T	Tension (Zugversuch(e)) oder Thermoplast
TC	Tension Creeping (Langzeit-Kriechversuch(e) unter konstanter Zuglast)
TCL	Tension Creeping Linearity (Kurzzeit-Kriechversuch(e) unter schrittweise erhöhter Zuglast)
TFS	Temperatur-Frequenz-Sweep(s)
TMA	Dynamische thermomechanische Analyse(n)
TPE	Thermoplastisches Elastomer
TPE-U	Thermoplastisches Elastomer aus Polyurethan
TRT	Versuch(e) bei Raumtemperatur nach einer Temperierung des Probekörpers
TR-TTS	Tension Relaxation-Time-Temperature Superposition (Kurzzeit-Relaxationsversuch(e) unter konstanter Zugdeformation)
TS	Temperatur-Sweep(s)
TTS	Time-Temperature Superposition (vgl. ZTV)
VBA	Visual Basic for Applications
WLF	Williams, Landel und Ferry
ZTV	Zeit-Temperatur-Verschiebung (vgl. TTS)

Teil II

I, II, III	Römische Ziffern als Anzeiger für das jeweilig untersuchte statische System
c	Index für den Sandwich-Kern (engl.: core)
cosh	Cosinus hyperbolicus
coth	Cotangens hyperbolicus
det	Determinante
d bzw. Ed	Indizes für den Designwert eines Widerstands bzw. einer Einwirkung
e	Index für den elastischen Verbund (engl.: elastic)
ep	Index für den Fall elastischer Stirnplatten (engl.: elastic plates)
f	Index für Eigenschaften der Deckschichten (engl.: faces) oder den Grenzfall ohne Verbund (engl.: free)
init	Index für den Ausgangswert einer Größe (engl.: initial)
k	Index für den charakteristischen Wert eines Widerstands bzw. einer Einwirkung oder für eine die Gesamtsteifigkeit betreffende Größe
mod	Index für eine modifizierte Größe
q	Index für eine Größe unter Gleichlast (bspw. eine Spannung)
r	Index für den Grenzfall des starren Verbunds (engl.: rigid)
rp	Index für den Fall starrer Stirnplatten (engl.: rigid plates)
sinh	Sinus hyperbolicus
sub	Index für eine Eigenschaft des äquivalenten monolithischen Stahlblechs gleicher Gesamtsteifigkeit (engl.: substitute)
tanh	Tangens hyperbolicus
w	Index für das Knittern (engl.: wrinkling)
DGL(n)	Differentialgleichung(en)
ESL	Equivalent Single Layer Theory
F	Index für eine Größe unter Einzellast (bspw. eine Verformung)
FSDT	First Order Shear Deformation Theory
HSDT	Higher Order Shear Deformation Theory
LM71	Lastmodell 71 nach DIN EN 1991-2
PdvK	Prinzip der virtuellen Kräfte
R	Index für den Bezugsstab im WGV
S	Sandwich
SLS	Serviceability Limit State (Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit)
SMT	Sandwich-Membran-Theorie bzw. Sandwichtheorie dünner Deckschichten
SST	Sandwich-Schalen-Theorie bzw. Sandwichtheorie dicker Deckschichten
ULS	Ultimate Limit State (Grenzzustand der Tragfähigkeit)
VG	Verbundglas
VSG	Verbund-Sicherheitsglas
WGV	Weggrößenverfahren
Z	Zustand

1 Einführung

Beim Ersatzneubau von Bahnbrücken spielen vor allem die Gegebenheiten im Bestand und etwaige Einflüsse auf den Bahnbetrieb eine entscheidende Rolle. Gerade im innerstädtischen Bereich sind die Bedingungen oft beengt und logistisch anspruchsvoll, wie Abbildung 1.1 am Beispiel der Eisenbahnüberführung Sterndamm in Berlin zeigt. Für Bahnbrücken kurzer Spannweite ist in solchen Fällen die Bauweise als Trogbrücke aus Stahl vorteilhaft. Die Rahmenplanung der Deutschen Bahn (DB) stellt für diese Brücken jedoch nur wenige mögliche Arten von Fahrbahnplatten zur Verfügung. In Ergänzung zu den bestehenden Varianten zeigt das *Sandwich Plate System* (SPS) Potential zu einer neuartigen Ausbildung der Fahrbahn. Die vorliegende Arbeit leistet einen Beitrag zum Einsatz der SPS-Technologie im (Ersatz-) Neubau von Bahnbrücken, um so die Möglichkeiten zur Ausbildung von Fahrbahnplatten zu erweitern.

Im Folgenden wird eine Einführung in die Thematik und die Zielsetzung vorliegender Arbeit gegeben. Zunächst wird die vorherrschende Grundsituation im Ersatzneubau von Bahnbrücken beschrieben und die zuvor aufgestellte Hypothese zum Potential des SPS hergeleitet. Danach wird ein Einblick in die technologische Entwicklung des SPS sowie den Stand der Technik und der Forschung gegeben. Daraus wird die Zielsetzung der Untersuchungen abgeleitet um anschließend den Aufbau der vorliegenden Arbeit vorzustellen.



Abbildung 1.1: Transport des Überbaus einer Eisenbahnbrücke zu seinem Bestimmungsort am Sterndamm in Berlin (Bild: Sabine Gudath)

1.1 Der Ersatzneubau von kurzen Eisenbahnbrücken

Das Verkehrswegenetz Deutschlands hat als Verbindung zwischen den Ländern Europas eine zentrale Bedeutung und ist entsprechend weit ausgebaut und entwickelt (World Economic Forum 2019). Neben rund 230 000 km überörtlichen Straßen umfasst das Bestandsnetz auch ca. 33 000 km durch die DB bewirtschaftete Gleisstrecken unter Betrieb (BMVI 2020, S. 102 bzw. 52 f.). Im gesamten Streckennetz überführen dabei etwa 25 000 Brücken die Bahnstrecken über Hindernisse verschiedenster Art. Unterteilt man diese nach der überbrückten Länge, haben ca. 67 % eine Stützweite L von unter 10 m. Auf den Spannweitenbereich von 10 bis 20 m entfallen 22 % und auf den -bereich von 20 bis 30 m weitere 7 %. Brücken mit einer Länge von über 30 m machen nur rund 4 % aller bestehenden Bauwerke aus (Reisbeck u. Hentschel 2017). Über 10 000 aller Bahnbrücken wurden im Zuge des ersten Streckennetzausbaus Ende des 19. bis Anfang des 20. Jahrhunderts erbaut und haben bereits ein Alter von 100 Jahren überschritten (Naraniecki u. Marx 2019). Neben der Errichtung neuer Brücken im Zuge des Netzausbaus spielt daher die Instandhaltung und Modernisierung des Bestands eine wichtige Rolle. Dabei sind entsprechend der erwähnten Verteilung über die Spannweiten vor allem kurze Bahnbrücken mit $L \leq 30$ m betroffen.

Um gezielt Investitionen in diese Richtung zu lenken wurden seit 2009 drei aufeinander folgende *Leistungs- und Finanzierungsvereinbarungen* (LuFV I bis LuFV III) zwischen dem Bund und der DB geschlossen. In deren Umsetzung wurden allein von 2015 bis 2019 rund 900 Brücken ganz oder teilweise erneuert (DB Netz AG 2022). Die Quote der Bauwerke, für die Erneuerungsmaßnahmen zu planen sind, weil deren Instandsetzungen nicht mehr wirtschaftlich wäre, lag auch danach noch bei etwa 4 % (vgl. Naraniecki u. Marx 2019 u. DB Netz AG 2022). „Unabhängig von den flankierenden Regelungen in einer Folge-LuFV wird die DB Netz AG [...] auch weit über 2020 hinaus die Teil- und Vollerneuerungen von Brücken auf hohem Niveau weiter fortsetzen müssen“ (Odenwald 2017). Im Rahmen der aktuell laufenden LuFV III sind bis 2029 weitere 2000 Maßnahmen geplant (EBA 2022).

Baumaßnahmen im Bestand unterliegen hohen Anforderungen, da „die Behinderung des Eisenbahnbetriebs [...] auf ein Minimum reduziert werden [muss]“ (Mölter et al. 2017, S. 581). Anders als im Straßenverkehr bestehen auf der Schiene wesentlich weniger Möglichkeiten auf alternative Strecken auszuweichen, sodass eine Sperrung erhebliche Folgen hat.¹ Die Durchführung von Baumaßnahmen im Bestand unter dem *rollendem Rad* bzw. in kurzen *Sperrpausen* ist daher gängige Praxis. Dabei hat die für den Bahnverkehr reibungsfreie Umsetzung Priorität und beeinflusst maßgeblich die Wahl des anzuwendenden Bauverfahrens. „Beim Brückenbau ist zur Minimierung der Gleis-Sperrzeiten das Einheben, Einpressen, Einschieben usw. von Brücken oder Teilen von Brücken und/oder das Bauen mit Kleinhilfsbrücken [...] vorzusehen“ (Menius u. Matthews 2020, S. 331).

1.1.1 Trogbrücken aus Stahl und ihre Fahrbahn

Gerade beim Ersatzneubau im innerstädtischen Bereich sind die Platzverhältnisse oftmals beengt, was sowohl Einfluss auf die Geometrie der Brücke als auch das Bauverfahren hat (Ril 804, M1101 1(3)). So ist neben dem Bestandsbauwerk oft nicht genügend Platz vorhanden, um eine seitliche Herstellung des neuen Bauwerks mit anschließendem Einschieben zu ermöglichen. Hier haben Überbauten aus Stahl für kurze Bahnbrücken durch ihr vergleichs-

¹Dies zeigte sich bspw. bei der mehrere Monate andauernden Sperrung der Zufahrt zum Hbf. Wiesbaden, nachdem die darüber gelegene Salzbachtalbrücke havariert war und gesprengt werden musste (FAZ 2021).

weise geringes Eigengewicht einen entscheidenden Vorteil. Sie können im Werk gefertigt, nach Herstellung der Unterbauten auf die Baustelle transportiert und mit Kranen eingehoben werden. Dies ermöglicht im besten Fall den Austausch eines Überbaus inklusive Abbruch des Bestands und Wiederherstellung des Oberbaus binnen einer Wochenend-Sperrpause. Auf diese Weise wurde z. B. 2019 die Eisenbahnüberführung (EÜ) der Strecke 3601 über die Lorscher Straße in Heppenheim erneuert.¹ Abbildung 1.2 zeigt ein Foto vom Einhub des ersten von zwei Überbauten.

Auch die Geometrie des Ersatzneubaus im Querschnitt wird vom Bestand und der Anforderung der Minimierung der Sperrpausenzeiten entscheidend beeinflusst. So ist bspw. „die Bauhöhe des Überbaus [...] so festzulegen, dass [...] der erforderliche Lichtraum der beteiligten Verkehrswege eingehalten und die gewählte Bauart mit Rücksicht auf die Gesamtkosten des Bauwerks wirtschaftlich sind“ (Ril 804, M1101 5.1(5)).² Ist die zur Verfügung stehende Höhe begrenzt, kommen daher bevorzugt stählerne Trogbauwerke zum Einsatz, damit die Verkehrswege in ihrer Höhenlage bestehen bleiben können. Deren Anpassung wäre sonst mit höherem Aufwand und somit auch Kosten verbunden (Ril 804, M9010 5.1).

Die Querschnittsform als Trogbauwerk zeichnet sich dadurch aus, dass die Hauptträger der Brücke nicht wie bei einer Deckbrücke unterhalb der Fahrbahn liegen sondern seitlich (Geißler 2014, S. 611 ff.). Damit wird die Bauwerkshöhe weniger von der zu überbrückenden Hauptspannweite beeinflusst, als der Bauart der Fahrbahnplatte und der erforderlichen Breite im Querschnitt. Um die Bauhöhe gegebenenfalls weiter zu reduzieren, kann die Querspannweite durch eine Neigung der Hauptträgerstege verringert werden. Für die Ausbildung der Fahrbahn in Trogbauwerken geben die Richtzeichnungen der Ril 804, M9010 prinzipielle Bauarten vor, von denen beispielhaft zwei in Abbildung 1.3 dargestellt sind: Die orthotrope Platte (links) und das Dickblech (rechts).



Abbildung 1.2: Einhub einer Trogbauwerkbrücke mit einer Dickblech-Fahrbahn in Heppenheim Ende 2019

¹Die EÜ Heppenheim zählt zu den 900 im Zuge der LuFV II erneuerten Bauwerken (DB Netz AG 2022).

²Die Bauhöhe ist nach Definition der Ril 804, M0001 A06 der lotrechte „Abstand zwischen der planmäßigen Schienenoberkante (Sollwert) der nicht überhöhten Schienen und der Unterkante des Überbaus [...]“.

„Unter einer orthotropen Bauweise versteht man eine Konstruktion, die in zwei orthogonal (rechtwinklig) aufeinanderstehenden Richtungen ein anisotropes (d.h. richtungsabhängiges) Verhalten hat“ (Ril 804, M9010 1.2). Die orthotrope Platte kann dabei in ihrer Ausführung variieren und innerhalb vorgegebener Grenzen für die Gegebenheiten eines Bauwerks individuell entworfen werden. So können alternativ zu den in Abbildung 1.3 links dargestellten Flachsteifen im Trägerrost auch Trapezhohlsteifen oder Längsträger mit Unterflansch verwendet werden. Die Ausführung als sogenannte *längsträgerlose Fahrbahn* ist ebenso möglich, wobei der Lastabtrag des Fahrbahnblechs dann in Brückenlängsrichtung erfolgt und die Querträgerabstände entsprechend zu begrenzen sind (vgl. DIN EN 1993-2/NA, NA.G.2). In allen Ausführungen der orthotropen Platte sorgen stets die Querträger für den Lastabtrag aus der Fahrbahn auf die außenliegenden Hauptträger.

Im Gegensatz dazu besteht die Fahrbahn in der Dickblech-Bauweise (s. Abb. 1.3 r.) nur aus einem einzigen, in Querrichtung abtragenden Blech. Dieses übernimmt somit zusätzlich die zuvor beschriebene Aufgabe der Querträger. Abhängig von der Querspannweite ist für das Blech meist eine Dicke zwischen 90 und 115 mm statisch erforderlich. Zusätzlich zur Tragwirkung als Fahrbahn übernimmt das Dickblech die Funktion des Untergurts der Hauptträger. Diese können somit gegenüber der orthotropen Platte ebenfalls entfallen. Die Bauweise kam bereits Ende der neunziger Jahre in Österreich auf (vgl. Aigner et al. 2000 bzw. 2002). In Deutschland bedurfte die Verwendung solch dicker Bleche jedoch anfangs noch einer Zulassung im Einzelfall. Erst nach der Einführung des DIN Fachberichts 103 im Jahre 2003 und der damit verbundenen Änderung der zulässigen Blechdicken (DIN FB 103, 3.2), entwickelte sich die Dickblech-Fahrbahn zu einer Regelbauweise (Klingner u. Schleicher 2006). Heute gehört sie zum Stand der Technik bzw. Normung im Brückenbau, ist aber auch weiterhin Gegenstand von Forschung und Entwicklung (s. bspw. Kuhlmann et al. 2018 oder Kuhlmann u. Breuning 2019).

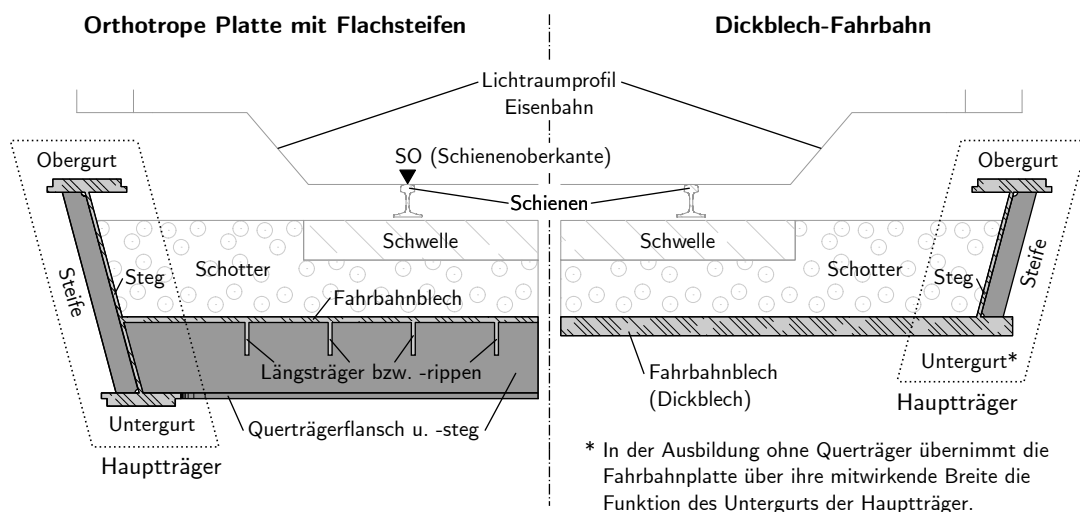


Abbildung 1.3: Beispielhafte Regelquerschnitte einer Trogbauweise mit orthotroper Platte (l.) und Dickblech-Fahrbahn (r.) in halbiertes Darstellung

Die verschiedenen Fahrbahnarten haben spezifische Eigenschaften, weshalb sie in bestimmten Ausgangssituationen bevorzugt werden.¹ Die orthotrope Platte in ihrer regulären Ausführung mit Längsträgern ist feingliedrig und verhältnismäßig leicht, weshalb sie gerade auch in weit gespannten Stahlbrücken standardmäßig Anwendung findet. Mit der Zahl ihrer Einzelbauteile steigt jedoch der Aufwand in Herstellung und Unterhaltung. So erzeugen die vielen Bauteile entsprechend viele Schweißstöße, welche die Konstruktion anfällig für Ermüdungsprobleme machen (s. bspw. Frýba 1999, Fiedler 2009 und Ril 804, M9010 1.5). Auch für den Korrosionsschutz sind die sich vielfach kreuzenden Bauteile nachteilig, da sich sowohl die Oberfläche als auch die Zahl der gesondert zu beachtenden Kanten erhöht (Ril 804, M6201 bzw. M9010 1.5). Für stark beschränkte Bauhöhen ist die orthotrope Platte zudem nur bedingt geeignet, da aus praktischen Gründen der Erreichbarkeit für die Herstellung und Unterhaltung zwischen den Bauteilen stets ein Mindestabstand vorzusehen ist (Ril 804, M4101 3(6) bzw. (20)). In den Fällen stark beengter Verhältnisse wird das Dickblech bevorzugt eingesetzt. Es ermöglicht bei gleicher Tragfähigkeit eine sehr geringe Aufbauhöhe und zusätzlich eine kompakte Geometrie (Ril 804, M9010 5.4). Dadurch vereinfachen sich bspw. auch die Maßnahmen für den Korrosionsschutz in der Herstellung und Unterhaltung.

In der Dicke des Blechs liegt jedoch ebenso die Schwäche der gleichnamigen Fahrbahnvariante. So fällt die Masse der Fahrbahn und damit des gesamten Überbaus im Gegensatz zur orthotropen Platte hoch aus. Abhängig von Längs- und Querspannweite bewegt sich dabei der Anteil des Dickblechs an der Gesamtmasse des Überbaus zwischen 65 und 75%.² Weiter ist die Masse des Dickblechs ursächlich dafür, dass es nur in begrenzten Abmessungen lieferbar ist (s. bspw. Dillinger Hüttenwerke 2018). Dies führt bei längeren Überbauten dazu, dass die Fahrbahnplatte aus zwei bzw. drei Blechen zusammengesetzt werden muss, die jeweils mit einem durchgeschweißten Stumpfstoß zu verbinden sind. Auch für diesen Stoß erwachsen aus der Blechdicke besondere Anforderungen. So besitzt die Stumpfnahht ein großes Schweißnahtvolumen und für ihre kerbarme Herstellung sind erhöhte schweißtechnische Anforderungen zu beachten. Um die Gefahr von Terrassenbrüchen zu minimieren muss das Dickblech außerdem eine entsprechende Z-Güte aufweisen (VDEI 2019, S. 8 ff.). Bereits im Entwurf sollte der Stoß hinsichtlich seiner Ermüdung betrachtet und im Verlauf der Brücke so angeordnet werden,³ dass seine ermüdungsrelevante Belastung in Längsrichtung nicht zu hoch ausfällt. Dies kann mitunter dazu führen, dass zwei Stöße notwendig werden und sich der Aufwand verdoppelt.

1.1.2 Alternative Fahrbahnen aus SPS

Im Entwurf von stählernen Trogbrücken ist man nach der Ril 804 bisher auf die zuvor beschriebenen Stahlfahrbahnen mit ihren Charakteristika beschränkt. Eine Erweiterung des Repertoires an möglichen Bauformen könnte helfen, den Einsatzbereich von Trogbrücken auszuweiten und hinsichtlich der eingangs beschriebenen Ziele zu optimieren. So untersuchten bspw. Fink et al. (2011) und Herrmann et al. (2011) eine neuartige Sandwichfahrbahnplatte aus Stahlblechen mit Verbunddübeln, welche durch einen Kern aus Beton verbunden werden.

¹Zu den Beschreibungen der Attribute ist anzumerken, dass die Vor- und Nachteile der betrachteten Fahrbahnvarianten stets im Kontext des Vergleichs untereinander und nicht absolut zu bewerten sind.

²Im Rahmen studentischer Forschungsarbeiten wurden mehrerer Parameterstudien durchgeführt, aus denen diese Anhaltswerte gewonnen wurden. Die Zahlen werden jedoch hier nicht näher erörtert.

³Anzuordnen möglichst nah am Auflager und nicht weiter im Feld als der Drittelpunkt (VDEI 2019, S. 17 f.).

Eine weitere chancenreiche Alternative zur Herstellung der Fahrbahnplatte von Trogbriicken bietet das *Sandwich Plate System* (SPS). Es könnte einen Mittelweg zwischen den beschriebenen Varianten der leichten, aber geometrisch komplizierten orthotropen Platte und dem robusten, aber massigen Dickblech bilden. Abbildung 1.4 zeigt das Prinzip zweier möglicher Ausführungen von SPS-Fahrbahnen mit unterschiedlicher Orientierung im Lastabtrag.

In der längsorientierten Variante ersetzt das SPS die Längsträger der orthotropen Platte. Diese Bauweise ähnelt der längsträgerlosen Fahrbahn (vgl. Ril 804, M9010), wobei der Querträgerabstand durch das SPS größer gewählt werden kann. Damit wird gegenüber der orthotropen Platte mit Längsträgern die Geometrie der Fahrbahnplatte vereinfacht und die Zahl der für Ermüdung anfälligen Stellen reduziert. Gegenüber der längsträgerlosen Fahrbahn wird durch die geringere Querträgerzahl das Eigengewicht und die Oberfläche der Konstruktion reduziert. Infolgedessen vereinfacht sich auch der Korrosionsschutz in der Herstellung und im Unterhalt. In dieser Bauweise kam das SPS bereits zur Anwendung, wie bspw. als Ersatz für die beschädigte Stahlbetonfahrbahn der Saarbrücke in Mettlach (Stihl et al. 2013).

In der querorientierten Variante wird der Querschnitt des Dickblechs im Prinzip aufgelöst und durch das SPS ersetzt. Für eine ähnliche Tragfähigkeit muss dessen Aufbau dabei zwar insgesamt höher werden als das Dickblech, die einzelne erforderliche Blechdicke verringert sich jedoch (Händler u. Lange 2019). Neben einer Masseneinsparung, hat dies vor allem Effekte auf die zuvor bereits beschriebenen Aspekte der Herstellung. So sind dünnere Bleche leichter zu transportieren, in größeren Abmessungen erhältlich und einfacher zu verschweißen als das Dickblech. Dies führt dazu, dass ungünstige Querstöße seltener benötigt werden und wenn doch, diese einfacher zu realisieren sind. Äußerlich bleibt die Geometrie ähnlich kompakt wie beim Dickblech und mit ihren ebenen Oberflächen genauso leicht zu unterhalten.

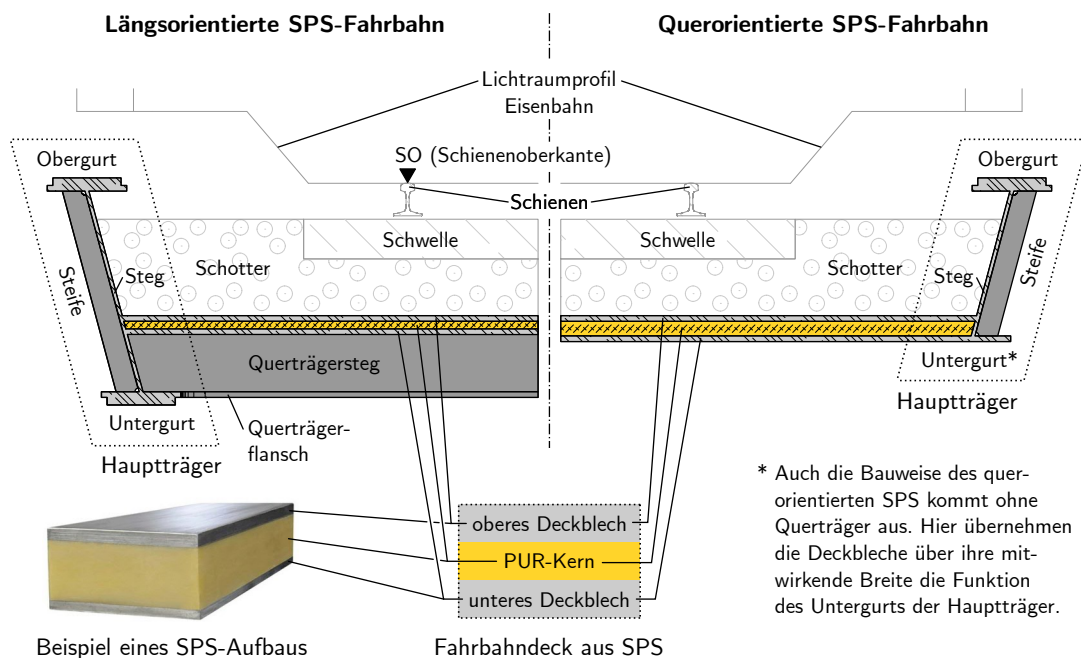


Abbildung 1.4: Mögliche Querschnitte von Trogbriicken mit SPS-Fahrbahn in längs- (l.) und querorientierter Form (r.) sowie der beispielhafte Aufbau von SPS (u.l.) nach Stihl et al. (2016)

1.2 Das Sandwich Plate System

Das Sandwich Plate System (SPS) ist ein auf Biegung optimiertes Sandwich-Verbundsystem¹. Es besteht aus zwei stählernen Deckschichten, die durch einen Kern aus massivem Elastomer-Kunststoff schubsteif verbunden sind (s. Abb. 1.4 u.l.). Die kennzeichnenden Eigenschaften des Systems sind die für Sandwichelemente verhältnismäßig dicken Deckbleche und der spezielle Kernwerkstoff. Dabei handelt es sich um ein spezifisches Polyurethan (PUR)², welches eigens für die Anwendung im SPS entwickelt wurde. Im Sandwich ist das PUR dabei ähnlich einem Klebstoff rein adhäsiv mit den Deckblechen verbunden, um die Schubkräfte zu übertragen. Der Querschnitt des SPS ist im Neubau meist symmetrisch aufgebaut, kann jedoch auch unterschiedlich dicke Deckbleche aufweisen.

1.2.1 Bauarten und Herstellung von SPS

Das SPS wird sowohl im Neubau als auch zur nachträglichen Verstärkung von flächigen Stahlstrukturen wie orthotropen Platten eingesetzt. Für Letzteres wurden das sogenannte *Overlay*- und das *Underlay-Verfahren* entwickelt. Je nach Szenario unterscheiden sich die Herstellungsverfahren zwar leicht, an deren Ende steht jedoch immer der in Abbildung 1.4 dargestellte Aufbau des SPS. Bedingt durch seinen Kernwerkstoff ist die Herstellung in allen Varianten, einem industriellen Prozess zur Produktion von Polyurethan-Bauteilen entlehnt. Dabei werden die Deckbleche des späteren SPS-Elements als Schalung verwendet (auch *Kavität* genannt), in die mittels eines Hochdruck-Injektionsverfahrens die Grundkomponenten des PUR unter gleichzeitigem Vermischen injiziert werden. In der Schalung härten diese in der Polymerisationsreaktion zu dem eigentlichen PUR aus und verbinden sich dabei mit den Deckblechen (SPS Technology 2002, S. 7 ff.).

Zunächst erfolgt jedoch die mechanische Vorbereitung der Stahlbauteile. An den Rändern der Deckbleche werden Stahlleisten aufgeschweißt, welche die späteren Stirnseiten eines Elements bilden. Für einen guten Haftverbund werden die innenliegenden Oberflächen der Deckbleche gestrahlt. Sie müssen für den Prozess von Verunreinigungen befreit sein (erf. Reinheitsgrad Sa 2 1/2 gem. DIN EN ISO 12944-4) und eine Rauigkeit von mindestens 60 µm aufweisen. Davon hängt maßgeblich die spätere Schubtragfähigkeit in der Verbundfuge des SPS ab (Feldmann et al. 2010, S. 6 ff.). Danach werden die Deckbleche zusammengesetzt und verschweißt, sodass sie mit den Leisten die luftdicht abgeschlossene Kavität bilden. Durch zwei Bohrungen in gegenüberliegenden Ecken wird trockene heiße Luft durch die Kavität geblasen, um die letzte Oberflächen- bzw. Luftfeuchtigkeit zu entfernen. Diese könnte sonst die chemische Reaktion der Grundkomponenten und damit die Qualität des PUR nachteilig beeinflussen. Mit einem Mischkopf werden Isocyanat und Polyol im Hochdruck-Injektionsverfahren vermischt und durch eine der Bohrungen in die Kavität injiziert. Dabei dient die zweite Bohrung zum Druckausgleich und als Überlauf. Einmal vermischt reagieren die Komponenten exotherm unter Volumenausdehnung miteinander und härten in der Kavität zum PUR aus (vgl. auch Abschnitt 2.2.1). Die *Topfzeit* in der das Gemisch verarbeitbar ist, beträgt nur rund 12 bis 15 min. Aus ihr leitet sich die maximale Menge von etwa 1200 l PUR ab, die in einem *Schuss* produziert werden kann (SPS Technology 2002, S. 10 f.).

¹Die allgemeine Tragwirkung von Sandwichelementen wird in Abschnitt 6.1.1 genauer beschrieben.

²Zur Unterscheidung wird folgend das *spezifische Polyurethan* des SPS als eben solches oder mit der Abkürzung *PUR* bezeichnet. Für *Polyurethan* im allgemeinen Sinne wird dagegen keine Abkürzung verwendet.

Der Unterschied zwischen Neubau, Overlay- und Underlay-Verfahren besteht hauptsächlich in der Präparation der Kavitäten und der Arbeitsrichtung. Während im Neubau beide Deckbleche flexibel bewegt und verarbeitet werden können, gehört bei der Verstärkung stets eines der Deckbleche zu einer Bestandsstruktur. Entsprechend müssen alle Arbeitsschritte an diesem vor Ort durchgeführt werden, wofür bspw. die Anlagentechnik zum Strahlen oder für die Injektion auf der Baustelle vorzuhalten sind. Beim Overlay-Verfahren wird auf der bestehenden Struktur das obere Deckblech und der Kern ergänzt. Dies hat den Vorteil, dass von oben auf der zu verstärkenden Struktur gearbeitet werden kann. Allerdings muss diese dafür frei zugänglich sein, was im Fall von Brücken zumindest teilweise deren Sperrung zur Folge hat. Im Underlay-Verfahren dagegen wird das untere Deckblech und der Kern ergänzt. Dabei wird die Nutzung auf der Struktur zwar nicht eingeschränkt, jedoch werden die Randbedingungen für die Maßnahme selbst erschwert. So muss stets ein Gerüst vorgehalten werden und alle Arbeiten müssen von unten und demnach über Kopf erfolgen. Im Brückenbau bedeutet dies in vielen Fällen außerdem eine Einschränkung des unten liegenden Verkehrsweges.

1.2.2 Entwicklung des SPS und bisherige Anwendungen

Das SPS ist in der beschriebenen Form eine verhältnismäßig junge Bauweise¹. Im Rahmen seiner Dissertation untersuchte Kennedy 1987 ein Sandwich-System mit einem Kern aus Stahlbeton zum Einsatz in Offshore-Anlagen in der von arktischem Meereis geprägten Beaufortsee. Aufgrund seiner geringen Duktilität zeigte sich der Beton jedoch als wenig geeignetes Kernmaterial, sodass im Rahmen eines weiteren Forschungsprojekts Anfang der neunziger Jahre stattdessen die Wahl auf einen technischen Kunststoff fiel (Feldmann et al. 2010, S. 7). 1996 ging daraus die Firma *intelligent Engineering* (heute *SPS Technology*) hervor, die gemeinsam mit *BASF Polyurethanes* den maßgeschneiderten Kernwerkstoff für das System entwickelte und schließlich 1998 das SPS erstmals patentieren ließ. Ein Jahr später wurde das System zum ersten Mal eingesetzt, um ein defektes Stück Fahrbahndeck einer Fähre zu ersetzen. (Heiland u. Stihl 2012)

Resultierend aus dieser Maßnahme entstand das bereits erwähnte Overlay-Verfahren zur Sanierung flächiger Stahlstrukturen wie der orthotropen Platte. Nachdem das Verfahren 2001 erstmalig bei einer weiteren Fähre eingesetzt wurde, entwickelte es sich zu einem der Hauptprodukte von SPS Technology (2022). Seither wurden über 60 Verstärkungsmaßnahmen allein an Schiffen durchgeführt (Feldmann et al. 2010, S. 10). Darüber hinaus wurde die Anwendung auf andere Gebiete wie z. B. den Offshore-Bereich und den Brückenbau ausgeweitet. Dabei fanden wichtige Schritte in der Erforschung des Systems und seiner Anwendung im Brückenbau in Deutschland statt. So wurden 2004 im Rahmen eines Forschungsprojekts an der RWTH Aachen erstmals D-Brücken-Fahrbahnelemente² damit verstärkt und getestet. Ein Jahr später folgte dann mit der Ertüchtigung der Schönwasserparkbrücke bei Krefeld das erste große Pilotprojekt (Minten et al. 2007). Der bisher einzige Einsatz des SPS in einer Eisenbahnbrücke erfolgte 2005 in einer Sonderform des beschriebenen Verfahrens. Dabei wurde die Verstärkung der Fahrbahn einer Hochbahntrasse in Berlin von der Unterseite anstatt von oben durchgeführt. Die neue Lösung zur Fahrbahnverstärkung ohne Eingriff in den Verkehr auf der Brücke wurde entsprechend Underlay-Verfahren genannt. Dieses wurde seither jedoch nur ein weiteres Mal zur Ertüchtigung eines Schiffs angewendet (SPS Technology 2022).

¹Das Konzept der Sandwich-Bauweise etablierte sich bereits in den 1930er Jahren (Zenkert 1997, S. 1).

²D-Brücken sind temporäre Systembrücken, die von der Firma Eiffel vertrieben und eingesetzt werden.

Im Neubau wird das SPS auch vermehrt zum Bau von Stadiontribünen und Deckenplatten im Hochbau verwendet, wohingegen bisher nur wenige Brücken damit gebaut wurden (SPS Technology 2022). Zu erwähnen ist hier vor allem der Neubau der *Shenley-Brücke* in Kanada mit SPS als erste ihrer Art, der sich gleich mehrere Forschungsarbeiten widmen (Kennedy 2004). Außerdem wurden Sanierungen von Brücken durchgeführt, die einem Teilneubau der Fahrbahn gleich kommen. So wurde bspw. die Beton-Fahrbahn der Saarbrücke in Mettlach komplett entfernt und durch vorgefertigte SPS-Elemente ersetzt (Stihl et al. 2014). Auch die Erweiterung der Brückenfläche der *Pont Grande Duchesse Charlotte* in Luxemburg erfolgte teils mit neuen SPS-Elementen (Stihl et al. 2016).

Im Laufe der Entwicklung führte SPS Technology zahlreiche grundlegenden Untersuchungen zum SPS, seiner Tragweise aber vor allem seinem Kernmaterial durch. Die Erkenntnisse wurden in einem umfangreichen Katalog von unternehmensinternen Dokumentationen zusammengefasst (SPS Technology 2002, 2011a, 2011b, 2012a, 2012b, 2017)¹. Die Erfahrungen aus den zuvor beschriebenen Projekten trugen ebenfalls zu den Berichten bei und wurden überdies regelmäßig veröffentlicht (bspw. Kennedy 2004 und 2007). Neben den internen Untersuchungen von SPS Technology wurden zu SPS auch verschiedene Forschungsarbeiten durchgeführt, von denen jene mit Relevanz für die vorliegende Arbeit kurz aufgeführt werden.

Sowohl **Martin (2005)** als auch **Harris (2007)** beschäftigen sich in ihren Arbeiten mit der *Shenley-Brücke* in Saint-Martin, Ontario Canada. Die zweispurige kurze Straßenbrücke war als Pilotprojekt 2003 der erste Neubau mit einer Fahrbahn aus SPS. Beide Autoren berechnen die Struktur der Brücke und vergleichen ihre Ergebnisse mit umfangreichen Belastungsversuchen an Bauteilen, einem Nachbau der Brücke im Maßstab 1:2 und dem Bauwerk selbst (vgl. Harris 2007, S. 78 ff. u. 153 ff.). Dabei setzt sich die SPS-Fahrbahn aus baugleichen Einzelplatten zusammen, die jeweils am Rand durch umlaufende Kantprofile verstärkt, und miteinander verschweißt sind² (vgl. Martin 2005, S. 40). In seiner Arbeit versucht Harris (2007, S. 99 ff.) außerdem Dimensionierungsansätze für die SPS-Platten zu finden, wobei er Lösungen mit und ohne Versteifungen betrachtet.

Weißborn (2008) untersucht das Bruchverhalten von SPS unter verschiedenen Beanspruchungen bei Raumtemperatur, um daraus Materialgesetze für die Simulation von Schiffsunfällen mit entsprechend großen Deformationen und Versagen abzuleiten. Zunächst zeigt er dafür uniaxiale Zug- und Druckversuche sowie planare Zugversuche und Torsions-Schubversuche am reinen PUR. Die aus den Versuchen gewonnenen Ergebnisse werden mit Simulationen verglichen und daraus für das PUR ein bilineares und ein nichtlineares elastisch-plastisches Materialgesetz sowie ein Fließkriterium auf Basis des Drucker-Prager Modells entwickelt (vgl. Mang u. Hofstetter 2013, S. 377 f.). Anhand einer weiteren umfangreichen Versuchsreihe untersucht Weißborn das Schubversagen des Verbunds im SPS mit Interaktion. Dabei werden Probekörper unter konstantem, axialem Druck bzw. Zug mit Torsionsschub bis zum Versagen belastet. Aus den gemessenen Daten wird ein Modell abgeleitet, mit dem die Schubtragfähigkeit in der Verbundfuge in Abhängigkeit von der Axialbelastung berechnet werden kann. Darin wird außerdem die Art der Oberflächenvorbereitung der Deckbleche berücksichtigt. Der Ansatz fand später Einzug in die Unternehmensrichtlinie von SPS Technology (2011b) zur Ermittlung der Schubfestigkeit des SPS in der Verbundfuge.

¹Eine genauere Analyse des Stands der Forschung zu dem PUR im SPS erfolgt in Abschnitt 2.2.2.

²Es entsteht vom Prinzip eine längsorientierte SPS-Fahrbahn, die auf den Querträgern der Kantprofile liegt.

Feldmann et al. (2010) veröffentlichten nach dem Forschungsvorhaben P628 zur *Herstellung von Stahlfahrbahnen in Sandwichbauweise mit verringertem Schweißaufwand* einen umfangreichen Bericht. Ziel des Projekts war „die Zusammenstellung und Erarbeitung der wissenschaftlichen und technologischen Grundlagen, die den Entwurf und die Bemessung solcher Sandwichkonstruktionen möglich machen und die für die bauaufsichtliche *Zustimmung im Einzelfall* [...] erforderlich sind“ (Feldmann et al. 2010, S. 11). Mit dem Bericht wurden erstmalig umfassende Daten zu den mechanischen Eigenschaften des PUR im SPS veröffentlicht¹. Dafür wird „auf umfangreiche Untersuchungen [...] zurück gegriffen“ (Feldmann et al. 2010, S. 12), deren Ergebnisse aus einer bis heute unveröffentlichten Dokumentation von SPS Technology (2002) zum SPS und den Eigenschaften des PUR stammen. Daneben schildert der Bericht viele der bereits genannten Anwendungen von SPS in Deutschland, welche durch die RWTH Aachen wissenschaftlich begleitet wurden sowie die jeweils gewonnenen Erkenntnisse (Stihl et al. 2016). So werden bspw. Untersuchungen zu den Auswirkungen des Heißeinbaus einer Asphaltsschicht auf dem SPS gezeigt². Diese Maßnahme wurden im Rahmen der Sanierung der Schönwasserparkbrücke bei Krefeld mit dem Overlay-Verfahren umgesetzt.

Für den Einsatz von SPS im Neubau von Straßenbrücken schlagen Feldmann et al. (2010, S. 66 ff.) eine neuartige Fahrbahnkonstruktion vor und untersuchen diese in verschiedenen Varianten theoretisch und experimentell. In einer *SPS-Hohlplatte* werden zwischen den Deckblechen Hohlprofile mit rechteckigem, kreisförmigem oder dreieckigem Querschnitt angeordnet, um die statische Höhe der Platte und damit deren Biegesteifigkeit zu vergrößern und gleichzeitig die Menge des eingesetzten PUR zu begrenzen. Vor allem in einer querorientierten Variante der Fahrbahn sehen Feldmann et al. (2010, S. 68 f.) Potential für Straßenbrücken, da mit ihr sowohl die Quer- als auch Längsträger der orthotropen Platte ersetzt werden könnten. Mit verschiedenen Verfahren wird die Tragwirkung der neuen Fahrbahnplatte in beide Richtungen und ihre Mitwirkung als Obergurt der Hauptträger untersucht. In Versuchen liegt jedoch der Fokus auf der Tragwirkung der Fahrbahn in ihrer schwächeren Richtung, quer zu den eingelegten Hohlprofilen und längs zu den Brückenhauptträgern. Die Versuche und nachträgliche Simulationen zeigen, dass die Platte je nach eingelegtem Hohlprofil in die schwache Richtung ähnlich einem Fachwerk oder einem Vierendelträger abträgt. Bedingt durch die lokal erhöhten Kräfte bzw. Momente in deren Umlenkestellen zeigt sich dort das Versagen in Form einer Delamination zwischen dem PUR und einem der eingelegten Hohlprofile.

Teixeira de Freitas (2012) befasst sich mit Möglichkeiten zur nachträglichen Verstärkung von orthotropen Platten. Neben dem SPS in der Overlay-Variante betrachtet sie auch die Möglichkeit aufgeklebter Stahlbleche mit dünner Klebeschicht aus Epoxidharz. Beide Systeme untersucht sie auf drei Detailstufen: Stoff, Bauteil und Großbauteil. An uniaxialen Zugversuchen bei Raumtemperatur -10 und 50 °C werden zunächst die elastischen Eigenschaften der Kernmaterialien ermittelt, um die Bauteilversuche nachrechnen zu können. Für verschiedene Spannweiten und Deckblech-Aufbauten werden sowohl quasi-statische Traglastversuche bei mehreren Temperaturen als auch Ermüdungsversuche bei Raumtemperatur durchgeführt. In allen Traglastversuchen versagten die untersuchten SPS-Aufbauten in der Verbundfuge durch Delamination. Bei -10 °C und Raumtemperatur folgte darauf ein Schubbruch im Kern. Bei Raumtemperatur und 50 °C zeigte das PUR vor dem Versagen ein Fließen, wobei die Fließdehnung mit der Temperatur anstieg. Dementgegen nahm die Steifigkeit der Proben mit

¹Dazu zählen z. B. Daten zur Dichte, Steifigkeit und Festigkeit in Abhängigkeit von der Temperatur.

²Auf diese Untersuchungen wird in Abschnitt 2.2.2 noch genauer eingegangen.

steigender Temperatur ab. Auch in den Ermüdungsversuchen kam es in den meisten Fällen zur punktuellen Delamination, die dann voran schritt und einen Schubbruch im Kern nach sich zog. Ein Deckblechversagen in Form von Knittern oder Fließen vor dem Versagen des Verbunds wurde nicht beobachtet.

Die Versuche vergleicht Teixeira de Freitas mit mehreren Nachrechnungen unter Verwendung verschiedener Verfahren. Sie kommt zu dem Ergebnis, dass eine dreidimensionale Berechnung mit der Methode der Finiten Elemente (FEM) im Vergleich zu den anderen betrachteten Methoden die verlässlichsten Ergebnisse liefert.¹ Auf der Ebene der Großbauteile werden analog zu den Bauteilversuchen Ausschnitte von orthotropen Platten ohne und mit nachträglicher Verstärkung betrachtet. Diese werden mittels FEM simuliert, um die Auswirkungen der jeweiligen Verstärkung auf die Spannungen in den ermüdungsrelevanten Details zu untersuchen. Die Simulationen werden mit quasi-statischen Versuchen an Großbauteilen validiert und dann Ermüdungsversuche durchgeführt. Die Ergebnisse zeigen, dass eine Overlay-Verstärkung mit SPS die Spannungen im Bestand signifikant reduzieren kann. Jedoch schwankt die Reduktion in Abhängigkeit von der Temperatur zwischen -10 und 50 °C um $\pm 20\%$ im Deckblech und um $\pm 10\%$ im Längsträger der orthotropen Platte (Teixeira de Freitas 2012, S. 168 f.).

Neben den zuvor beschriebenen Arbeiten beschäftigen sich noch weitere mit dem SPS, welche für die vorliegende Arbeit jedoch nur eine untergeordnete Rolle spielen. So untersuchten Zhou (2008) und Fladby (2010) das globale Beulverhalten von SPS-Platten unter axialer und querorientierter Belastung. Aufbauend auf den Erkenntnissen aus den Nachrechnungen ihrer Bauteilversuche von Teixeira de Freitas et al. (2011), entwickelten Belbute et al. (2012) einen Ansatz für ein Finites Element zur Beschreibung von SPS.

Nach 2012 wurden im Bauwesen keine größeren Forschungsarbeiten mehr zu SPS durchgeführt. Es folgten aber noch weitere Fachartikel zu den mit SPS umgesetzten Projekten, wie der Saarbrücke in Mettlach (Stihl et al. 2013 und 2014) oder der *Pont Grande Duchesse Charlotte* in Luxemburg (Stihl et al. 2016). Tabelle 1.1 gibt eine Zusammenstellung der bereits in deutschen Fachzeitschriften vorgestellten bzw. in Deutschland ausgeführten Maßnahmen mit wichtigen Eckdaten.

Dank seiner frühen und vermehrten Anwendung auf diesem Gebiet, konnten bereits viele Erfahrungen zum Einsatz des SPS im Schiffsbau gesammelt werden. Die Etablierung des Systems wurde bis heute entsprechend weit voran getrieben und schon ein erster Schritt hin zur Normung des SPS getan. So gaben verschiedene Klassifizierungsgesellschaften wie bspw. Det Norske Veritas oder Lloyd's Register bereits Richtlinien zum Einsatz von SPS heraus. Im Bereich des Brückenbaus findet die Bauweise laut Stihl et al. (2013) bereits in nordamerikanischen Normen Berücksichtigung (bspw. im *Canadian Highway Bridge Design Code CSA-S6*).

¹Die Verfahren zur Berechnung von Sandwichelementen, deren Voraussetzungen und Eigenschaften werden in Abschnitt 6.1.2 genauer beleuchtet.

Tabelle 1.1: Anwendungsfälle von SPS im Brückenbau und ihre Eckdaten nach Kennedy 2004, Feldmann et al. 2007, Heiland u. Stihl 2012, Stihl et al. 2013, Kennedy u. Martino 2015, Gesella et al. 2016 und Stihl et al. 2016

Anwendungsfall	Jahr	Nutzung	Bauart	Sandwich Plate System	
				Aufbau ¹ in mm	Spannweite ²
Shenley-Brücke Québec, Kanada	2003	Straße	Neubau	6,4-35-6,4	2,40 m
D-Brücken-Systeme Deutschland & Österreich	2004	Straße	Overlay	6-20-Ex bzw. 6-30-Ex	3,05 m
Schönwasserparkbrücke Krefeld, Deutschland	2005	Straße	Overlay	6-30-Ex	2,03 m
Hochbahn Brücke Berlin, Deutschland	2005	Eisenbahn	Underlay	6-25-Ex	1,50 m
Dawson Bridge Edmonton, Kanada	2010	Straße	Austausch	10-25-10	1,80 m
Saarbrücke Mettlach, Deutschland	2015	Straße	Austausch	10-25-10	2,06 m
Pont Grande Duchesse Charlotte Luxemburg	2018	Straße & Tram	Neubau & Overlay	8-30-8 bzw. 8-30-Ex	2,50 m

¹Die Notation für den Aufbau des SPS zeigt in der angegebenen Reihenfolge die Dicken vom oberen Deckblech - Kern - unteren Deckblech (vgl. Abb. 1.4). Die Abkürzung *Ex* steht für ein existierendes Fahrblech im Bestand bei einer Verstärkungsmaßnahme mit SPS.

²Bei den angegebenen Spannweiten handelt es sich in der Regel um die Achsabstände der Querträger als nächst größere Tragelemente der Fahrbahn. In der Overlay-Verstärkung wirkt das SPS über diese Länge gemeinsam mit den Längssteifen. Seine freitragende Spannweite zwischen den Steifen ist entsprechend kleiner. Lediglich im Fall der bisher einzigen Underlay-Verstärkung war aufgrund der besonderen Konstruktion mit Buckelblechen keine Längsversteifung vorhanden (Feldmann et al. 2010, S. 56 ff.). Im Neubau und beim Austausch wurden bisher stets SPS-Platten ohne Längsversteifung eingesetzt. Hier entspricht die angegebene Länge der freitragenden Spannweite des SPS-Elements.

1.3 Problemstellung und Zielsetzung

Wie in den vorherigen Abschnitten gezeigt, bietet das SPS Potential zum Einsatz in Fahrbahnplatten. Auch existieren bereits Anwendungsfälle von SPS im Brückenbau (s. Tab. 1.1). Für einen Einsatz im (Ersatz-)Neubau von Eisenbahn-Trogbrücken bestehen jedoch besondere Anforderungen, welche in den bisherigen Szenarien keinen maßgeblichen Einfluss hatten. Diese betreffen vor allem Fragen zu möglichen Bauformen der Fahrbahn und ihre Verformung unter Dauerlast- und Temperatureinfluss. Allgemein müssen alle Bauteile von Eisenbahnbrücken zu jeder Zeit den normativen Anforderungen an die Gebrauchstauglichkeit genügen. Dazu zählt bspw. eine strenge Begrenzung der Verformung zur Sicherstellung der Betriebssicherheit und für den Reisendenkomfort bei Zugüberfahrt (vgl. DIN EN 1990, A2.4.4). Das Verhalten der Brücke muss entsprechend im Vorfeld für ihre gesamte Nutzungsdauer berechnet bzw. prognostiziert werden. Dafür müssen unter anderem auch die Eigenschaften und das mechanische Verhalten aller verwendeten Baustoffe hinreichend genau bekannt sein. Dies gilt nicht nur für die zu erwartenden Verformungen in Abhängigkeit von der Belastung sondern auch für etwaige Einflüsse aus der Temperatur und der Zeit (vgl. Ril 804, M1101 2(16)).

Wie die meisten Sandwichelemente verhält sich auch das SPS aufgrund seines Kernmaterials schubweich und damit nachgiebiger als bspw. monolithische Stahlbleche gleicher Dicke (vgl. Feldmann et al. 2010, S. 71 ff. oder Händler u. Lange 2019). Dabei hängt die Nachgiebigkeit maßgeblich von der Steifigkeit seines Kunststoff-Kernmaterials ab, die wiederum von anderen Einflüssen abhängt. So wurde bereits durch SPS Technology (2002 bzw. 2012a) und Teixeira de Freitas (2012) für das PUR der Einfluss der Temperatur beschrieben. Kunststoffe neigen im Allgemeinen aber auch dazu, sich andauernden Belastungen zu entziehen: sie *kriechen* bzw. *relaxieren*¹. Im Gegensatz zur Temperaturabhängigkeit wurde dieses Verhalten bisher nur von SPS Technology (2012b) in einer kleinen Versuchsreihe betrachtet. Darüber hinaus wurde das Langzeitverhalten des SPS unter Dauerlast noch nicht untersucht.

Mit Blick auf die Anwendungsfälle in Tabelle 1.1 kann vermutet werden, dass dieses Verhalten keinen maßgeblichen Einfluss hatte. Das SPS wurde bislang hauptsächlich in solchen Konstellationen eingesetzt, in denen es außer seinem Eigengewicht keine hohen Ausbaulasten tragen muss.² In Ausnahmefällen, in denen höhere Dauerlasten vorhanden sind, wie bspw. der Hochbahn Brücke in Berlin, wurde das System nachträglich im Bestand ergänzt.³ So war die Verformung aus Eigengewicht der zu ertüchtigenden Konstruktion bereits eingepreist und das SPS ist im ständigen Zustand ohne Beanspruchung aus Verkehr annähernd unbelastet.

Bei einem Einsatz des SPS im (Ersatz-)Neubau von Eisenbahnbrücken werden dagegen auch die Ausbaulasten auf den Verbund wirken. Diese Lasten resultieren bei Bahnbrücken maßgeblich aus dem Oberbau und sind daher deutlich größer als bei Straßenbrücken. Hier beträgt die Flächenbelastung aus Schotterbett und Gleis in der Regel $12,5 \text{ kN/m}^2$ (Ril 804 2013, M2101 2.4). Es ist damit zu rechnen, dass diese hohen Dauerlasten kriecherzeugend für eine SPS-Fahrbahn wirken. Wie stark die Verformungen dabei letztendlich zunehmen werden, lässt sich auf Basis der aktuellen Kenntnisse jedoch nicht beurteilen. Es lässt sich demnach auch nicht abschätzen, welche Auswirkungen ein kriechendes SPS auf die Gebrauchstauglichkeit einer Brücke über dessen Nutzungsdauer hat.

¹Nähere Erläuterungen zu den Begrifflichkeiten werden in Abschnitt 2.1 gegeben.

²Die Flächengewichte der Beläge in Straßenbrücken sind durch ihre nur wenige Zentimeter hohen Aufbauten verhältnismäßig gering (vgl. Sedlacek et al. 2011, S. 59 f. oder ZTV-ING-Teil 7, Kap. 4 bzw. 5).

³Die Verstärkung erfolgte mit dem Underlay-Verfahren unter Betrieb, sodass auch die Lasten und Verformungen aus dem Oberbau ständig in der bestehenden Fahrbahn eingepreist blieben (Heiland et al. 2012).

Für die Gebrauchstauglichkeit unter dem Einfluss eines kriechenden Kerns spielen jedoch nicht nur dessen veränderliche Eigenschaften allein eine Rolle. Auch die Ausbildung des Querschnitts und der einzelnen Bauteile haben Einfluss auf die letztendliche Größe der Gesamtverformung. Wie die Aufstellung in Tabelle 1.1 zeigt, liegen die bislang realisierten Spannweiten des SPS in Brückenfahrbahnen zwischen 1,50 und 2,40 m. Die Querspannweiten stählerner Trogbauwerke für Eisenbahnen betragen typischerweise zwischen 3,00 und 4,40 m, je nach den örtlichen Gegebenheiten und der statisch erforderlichen Höhe der Hauptträger (Ril 804 2013, M9010). Wenn mit dem SPS das Dickblech ersetzt werden soll (vgl. Abb. 1.4 r.), dann sind hierfür etwa doppelt so große Spannweiten wie in den bisherigen Anwendungen notwendig. In der längsorientierten Variante (vgl. Abb. 1.4 l.) kann die Spannweite des SPS über den Querträgerabstand zwar flexibler gestaltet werden, jedoch muss auch die dafür erforderliche Bauhöhe zur Verfügung stehen. Welches Tragsystem und welche Bauteilabmessungen¹ zur Ausgestaltung von Trogbauwerken mit SPS hinsichtlich der Gebrauchstauglichkeit geeignet sind, lässt sich ohne Kenntnisse zum Kriechverhalten des PUR bis dato nicht beantworten.

In den Punkten der letzten beiden Absätze will die vorliegende Arbeit ansetzen. Sie will einen Beitrag zur möglichen Anwendung der SPS-Technologie im Bahnbrückenbau leisten, indem sie die veränderliche Steifigkeit des PUR-Kerns und ihren Einfluss auf das Tragverhalten des Systems allgemein beleuchtet. Dabei erfolgt die Betrachtung auf zwei Ebenen. Dem Ingenieurprinzip folgend, dass das Tragverhalten im Verbund beschrieben werden kann, wenn die Eigenschaften der einzelnen Komponenten bekannt sind, wird das PUR zunächst isoliert auf der Stoffebene betrachtet. Mithilfe verschiedener Experimente wird das PUR auf sein Verhalten in Abhängigkeit von der Zeit und der Temperatur untersucht. Auf Basis der Versuche wird das PUR charakterisiert und ein Materialmodell zu dessen Beschreibung abgeleitet. Da das Verhalten von Polymeren stets simultan von der Zeit und der Temperatur beeinflusst wird,² erfolgt die Charakterisierung des PUR im SPS hinsichtlich beider Größen unter dem Überbegriff der *viskoelastischen Eigenschaften*.

Der Einfluss der veränderlichen PUR-Eigenschaften auf das Tragverhalten von SPS wird theoretisch auf der Bauteilebene betrachtet. Unter Zuhilfenahme etablierter Verfahren zur Berechnung von Sandwich-Elementen wird eine analytische Studie zu den Auswirkungen einer schwankenden Kernsteifigkeit infolge Temperatur und Dauerlast durchgeführt. Dabei wird nach günstigen Dimensionsverhältnissen für SPS-Bauteile gesucht, welche die Auswirkungen des veränderlichen Kernmaterials möglichst minimieren. Die Eignung des SPS für einen Einsatz in Fahrbahnen von Bahnbrücken unter kriecherzeugenden Lasten, lässt sich erst danach beurteilen. Als Quintessenz aus den Erkenntnissen werden Empfehlungen für die praktische Ausgestaltung von SPS-Fahrbahnen und ein Algorithmus zu deren Vordimensionierung entwickelt.

¹Von Interesse ist hier vor allem der erforderliche Querschnittsaufbau im SPS in Abhängigkeit von der Spannweite des Systems.

²Genauere Erläuterungen zu dem angesprochenen Prinzip werden in Abschnitt 2.1 gegeben.

1.4 Aufbau der Arbeit

Entsprechend den zuvor genannten Ebenen der Untersuchung gliedert sich die vorliegende Arbeit in zwei Teile, die von den allgemeinen Kapiteln eingerahmt werden. Abbildung 1.5 gibt einen Überblick über den Aufbau der Arbeit. Nachdem in diesem Kapitel eine Einführung in die Thematik gegeben sowie die Problemstellung und Zielsetzung erläutert werden, befasst sich der erste Teil mit der Charakterisierung des linear-viskoelastischen Verhaltens des PUR im SPS auf Werkstoff-Ebene.

- Einleitend werden in Kapitel 2 für die Arbeit notwendige Grundlagen zur Mechanik von Kunststoffen bzw. Polymeren im Allgemeinen zusammengestellt. Anschließend werden im selben Kapitel die für das PUR bisher bekannten Kennwerte und der Stand der Forschung zu den Eigenschaften des spezifischen Stoffs gezeigt.
- Aus der Analyse zum Stand der Forschung wird in Kapitel 3 die Aufgabenstellung des ersten Teils konkretisiert und das daraus entwickelte Versuchsprogramm vorgestellt. Um die Vergleichbarkeit des Stoffs mit der Literatur und die Anwendbarkeit der Ergebnisse zu überprüfen, wurden Vorversuche durchgeführt. Diese werden ebenfalls gezeigt und erste Erkenntnisse für die weiteren Untersuchungen abgeleitet.
- Kapitel 4 enthält die Hauptversuche zur Charakterisierung des PUR. Zunächst werden ausführlich die durchgeführten Dynamisch-Mechanisch-Thermischen Analysen (DMTA) beschrieben und daraus Abhängigkeiten für die Steifigkeit des PUR von der Zeit und der Temperatur bestimmt. In weiteren Lang- und Kurzzeitversuchen werden die gefundenen Eigenschaften danach überprüft, um die Ergebnisse der DMTA zu validieren.
- Die validierten Kurven der Steifigkeit werden in Kapitel 5 verwendet, um das PUR mit einem Materialgesetz in Abhängigkeit von der Zeit und der Temperatur zu charakterisieren. Dieses wird ebenfalls mit den Versuchen aus Kapitel 4 validiert.

Das in Teil I gefundene Materialgesetz wird im zweiten Teil verwendet, um die Steifigkeitsentwicklung des PUR in einem SPS-Element unter Dauerlast bzw. Temperatur diskret abzubilden. Auf Bauteil-Ebene wird das Tragverhalten von Sandwichelementen mit biegesteifen Deckschichten unter einer veränderlichen Kernsteifigkeit untersucht, um daraus Empfehlungen zur Dimensionierung von SPS-Elementen zu erarbeiten.

- In Kapitel 6 werden zunächst gängige Verfahren zur Berechnung von Sandwichelementen unter Biegung gezeigt und die bereits in der Einführung vorgestellten Arbeiten hinsichtlich der angewendeten Verfahren analysiert. Anschließend werden in einer Voruntersuchung SPS-Balken verschiedener Abmessungen und Kernsteifigkeiten mit einer Auswahl der gezeigten Verfahren berechnet. Anhand der Ergebnisse werden diese auf ihre generelle Eignung zur Berücksichtigung einer veränderlichen Steifigkeit untersucht. Außerdem wird auf diesem Wege ein Vorzugsverfahren identifiziert, mit welchem anschließend der Einfluss der veränderlichen Kernsteifigkeit genauer analysiert wird.
- In Kapitel 7 werden schließlich die Auswirkungen der schwankenden Kernsteifigkeit auf die Tragwirkung von Sandwichelementen untersucht. In einer analytischen Studie geschieht dies zunächst allgemein anhand der maximal wirkenden Biegespannung und der Gesamtsteifigkeit eines Sandwichbalkens. Die Erkenntnisse werden auf SPS übertragen,

Empfehlungen für den Einsatz des Systems in Bahnbrücken formuliert und ein Algorithmus zu dessen Vordimensionierung erarbeitet. Dieser soll im iterativen Entwurfsprozess helfen, die Machbarkeit schneller zu beurteilen sowie baubare, tragfähige und gebrauchstaugliche Querschnittsaufbauten zu finden.

Den Schluss der Arbeit bildet Kapitel 8. Hier werden die Erkenntnisse aus den beiden Teilen noch einmal zusammengefasst und ein abschließendes Fazit gezogen. Außerdem werden offene Fragestellungen, die sich im Laufe der Arbeit ergeben haben, in einem Ausblick zusammengestellt.

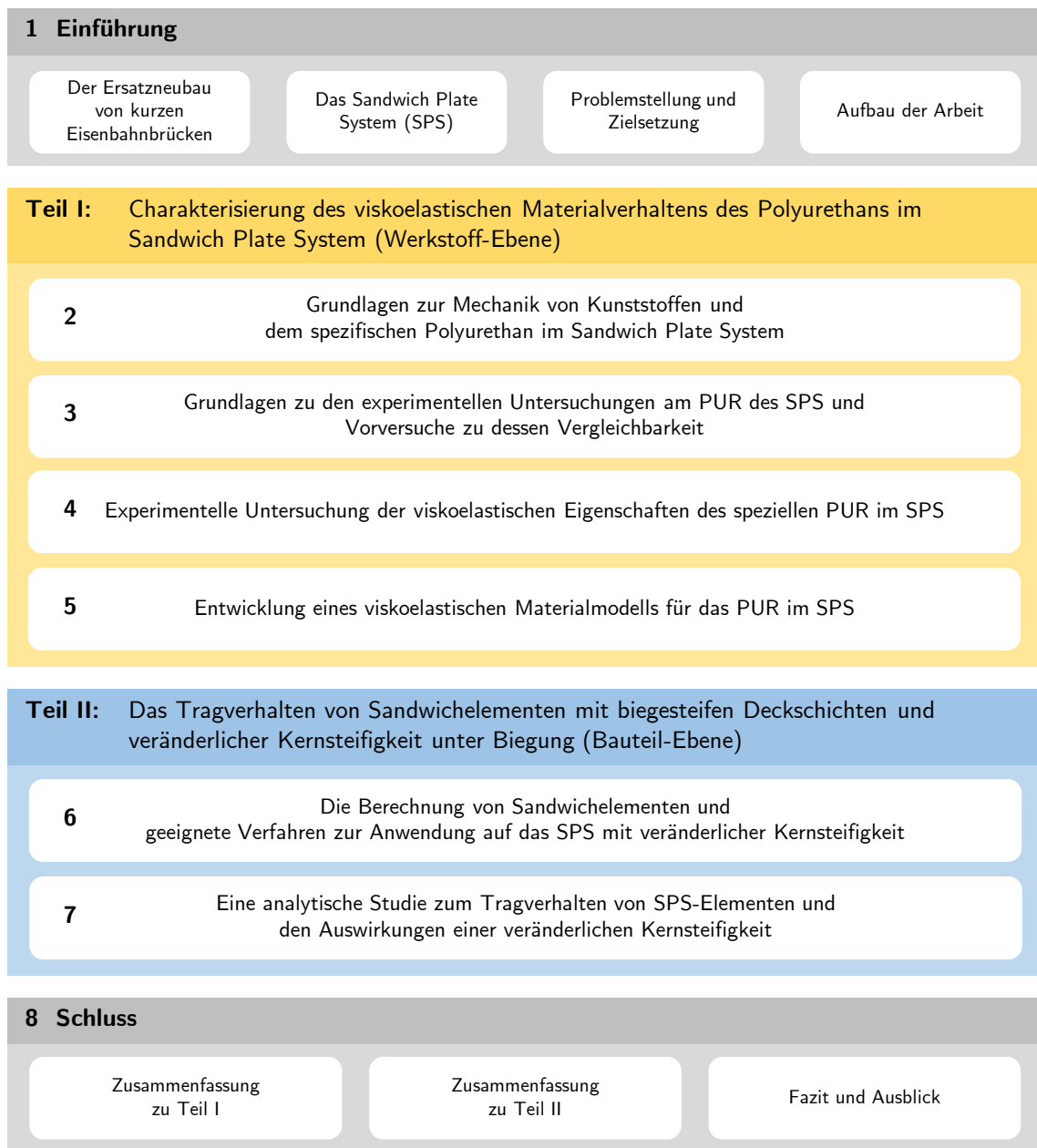


Abbildung 1.5: Schematische Darstellung des Aufbaus der Arbeit

Teil I

Charakterisierung des viskoelastischen Materialverhaltens des Polyurethans im Sandwich Plate System

2 Grundlagen zur Mechanik von Kunststoffen und dem spezifischen Polyurethan im Sandwich Plate System

Wie in der Zielsetzung beschrieben, soll in dieser Arbeit untersucht werden, ob und auf welche Weise das SPS mit seinem Kunststoffkern im Ersatzneubau von Bahnbrücken eingesetzt werden kann. Um dies zu beurteilen, bedarf es genauer Kenntnisse über dessen Eigenschaften in Abhängigkeit von der Temperatur und der Zeit. Teil I widmet sich daher der viskoelastischen Charakterisierung des speziellen Polyurethans im Sandwich Plate System. Dafür wurden umfangreiche experimentelle Untersuchungen durchgeführt und ein analytisches Materialgesetz für das PUR entwickelt. In diesem Kapitel werden zunächst die dafür notwendigen Grundlagen zur Mechanik von Kunststoffen dargelegt und der aktuelle Stand der Forschung zu dem spezifischen Polyurethan im SPS zusammengefasst.

2.1 Die Mechanik von Kunststoffen

Vor dem Einstieg in die Beschreibung des PUR im SPS, werden zunächst die wichtigsten Grundlagen der Polymermechanik beschrieben, die für die folgenden Ausführungen erforderlich sind. Basierend auf der breit zugänglichen Fachliteratur geben sie auszugsweise den Stand der Technik und Normung zu Kunststoffen bzw. Polymeren¹ wieder auf dem die vorliegende Arbeit aufbaut. Neben einigen physikalischen Grundlagen wird eine Einführung in das mechanische Verhalten und dessen mathematische Formulierung gegeben. Angesichts des Schwerpunkts dieser Arbeit wird hierbei der Fokus auf die linearen Modelle zur Beschreibung der Steifigkeit für kleine Deformationen gelegt. Das Verhalten von Polymeren bei großen Verformungen und das Materialversagen werden nicht behandelt.

2.1.1 Aufbau und Struktur von Polymeren

Die Vielfalt der Kunststoffe resultiert aus der hohen Variabilität der Polymere, welche mithilfe des *Polymer Engineering* für nahezu jede Anwendung „auf Maß“ entwickelt werden können (Elsner et al. 2008, S. 1). Den Grundbaustein der Polymere bilden die Monomere, welche in der Regel auf Kohlenstoff (C) basieren und in Verbindung mit Wasserstoff (H), Sauerstoff (O), Stickstoff (N) u. a. in vielerlei Formen und Größen existieren. Die Monomere bilden in sich vielfach wiederholender Zahl lineare oder verzweigte Ketten, deren Form durch die Moleküle und ihren inneren Aufbau (Konfiguration) beeinflusst wird. Während ein Homopolymer aus

¹Die Begriffe sind streng genommen zu unterscheiden: *Kunststoff* wird als Überbegriff für Stoffe verwendet, die überwiegend aus Polymer-Rohstoffen bestehen, jedoch weitere Zusatzstoffe wie bspw. Weichmacher, Füller oder Fasern enthalten. Als *Polymer* wird hingegen der Hauptbestandteil des Kunststoffs in Reinform beschrieben (Kaiser 2016, S. 99). In der Literatur werden die beiden aber stellenweise auch synonym verwendet (Grellmann et al. 2015, S. 3). Dieses Vorgehen wird für die folgenden Erläuterungen übernommen.

nur einer Art besteht, kommen in Hetero- bzw. Copolymeren verschiedene Monomere zusammen. Deren Anordnung zueinander (Konstitution) und die Verzweigungen (Konformation) in den Molekülketten sind dabei vielfältig (Kaiser 2016, S. 39 f.). Auf Makroebene können die Polymerketten amorph (ungeordnet) im sogenannten *Knäuel* oder in kristalliner Form (geordnet) vorliegen, wobei diese sich wiederum im Grad der Kristallinität und der Form der Kristallite unterscheiden (Bonnet 2016, S. 1).

Auch in der Reaktion zur Bildung der Molekülketten (Polymerisation) unterscheiden sich Polymere. In der Kettenpolymerisation reagieren einzelne Monomere miteinander oder mit den freien Enden bestehender Polymerketten und führen so zu deren Wachstum. Nach ihrem Anstoß läuft diese Kettenreaktion exotherm und ohne Entstehung von Nebenprodukten ab, bis keine Reaktionspartner mehr zueinander finden. Bei der Kondensationspolymerisation (Polykondensation) sind die Grundbausteine zunächst mit Nebenprodukten (z. B. OH-Gruppen) verbunden, die im Zuge der Reaktion abgespalten werden. In der Additionspolymerisation (Polyaddition) verbinden sich bereits existierende Ketten durch Wanderung einzelner Atome (z. B. Wasserstoff) zwischen ihren reaktiven Gruppen.¹ Polykondensation und Polyaddition laufen zwar auch exotherm ab, lassen sich im Gegensatz zur Kettenpolymerisation aber steuern, weshalb sie zu den Stufenwachstumsreaktionen gezählt werden. (Kaiser 2016, S. 41 ff.)

Die Anordnung und Verbindungen der Molekülketten auf Makroebene haben maßgeblichen Einfluss auf die thermisch-mechanischen Eigenschaften der Polymere. Aus diesem Grund ist es üblich, sie nach ihrer Makrostruktur zu kategorisieren. Abbildung 2.1 zeigt vier wichtige Grundarten und ihren Aufbau. Thermoplaste können sowohl in amorpher als auch teilkristalliner Form vorliegen, wobei zwischen deren Kettenmolekülen nur physikalische Bindungen durch Verschlaufungen und Nebenvalenzkräfte (z. B. Dispersions-, Dipolkräfte oder Wasserstoffbrückenbindungen) bestehen. Elastomere und Duroplaste hingegen sind zwischen den Ketten zusätzlich durch kovalente Bindungen (engl.: *Crosslinks*) chemisch vernetzt (engl.: *Thermoset*) und unterscheiden sich vor allem in der sogenannten *Vernetzungsdichte*. Während Duroplaste engmaschig vernetzt sind, besitzen Elastomere weniger Vernetzungen mit entsprechend weiterem Abstand (Menges 1984, S. 17 ff.). Auch Mischformen der genannten Polymerarten existieren, wie z. B. Thermoelaste oder Thermoplastische Elastomere (TPE). Beide bestehen aus thermoplastischen und elastischen Phasen, reagieren aufgrund ihres Aufbaus aber unterschiedlich auf erhöhte Temperatur. So sind TPE schmelz- und umformbar, Thermoelaste hingegen nicht (Elsner et al. 2008, S. 5).

Die Polymere nehmen in Abhängigkeit von der Temperatur verschiedene Zustände ein, welche vereinzelt auch als Aggregatzustände beschrieben werden² und charakteristisch für ihre makromolekulare Beschaffenheit sind (z. B. Vernetzung oder Kristallinität). Anders als in niedermolekularen Stoffen erfolgt der Wechsel des Zustands jedoch weniger sprunghaft als stetig über einen breiten Temperaturbereich (Elsner et al. 2012, S. 45). Die Ähnlichkeit zu den Aggregatzuständen besteht in der Bewegungsfähigkeit der Atome und deren Änderung mit der Temperatur. Die sogenannte *mikrobrown'sche Bewegung* beschreibt in Polymeren „die Gestaltänderung [eines] Moleküls, die durch die Drehungen um die C–C-Bindungen der Hauptkette hervorgerufen wird“ (Schwarzl 1990, S. 23). Sie ist für die Haupterweichung der meisten Polymere, den sogenannten *Glasübergang* verantwortlich.

¹Auf diese Weise reagieren auch Polyurethane allgemein und das betrachtete PUR dieser Arbeit bei der Polymerisation (vgl. Abschnitt 2.2.1).

²Schwarzl (1990, S. 86) bspw. bezeichnet sie auf diese Weise. Der Ausdruck wird angesichts der eigentlich scharfen Trennung in der physikalischen Definition (Fest-Flüssig-Gasförmig) aber nicht übernommen.

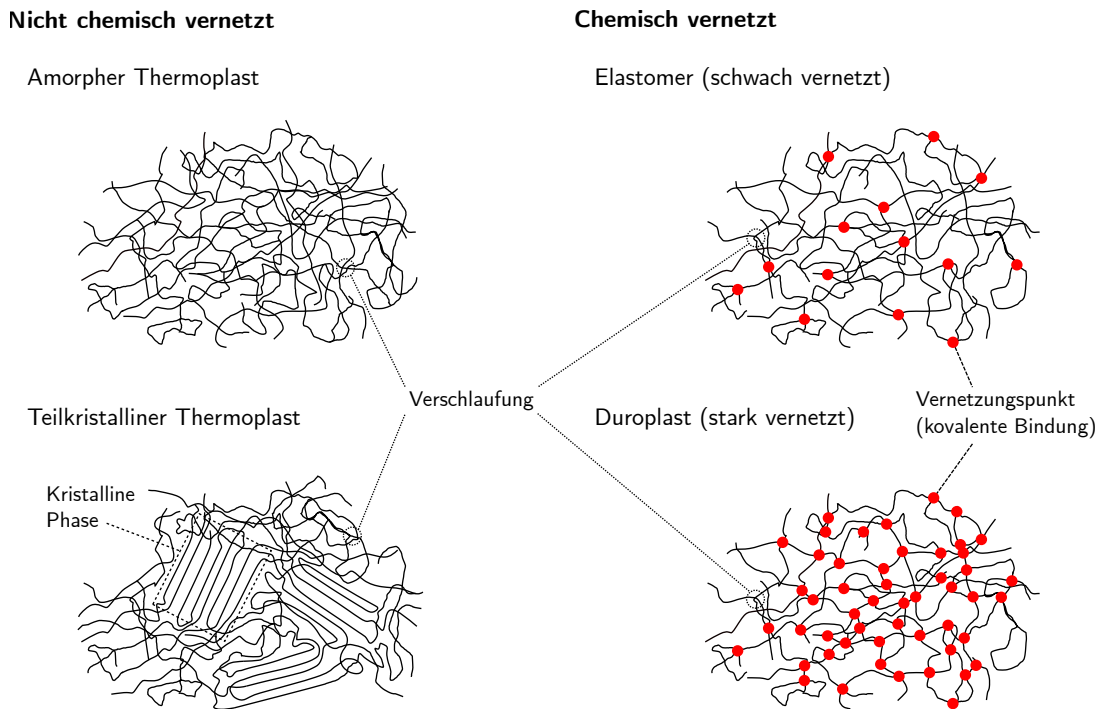


Abbildung 2.1: Die unterschiedlichen Arten von Polymeren nach ihrer makromolekularen Struktur in Anlehnung an Schwarzl (1990) und Menges (1984)

Die verschiedenen Zustände in Abhängigkeit von der Temperatur werden üblicherweise über die Steifigkeit beschrieben (vgl. Elsner et al. 2012, S. 5). Abbildung 2.2 zeigt qualitativ die charakteristischen Verläufe des Schubmoduls G der grundlegenden Polymerarten in Anlehnung an die bereits zurückgezogene DIN 7724. Folgend werden anhand des Thermoplasten die verschiedenen Zustände und ihre Übergänge (auch *Dispersionsstufen* genannt) nach Schwarzl (1990, S. 86) erläutert, um danach auf die Unterschiede und Eigenheiten der anderen Polymerarten einzugehen.

Bei tiefen Temperaturen befindet sich das Polymer im sogenannten *Glasbereich* und verhält sich näherungsweise wie ein Hooke'scher Feststoff *energieelastisch* und spröde. Wie auch die Temperatur ist sein spezifisches Volumen niedrig und die Molekülketten liegen dicht gepackt, sodass ihre Bewegungsfähigkeit wie *eingefroren* ist. Äußere Belastungen führen entsprechend nur zu kleinen Deformationen des Gefüges (hohe Steifigkeit) in denen die eingesetzte Energie verlustfrei gespeichert und bei Entlastung wieder freigesetzt wird.

Mit zunehmender Temperatur steigt das spezifische Volumen bis im Verlauf der Haupterweichung, welche durch die *Glasübergangstemperatur* T_g (bzw. T_α)¹ charakterisiert wird, schließlich genügend Freiräume zwischen den Molekülen vorhanden sind und die mikrobrown'sche Bewegung auftritt. Der energieelastische Zustand geht verloren und die Steifigkeit sinkt stark auf das Niveau des *entropieelastischen Bereichs* in dem sich das Polymer *gummiartig* verhält. Bei äußerer Belastungen kommt es zwischen den Verschlaufungen der Moleküle (s. Abb. 2.1) durch deren erhöhte Bewegungsfähigkeit nun zum Ausrichten bzw. Abwickeln der Ketten.

¹Bei mehreren Relaxationserscheinungen in einem Polymer werden die Übergänge alternativ von der Erweichung aus bis zum Glasbereich mit griechischen Buchstaben benannt (Schwarzl 1990, S. 96).

Dabei wird weiterhin Energie gespeichert, da die Moleküle wieder zurück in einen energetisch günstigere Lage im Knäuel streben. Beim Abwickeln wird jedoch ihre ursprüngliche Konstitution (Anordnung der Atome zueinander) gewaltsam verändert, welche danach nicht in denselben Zustand zurückkehrt. Die dafür aufgewendete Energie (bspw. zum Überwinden von Dispersionskräften) wird nicht gänzlich gespeichert, sondern teilweise in Wärme (Bewegung der Atome) dissipiert und geht mechanisch verloren.

Mit weiterem Ansteigen der Temperatur wachsen das spezifische Volumen und die Freiräume der Ketten, wodurch auch deren Bewegungen immer weiter zunehmen. Mit Erreichen des *Fließbereichs* gekennzeichnet durch die *Fließtemperatur* T_f werden diese so stark, dass sich die Verschlaufungen zwischen den Ketten lösen und diese voneinander abgleiten können. Bei Belastung verschieben sich die Ketten nun irreversibel gegeneinander (*Fließen*), wobei sie sich notwendigerweise vorher ausrichten. Vor dem Fließen werden demnach trotzdem Spannungen aufgebaut und ein Teil der Energie elastisch gespeichert. Der zum Verschieben der Ketten aufgewendete Teil der Energie geht jedoch verloren. Wird die Temperatur noch weiter erhöht, kommt es bei T_z zur sogenannten *Zersetzung*. Die kovalenten Bindungen innerhalb der Ketten werden gelöst und das Gefüge des Polymers zerstört.

Eine Sonderform der beschriebenen Thermoplaste bilden jene mit kristallinen Strukturen (s. Abb. 2.1 u.l.). Die geordnete Konstitution im kristallinen Gitter sorgt für stärkere Bindungskräfte innerhalb dieser Phasen. Sie lösen sich bei Erhöhung der Temperatur erst nach dem Glasübergang T_g der amorphen Phasen auf, deren physikalische Bindung auf den schwächeren Dispersionskräften beruhen. Die Hauptverweichung resultiert nun nicht mehr aus dem Auftauen der mikrobrown'schen Bewegung in den amorphen Teilen, sondern dem Schmelzen der kristallinen Phasen. Die *Schmelztemperatur* T_m hängt dabei von der molekularen Struktur

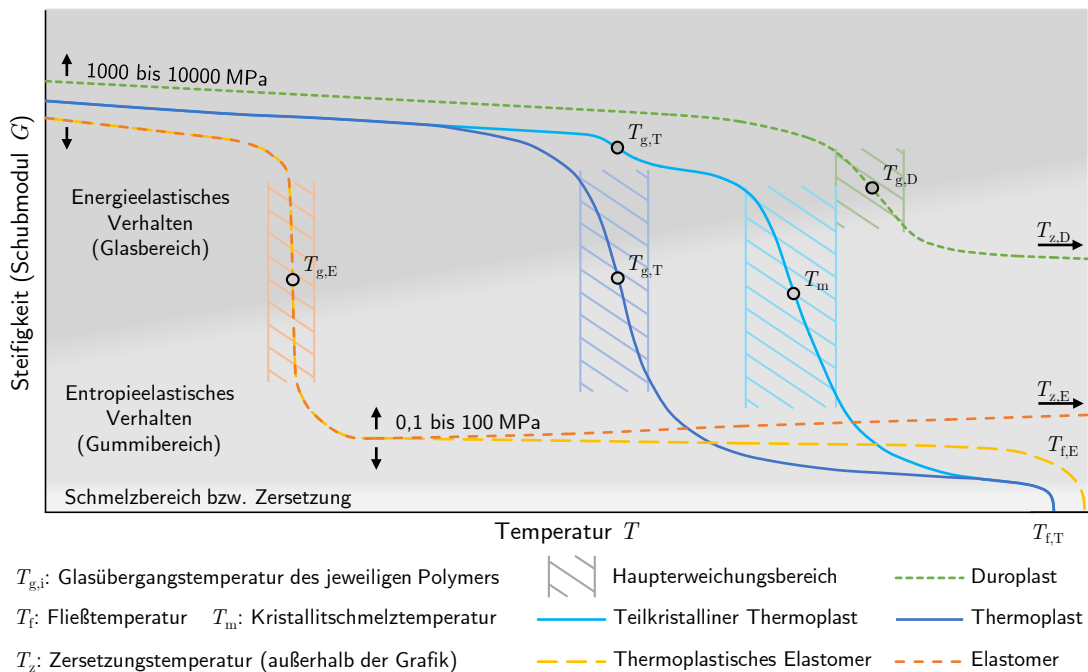


Abbildung 2.2: Steifigkeitsentwicklung der unterschiedlichen Arten von Polymeren in Abhängigkeit von der Temperatur in Anlehnung an DIN 7724 und Elsner et al. (2012)

im Kristallit und dem Kristallisationsgrad ab. Bis zum Schmelzen der Kristallite verhält sich das Polymer weitestgehend energieelastisch, sodass dessen Einsatzbereich mit großer Steifigkeit zu höheren Temperaturen hin ausgedehnt wird. Für mittlere Molmassen bleibt die Fließtemperatur T_f der amorphen Phase maßgebend, sodass die Kurve des teilkristallinen und des amorphen Thermoplasten hier wieder zusammenfallen.

Die zuvor beschriebenen Phänomene treten nicht in jeder Art von Polymer in Erscheinung. So verhindern bspw. die kovalenten Bindungen zwischen den Molekülketten in chemisch vernetzten Polymeren deren Abgleiten gegeneinander und damit das Fließen. Erst wesentlich höhere Temperaturen führen direkt zu deren Zersetzung bzw. Zerstörung. Auch beeinflusst die Vernetzungsdichte das Vermögen der Ketten sich abzuwickeln und die Größe der inneren Anziehungskräfte. So haben Duroplaste durch ihre starke Vernetzung eine sehr hohe Glasübergangstemperatur und verhalten sich in ihrem Temperatureinsatzbereich energieelastisch mit einer hohen Steifigkeit. Elastomere werden hingegen meist so konzipiert, dass sie früh den Glaszustand verlassen und sich über den Einsatzbereich bis zu ihrer Zersetzung gummiartig weich, also entropieelastisch verhalten.

Die bereits erwähnte Mischform der thermoplastischen Elastomere (TPE) besitzt dagegen dank ihrer thermoplastischen Eigenschaft eine Fließtemperatur T_f . Hier beginnen die physikalisch gebundenen Phasen des TPE zu fließen und ermöglichen so eine plastische Verarbeitung bzw. Formgebung. Zu dieser Sonderform zählen auch die thermoplastischen Polyurethane (TPE-U), welche durch ihre Struktur zur Gruppe der sogenannten *Block-Copolymere* gehören. Sie „bestehen aus alternierend angeordneten harten und weichen Polymersegmenten“ (Elsner et al. 2008, S. 172). Physikalisch gebundene Kristallite bilden darin die harten thermoplastischen Phasen, welche durch meist langkettige Moleküle chemisch miteinander vernetzt sind. Die TPE-U werden in Abschnitt 2.2 noch einmal tiefergehend behandelt.

2.1.2 Viskoelastisches Materialverhalten

Wie zuvor an der Entwicklung ihrer Steifigkeit in Abbildung 2.2 gezeigt, haben Polymere verschiedene Zustände über die sich ihr mechanisches Verhalten ändert. Niedermolekulare Stoffen wie Wasser treten in den verhältnismäßig scharf getrennten Aggregatzuständen *fest* oder *flüssig* auf, in denen ihr Verhalten als *elastisch* oder *viskos* beschrieben werden kann. Im Gegensatz dazu treten in Polymeren stets beide Zustände simultan auf. Teile im Polymer verhalten sich elastisch und können die bei Belastung eingesetzte mechanische Energie speichern, andere hingegen verhalten sich viskos und dissipieren die eingesetzte Energie durch die inneren Molekül-Bewegungen. Das Verhalten der Polymere ändert sich dabei nicht nur mit der Temperatur, sondern auch in Abhängigkeit von der Zeit bzw. Belastungsgeschwindigkeit. Zur mechanischen Beschreibung dieses hybriden Verhaltens wird entsprechend eine Kombination der beiden Grenzfälle Viskosität und Elastizität verwendet: die *Viskoelastizität*. (Osswald u. Rudolph 2015, S. 143 f.)

Polymere wie auch andere viskoelastische Stoffe zeigen phänomenologisch zwei grundlegende Arten des Verhaltens unter Beanspruchung. Wird ein frei verformbarer, polymerer Körper durch eine zeitlich konstante äußere Last beansprucht, stellt sich über den elastischen Anteil eine sofortige Deformation ein. Aus seinem viskosen Verhalten kommt eine zusätzliche Deformation hinzu, die sich jedoch erst mit der Zeit einstellt: das *Kriechen* (vgl. Abb. 2.6 u.). Wird der Körper wieder entlastet federt der elastische Teil entsprechend sofort zurück, während der viskose Teil wiederum erst zeitlich verzögert zurückgeht. Dabei kann ein Rest der

Verformung verbleiben, wenn der Körper infolge der Belastung ins *Fließen* gekommen ist. Dieser Vorgang wird auch als *lastgesteuert* beschrieben, da die Belastung als Eingangsgröße eine bekannte zeitliche Abhängigkeit besitzt, die vom Verhalten des Polymers nicht beeinflusst wird. (Schwarzl 1990, S. 133 f.)

Wird einem spannungsfreien polymeren Körper hingegen schlagartig eine zeitlich konstante Deformation aufgezwungen, entsteht dadurch in ihm ein spontaner Spannungszustand, der sich aus dem elastischen und viskosen Anteil zusammensetzt. Mit zunehmender Zeit entzieht sich der viskose Teil durch Ausrichtung der Moleküle jedoch der Belastung wodurch die Spannung abnimmt: das *Relaxieren* (vgl. Abb. 2.5 r.). Wird die Deformation wieder umgekehrt und in den Urzustand gezwungen, kehrt sich spontan auch die Spannung um. Ihr elastischer Anteil verschwindet und der viskose Anteil beginnt erneut zu relaxieren, bis der ursprünglich lastfreie Zustand wieder erreicht ist. Dieser Vorgang wird entsprechend als *weggesteuert* beschrieben, da in diesem Fall die Deformation die Eingangsgröße mit zeitlich bekanntem Verlauf ist. (Schwarzl 1990, S. 135 f.)

Zur Beschreibung des viskoelastischen Verhaltens von Polymeren existieren verschiedene Modelle, die sich im Aufbau und dem abbildbaren Verhalten unterscheiden (Brinson u. Brinson 2008, S. 188 f.). Sie bestehen jedoch stets aus einer Kombination der Grundmodelle Viskosität und Elastizität. Diese werden deshalb zunächst einzeln vorgestellt. Die Abbildung 2.3 zeigt deren rheologische Elemente mit ihrer jeweiligen Abhängigkeit zwischen Belastung und Deformation über die Zeit am Beispiel von Schub¹.

Die Grundmodelle

Als *elastisch* wird das Verhalten von Stoffen bezeichnet, deren Spannung (hier *Schubspannung* τ) und Deformation (hier *Schubgleitung* γ) in einer funktional definierten Abhängigkeit stehen (in Abb. 2.3 l.). Diese wird durch die *Steifigkeit* (hier *Schubmodul* G) oder ihren Kehrwert die *Nachgiebigkeit* (hier *Scherkompilanz* J) ausgedrückt. (Schwarzl 1990, S. 133)

$$\tau = \gamma \cdot G = \frac{\gamma}{J} \quad \text{bzw.} \quad \sigma = \varepsilon \cdot E = \frac{\varepsilon}{C} \quad (2.1)$$

Die Steifigkeit selbst ist dabei unabhängig von der Zeit, kann aber eine Funktion der Deformation sein, was zu nichtlinearem Werkstoffverhalten führt. Unabhängig von der Größe der Spannung und der Zeit kehrt ein elastisch deformierter Körper bei Entlastung immer wieder in seinen Ausgangszustand zurück. Die eingebrachte Deformationsenergie wird somit vollständig gespeichert und wieder abgegeben. Die Elastizitätstheorie kommt bei der Betrachtung von Werkstoffen in der Praxis häufig zum Einsatz. Gerade für den Gebrauchszustand wird dabei in der Regel idealisiert linear-elastisches Verhalten angenommen, wobei die Steifigkeit einer Proportionalitätskonstanten entspricht.² Dieser lineare Zusammenhang wird auch nach seinem Entdecker *Hooke'sches Gesetz* genannt und die Proportionalitätskonstanten für die Dehnung ε auch *Elastizitätsmodul* E (engl.: *Youngs Modulus*) und *Kompilanz* C (engl.: *Compliance*) (Grellmann et al. 2015, S. 83 f.). Das rheologische Element zur Abbildung linear-elastischen Verhaltens ist eine Feder mit der zugehörigen Steifigkeit. (Gross et al. 2009, S. 317)

¹Polymere werden meist über ihren Schubmodul G beschrieben. Da das Tragprinzip des SPS auf einer Schubkopplung durch das PUR basiert (vgl. Abschnitt 6.1.1), wird dieses Vorgehen hier übernommen.

²Diese Annahme ist für die Betrachtung kleiner Deformationen meist zulässig, da sich in diesem Bereich auch nichtlineare Werkstoffgesetze mit hinreichender Genauigkeit linearisieren lassen.

Als *viskos* wird das Verhalten von Flüssigkeiten bzw. *Fluiden* beschrieben (in Abb. 2.3 r.). Deren Deformation nimmt unter Belastung mit der Zeit immer weiter zu und bildet sich auch nach Entlastung nicht mehr zurück. Dieses Verhalten wird stellenweise auch als *Fließen* bezeichnet (Schwarzl 1990, S. 133). Wird eine Deformation mit konstanter Geschwindigkeit aufgebracht, tritt die Antwortkraft nur während der Bewegung auf und verschwindet wieder nachdem diese endet.¹ In beiden Fällen wird die eingebrachte Energie stets vollständig dissipiert indem sie in Reibungswärme umgesetzt wird und „verloren“ geht.² Die Größe der im Fluid wirkenden Spannung (hier Schubspannung τ) hängt über dessen *Viskosität* η (auch *Zähigkeit* genannt) unmittelbar von der *Deformationsgeschwindigkeit* $\dot{\gamma}$ (auch *Schergeschwindigkeit* genannt) ab. Die indirekte Abhängigkeit daraus zwischen Spannung und Deformation (hier Schubgleitung γ) enthält neben der *Viskosität* η demnach auch das Integral über die Zeit t . (Mezger 2016, S. 31 ff.)

$$\tau = \eta \cdot \dot{\gamma} = \eta \cdot \frac{d\gamma}{dt} \quad (2.2)$$

Ist η eine Konstante, liegt *ideal*³ *viskoses Verhalten* vor und die Flüssigkeit wird als *Newton'sches Fluid* bezeichnet. Solches Verhalten ist jedoch nur in niedermolekularen Flüssigkeiten zu finden. In der Regel ist die Viskosität η selbst eine Funktion der Schergeschwindigkeit $\dot{\gamma}$.⁴ Die Viskosität hängt außerdem von weiteren Größen wie z. B. dem vorherrschenden Druck und der Temperatur ab (Menges 1984, S. 61). Das rheologische Element zur Abbildung viskosen Verhaltens ist ein Dämpfer mit der zugehörigen Viskosität.

In der Betrachtung von Polymeren spielt vor allem der Einfluss der Temperatur auf ihren viskosen Anteil eine wichtige Rolle. Wie zuvor beschrieben, nimmt deren spezifisches Volumen mit steigender Temperatur zu. Die Moleküle können sich durch ihre erhöhte Beweglichkeit leichter ausrichten bzw. abwickeln. Entsprechend sinkt die Zähigkeit bzw. Viskosität des Stoffs und bspw. Deformationen unter konstanter Belastung nehmen schneller zu.

Lineare Viskoelastizität

Eine Grundform des viskoelastischen Verhaltens bildet die *lineare Viskoelastizität*. Anders als der Begriff vermuten lässt handelt es sich nicht zwangsläufig um eine Kombination der linearen Viskosität mit der linearen Elastizität. Im Fall des *linear-viskosen Verhaltens* bezieht sich die genannte Linearität auf die Beziehung zwischen Deformation und Zeit (s. Abb. 2.3 o.r.), welche eine konstante Viskosität η voraussetzt (Schwarzl 1990, S. 133). Mit der Theorie der linearen Viskoelastizität lassen sich jedoch auch Stoffe beschreiben, deren Viskosität nicht zwangsläufig konstant ist. Die Beschreibung *linear* im Bezug auf viskoses Verhalten wird daher im Weiteren vermieden und der Begriff ausschließlich zur Beschreibung des Zusammenhangs zwischen Spannung und Deformation verwendet. Der Sonderfall einer konstanten Viskosität wird entsprechend als *ideal viskoses Verhalten* bezeichnet (vgl. Schröder 2020, S. 34).

¹Ein Beispiel hierfür ist eine gleichförmig ausgeführte Bewegung mit der Hand durch ruhiges Wasser.

²Streng genommen handelt es sich hierbei nicht um einen Verlust. Die Energieerhaltung im geschlossenen System des Polymers nach dem ersten Satz der Thermodynamik ist weiterhin erfüllt (Herwig et al. 2016, S. 33 f.). Die Wärmeenergie kann nur nicht mehr mechanisch zurückgewonnen werden.

³Stellenweise findet sich anstatt *ideal* auch der Terminus *linear* (s. bspw. Brinson u. Brinson 2008, S. 88).

⁴Ähnlich dem Fall der linearen Elastizität kann bei kleinen Deformationsgeschwindigkeiten und konstanten Umgebungsbedingungen auch für diese Fluide *ideal viskoses Verhalten* angenommen werden.

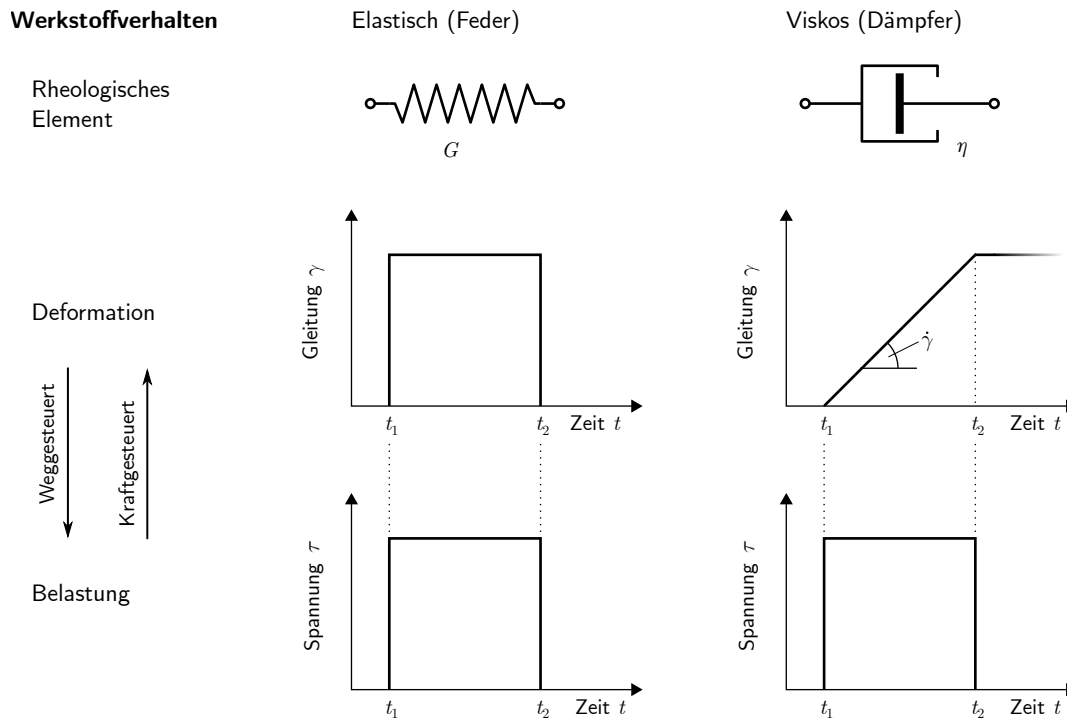


Abbildung 2.3: Die Grundelemente der Viskoelastizität Feder und Dämpfer mit ihrem schematischen Verhalten über die Zeit in Anlehnung an Menges (1984, S. 74)

In der linearen Viskoelastizität verhalten sich Belastung und Deformation zu jedem Zeitpunkt proportional zueinander. Anders als in der Elastizitätstheorie ist der Proportionalitätsfaktor dabei keine Konstante, sondern eine Funktion der Zeit t bzw. der Belastungsgeschwindigkeit $\dot{\gamma}$ bei einer konstanten Temperatur T . Für die Fälle Relaxation (folgend immer links) und Kriechen (folgend immer rechts) kann analog zu Gleichung 2.1 für $T = \text{const.}$ geschrieben werden:

$$\tau(t) = \gamma_0 \cdot G(t) \qquad \gamma(t) = \tau_0 \cdot J(t) \qquad (2.3)$$

Diese Beziehungen gelten jedoch nur im *linear-viskoelastischen Bereich* (kurz: *LVE-Bereich*) kleiner Deformationen bis etwa $\gamma \leq 1\%$ für den Glaszustand (Mezger 2016, S. 164). Hier besteht noch keine Abhängigkeit von der Höhe der Belastung. Für größere Deformationen wird der Gültigkeitsbereich der linearen Viskoelastizität verlassen und deren Gesetzmäßigkeiten sind nicht mehr oder nur eingeschränkt anwendbar. Die lineare Viskoelastizität ist essentielle Voraussetzung für die ingenieurmäßige Beschreibung von viskoelastischen Stoffen. Ihre Gültigkeit basiert auf den drei folgenden Prinzipien, welche eine Anwendung im technischen Bereich erst ermöglichen (Menges 1984, S. 112 ff.).

Das Boltzmann'sche Superpositionsprinzip besagt, dass sich die Gesamtantwort eines Stoffs auf eine Reihe von Stimuli aus der Summe seiner Einzelantworten auf jeden Stimulus zusammensetzt (Schwarzl 1990, S. 137). Im Fall des in der folgenden Gleichung und in Abbildung 2.4 jeweils auf der rechten Seite gezeigten Kriechens bedeutet dies konkret, dass sich die resultie-

rende Gesamtverformung aus der Summe der durch die einzelnen Lasten induzierten Verformungen ergibt. Für den Fall der Relaxation gilt das Prinzip analog, wie der Gleichung und Abbildung 2.4 jeweils auf der linken Seite zu entnehmen ist. In beiden Fällen ist zu beachten, dass für jede Stufe eine jeweils eigene Zeitspanne gilt, die erst mit dem Stimulus beginnt.

$$\begin{aligned}
 \tau_{\text{res}}(t) &= \tau_1(t - t_1) + \tau_2(t - t_2) \\
 &= \gamma_1 \cdot G(t - t_1) \\
 &\quad + \gamma_2 \cdot G(t - t_2)
 \end{aligned}
 \qquad
 \begin{aligned}
 \gamma_{\text{res}}(t) &= \gamma_1(t - t_1) + \gamma_2(t - t_2) \\
 &= \tau_1 \cdot J(t - t_1) \\
 &\quad + \tau_2 \cdot J(t - t_2)
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

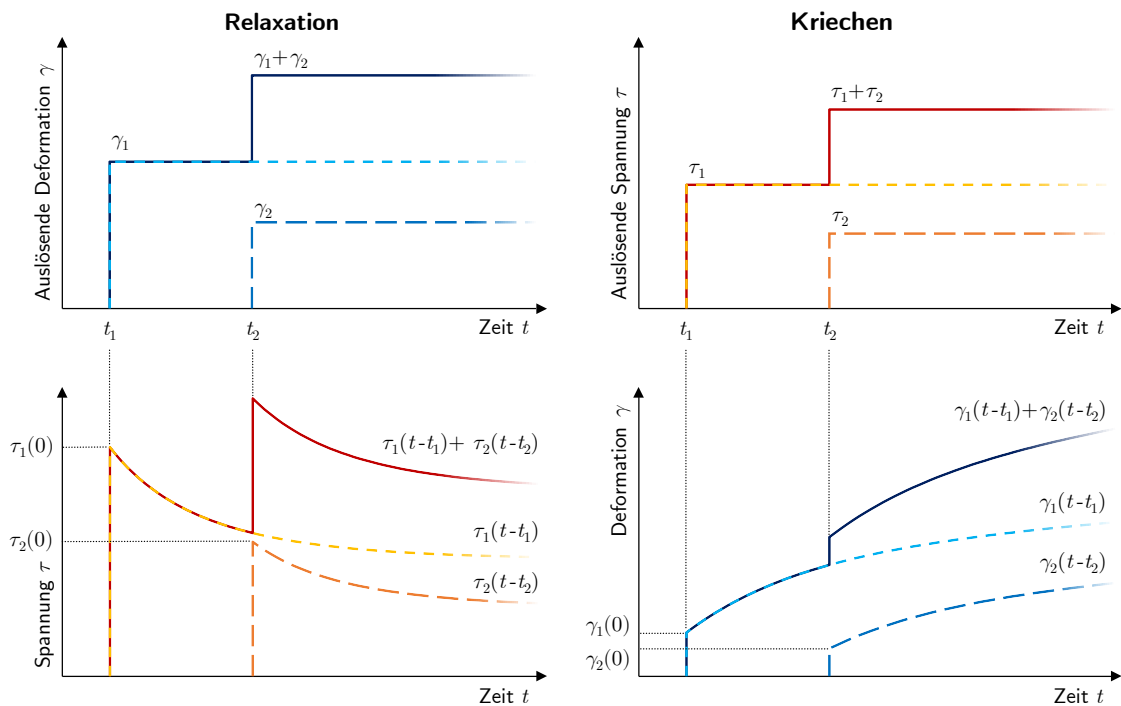


Abbildung 2.4: Sinngemäße Darstellung des Boltzmann'schen Superpositionprinzips anhand von stufenweisem Relaxieren bzw. Kriechen in Anlehnung an Brinson u. Brinson (2008, S. 211 ff.)

Das Korrespondenzprinzip leitet sich aus dem Boltzmann'schen Superpositionsprinzip ab und stellt die ungemein wichtige Verbindung zwischen der linearen Viskoelastizität und der Elastizitätstheorie her.¹ Es besagt, dass alle Lösungen und Verfahren der Elastizitätstheorie auch mit viskoelastischen Größen angewendet werden können. Dafür werden die Größen der Elastizitätstheorie wie z. B. der Schubmodul G durch ihre viskoelastischen Pendanten wie z. B. den Relaxationsmodul $G(t)$ ersetzt (Menges 1984, S. 112). Dies wurde z. B. in den Gleichungen 2.3 bereits angewendet. Genauere Herleitungen hierzu zeigt bspw. auch Schwarzl (1990, S. 233 ff.).

¹Das Korrespondenzprinzip spielt nicht nur für die konkrete Untersuchung des PUR im SPS eine wichtige Rolle, sondern ermöglicht auch erst die Übertragung der gewonnen Erkenntnisse auf die Berechnungen von SPS-Elementen im weiteren Verlauf der Arbeit (siehe Teil II).

Das Zeit-Temperatur-Verschiebungsprinzip beschreibt den Einfluss der Temperatur auf die in einem Stoff ablaufenden Prozesse. Es besagt, dass alle Relaxationsmechanismen im Polymer die gleiche Temperaturabhängigkeit besitzen und sich bei deren Änderung entsprechend gleich verhalten. Ist das Prinzip in einem Polymer gegeben gilt dieses als *thermorheologisch einfach* (Schwarzl 1990, S. 203). Die *Zeit-Temperatur-Verschiebung* (Abkürzung: *ZTV* oder *TTS* für engl.: *Time-Temperature Superposition*) kommt in der experimentellen Untersuchung von thermorheologisch einfachen Polymeren standardmäßig zum Einsatz. Auch für die vorliegende Arbeit spielt die ZTV eine sehr wichtige Rolle und wird daher in Abschnitt 2.1.5 noch einmal aufgegriffen und näher erläutert.

2.1.3 Die mechanische Beschreibung des Langzeitverhaltens von Polymeren

Zur Beschreibung des Verhaltens von Polymeren über die Zeit existieren wie bereits erwähnt verschiedene Modelle, welche aus den Grundmodellen zusammengesetzt sind (s. z. B. Brinson u. Brinson 2008, S. 188 f.). Als Hauptvertreter sind hier das *Maxwell*-, das *Kelvin-Voigt*- und das *Burgers-Modell* zu nennen. Auf deren gesonderte Darstellung wird an dieser Stelle jedoch verzichtet, da die ersten beiden als Elemente in den folgenden Abbildungen enthalten sind. Das Maxwell-Modell beschreibt einen elementaren Relaxationsvorgang und besteht aus einer Feder in Reihe geschaltet mit einem Dämpfer (s. bspw. in Abb. 2.5 das mit dem Index n bezeichnete Feder-Dämpfer Paar). Ein elementarer Kriechvorgang hingegen wird durch das Kelvin-Voigt-Modell abgebildet, welches aus einer Parallelschaltung der genannten Grundelemente besteht (s. bspw. in Abb. 2.6 das Feder-Dämpfer Paar ebenfalls mit dem Index n). Das Burgers- oder auch *Vier-Parameter-Modell* ergibt sich aus einer Reihenschaltung eines Maxwell- und eines Kelvin-Voigt-Elements. Mit ihm kann bereits ein einfaches viskoelastisches Verhalten angenähert werden (Mezger 2016, S. 125 ff.).

Durch die Formulierung von Gleichgewicht und Verträglichkeit an den Modellen und Lösung der sich ergebenden Differentialgleichungen können bspw. für das Maxwell- und das Kelvin-Voigt-Modell mittels Exponentialansätzen folgende Zustandsgleichungen hergeleitet werden (für nähere Herleitungen siehe Brinson u. Brinson 2008, S. 87 ff. oder Osswald u. Rudolph 2015, S. 147 ff.). Diese können in der Form von Gleichung 2.3 geschrieben und damit die Terme der zeitabhängigen Steifigkeit $G(t)$ bzw. Nachgiebigkeit $J(t)$ isoliert werden:

Das Maxwell-Modell (Relaxation)

$$\begin{aligned}\tau(t) &= \gamma_0 \cdot G \cdot e^{-t/\lambda} \\ &= \gamma_0 \cdot G(t)\end{aligned}$$

mit

$$G(t) = G \cdot e^{-t/\lambda}$$

und

$$\lambda = \frac{\eta}{G}$$

Das Kelvin-Voigt-Modell (Kriechen)

$$\gamma(t) = \frac{\tau_0}{G} \cdot (1 - e^{-t/\mu}) \quad (2.5)$$

$$= \tau_0 \cdot J(t) \quad (2.3)$$

$$J(t) = \frac{(1 - e^{-t/\mu})}{G} \quad (2.6)$$

$$\mu = \frac{\eta}{G} \quad (2.7)$$

Die Quotienten λ und μ aus Viskosität und Steifigkeit werden *Relaxations-* bzw. *Retardationszeit* genannt. Es ist zu beachten, dass diese für einen Stoff nicht identisch sind, da sich die zugrundeliegenden Mechanismen unterscheiden und für viskoelastische Stoffe anders als aus der Elastizität bekannt $G(t) \cdot J(t) \neq 1$ gilt. Für die Umrechnung zwischen Relaxation und Retardation bedarf es einer inversen Laplace-Transformation, welche an dieser Stelle nicht weiter ausgeführt wird. Für nähere Informationen hierzu wird auf Brinson u. Brinson (2008, S. 211 ff.) und Park u. Schapery (1999) verwiesen.

Die angesprochenen Mehrparameter-Modelle haben eine inhärente Eigenschaft, welche ihre Variabilität entscheidend einschränkt und so nur die Darstellung elementarer Zusammenhänge ermöglicht (s. hierzu bspw. Osswald u. Rudolph 2015, S. 155). Zu ihrer mathematischen Beschreibung, müssen für eine einfache Lösung der zugehörigen Differentialgleichung, die Parameter des Modells als konstant vorausgesetzt werden (für die gezeigten Fälle G und η). Diese Vereinfachung trifft aber gerade im Fall der Viskosität von Polymeren nicht zu, da diese sich nicht wie Newton'sche Fluide verhalten ($\eta \neq \text{const.}$). Wie in den Grundlagen zu viskosem Verhalten in Abschnitt 2.1.2 geschildert, hängt deren Viskosität meist selbst von der Belastungsgeschwindigkeit und damit indirekt von der Zeit ab. Um das Verhalten der Polymere dennoch abbilden zu können bedient man sich daher meist der Darstellung als *Linienspektrum* (Grellmann et al. 2015, S. 89 ff.).

Die Spektraldarstellung

In der linienförmigen Spektraldarstellung werden die Relaxationsfunktion $G(t)$ und Retardationsfunktion $J(t)$ eines Polymers diskretisiert und durch eine endliche Zahl von Maxwell- bzw. Kelvin-Voigt-Elementen angenähert. Die resultierenden Modellfunktionen ergeben sich in Form von *Prony-Reihen*, deren Glieder jeweils Maxwell- oder Kelvin-Voigt-Elemente repräsentieren. Auf diese Weise lassen sich auch sehr individuelle Polymere mit veränderlicher Viskosität darstellen, indem ihre Eigenschaftsfunktion aus einer Summe endlich kleiner Teilstücke mit abschnittsweise konstanten Viskositäten gebildet wird. (Brinson u. Brinson 2008, S. 178 ff.)

Zusätzlich haben Linienspektren den Vorteil, dass sie vom Anwender für ihren Zweck variabel skaliert werden können. Aus der Kurvendiskussion an der Exponentialfunktion eines einzelnen Maxwell- oder Kelvin-Voigt-Elements $e^{-t/(\lambda \text{ bzw. } \mu)}$ ergibt sich, dass diese total monoton von $\lim_{t \rightarrow 0} e^{-t} = 1$ nach $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} = 0$ streben. Die größte Änderung verläuft dabei stets innerhalb von zwei Dekaden der logarithmischen Zeitachse im Bereich der Relaxationszeit λ bzw. der Retardationszeit μ (vgl. hierzu bspw. auch Abbildung AI-71). Um die Eigenschaften angemessen darstellen zu können, empfiehlt es sich daher die jeweilige Funktion in Stücke zu je einer Dekade zu teilen (vgl. Mezger 2016, S. 143 ff.). Entsprechend muss einem zu skalierenden Modell für jede darzustellende Dekade der Zeit ein Maxwell- oder Kelvin-Voigt-Element hinzugefügt werden. Alternativ zum diskreten Linienspektrum existiert auch die Möglichkeit, ein Spektrum mathematisch kontinuierlich zu formulieren. Im Regelfall von experimentell gemessenen Daten für $G(t)$ oder $J(t)$, ist dies jedoch mit hohem Aufwand verbunden und wird deshalb nicht angewendet. (Schwarzl 1990, S. 141 ff.)

Das Relaxieren kann mit dem verallgemeinerten Maxwell-Modell beschrieben werden, welches in Abbildung 2.5 dargestellt ist und dessen diskretes Spektrum die folgenden Form hat:

$$G(t) = G_{\infty} + \sum_{i=1}^n G_i \cdot e^{-t/\lambda_i} \quad (2.8)$$

Verallgemeinertes Maxwell-Modell

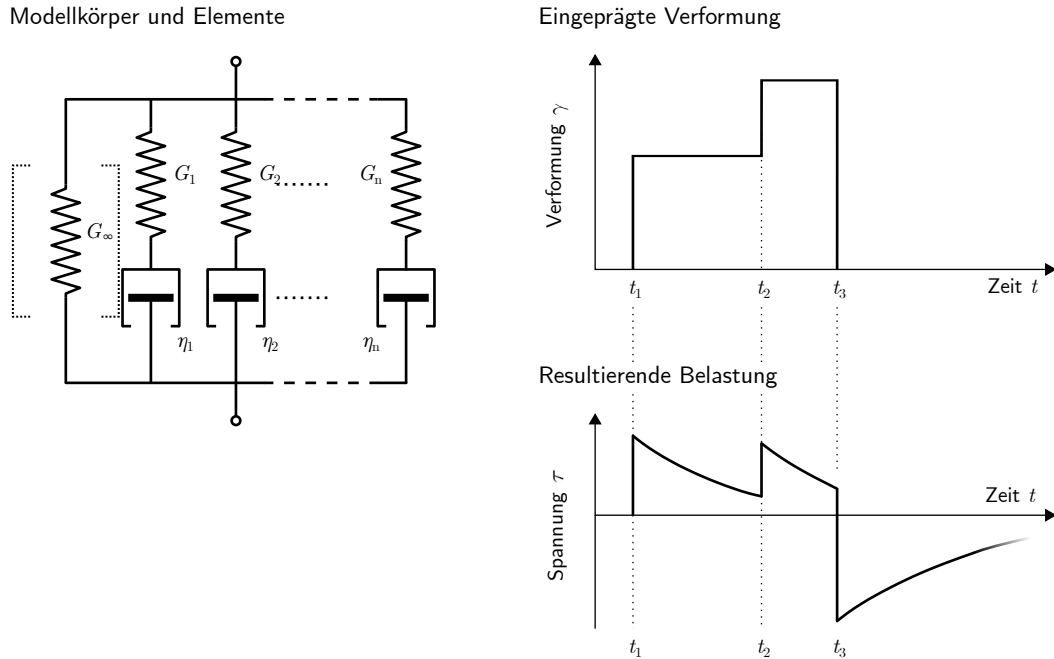


Abbildung 2.5: Das verallgemeinerte Maxwell-Modell¹ zur Darstellung der Relaxation in Anlehnung an Brinson u. Brinson (2008). Den einfachsten Fall bildet das Maxwell-Element mit nur einem in Reihe geschalteten Feder-Dämpfer-Paar.

Das Kriechen kann durch das in Abbildung 2.6 dargestellte verallgemeinerte Kelvin-Voigt-Modell erfasst werden, dessen diskretes Retardationsspektrum folgende Form hat:

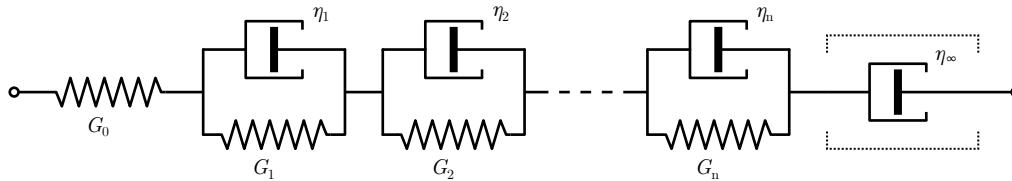
$$J(t) = \frac{1}{G_0} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{G_i} \cdot \left(1 - e^{-t/\mu_i}\right) + \frac{t}{\eta_\infty} \quad (2.9)$$

Die beiden Abbildungen 2.5 und 2.6 zeigen zusätzlich zu den Modellen jeweils einen Beispielverlauf eines eingepprägten Stimulus und die Antwort des Modells darauf. In beiden Modellen kann das Auftreten eines irreversiblen Fließens im Polymer optional abgebildet werden. Im Fall des verallgemeinerten Maxwell-Modells geschieht dies durch Entfernen der Feder mit der Gleichgewichtssteifigkeit G_∞ (in Abb. 2.5 in gepunkteter Klammer). Beim verallgemeinerten Kelvin-Voigt-Modell wird das Fließen durch Hinzufügen des einzelnen Dämpfers mit der Viskosität η_∞ implementiert (in Abb. 2.6 ebenfalls in gepunkteter Klammer). Dessen resultierender Verformungsanteil zeigt sich dann als eine zur Zeitachse verschobene Asymptote. Für die Untersuchungen der vorliegenden Arbeit wird das gezeigte Relaxationsspektrum mit Gleichgewichtssteifigkeit G_∞ zur Anwendung kommen (vgl. Abschnitt 5.2.1).

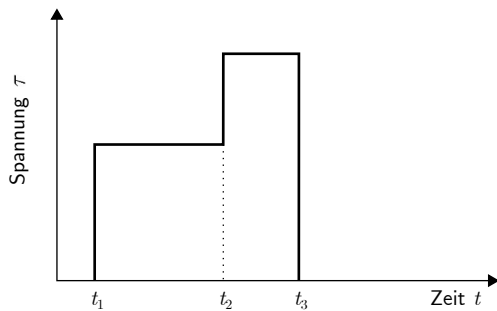
¹Stellenweise wird die Form des Modells mit einer parallel geschalteten Feder mit der Gleichgewichtssteifigkeit G_∞ (durch gestrichelte Umrandung markiert) auch als Maxwell-Wiechert-Modell bezeichnet (Brinson u. Brinson 2008, S. 171 f.).

Verallgemeinertes Kelvin-Voigt-Modell

Modellkörper und Elemente



Eingeprägte Belastung



Resultierende Deformation

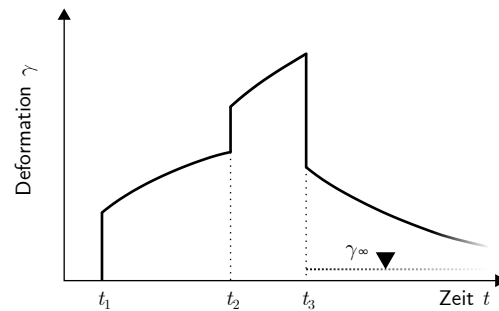


Abbildung 2.6: Das verallgemeinerte Kelvin-Voigt-Modell zur Darstellung des Kriechens in Anlehnung an Brinson u. Brinson (2008). Den einfachsten Fall bildet das Kelvin-Voigt-Element mit nur einem parallel geschalteten Feder-Dämpfer-Paar.

2.1.4 Dynamisch-Mechanisch-Thermische Analyse (DMTA)

Wie bereits erwähnt, hängen die Eigenschaften viskoelastischer Stoffe nicht nur von der Temperatur, sondern auch von der Zeit bzw. der Belastungsgeschwindigkeit ab. Ihre Beschaffenheit lässt sich alternativ zu langwierigen Kriech- oder Relaxationsexperimenten, auch mit dynamischen Methoden untersuchen. Die *Dynamisch-Mechanisch-Thermische Analyse (DMTA)*¹ ermöglicht es, die viskoelastischen Eigenschaften von Stoffen über einen weiten Bereich effizient zu untersuchen. Sie findet daher in der Charakterisierung von Polymeren standardmäßig Anwendung und spielt auch in der vorliegenden Arbeit eine essentielle Rolle. Im Gegensatz zu Kriech- oder Relaxationsversuchen ist diese Versuchsart im Bauwesen jedoch weniger verbreitet. Ihr Prinzip und wichtige Grundlagen für die Untersuchungen vorliegender Arbeit werden daher folgend kurz erläutert.

In der DMTA wird eine Materialprobe einer dynamisch oszillierenden Belastung unterzogen und deren Antwort unter wahlweise wechselnden Randbedingungen gemessen. Aus dieser können daraufhin die elastischen und viskosen Kenngrößen des Materials in Abhängigkeit von den Randbedingungen ermittelt werden. Je nach Zustand bzw. Form der Probe stehen nach DIN EN ISO 6721-1 verschiedene Arten der Belastung zur Verfügung (Zug, Biegung, Schub, Torsion), welche jeweils last- oder weggesteuert aufgebracht werden können. In vorliegender

¹Nach DIN EN ISO 472 werden für rheologische Untersuchungen eines Stoffs nur die beiden Abkürzungen *DMA* (Dynamisch-mechanische Analyse) und *TMA* (Dynamische thermomechanische Analyse) eingeführt. Da die Versuche vorliegender Arbeit sowohl die Temperatur als auch die Frequenz betrachten, wird die Abkürzung *DMTA* verwendet, welche in Praxis und Literatur ebenfalls zu finden ist.

Arbeit wurde das nach seiner Belastung benannte Torsionspendel-Verfahren angewendet, welches in DIN EN ISO 6721-2 geregelt ist (vgl. Abschnitt 4.1). Dabei wird ein Polymerstreifen einer Torsionsschwingung ausgesetzt und das daraus resultierende Moment gemessen, aus dem über den Torsionswiderstand auf die Spannungen im Probekörper zurückgerechnet wird. Aus den Messdaten werden anschließend die Stoffparameter des Polymers wie z. B. die Steifigkeit und die Dämpfung ermittelt.

Um das Prinzip anhand eines Beispiels zu veranschaulichen, wird folgend in Anlehnung an Brinson u. Brinson (2008, S. 191 ff.) und Schwarzl (1990, S. 176 f.) die Messung der viskoelastischen Eigenschaften eines Materials bei konstanter Temperatur mittels DMTA betrachtet. Der fiktiven Probe wird eine gleichmäßige, sinusförmig oszillierende Schubdeformation $\gamma(t)$ mit konstanter *Kreisfrequenz* ω aufgezwungen.

$$\gamma(t) = \gamma_0 \cdot \sin(\omega t) \quad (2.10)$$

Um die Phänomene am Einheitskreis darstellen zu können, wird vereinfachend angenommen, dass die Amplituden der aufgebrachten Deformation und der gemessenen Spannung gleich sind $\gamma_0 = \tau_0 = 1$. Außerdem wird vorausgesetzt, dass die Amplitude γ_0 klein ist und innerhalb des LVE-Bereichs verbleibt. Abbildung 2.7 zeigt rechts als durchgezogene Linien die periodischen Verläufe der messbaren Zustandsgrößen über dem Produkt aus Zeit und Kreisfrequenz $\omega \cdot t$ im eingeschwungenen Zustand. Während die Gleitung $\gamma(t)$ (grün) dem regulären Sinus entspricht, schwingt die gemessene Spannungsantwort $\tau(t)$ (rot) um einen konstanten Betrag δ verschoben. Übertragen auf den links in der Abbildung dargestellten Einheitskreis läuft die Spannung der Gleitung demnach um den Winkel δ voraus.

$$\tau(t) = \tau_0 \cdot \sin(\omega t + \delta) \quad (2.11)$$

Hierin liegt der Unterschied zwischen viskoelastischen und elastischen Stoffen: Letztere schwingen in dynamischen Analysen stets mit der Anregung in Phase. Die *Phasenverschiebung* δ zeigt demnach den viskosen Teil des Stoffs. Sie kann genutzt werden, um Rückschlüsse auf die Verteilung der mechanisch eingebrachten Energie innerhalb des Materials und seine Steifigkeit zu ziehen. Dafür wird das Materialverhalten der betrachtete Probe als Parallelschaltung der zugehörigen Grundelemente Feder und Dämpfer modelliert,¹ auf deren Darstellung an dieser Stelle jedoch verzichtet wird. Prinzipiell ähnelt das Modell einem der Feder-Dämpfer-Paare in Abbildung 2.6 (bspw. mit dem Index n). Dabei besitzt die Feder eine Steifigkeit $G'(\omega)$ und auch die Viskosität $\eta(\omega)$ des Dämpfers hängt anders als im Kelvin-Voigt-Modell von der Belastungs- bzw. Kreisfrequenz ab (vgl. Schröder 2020, S. 35 f.). Die Abhängigkeiten sind notwendig, um das Werkstoffverhalten mit nur einem Paar an Grundelementen erfassen zu können (vgl. auch die Erläuterungen zur Spektralform in Abschnitt 2.1.3).

An dem parallel geschalteten Feder-Dämpfer Paar wird Gleichgewicht formuliert und die Modellgesetze der Elemente darin eingesetzt (Gln. 2.1 u. 2.2). Dabei wird der Spannungsanteil der Feder mit τ_{in} benannt, da er mit der Anregung *in* Phase schwingt. An der Ableitung des viskosen Anteils ist zu erkennen, dass dieser mit einer Phasenverschiebung von $\delta_{\text{out}} = \pi/2$ zur Deformation $\gamma(t)$ schwingt (s. Abb. 2.7). Er wird entsprechend mit τ_{out} bezeichnet.

¹Wie bereits zu Beginn von Abschnitt 2.1.2 erläutert, kann die Viskoelastizität als eine Kombination aus Elastizität und Viskosität verstanden werden.

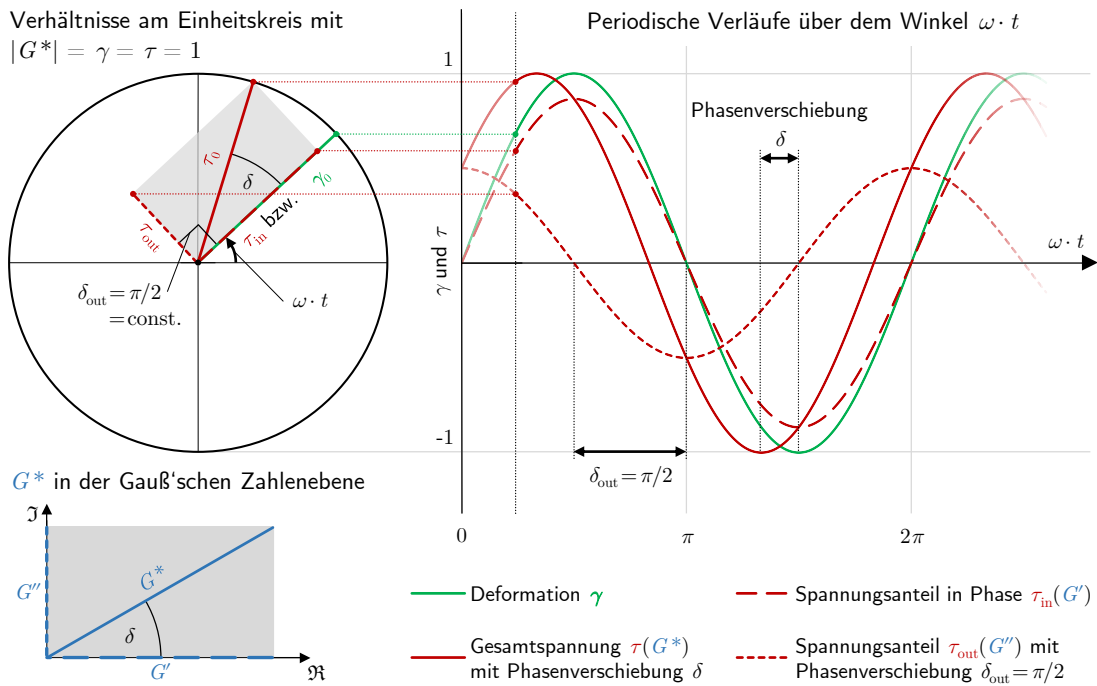


Abbildung 2.7: Prinzip der DMTA anhand einer eingeschwingenen, erzwungenen oszillierenden Schubdeformation mit Darstellung der Speicher- und Verlust-Komponenten am Einheitskreis und in der Gauß'schen Ebene in Anlehnung an Brinson u. Brinson (2008, S. 191 ff.)

	Elastischer Anteil (Feder)		Viskoser Anteil (Dämpfer)	
$\tau(t) =$	τ_{in}	+	τ_{out}	(2.12)
$=$	$G'(\omega) \cdot \gamma(t)$	+	$\eta(\omega) \cdot \dot{\gamma}(t)$	
$=$	$G'(\omega) \cdot \gamma_0 \cdot \sin(\omega t)$	+	$\eta(\omega) \cdot \gamma_0 \cdot \frac{d \sin(\omega t)}{dt}$	
$=$	$\gamma_0 \cdot \left[G'(\omega) \cdot \sin(\omega t) + \eta(\omega) \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) \right]$			(2.13)

Das Produkt aus Viskosität η und Kreisfrequenz ω wird *Verlustmodul* G'' genannt (Schröder 2020, S. 35). Er spiegelt den Teil der mechanischen Energie wider, der über die inneren Bewegungen der Molekülketten nicht gespeichert werden kann. Sein Konterpart G' aus der Feder wird entsprechend *Speichermodul* genannt.

$$\tau(t) = \gamma_0 \cdot \left[G'(\omega) \cdot \sin(\omega t) + G''(\omega) \cdot \cos(\omega t) \right] \quad (2.14)$$

Die gemessene Spannung aus Gleichung 2.11 wird herangezogen und über ein Additionstheorem in die Form der voran stehenden Gleichung gebracht.

$$\tau(t) = \tau_0 \cdot \left[\cos(\delta) \cdot \sin(\omega t) + \sin(\delta) \cdot \cos(\omega t) \right] \quad (2.15)$$

Durch Vergleich der Summanden von Gleichung 2.15 und 2.16 für $\tau(t)$ können die folgenden Terme für Speicher- bzw. Verlustmodul gefunden werden.

$$G'(\omega) = \frac{\tau_0}{\gamma_0} \cdot \cos(\delta) \qquad G''(\omega) = \frac{\tau_0}{\gamma_0} \cdot \sin(\delta) \qquad (2.17)$$

Das in beiden vorkommende Verhältnis der Amplituden von Spannung und Gleitung wird als *Absolutwert der komplexen dynamischen Steifigkeit* $|G^*|$ bezeichnet (Schwarzl 1990, S. 176).¹

$$|G^*|(\omega) = \frac{\tau_0}{\gamma_0} = \sqrt{(G'(\omega))^2 + (G''(\omega))^2} \qquad (2.18)$$

Zur ganzheitlichen Beschreibung des Stoffs reicht der gezeigte Absolutwert jedoch nicht aus, da er keine Information über die innere Verteilung der mechanischen Energie auf Speicher- und Verlustkomponente enthält. Dies wird auch bei Betrachtung von Gleichung 2.11 ersichtlich, die ohne δ nicht lösbar ist. Daher macht man sich die Tatsache zunutze, dass die viskose und elastische Phase stets um $\pi/2$ versetzt zueinander schwingen und so als linear unabhängige Vektoren eine Ebene aufspannen (siehe die graue Ebenen in Abb. 2.7). Interpretiert man diese als komplexe bzw. Gauß'sche Ebene, lässt sich das Polymer über eine *komplexe dynamische Steifigkeit* $G^*(\omega)$ beschreiben. Ihren Realteil bildet der Speichermodul $G'(\omega)$ und den Imaginärteil der Verlustmodul $G''(\omega)$. Zur umfassenden Beschreibung der komplexen dynamischen Steifigkeit benötigt man demnach stets zwei der vier folgend gezeigten Parameter.

$$G^*(\omega) = G'(\omega) + i G''(\omega) = |G^*|(\omega) \cdot e^{i\delta} \qquad (2.19)$$

Der *Verlustfaktor* $\tan \delta$ ist ein Maß für die innere Dämpfung des Stoffs und zeigt das Verhältnis von dessen Verlust- und Speichermodul in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz.

$$\tan \delta(\omega) = \frac{G''(\omega)}{G'(\omega)} \qquad (2.20)$$

Verschiedene Sweeps der DMTA

Wie an den zahlreichen Einschränkungen im Vorfeld des gezeigten Beispiels zu erkennen ist, existieren viele Einflussgrößen für die Eigenschaften eines Polymers. Deren Auswirkungen können mithilfe der DMTA auf unterschiedliche Weise gemessen werden. In einem sogenannten *Sweep* wird das Verhalten eines Stoffs bei kontinuierlicher Änderung einer Randbedingung gemessen. Abbildung 2.8 zeigt qualitative Beispiele der wichtigsten Sweeps.

In einem *Temperatur-Sweep* (TS) werden bspw. die Kreisfrequenz und Deformation konstant gehalten, während die Temperatur verändert wird. Auf diese Weise kann deren Effekt auf die Eigenschaften des Polymers isoliert betrachtet werden. Um die Auswirkungen der Belastungsgeschwindigkeit bzw. der Zeit zu untersuchen, wird in *Frequenz-Sweeps* (FS) die Kreisfrequenz oftmals logarithmisch variiert. Zur Bestimmung der Grenzen des LVE-Bereichs wird in einem *Amplituden-Sweep* (AS) die Größe der Deformationsamplitude kontinuierlich erhöht.

¹Aufgrund der vereinfachend gewählten Verhältnisse des Beispiels in Abbildung 2.7 gilt ebenfalls $|G^*| = 1$.

Auch Kombinationen der gezeigten Sweeps können angewendet werden. So erhöht man bspw. in einem *Temperatur-Frequenz-Sweep* (TFS) stufenweise die Temperatur und führt auf jeder Stufe einen Frequenz-Sweep durch. Diese Art kommt vor allem zur Untersuchung der Eigenschaften eines Polymers über einen weiten Frequenzbereich unter Ausnutzung der Zeit-Temperatur-Verschiebung zum Einsatz. Die TF-Sweeps spielen auch für die vorliegende Arbeit eine essentielle Rolle.

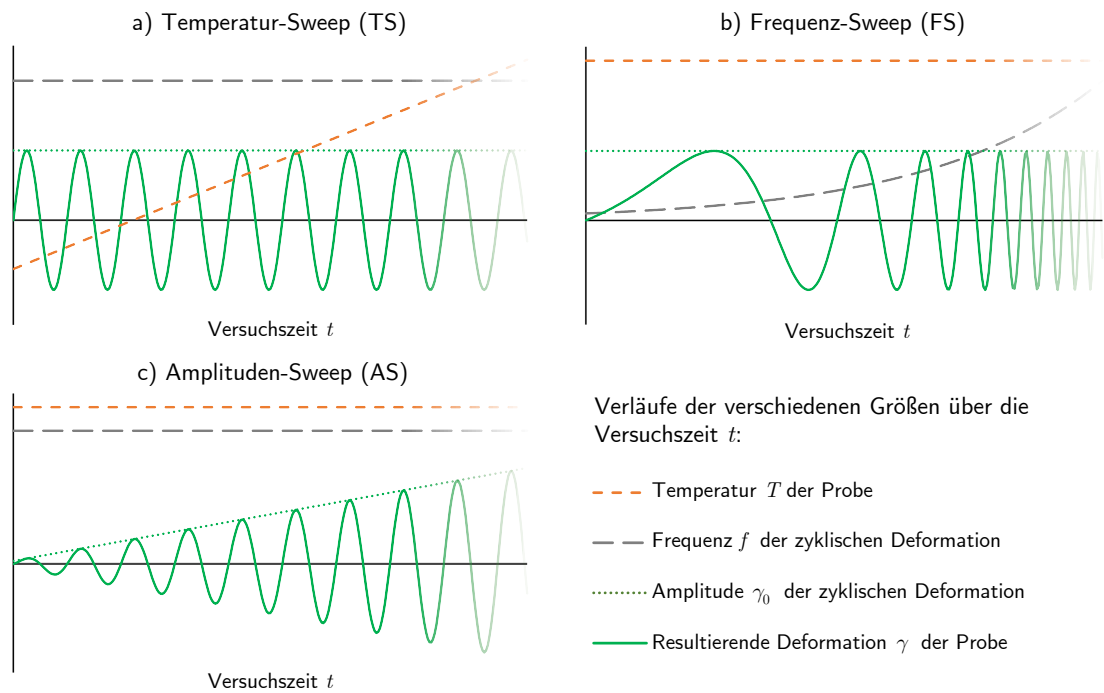


Abbildung 2.8: Verschiedene Arten von DMTA-Sweeps bei denen jeweils ein anderer Parameter im Versuch variiert wird in Anlehnung an Mezger (2016)

Der Zusammenhang zwischen Zeit- und Frequenzbereich

Um aus dem in der DMTA gemessenen dynamischen Verhalten eines Polymers dessen Langzeitverhalten zu ermitteln, müssen die Messdaten vom Frequenz- in den Zeitbereich umgerechnet werden. Dafür bestehen verschiedene Ansätze, welche sich in Aufwand und Genauigkeit unterscheiden.

Das genaueste aber auch mathematisch aufwendigste Verfahren ist die Umrechnung der Funktion einer viskoelastische Größe mittels inverser Laplace- oder Fourier-Transformation. Dafür muss diese aber als analytische Funktion bekannt und zumindest abschnittsweise stetig sein, was mit den punktförmigen Ergebnisse einer DMT Analyse nicht ohne weiteres erfüllt ist. Daher bedient man sich für die Umrechnung in der Regel der in Abschnitt 2.1.3 gezeigten Prony-Reihen. Diese wurden bereits erfolgreich vom Zeit- in den Frequenz-Bereich transformiert und die Lösungen sind hinlänglich bekannt. Auf eine genauere Herleitung wird daher verzichtet und an dieser Stelle auf Schwarzl (1990, S. 176 ff.) oder Brinson u. Brinson (2008, S. 222 ff.) verwiesen.

Die Lösung der in den Frequenzbereich umgerechneten Prony-Reihe des Relaxationsmoduls $G(t)$ (s. Gl. 2.8) lautet:

$$G'(\omega) = G_\infty + \sum_{i=1}^n G_i \cdot \frac{\omega^2 \cdot \lambda_i^2}{1 + \omega^2 \cdot \lambda_i^2} \quad (2.21)$$

$$G''(\omega) = \sum_{i=1}^n G_i \cdot \frac{\omega \cdot \lambda_i}{1 + \omega^2 \cdot \lambda_i^2} \quad (2.22)$$

Dabei bleiben die Relaxationsstärken G_i und -zeiten λ_i erhalten. So ist es möglich, die Parameter durch eine Funktionsanpassung im Frequenzbereich zu bestimmen und diese für die Beschreibung der Reihe im Zeitbereich zu übernehmen. Dieses Verfahren kommt in vorliegender Untersuchung zum Einsatz und wird in Abschnitt 5.2.1 näher erläutert.

Eine einfachere Variante ist die Umrechnung über Näherungsfunktionen. Schwarzl (1990, S. 182 ff.) präsentiert Lösungen verschiedener Genauigkeit für alle wichtigen viskoelastischen Größen, die über Zweipunktnäherungen ermittelt wurden. Notwendige Voraussetzung für deren Anwendung ist jedoch, dass die Messpunkte der zugrunde liegenden DMT Analyse logarithmisch zur Basis 2 über die Erregerfrequenz verteilt sind. Die einfachste Form der Umrechnung stellt die alleinige Verwendung des ersten Summanden der Näherungsgleichungen dar, was für jede Art der Messpunktverteilung anwendbar ist:

$$G(t) \approx G' \left(\frac{1}{\omega} \right) \quad (2.23)$$

Dabei wird empirisch die folgende Beziehung zwischen Frequenz f , Kreisfrequenz ω und Zeit t vorausgesetzt (Schwarzl 1990, S. 172):

$$\omega = 2\pi \cdot f = \frac{1}{t} \quad (2.24)$$

2.1.5 Das Zeit-Temperatur-Verschiebungsprinzip (ZTV)

Wie bereits zuvor in Abschnitt 2.1.2 beschrieben, hängt die Zähigkeit viskoelastischer Stoffe von ihrer Temperatur ab. Im thermorheologisch einfachen Fall hat deren Änderung dabei auf alle Relaxationsmechanismen die gleichen Auswirkungen. Entsprechend verschiebt eine Verringerung der Temperatur alle im Stoff ablaufenden Prozesse zu längeren Zeiten, da die Bewegungsfähigkeit der Moleküle durch das verringerte spezifische Volumen eingeschränkt wird und langsamer abläuft. Dementgegen führt eine Erhöhung der Temperatur zu einer Zunahme der Bewegungsfähigkeit und somit zu einer Beschleunigung der Prozesse was zu einer Verschiebung zu kürzeren Zeiten führt. In beiden Fällen wird das gesamte Spektrum des Stoffs über der Zeit- bzw. Frequenzachse gleichmäßig verschoben während seine Gestalt erhalten bleibt (vgl. Schwarzl 1990, S. 202).

Übertragen auf das verallgemeinerte Kelvin-Voigt-Modell in Abbildung 2.6 führt bspw. die Erhöhung der Temperatur dazu, dass die Viskosität in allen Dämpfern gleichermaßen abnimmt und bei gleicher Belastung die entstehenden Kriechdeformationen gleichmäßig größer skaliert werden. Die Auswirkung auf die elastischen Anteile kann dabei zwar von derjenigen auf die Viskosität abweichen, jedoch gilt auch für die Federn, dass diese gleichermaßen auf die Temperatur reagieren. Die Kriechkurve wird entsprechend gestreckt, die jeweiligen Verhältnisse der elastischen- und der Kriechverformungen untereinander bleiben jedoch erhalten.

Dieses Phänomen der ZTV, welches für thermorheologisch einfache Stoffe eine ingenieurmäßige Näherung darstellt (Schwarzl 1990, S. 203), macht man sich in der experimentellen Untersuchung von Polymeren zunutze. Dort spielt es vor allem für die Charakterisierung der Steifigkeit eine wichtige Rolle. Es ermöglicht bspw. die Versuchsdauer zur Untersuchung des Langzeitverhaltens deutlich zu verkürzen. Abbildung 2.9 zeigt das Prinzip der ZTV anhand eines qualitativen Beispiels der Steifigkeit eines Polymers im Bereich seiner Haupterweichung. In einer fiktiven DMT Analyse werden Frequenz-Sweeps über eine Breite von maximal $0,01 \text{ Hz} \leq f \leq 100 \text{ Hz}$ auf sieben verschiedenen *Temperaturstufen* T_S (T_1 bis T_7) durchgeführt (Menard 1999, S. 16). Die gemessenen Eigenschaftskurven werden durch Faktorisierung der Funktionswerte der Kreisfrequenz ω in der sogenannten *Masterung* über der Frequenzachse *horizontal* verschoben und zu einer *Masterkurve* bei einer *Referenztemperatur* T_R zusammengesetzt (in diesem Beispiel ist $T_R = T_4$). Dieser Zusammenhang ist ebenso auf den Verlustmodul G'' sowie den Verlustfaktor $\tan \delta$ anwendbar.

$$G'(\omega, T_R) = G'(\omega \cdot a_{R/S}, T_S) \quad (2.25)$$

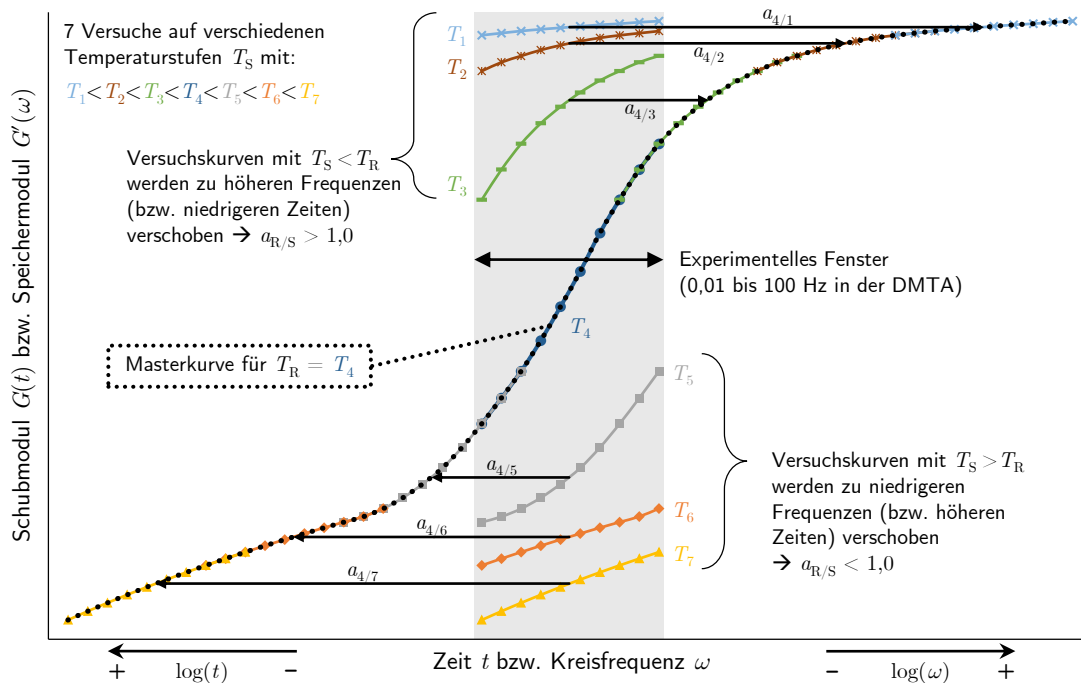


Abbildung 2.9: Das ZTV-Prinzip am Beispiel einer Masterung mit sieben Frequenz-Sweeps auf verschiedenen Temperaturen in Anlehnung an Grellmann et al. (2015) und Schwarzl (1990)

Initial sind die *horizontalen Verschiebungsfaktoren* $a_{R/S}$ für ein Polymer nicht bekannt und müssen zunächst ermittelt werden. Dafür verschiebt man die gefundenen Versuchskurven iterativ, bis eine möglichst genaue Überlappung mit der nächsten Kurve entsteht. Aus dem Verhältnis der Kreisfrequenzen der Referenztemperatur T_R zu der bezogenen T_S ergibt sich dann der Verschiebungsfaktor (Mezger 2016, S. 227).

$$\omega_R = \omega_S \cdot a_{R/S} \quad (2.26)$$

Die Ermittlung der Verschiebungsfaktoren kann dabei bezogen auf eine bereits festgelegte globale Referenztemperatur oder inkrementell zwischen zwei jeweils benachbarten Kurven erfolgen. Auf die Funktionsweise dieser iterativen Methode und die Erstellung der Masterkurve wird im späteren Abschnitt 4.1.2 zur Ermittlung der horizontalen Verschiebungsfaktoren für das PUR im SPS noch genauer eingegangen. In der Literatur findet sich für die horizontalen Verschiebungsfaktoren oftmals die Schreibweise a_T mit nur einem Index T, welcher den Bezug zur Temperatur verdeutlichen soll (vgl. bspw. Brinson u. Brinson 2008, S. 247). Wie Gleichung 2.25 zeigt, hängen die Faktoren jedoch stets von der in einer Messung vorherrschenden Temperatur T_S und der Referenztemperatur T_R ab, auf welche umgerechnet werden soll. Schwarzl (1990, S. 203) verwendet dafür die deutlichere Schreibweise $a(T, T_0)$, mit $T_0 = T_R$. In der vorliegenden Arbeit wird eine davon abgewandelte Schreibweise verwendet:

$$a_T \equiv a(T_R, T_S) \equiv a_{R/S} = 1/a_{S/R} \quad (2.27)$$

Dabei wird die Zieltemperatur des Verschiebungsfaktors oder deren Sweep-Nummer stets als Erstes genannt und die zu beziehende Temperatur oder deren Sweep-Nummer danach. In der minimalistischen Schreibweise $a_{R/S}$ wird dabei statt eines Kommas zu deren Trennung ein Schrägstrich verwendet, um auf den Zusammenhang der Berechnung hinzuweisen. So kann die zur Umrechnung durchzuführende Dreisatzrechnung direkt am Index des Verschiebungsfaktors abgelesen werden (s. Gl. 2.26).

Da die ZTV auf allgemeinen Mechanismen der inneren Struktur von Polymeren basiert, wie bspw. der Änderung des spezifischen Volumens und der Viskosität, lassen sich daraus Gesetze zur Beschreibung der ZTV ableiten (Schröder 2020, S. 169 ff.). Die Formulierung eines ZTV-Gesetzes für ein Polymer hat verschiedene Vorteile. Zum einen kann dessen Temperaturabhängigkeit auf diese Weise mit nur wenigen Parametern beschrieben und eine numerisch aufwendige Berechnung über tabellierte Messwerte vermieden werden. Zum anderen lassen sich damit auch beliebige Zwischenwerte berechnen für deren Temperaturen keine Messungen vorhanden sind. Darüber hinaus ermöglicht ein analytisches ZTV-Gesetz in Kombination mit einer Relaxationsfunktion $G(t)$ die Ermittlung einer Steifigkeitsfläche für das Polymer, welche dessen Steifigkeit in Abhängigkeit von der Zeit und der Temperatur $G(t, T)$ beschreibt (s. z.B. Menges 1984, S. 115). Die beiden am weitesten verbreiteten ZTV-Gesetze sind die Arrhenius- und die WLF-Funktion, welche folgend kurz vorgestellt werden.

Die Arrhenius-Funktion

Die Funktion beruht auf dem Verhältnis zweier Arrhenius-Gleichungen (Mezger 2016, S. 90 f. bzw. Brinson u. Brinson 2008, S. 244), welche die Abhängigkeit der Reaktionsgeschwindigkeit in Stoffen von der Temperatur beschreibt. Umgeformt und auf die Nomenklatur der vorliegenden Arbeit angepasst lautet diese:¹

$$\log a_{R/S} = \frac{E_a}{\ln 10 \cdot R} \cdot \left(\frac{1}{T_S} - \frac{1}{T_R} \right) \quad (2.28)$$

mit

E_a : Aktivierungsenergie in J/mol
 R : universelle Gaskonstante 8,3145 J/(mol K)
 T : absolute Temperaturen in K

Zum Gültigkeitsbereich der Arrhenius-Funktion finden sich in der Literatur verschiedene Angaben. Während Schwarzl (1990, S. 215 ff.) und Brinson u. Brinson (2008, S. 243 f.) diese zur Beschreibung von Relaxationsprozessen im Glaszustand empfehlen, schließen andere Autoren deren Verwendung im Glasbereich grundsätzlich aus. Sie verorten deren Anwendungsbereich in Temperaturen $T > T_g + 100$ K und oberhalb des Schmelzvorgangs in teilkristallinen Polymeren bzw. im Fließbereich amorpher Polymere (vgl. Mezger 2016, S. 90 f. oder Schröder 2020, S. 170 ff.). Die freie Konstante E_a ist in beiden Fällen eine charakteristische Größe des betrachteten Stoffes, welche die notwendige Energie zur Aktivierung eines Prozesses beschreibt. Für die Anwendung der Funktion im Glasbereich handelt es sich um die Aktivierung von Seitenketten-Bewegungen im Polymer, während es in der Beschreibung im Fließbereich die Aktivierung des Abgleitens der Ketten voneinander betrifft.

Die Funktion von Williams, Landel und Ferry (WLF)

Die sogenannte *WLF*-Funktion nach Williams et al. (1955) leitet sich aus dem Konzept des freien Volumens von *Doolittle* ab und hat in der Nomenklatur der vorliegenden Arbeit folgende Form (Brinson u. Brinson 2008, S. 241 ff.):

$$\log a_{R/S} = - \frac{c_1 \cdot (T_S - T_R)}{c_2 + T_S - T_R} \quad (2.29)$$

Anders als die Arrhenius-Funktion hängt sie von zwei Konstanten c_1 und c_2 ab, die jeweils nur für eine bestimmte Referenztemperatur T_R gelten. Bei Änderung der Referenztemperatur zu \bar{T}_R verändern sich auch die zugehörigen Konstanten zu \bar{c}_1 und \bar{c}_2 . Über die sogenannten *Invarianten der WLF-Funktion* stehen jedoch alle Konstanten und deren zugehörige Referenztemperaturen in Beziehung zueinander (Schwarzl 1990, S. 204 ff.). Diese werden im Rahmen dieser Arbeit als I_1 und I_2 bezeichnet.

¹In der Literatur wird statt dem $\ln 10$ oftmals der gerundete Faktor 0,434 verwendet (s. z. B. Schwarzl 1990, S. 216). Um herauszustellen, dass es sich hierbei um eine Umrechnung aus dem natürlichen in den dekadischen Logarithmus handelt, wird darauf an dieser Stelle verzichtet.

Die erste Invariante ergibt sich stets aus dem Produkt der beiden Konstanten einer Referenztemperatur:

$$I_1 = c_1 \cdot c_2 = \bar{c}_1 \cdot \bar{c}_2 \quad (2.30)$$

Die zweite Invariante ergibt sich aus der Differenz der Referenztemperatur T_R und der zugehörigen Konstante c_2 :

$$I_2 = T_R - c_2 = \bar{T}_R - \bar{c}_2 \equiv T_\infty \quad (2.31)$$

Sie wird auch als T_∞ bezeichnet und gibt die Temperatur wieder, bei der die Bewegungsfähigkeit der Molekülketten des betrachteten Polymers vollends zum Erliegen kommt. Hier ergibt sich eine Polstelle für die Verschiebungsfaktoren, da die Kurve des Speichermoduls ihr absolutes Maximum in einem horizontalen Plateau erreicht. Somit stellt sich ein indifferenter Zustand ein, da zwei horizontale Kurven unabhängig von ihrer gegenseitigen Verschiebung immer deckungsgleich auf ein und derselben Funktion liegen.¹

Durch Umstellen und Einsetzen der Gleichungen 2.30 und 2.31 in die WLF-Funktion 2.29, kann diese rein durch die Invarianten ausgedrückt werden:

$$\log a_{R/S} = \frac{I_1}{(T_R - I_2)} \cdot \frac{(T_S - T_R)}{(I_2 - T_S)} \quad (2.32)$$

Die WLF-Funktion kann somit über die Invarianten für alle Referenztemperaturen zugleich angepasst werden. Dies vereinfacht nicht nur die Anpassung auf nur noch zwei von der Temperatur unabhängige Unbekannte, sondern erhöht auch deren Genauigkeit.

¹Das Phänomen der Indifferenz wird später in ähnlicher Form bei der Überprüfung der Voraussetzungen zur Anwendung der ZTV diskutiert (vgl. Seite 81).

2.2 Das im Sandwich Plate System verwendete Polyurethan

Nachdem zuvor wichtige Grundlagen zu Polymeren im Allgemeinen gezeigt wurden, geht dieser Abschnitt näher auf die Gruppe der Polyurethane ein und beschreibt das PUR im SPS mit seinen bisher bekannten Eigenschaften. Darauf aufbauend wird ein Überblick über den Stand der Forschung zu dem spezifischen Stoff gegeben und die Ergebnisse der verschiedenen Arbeiten miteinander verglichen.

Polyurethan ist allgemein ein sehr vielseitiger Werkstoff, mit einer großen Bandbreite von Anwendungsgebieten. Uhlig (2006, S. 24 ff.) klassifiziert die verschiedenen Arten der Polyurethane nach deren Erscheinung im Gebrauchszustand. Weiche Polyurethan-Schäume finden sich bspw. in Matratzen oder Polstermöbeln. Hartschäume werden oft in tragenden Strukturen mit erhöhten Anforderungen an die Wärmedämmung verwendet, z. B. im Fassadenbau, der Kühltechnik oder im Flugzeugbau. Zellfreie Polyurethane treten hauptsächlich in massiver oder flächiger Form auf und finden in hoch beanspruchten Bereichen Anwendung. Flächige Beispiele sind Lacke, Beschichtungen von Textilien oder Klebstoffe. Aus gießfähigen Polyurethanen werden massive Bauteile gefertigt, wie z. B. Elektroisolierungen, Fahrwerksteile, Rollen oder Lager.

Ein großer Teil der Polyurethane gehört zur Gruppe der Elastomere und ist entsprechend chemisch leicht vernetzt (vgl. Abschnitt 2.1.1). Ihren Namen verdanken die Polyurethane der Art ihrer Vernetzung, dem Prinzip der Polyisocyanat-Chemie. Sie werden immer aus mindestens zwei Komponenten in additiver Stufenreaktion hergestellt, welche bei Mischung exotherm miteinander reagieren. Fester Grundbaustein eines jeden Polyurethans sind die Isocyanate, welche durch „die energiereiche, d.h. sehr reaktionsfähige Isocyanatgruppe gekennzeichnet“ sind (Uhlig 2006, S. 116). Als Reaktionspartner können verschiedene Stoffe gewählt werden. Die am weitesten verbreiteten Partner sind Alkohole. Es sind aber auch Reaktionen mit Partnern wie Aminen, organischen Säuren oder Wasser möglich. Die bindungsfreudigen Isocyanate vernetzen sich unter Umständen auch mit sich selbst (Uhlig 2006, S. 117). Reagieren die beiden erstgenannten Komponenten miteinander, verbinden sich die Harnstoffteile (NCO) der Isocyanate und die wasserstoffaktiven Ethanolteile (OH) der Polyole zu Urethangruppen (s. Abb. 2.10). In der sogenannte Gelreaktion, verbinden sich immer mehr reaktive Gruppen und die vormals fließfähigen Komponenten gelieren, bis sich das Material schlussendlich verfestigt (Elsner et al. 2008, S. 295 f.).

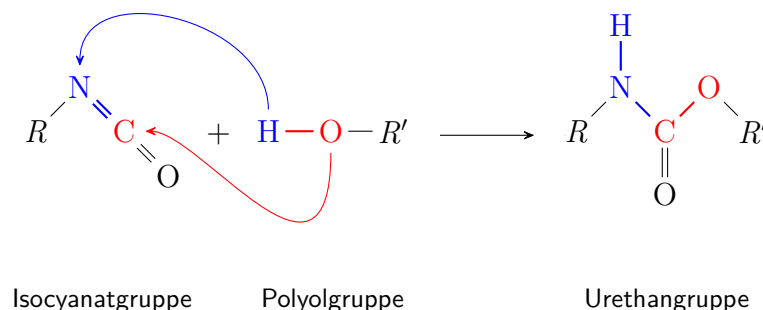


Abbildung 2.10: Chemische Reaktion bei der Polyaddition in Anlehnung an SPS Technology (2002)

Obwohl diese vielfach (poly) vorkommenden Vernetzungsstellen dem Polyurethan seinen Namen geben, ist ihr Anteil an der Masse des fertigen Stoffs in der Regel gering. Den überwiegenden Massenanteil bilden die Molekülketten¹, an deren Ende die jeweiligen Reaktanten sitzen (Uhlig 2006, S. 156). Diese beeinflussen mit ihrer Gestalt maßgeblich das Verhalten des späteren Stoffs. So können die Moleküle der Alkohole bspw. linear sein, mit zwei OH-Gruppen an den Enden (Dirole). Sie können aber auch in verzweigter Form vorliegen und drei oder mehr reaktive Gruppen besitzen (Triole bzw. Polyole). Zusätzlich können verschiedene Alkohole vermischt, oder Additive wie Kettenverlängerer oder Katalysatoren eingesetzt werden, um die Eigenschaften des fertigen Kunststoffs gezielt zu beeinflussen (SPS Technology 2002, S. 3). So bewirken bspw. kurze Ketten und eine größere Zahl an möglichen Verknüpfungsstellen, einen höheren Grad der Vernetzung und damit auch eine höhere Steifigkeit (vgl. Abschnitt 2.1.1). Daraus begründet sich die Vielfalt an Möglichkeiten zur spezifischen Konzeption von Polyurethanen, wie es bereits eingangs mit der großen Bandbreite von Anwendungen thematisiert wurde.

2.2.1 Die Eigenschaften des speziellen PUR im Sandwich Plate System

Im Zuge der Entwicklung des SPS beauftragte SPS Technology die Firma BASF Polyurethanes (bis 2010 Elastogran) mit der Konzeption eines geeigneten Kunststoffs für die Verwendung als Kernmaterial, das allen Anforderungen genügt. Zu diesem Zeitpunkt kamen diese hauptsächlich aus dem Bereich des Schiffbaus (SPS Technology 2002, S. 2), wo das SPS seine ersten kommerziellen Anwendungen fand (vgl. Abschnitt 1.2.2). BASF formulierte zunächst unter Laborbedingungen die Zusammensetzung eines Polyurethans, welche in weiteren Entwicklungsschritten für den späteren Verarbeitungsprozess optimiert wurde. Die mechanische Charakterisierung des finalen Stoffs wurden schließlich von SPS Technology (2002) vorgenommen und in einer ausführlichen Dokumentation zusammengefasst. Die folgend beschriebenen Eigenschaften des speziellen PUR im SPS entstammen vorrangig dieser Beschreibung. Im Laufe der folgenden Jahre wurde der Katalog um weitere Erkenntnisse ergänzt, die ursprüngliche Rezeptur des PUR wird jedoch bis heute angewendet. Um mit den Beschreibungen zu den Eigenschaften des PUR sowohl eine Basis für den Entwurf von SPS-Bauteilen als auch für die Qualitätssicherung in der Umsetzung zu bilden, führten SPS Technology und BASF Polyurethanes alle Versuche nach den Regelwerken der Kunststoffprüfung durch (vgl. Grellmann et al. 2015). Die für die einzelnen Versuche geltenden Normen werden von SPS Technology (2002, S. 16) aufgeführt.

Makromolekulare Struktur

Das im Sandwich Plate System verwendete PUR lässt sich auf den ersten Blick zwei verschiedenen Polymerarten zuordnen (vgl. Abschnitt 2.1.1). In seiner Makrostruktur bildet es eine Kombination aus einem thermoplastischen Elastomer aus Polyurethan (TPE-U) und einem chemisch vernetzten Elastomer. Anders als in einem herkömmlichen TPE-U werden im Fall des PUR die Isocyanatgruppen jedoch nicht physikalisch sondern über Crosslinks² chemisch ver-

¹Da die Molekülketten zwischen den Reaktanten auf die chemische Vernetzung keinen direkten Einfluss haben, werden sie in Abbildung 2.10 entgegen ihrer Größe recht unscheinbar mit *R* bzw. *R'* für *Rest* abgekürzt.

²Da es sich im Fall des PUR im SPS um ein geschütztes Produkt von BASF Polyurethanes handelt, finden sich keine detaillierten Informationen zu dessen Zusammensetzung. So lässt sich nur vermuten, auf welche Weise die Crosslinks im PUR erzeugt werden. Beispielsweise durch ein Prepolymer in dem Isocyanate bereits mit verzweigten Polyolen vorvernetzt werden (Uhlig 2006, S. 106 ff. u. 123 f.).

netzt (s. Abb. 2.11). Durch die so entstehenden lokalen Phasen mit hoher Vernetzung besitzt das PUR nicht die thermoplastische Eigenschaft eines TPE-U, sondern wird unempfindlicher gegen hohe Temperaturen und ist nicht schmelzbar (Thermoset). Es hat jedoch die Struktur eines Block-Copolymers in dem diese steifen Netzwerke durch große Areale, langkettiger linearer Moleküle verbunden sind. Diese beiden Phasen bestimmen maßgeblich die Eigenschaften des PUR, die in den folgend aufgeführten Versuchsergebnissen von SPS Technology (2002) gezeigt werden.

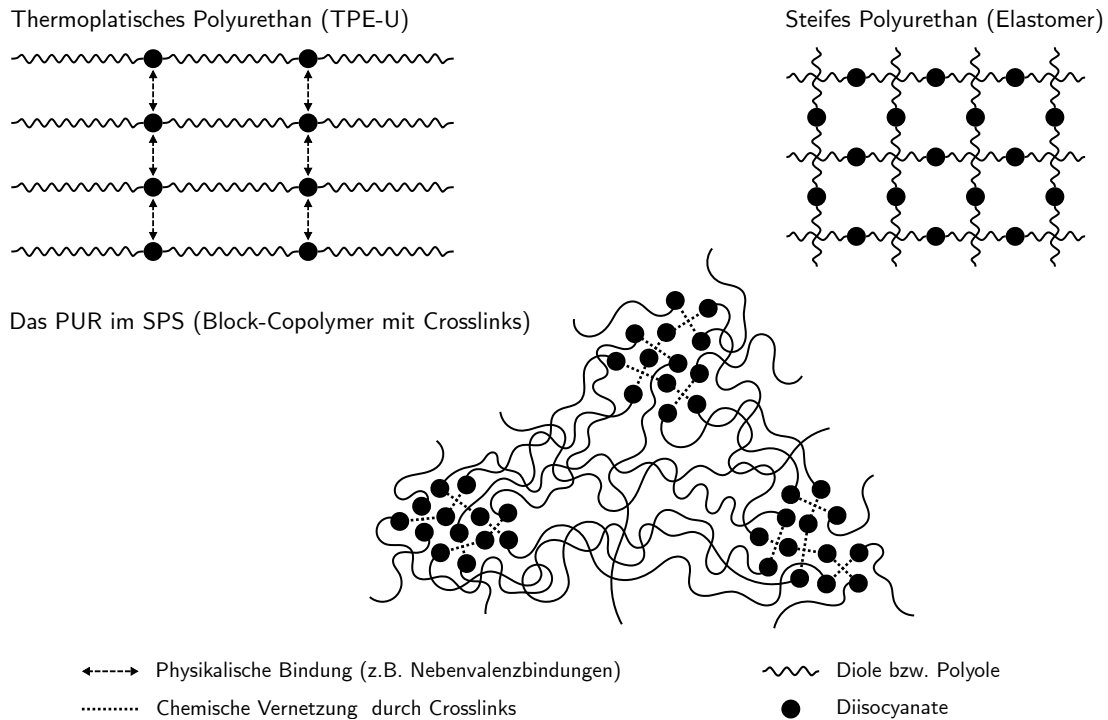


Abbildung 2.11: Prinzip der makromolekularen Struktur des PUR im SPS (u.) als Kombination eines thermoplastischen Polyurethans (o.l.) und eines steifen Elastomers (o.r.) in Anlehnung an SPS Technology (2002) und Bonnet (2016)

Mechanische Eigenschaften

Das PUR reagiert bei der Polyaddition exotherm unter Volumenausdehnung. Daher konnten in Versuchen nach DIN EN ISO 845 verschiedene Rohdichten gemessen werden. Wird die Ausdehnung bei der Herstellung nicht behindert, beträgt die Rohdichte der Proben 1102 kg/m^3 . In der Herstellung von SPS-Elementen wird die Ausdehnung des reagierenden PUR in der Regel jedoch verhindert, um die Formtreue der Bauteile zu gewährleisten (s. Abschnitt 1.2). Daraus resultiert für das PUR eine größere Rohdichte von $\rho = 1150 \text{ kg/m}^3$. Diese wird als Rechenwert für den Entwurf von SPS-Bauteilen empfohlen (SPS Technology 2002, S. 47).

Über jeweils fünf uniaxiale Zug- (DIN EN ISO 527) und Druckversuche (DIN EN ISO 604) wurden die Steifigkeit und Festigkeit bei verschiedenen Temperaturen ermittelt. Da in den Versuchen kein Streckpunkt detektiert werden konnte, wurde als Ersatzmaß für die Proportio-

nalitätsgrenze das im Metallbau übliche Verfahren der 0,2%-Dehnung verwendet.¹ In Tabelle 2.1 sind für diese Arbeit relevante Auszüge der Ergebnisse dargestellt.² Wie die Kennwerte zeigen, besitzt das PUR auch bei 80 °C noch einen E -Modul von 248 MPa, während es sich bei –20 °C immer noch duktil verhält. Diese Eigenschaften resultieren aus den beiden Phasen des Copolymers. Während die harten Phasen bei hohen Temperaturen noch eine hohe Steifigkeit erzeugen, sorgen die langkettigen weichen Phasen auch bei niedrigen Temperaturen noch für elastische Flexibilität (SPS Technology 2002, S. 3). Die Querdehnzahl des PUR wurde auf mehreren Wegen untersucht. Es wurden Messungen der Kompressibilität vorgenommen und in weiteren uniaxialen Zugversuchen die Längs- und Querdehnungen sowohl mittels Dehnungsmessstreifen als auch optisch gemessen. Dabei wurde über eine Gesamtanzahl von 19 Versuchen im Bereich zwischen –80 und 80 °C eine von der Temperatur weitestgehend unabhängige mittlere Querdehnzahl von $\nu = 0,36$ gefunden.

Zusätzlich zu den quasi-statischen Versuchen wurde die Steifigkeit des PUR und dessen Dämpfung mittels Temperatur-Sweeps für drei verschiedene Belastungsfrequenzen (10, 1 und 0,1 Hz) in DMTA nach DIN EN ISO 6721-2 untersucht. Das Prinzip der DMTA wurde bereits in Abschnitt 2.1.4 erläutert. Mithilfe der Ergebnisse wurden die verschiedenen Zustände des PUR und deren Übergänge bestimmt. Die in der DMTA bei 1 Hz gemessenen Speichermoduln, welche vereinfachend mit den Schubmoduln gleichgesetzt werden, sind für die relevanten Temperaturen ebenfalls in Tabelle 2.1 gegeben. Ein Vergleich der aus den DMTA-Ergebnissen über die Querdehnzahl berechneten E -Moduln mit denen aus den quasi-statischen Versuchen zeigt eine gute Übereinstimmung. Dies bestätigt die gefundene Querdehnzahl $\nu = 0,36$ (SPS Technology 2002, S. 25). Lediglich für 80 °C fallen die Ergebnisse der DMTA vergleichsweise hoch aus.

Tabelle 2.1: Auszug aus den mechanische Eigenschaften des PUR im SPS in Abhängigkeit von der Temperatur nach SPS Technology (2002)²

Mechanische Eigenschaft			Temperatur			
			-20 °C	23 °C	60 °C	80 °C
Zug	E_t	in MPa	1164	874	436	248
	$\sigma_{t,p}$	in MPa	23,0	16,1	8,1	6,2
	$\sigma_{t,u}$	in MPa	43,4	33,9	20,4	12,1
	$\varepsilon_{t,u}$	in %	15,1	32,1	43,1	47,4
Druck	E_c	in MPa	1166	765	501	336
	$\sigma_{c,p}$	in MPa	21,4	18,0	10,2	7,9
	$\sigma_{c,10}$	in MPa	55,5	32,0	19,0	14,0
DMTA	G	in MPa	429	285	180	135
	E (aus G) ³	in MPa	1163	771	483	370

¹Nach DIN EN ISO 6892-1 wäre die korrekte Bezeichnung der Spannung bei 0,2% plastischer Dehnung $R_{p0,2}$. Da von SPS Technology (2002) jedoch sowohl für Zug als auch für Druck die Bezeichnung σ_p gewählt wurde, wird diese hier übernommen und lediglich um einen Index für die Art der Beanspruchung ergänzt.

²Die vollständigen Daten sind in Anhang AI-1.1 zu finden.

³Die Werte für E aus G wurden aus (SPS Technology 2011a) entnommen, wo sie erstmals angegeben sind.

Die aus der individuellen Struktur des PUR entstehenden Eigenschaften zeigen sich auch in den von SPS Technology (2002) durchgeführten DMTA. Abbildung 2.12 zeigt die Ergebniskurven der untersuchten Größen über die Temperatur. Im Verlauf des Speichermoduls, welcher die Steifigkeit des PUR beschreibt, sind zwei Stufen zu erkennen. Bei beiden handelt es sich um Glasübergänge des Copolymers (Bonnet 2016, S. 30 f.). Der α -Übergang zwischen 90 und 150 °C ist der Glasübergang der harten Phase. Über einen weiten Bereich von knapp 60 K sinkt hier die Steifigkeit um etwa eine Dekade. Die Breite dieses Dispersionsgebiets zeigt sich auch in den großen Verschiebungen der Ergebniskurven zueinander. Während die Glasübergangstemperatur von SPS Technology scheinbar nach dem Onset des Speichermoduls zu 95 °C angegeben wird (vgl. ISO 6721-11), liegt das Maximum des Verlustfaktors $\tan \delta$ bei ca. 130 °C. Der zweite detektierbare β -Übergang¹ liegt bei ca. -60 °C und zeigt den Glasübergang der weichen Phase des PUR. Hier fällt der Speichermodul nur um etwa eine halbe Dekade. In dem von SPS Technology (2002, S. 22) angegebenen Einsatzbereich² des PUR von -45 bis 100 °C, welcher zwischen den beiden Glasübergängen liegt, fällt die Steifigkeit annähernd linear über die Temperatur ab. Ein Plateau, wie es bei Elastomeren im entropieelastischen Bereich üblicherweise existiert (Schwarzl 1990, S. 94), ist hier nicht zu beobachten. Zwischen den Glasübergängen liegt im PUR ein heterogener Zustand vor. Die harte Phase des Copolymers befindet sich noch im energieelastischen Bereich, während die weiche Phase sich bereits gummiartig verhält.

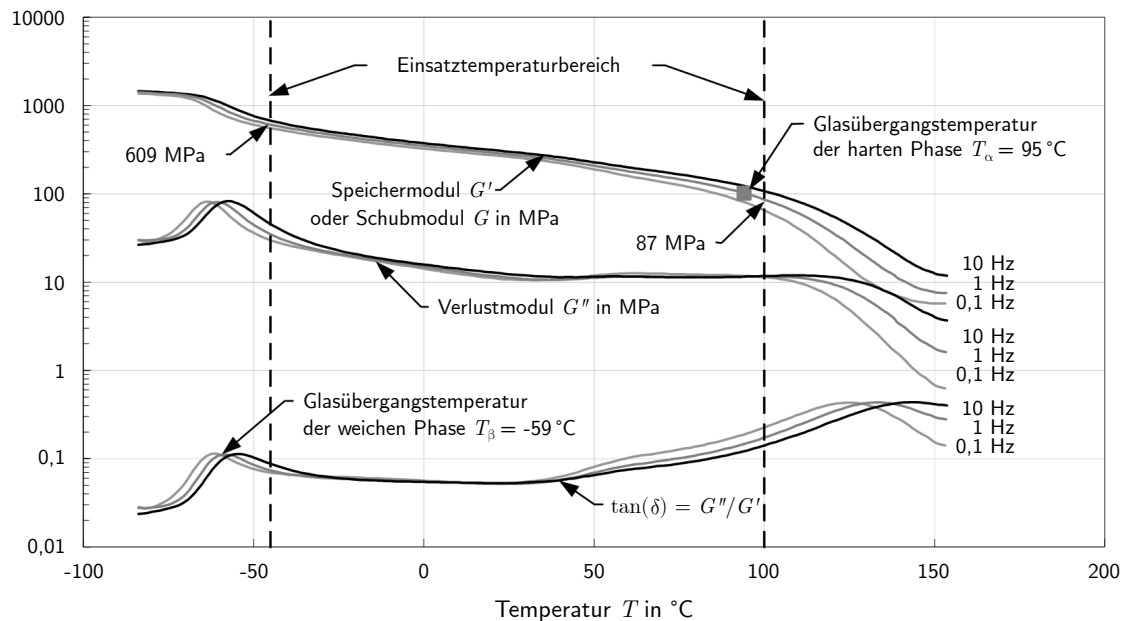


Abbildung 2.12: Verläufe des Speicher- bzw. Schubmoduls, Verlustmoduls und des Verlustfaktors über die Temperatur für verschiedene Belastungsfrequenzen nach SPS Technology (2002)

¹Während dieser Übergang eigentlich sekundäre Relaxationsprozesse eines Polymers zeigt, handelt es sich in Copolymeren meist um den Glasübergang der zweiten Komponente (Menard 1999, S. 106 f.).

²Diese Definition des Einsatzbereichs entspringt den Anforderungen des Schiffbaus (vgl. DNVGL-CG-0154), welcher größer ist, als für den Einsatz in Bahnbrücken nach DIN EN 1991-1-5 erforderlichlich.

Einfluss der Herstellung

Hinsichtlich der Verarbeitung zählt das PUR im SPS zu den Gieß-Elastomeren (Elsner et al. 2008, S. 314). Werden seine Komponenten gleichmäßig vermischt, beginnen diese sofort zu reagieren. Ist das Gemisch anfangs noch fließfähig, nimmt mit andauernder Reaktionszeit die Vernetzungsdichte und damit auch die Viskosität zu. Zeitgleich setzen die Vernetzungsreaktionen Energie in Form von Wärme frei, wodurch die Bewegungen der Ketten erhöht und die Viskosität wiederum reduziert wird. Diese gegenläufigen Effekte halten an, bis die Makromoleküle in ihrer Struktur so dicht vernetzt sind, dass sie keine weiteren Reaktionspartner mehr finden und damit die Polyaddition abklingt (Elsner et al. 2012, S. 92). Dieser Prozess, seine Intensität und Dauer wird stark durch die Beweglichkeit der Molekülketten beeinflusst. Wie bereits in Abschnitt 2.1 erläutert, hat die Temperatur maßgeblichen Einfluss auf die Bewegungsfähigkeit der Moleküle. Dies gilt auch für den flüssigen Zustand von Polymeren und ihren Grundbestandteilen. Der Grad der Vernetzung hängt somit auch von deren Temperatur während der Polymerisation bzw. Polyaddition ab.¹ Diese wird primär durch die Wärme der exotherm verlaufenden Vernetzungsreaktionen beeinflusst, kann aber auch gezielt von außen gesteuert werden (bspw. durch Heizen). Vom Vernetzungsgrad wiederum hängen wesentliche Eigenschaften des fertigen Polymers ab (Elsner et al. 2008, S. 33).

Um seine gewünschten Eigenschaften zu erlangen, benötigt das PUR während der Polyaddition eine Temperatur zwischen 100 und 160 °C. SPS Technology (2002, S. 13) stellte außerdem fest, dass mit zunehmender Dicke einer herzustellenden Sandwich-Platte, die Reaktionswärme schlechter abfließt und das Element im Inneren eine höhere, für die Reaktion günstige Temperatur halten kann. Für dünnere Elemente hingegen wird das Zuführen von Wärme mittels Heizmatten empfohlen, um in allen Bereichen des Kerns die erforderliche Vernetzungstemperatur zu erreichen. Wie groß der Einfluss auf die Eigenschaften des fertigen PUR ist, wurde mittels DMTA an zwei Proben untersucht, deren Temperaturen während der Reaktion bei 70 und 130 °C lagen (s. Abb. 2.13). Für das bei 70 °C vernetzte PUR liegt die Glasübergangstemperatur der harten Phase bei einer deutlich niedrigeren Temperatur als für den bei 130 °C vernetzten Stoff. Die Breite des α -Übergangs wird durch die höhere Vernetzungstemperatur kleiner. Dies ist auch für den Glasübergang der weichen Phase der Fall. Hier führt eine höhere Vernetzungstemperatur jedoch zu einer Verschiebung des β -Übergangs zu niedrigeren Temperaturen, wodurch sich der Bereich zwischen den beiden Übergängen ausdehnt in dem die Steifigkeit des PUR näherungsweise linear abfällt. Die größte Auswirkung hat eine erhöhte Vernetzungstemperatur auf die Steifigkeit des PUR bei hohen Temperaturen (vgl. hierzu auch Thomas et al. 2013, S. 373 ff.). Diese liegt bspw. bei 100 °C um etwa eine Dekade höher für das Polymer in dem bei der Vernetzung 130 °C statt 70 °C herrschten.

Neben den bereits gezeigten Beschreibungen zur Zusammensetzung und den mechanischen Eigenschaften bei verschiedenen Temperaturen enthält die Dokumentation von SPS Technology (2002) weitere Daten zu den thermischen Eigenschaften des PUR (Wärmeausdehnungskoeffizient, spezifische Wärmekapazität und Wärmeleitfähigkeit), dem Einfluss der Absorption verschiedener Flüssigkeiten auf seine mechanischen Eigenschaften sowie seine Beständigkeit gegen chemischen Angriff. Diese werden hier jedoch nicht weiter aufgeführt, da sie für die vorliegende Untersuchung keine Relevanz haben.

¹In DIN EN ISO 472 wird für die Temperatur während der Reaktion lediglich die *Härtungstemperatur* definiert, „auf die [...] eine Polymermischung gebracht werden muss, um zu härten“. Da das PUR jedoch schon bei Raumtemperatur reagieren kann, seine Eigenschaften aber dennoch von der Temperatur während der Reaktion abhängen, wird diese fortan als *Vernetzungstemperatur* bezeichnet.

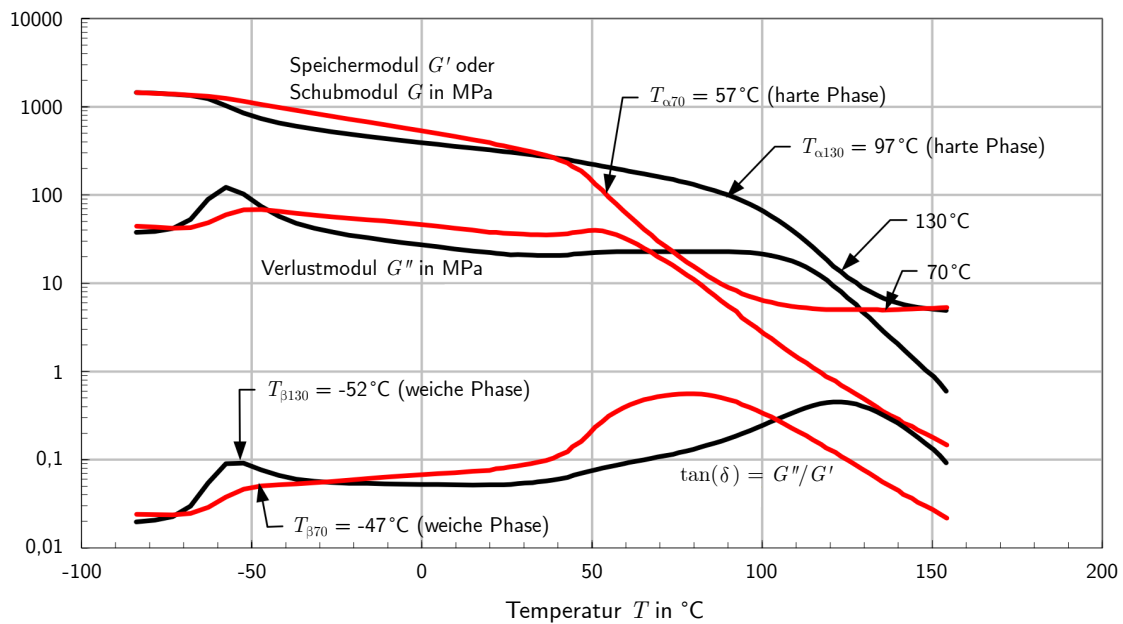


Abbildung 2.13: Verläufe des Speicher- bzw. Schubmoduls, Verlustmoduls und des Verlustfaktors über die Temperatur für zwei PUR Proben mit verschiedenen Vernetzungstemperaturen (Rot: 70 °C und Schwarz: 130 °C) nach SPS Technology (2002)

2.2.2 Bisherige experimentelle Untersuchungen zu dem speziellen PUR im Sandwich Plate System

Mit der umfangreichen Dokumentation zu dem speziellen PUR, dem die zuvor gezeigten Eigenschaften und Kennwerte entstammen, legte SPS Technology (2002) das Fundament für dessen kommerzielle Anwendung. Der Bericht wurde ursprünglich zur Vorlage bei Klassifizierungsgesellschaften (z. B. Lloyd's Register Ltd.) und Aufsichtsbehörden für den Einsatz des SPS im Schiffsbau verfasst, jedoch nie veröffentlicht. Nur vereinzelt wurden in den ersten Jahren Auszüge daraus präsentiert (s. z. B. Kennedy 2004 oder Minten et al. 2007).

In den folgenden Jahren beschäftigten sich neben dem Hersteller auch einige der bereits in Abschnitt 1.2.2 vorgestellten Forschungsarbeiten mit den Stoffeigenschaften des PUR im SPS. Hierbei wurden meist im Rahmen von Untersuchungen am SPS im Verbund zusätzliche Experimente zu den mechanischen Grundeigenschaften des PUR durchgeführt. Die molekulare Struktur und Zusammensetzung des Stoffs wurden von anderen Forschenden als SPS Technology dabei nicht betrachtet. SPS Technology selbst führte zusammen mit BASF Polyurethanes weitere experimentelle Studien zum PUR durch. Die Untersuchungen der einzelnen Arbeiten werden nachfolgend in chronologischer Reihenfolge ihres Erscheinens vorgestellt, kritisch analysiert und relevante Ergebnisse gezeigt. Anschließend werden ausgewählte Ergebnisse der Arbeiten untereinander und mit denen von SPS Technology (2002) verglichen. In anderen als den aufgeführten Veröffentlichungen finden sich nur sehr vereinzelt Angaben zu den Materialeigenschaften, wie z. B. dem *E*-Modul, die jedoch nicht auf eigenen experimentellen Untersuchungen beruhen.

Weißborn (2008) zeigt zu Beginn seiner Arbeit uniaxiale Zug- und Druckversuche mit denen die elastischen Eigenschaften des PUR für die Materialmodelle bestimmt werden (vgl. a. Abschnitt 1.2.2). Die Parameter, wie unter anderem der E -Modul, werden dabei nicht direkt aus den Versuchskurven ermittelt, sondern indirekt mittels *Least-Squares Fit*¹ mit einer Vergleichsrechnung bestimmt. Die Kraft-Verformungs-Kurve eines mit der FEM nachmodellierten Zugprobekörpers mit dem gewünschten Materialmodell wird einer Versuchskurve gegenübergestellt und die Summe der Fehlerquadrate aus deren Abweichung ermittelt. Der Fehler wird unter Variation der Materialparameter minimiert und das Modell so an den Versuch angepasst. Die für das Minimum der Summe der Fehlerquadrate gefundenen Materialparameter werden als Stoffeigenschaften des zum Vergleich herangezogenen Versuchskörpers notiert. Weißborn macht dabei keine näheren Angaben zur Modellierung oder etwaigen Vereinfachungen innerhalb des FE-Vergleichsmodells. Die gemittelten Materialparameter aus den Fittings mit den Versuchen bilden die Basis für alle weiteren Berechnungen mit dem Materialmodell. Die einzigen mit anderen Arbeiten oder SPS Technology (2002) vergleichbaren Parameter sind der E -Modul von $E = 550 \text{ MPa}$ und die Querdehnzahl $\nu = 0,37$. Diese sind zum Vergleich in Tabelle 2.3 aufgeführt. Die in den anderen Arbeiten zu findende Dehngrenze wertet Weißborn nicht aus. Es werden zwar andere Werte für die Proportionalitätsgrenze des PUR gegeben, diese geben aber jeweils das Ende des linearen Bereichs in den von Weißborn verwendeten Materialmodellen wieder und sind nicht direkt mit der Spannung der 0,2% Dehngrenze vergleichbar.

Feldmann et al. (2010) führen in Ergänzung zu Untersuchungen von SPS Technology Versuche zur Temperaturbeständigkeit des PUR durch. In mehreren DMTA und einer *Dynamischen Differenzkalorimetrie* (DSC) wird untersucht, ob eine kurzzeitige Temperaturerhöhung durch das Aufbringen von Heißasphalt auf SPS-Fahrbahnelemente einen nachteiligen Effekt auf die Eigenschaften von dessen PUR-Kern hat. Die Ergebnisse der durch BASF Polyurethanes für die Untersuchung durchgeführten DMTA werden so interpretiert, „dass die Elastomer-Materialeigenschaften durch die Erhitzungsvorgänge nicht ungünstig beeinflusst werden; Im Gegenteil kann sogar [...] eine Vergrößerung des [Speicher-]Moduls durch das vorangegangene Erhitzen festgestellt werden“ (Feldmann et al. 2010, S. 22). In der von Feldmann et al. (2010, S. 25 f.) im Rahmen des Forschungsprojekts durchgeführten DMTA wird diese Änderung jedoch nicht detektiert. Daher werden im Weiteren lediglich die Glasübergangstemperaturen des PUR ausgewertet, welche durch die DSC bestätigt werden.

Das Phänomen der Veränderung der PUR-Eigenschaften durch Wärmebehandlung, wird für die vorliegenden Arbeit noch eine wichtige Rolle spielen. Die Ergebnisse von Feldmann et al. (2010) zu dieser Thematik werden daher zunächst nicht weiter vertieft, sondern erst in Abschnitt 3.2.3 wieder aufgegriffen und mit DMT Analysen vorliegender Arbeit verglichen. Lediglich eine der DMTA wird den anderen Arbeiten in Abbildung 2.16 gegenübergestellt. Da die in dem Forschungsbericht gegebenen sonstigen Materialparameter wie beschrieben auf SPS Technology (2002) zurückgehen (s. Abschnitt 1.2.2), wird darauf verzichtet diese im Vergleich mit den anderen Arbeiten in Tabelle 2.3 nochmals aufzuführen.

¹Für die Grundlagen zur Methode der kleinsten Fehlerquadrate zur Datenmodellierung sei an dieser Stelle ohne nähere Erläuterung auf Press et al. (2007, S. 776ff) verwiesen.

SPS Technology (2011a) modifizierte bereits 2009 zusammen mit BASF Polyurethanes die Zusammensetzung des speziellen Elastomers, um dessen Eigenschaften zu verändern und damit das Anwendungsgebiet auf bis zu 110 °C zu erweitern. Diese Eigenschaften wurden mit einem neuen Testprogramm über einen größeren Temperaturbereich als zuvor untersucht. Die Ergebnisse werden in dem kurzen, ebenfalls unveröffentlichten technischen Bericht gegeben und denen des ursprünglich entwickelten Stoffs gegenübergestellt. Die beiden unterschiedlichen Rezepturen zur Herstellung und die daraus resultierenden Stoffe werden darin durch Angabe der Jahre ihrer Entwicklung (2002 oder 2009) kenntlich gemacht. Im Folgenden werden diese jedoch anhand des Erscheinungsjahres des jeweiligen technischen Berichts unterschieden (2002 oder 2011). Ein Vergleich der von SPS Technology (2011a) gegebenen Versuchsergebnisse (s. auch Anhang AI-1.2) zeigt den gewünschten Effekt, für den die Modifizierung des Stoffs vorgenommen wurde. Die Steifigkeit der neuen Rezeptur ist im Bereich hoher Temperaturen (ab ca. 45 °C) größer als die der alten, während sie im Bereich niedriger Temperaturen kleiner ist. Dies gilt ebenso für die von der Steifigkeit abhängige Dehngrenze. Für die anderen Eigenschaften des PUR wie z. B. die Bruchspannung lassen sich keine kausal begründbaren Änderungen feststellen. Trotz erfolgreicher Konzeption der neuen Rezeptur, kam diese nach Angaben von SPS Technology in der Praxis niemals zur Anwendung.¹ Bis heute wird die ursprüngliche Rezeptur des PUR aus 2002 verwendet. Dennoch werden Auszüge der für diese Arbeit relevanten Eigenschaften der Rezeptur aus 2011 in Tabelle 2.3 den anderen Arbeiten exemplarisch gegenübergestellt.

SPS Technology (2012a) führte zusätzliche Experimente zum Erhärtungsverhalten des PUR und seinen Eigenschaften durch, um deren Abhängigkeit von der Vernetzungstemperatur genauer zu betrachten. Daraus werden Empfehlungen für die Herstellung von SPS-Elementen abgeleitet. Ähnlich wie im Jahre 2002 wurden DMTA an Probekörpern vorgenommen, welche bei unterschiedlichen Temperaturen während der Vernetzung gelagert wurden. Die Temperatur wurde dabei etwa in 10 °C-Schritten abgestuft. Wie die in Abbildung 2.14 dargestellten Verläufe der Speichermoduln zeigen, kann die Steifigkeit des PUR je nach Vernetzungstemperatur stark variieren. Bei Raumtemperatur ist die Schwankungsbreite zwar gering, in den hohen Temperaturen jedoch können je nach Vernetzungstemperatur Unterschiede in den Steifigkeiten bis über das Zehnfache auftreten. Die Zusammenhänge werden von SPS Technology (2012a, S. 2) an den gefundenen Ergebnissen qualitativ diskutiert. So führt eine höhere Reaktionstemperatur zu einer stärkeren Vernetzung in den harten Domänen und zu einer steigenden Separierung der Phasen des Copolymers. Dies führt zu größeren Steifigkeiten im hohen Temperaturbereich, duktilerem Verhalten in niedrigen Temperaturen und vermindert die Streubreite der Stoffeigenschaften (s. Abb. 2.14). Den erkennbaren Vorteilen von hohen Reaktionstemperaturen stehen aber auch Argumente entgegen: So bergen hohe Temperaturen während der Polyaddition die Gefahr von Schrumpfungen und Verzug der SPS-Elemente. Zusätzlich haben geringere Vernetzungstemperaturen wirtschaftliche Vorteile, da sie weniger Energie erfordern, die Herstellung vereinfachen und die Prozesszeit verkürzen. Als Konsequenz daraus sollte laut Hersteller in der Produktion von SPS-Elementen eine hinreichend niedrige Vernetzungstemperatur angestrebt werden, mit der die erforderlichen Eigenschaften des PUR-Kerns noch zu erreichen sind. Aus den Versuchsdaten und Erfahrungswerten bereits umgesetzter Projekte leitet SPS Technology (2012a, S. 7) daher die folgenden zwei Regeln ab.

¹In der vorliegenden Arbeit wurde ebenso die ursprüngliche Rezeptur aus dem Jahr 2002 untersucht.

- Um eine Steifigkeit von mindestens 70 MPa^1 bei einer Temperatur von 60°C zu erreichen, sollte die Vernetzungstemperatur im Kern mindestens 70°C betragen. Um dies zu erreichen, ist bei SPS-Elementen üblicher Bauhöhe von 30 bis 100 mm eine Oberflächentemperatur der Deckbleche von 40°C während der Reaktion ausreichend.
- Um strengere normative Anforderungen an die Steifigkeit zu erfüllen, bspw. nach DNVGL-CP-0097 (s. Abb. 2.14), ist eine Vernetzungstemperatur von mindestens 100°C erforderlich. Diese bringt jedoch ein erhöhtes Risiko für den Verzug der Bauteile mit sich und wird daher nicht empfohlen.

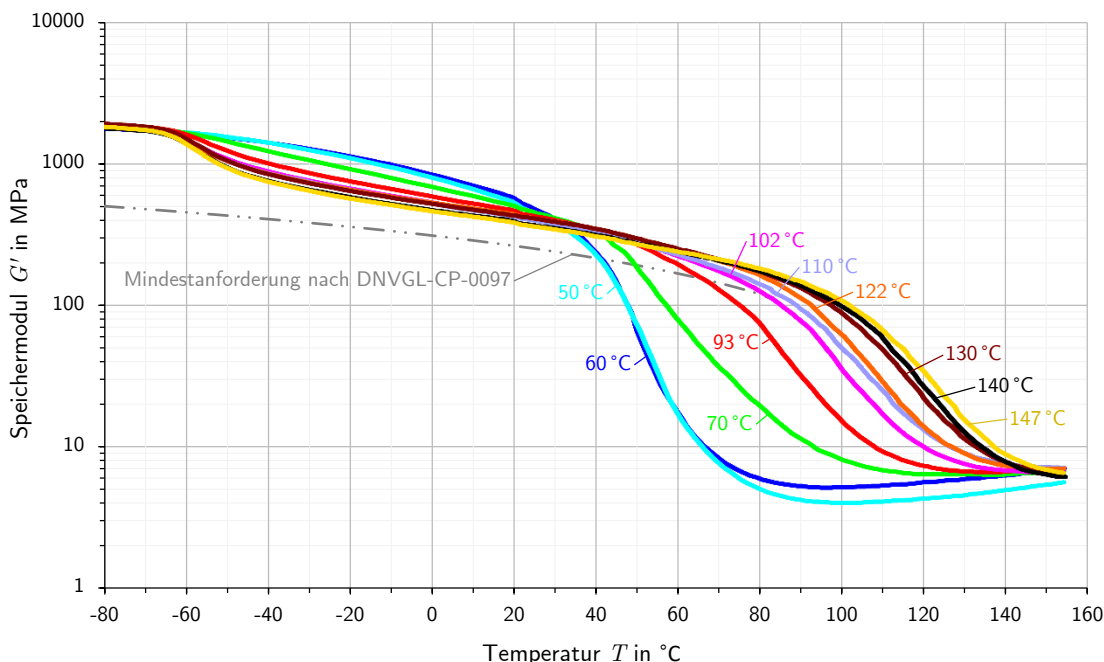


Abbildung 2.14: Verläufe des Speichermoduls über die Temperatur von PUR-Laborproben mit verschiedenen Vernetzungstemperaturen nach SPS Technology (2012a) und die Mindestanforderung an den Speichermodul nach DNVGL-CP-0097

Neben den Erkenntnissen von SPS Technology (2012a) sind in Abbildung 2.14 weitere Eigenschaften des PUR qualitativ zu erkennen: So scheint unabhängig von der Vernetzungstemperatur ein minimaler Speichermodul zu existieren, der für die verwendeten Laborprobenkörper etwa bei 7 MPa liegt. Hier kann ein gummielastisches Plateau bis zur Zersetzung vermutet werden, da sich beide Phasen des Elastomers oberhalb von 150°C im entropieelastischen Bereich befinden (vgl. Abb. 2.2). Für niedrige Reaktionstemperaturen ist zunächst nur eine dominante Dispersionsstufe erkennbar, die mit Steigerung der Vernetzungstemperatur breiter wird. Erst ab ca. 90°C wird der β -Übergang deutlicher. Danach sind die gleichen Phänomene zu beobachten, wie schon in Abschnitt 2.2.1 beschrieben: Der α -Übergang wird wieder schmaler und der annähernd linear verlaufende Bereich zwischen den Übergängen wird breiter. Diese Schärfung und Distanzierung der Glasübergänge zeigt die zuvor schon beschriebene Separierung der Phasen.

¹Der Wert von 70 MPa wird von SPS Technology (2012a) als untere Grenze für den Schubmodul des PUR genannt, um ein Deckblechknittern im SPS auch bei hohen Temperaturen zu vermeiden. Es wird jedoch weder eine nähere Begründung noch ein Verweis auf die Herkunft dieses Werts gegeben.

Teixeira de Freitas (2012) führte im Vorfeld ihrer Bauteiluntersuchungen uniaxiale Zugversuche an PUR-Proben durch. Die daraus gewonnenen Erkenntnisse zu den Materialparametern bei verschiedenen Temperaturen, werden verwendet, um Vergleichsrechnungen mittels FEM für die Bauteilversuche anzustellen. Es wurden jeweils fünf Zugversuche nach DIN EN ISO 527 bei *Raumtemperatur* (Abkürzung: *RT*), -10 und 50 °C durchgeführt und ausgewertet. Hierbei wird als Ersatz für die Streckgrenze die Dehngrenze nach der Methode der 0,2 %-Dehnung verwendet. Für alle Temperaturen zeigt Teixeira de Freitas (2012, S. 64) die Mittelwerte der Ergebnisse und die zugehörigen Standardabweichungen (s. Tab. 2.2). Diese werden im folgenden Abschnitt 2.2.3 den anderen Arbeiten gegenübergestellt.

Tabelle 2.2: Ergebnisse der Zugversuche von Teixeira de Freitas (2012)

Eigenschaft	Temperatur		
	-10 °C	RT	50 °C
E_t in MPa	1049 ± 70	721 ± 54	471 ± 52
$\sigma_{t,p}$ in MPa	$22,0 \pm 0,5$	$15,1 \pm 0,3$	$9,1 \pm 0,4$
$\sigma_{t,u}$ in MPa	$37,6 \pm 1,0$	$25,0 \pm 1,1$	$17,7 \pm 0,6$
$\varepsilon_{t,u}$ in %	$21,1 \pm 4,1$	$26,6 \pm 4,8$	$31,4 \pm 2,0$

SPS Technology (2012b) zeigen in einem unveröffentlichten Bericht Untersuchungen zum Kriechverhalten des PUR unter Druckbeanspruchung. Hierfür wurden Zeitstandsdruckversuche verschiedener Konstellation von BASF Polyurethanes in Anlehnung an DIN EN 1606 durchgeführt. Jeweils zwei ausgeschnittene PUR Würfel mit einer Kantenlänge von 35 mm wurden unter einer konstanten Druckbelastung von 1,5 MPa sowohl bei Raumtemperatur als auch bei 60 °C getestet. Zusätzlich wurde ein Stück PUR-Kern eingebettet in einem SPS-Element über ein freigeschnittenes Stück Deckblech ebenfalls mit einer konstanten Druckspannung von 1,5 MPa bei 60 °C belastet. Der aus dem Blech und dem darunter liegenden Kern gebildete PUR-Würfel mit 40 mm Kantenlänge wurde durch seine Verbindung zu den Deckblechen und dem ihn umgebenden Kern von allen Seiten flächig gestützt und entsprechend versteift. Alle Bedingungen wurden für 1000 h konstant gehalten und die Deformationen der Würfel mittels Messuhren in logarithmischen Zeitintervallen aufgenommen. Abbildung 2.15 zeigt die Ergebnisse der Untersuchungen an den freien, unversteiften Würfeln.

Die Ergebnisse werden von SPS Technology (2012b) so interpretiert, dass das Kriechen des PUR-Kerns in SPS-Elementen vernachlässigbar ist. Dies wird hauptsächlich darüber begründet, dass die in den Versuchen gewählte Belastung von 1,5 MPa um den Faktor 1000 höher liegt als die tatsächlich auftretenden Dauerlasten in SPS-Deckenelementen. Durch Extrapolation wird für die in Abbildung 2.15 gezeigten Kurven ein Endkriechmaß bestimmt, welches für Raumtemperatur bei 0,64 % und für 60 °C bei ca. 2 % verortet wird. Ausgehend von einer lotrechten Dauerlast von knapp 1,5 kPa wird eine Endkriechdehnung von 0,002 ‰ für SPS-Deckenelemente prognostiziert, welche als vernachlässigbar eingestuft wird.

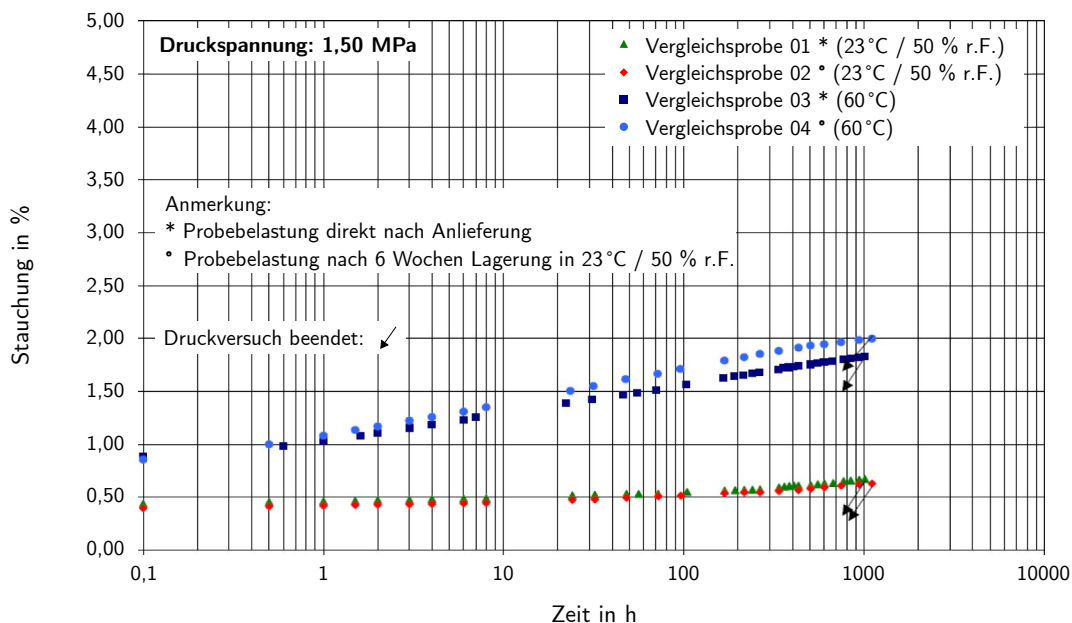


Abbildung 2.15: Ergebniskurven der Kriechuntersuchungen an frei geschnittenen PUR-Würfeln unter Druck nach SPS Technology (2012b)

Bewertet man die gezeigten Ergebnisse von SPS Technology (2012b) kritisch, können daraus Erkenntnisse gezogen werden, die eine Vernachlässigbarkeit von Kriecheinflüssen in Frage stellen. Allgemein ist die Extrapolation von Kriechkurven nach DIN EN 1606 bis auf das 30-fache des gemessenen Zeitraums zwar zulässig, diese muss aber mittels linearer Regressionsanalyse erfolgen. Der 1000 h umfassenden Datensatz scheint hingegen nichtlinear extrapoliert worden zu sein, wonach Endkriechmaße gefunden wurden, welche etwa dem letzten Wert der jeweiligen Messreihe entsprechen. Dies wird mit der asymptotischen Annäherung der Kurven an diese Werte begründet, die in den Ergebniskurven in Abbildung 2.15 jedoch nicht erkennbar sind. Diese Annahme der Existenz eines Endkriechmaßes, welches bereits nach 10 000 h erreicht wird, liegt auf der unsicheren Seite.

Auch geht SPS Technology (2012b) davon aus, dass sich das PUR bis zum Erreichen seines Endkriechmaßes vollständig linear-viskoelastisch verhält. Es ist jedoch nicht nachvollziehbar, ob die Annahmen der linearen Viskoelastizität überprüft wurden. Wie schon in Abschnitt 2.1.2 gezeigt, liegt die Grenze des LVE-Bereichs für den Glaszustand erfahrungsgemäß bei ca. 1 % (Mezger 2016, S. 164). Es kann nur vermutet werden, dass bspw. die Probekörper bei 60°C (blaue Datenreihen in Abb. 2.15) im Verlauf des Experiments die Linearitätsgrenze überschritten haben. Um zu prüfen, ob das Superpositionsprinzip im gesamten experimentellen Bereich anwendbar ist und somit von linear-viskoelastischem Verhalten ausgegangen werden kann, hätten bspw. weitere Versuche bei den gleichen Temperaturen mit anderer Belastung durchgeführt werden müssen.

Überdies wäre zur Beurteilung des Kriechverhaltens des speziellen PUR, die Anwendung einer weiteren Norm von Interesse. DIN EN 1606 gilt für Wärmedämmstoffe, die in der Regel nicht in massiver, sondern poriger Form vorliegen. Die Bestimmung des Kriechverhaltens von allgemeinen Kunststoffen mittels Zugversuchen hingegen regelt DIN EN ISO 899-1. Nach dieser Norm erfolgt die Auswertung von Versuchen in der Regel mit dem E -Modul. Eine relative

Auswertung der Kurven in Abbildung 2.15 zeigt, dass die Verformung der Proben bei Raumtemperatur um ca. 50 % zunimmt. Dies entspricht einem rechnerischen Abfall des E -Moduls um knapp 33 %. Bei 60 °C steigt die Verformung im Mittel auf 223 % des Anfangswerts, was einem Abfall des E -Moduls um etwa 55 % entspricht. Selbst unter der Annahme durchweg linear-viskoelastischen Verhaltens bedeutet dies, dass vom Kern des SPS aufgenommene Dauerlasten bereits nach verhältnismäßig kurzer Zeit zu größeren Verformungen führen, als mit einem konstanten E -Modul vorhergesagt. Das Verlassen des LVE-Bereichs, was allgemein für hohe Lasten oder lange Zeiten auftreten kann, verstärkt diesen Effekt zusätzlich.

2.2.3 Vergleich der Ergebnisse bisheriger Arbeiten und Schlussfolgerungen

Aus den zuvor gezeigten Untersuchungen werden die experimentell ermittelten Eigenschaften des PUR verglichen. Dies geschieht sowohl quantitativ über die in Tabelle 2.3 gegenübergestellten Ergebnisse für die Zugeigenschaften des PUR, als auch qualitativ über den Vergleich der gefundenen Steifigkeiten des PUR in Abhängigkeit von der Temperatur. Die mittleren E -Moduln aus den quasi-statischen Zug- bzw. Druckversuchen von Teixeira de Freitas (2012), Weißenborn (2008) und SPS Technology (2002 und 2011a) werden dafür über die Querdehnzahl $\nu = 0,36$ in Schubmoduln umgerechnet und in Abbildung 2.16 den Speichermodul-Kurven von SPS Technology (2002, 2011a und 2012a) gegenübergestellt. Aufbauend auf den Vergleichen wird abgewägt, welche Untersuchungen für einen späteren Vergleich mit eigenen Versuchen in Kapitel 3 herangezogen werden.

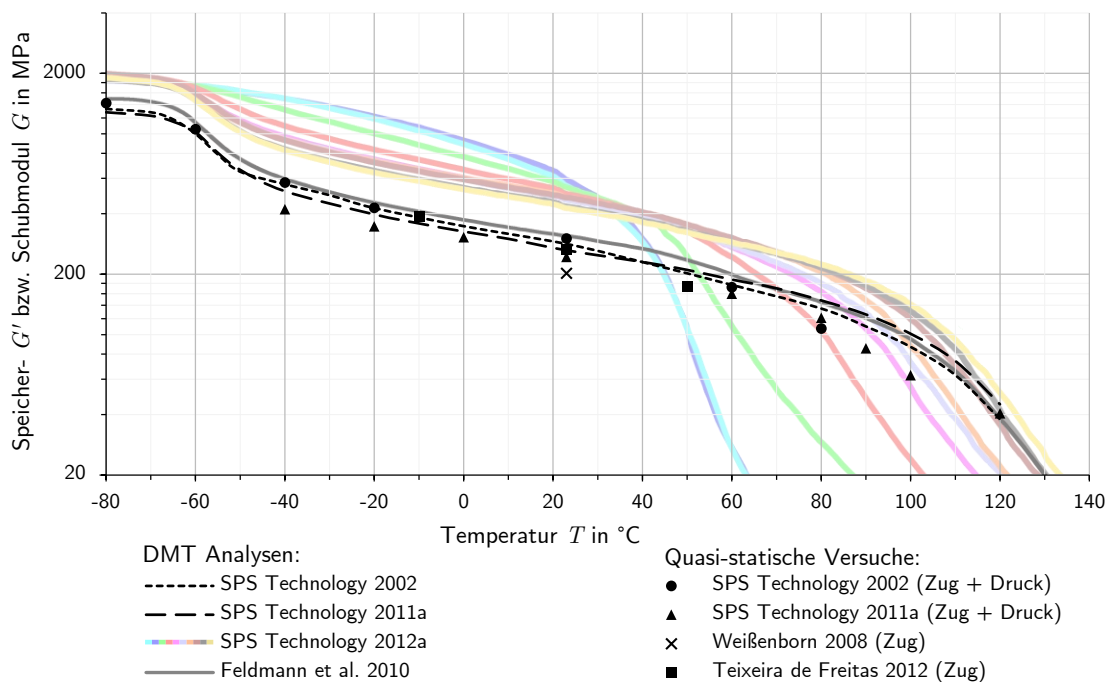


Abbildung 2.16: Verläufe der Speichermoduln aus DMTA mit $f = 1$ Hz und mittlere Schubmoduln über die Temperatur aus allen Untersuchungen von SPS Technology (2002, 2011a und 2012a) im Vergleich mit der DMTA von Feldmann et al. (2010) und den gemittelten Ergebnissen von Teixeira de Freitas (2012) und Weißenborn (2008)

Beim qualitativen Vergleich der Steifigkeiten in Abbildung 2.16 sticht deutlich der Unterschied zwischen den von SPS Technology (2012a) gefundenen Speichermodul-Kurven und den restlichen Daten hervor. Die Schubmoduln nach diesen neuesten Untersuchungen (vgl. Abb. 2.14) liegen für Temperaturen unter 40 °C zwischen 25 und 100 % höher als alle anderen zuvor gemessenen Steifigkeiten. Selbst an Stellen im Kurvenverlauf an denen herstellungsbedingte Unterschiede zwischen den Kurven eigentlich gering sein sollten, besteht diese Abweichung (bspw. im energieelastischen Bereich unter -60 °C). Gleichzeitig liegen die Ergebnisse der quasi-statischen Versuche von Teixeira de Freitas (2012) und SPS Technology (2002 und 2011a) vergleichsweise nah bei den Ergebnissen der von SPS Technology in den gleichen Jahren durchgeführten DMT Analysen und denen von Feldmann et al. (2010). Letzterer Zusammenhang erscheint unrealistisch, da für viskoelastische Stoffe wie bereits zuvor beschrieben die in einem Versuch gemessene Steifigkeit von der Belastungsgeschwindigkeit abhängt. Diese ist in dynamischen in der Regel deutlich größer als in quasi-statischen Versuchen, sodass die Schubmoduln der zuvor genannten DMTA eigentlich höher ausfallen müssten als die Ergebnisse zeigen. An dieser Stelle kann nur spekuliert werden, woraus dieses Phänomen resultiert.

Auch im quantitativen Vergleich der Eigenschaften des PUR aus den quasi-statischen Versuchen (s. Tab. 2.3) zeigen sich Unterschiede zwischen den einzelnen Arbeiten, welche in Abbildung 2.16 teilweise nur schwer ersichtlich sind. Obwohl nach Angaben von SPS Technology in allen anderen Fällen die Rezeptur aus dem Jahr 2002 verwendet wurde, passen die Ergebnisse von Teixeira de Freitas (2012) besser zu der einzigen Untersuchung mit dem modifizierten PUR aus 2011. Sie weichen dazu nur um ca. 5 % ab während sie im Vergleich zur Rezeptur von 2002 rund 20 % geringer ausfallen.¹ Die von Weißenborn (2008) ermittelte Steifigkeit, welche neben der Querdehnzahl als Einziges zum Vergleich herangezogen werden kann, weicht deutlich von allen anderen Untersuchungen ab. So liegt sie ca. 37 % unter dem von SPS Technology (2002) am selben Stoff gemessenen Wert. Selbst zu der weichsten, modifizierten Rezeptur von 2011, die bis dato noch nicht existierte, besteht noch eine Abweichung von etwa 20 %. Gründe für die genannten Unterschiede können sowohl in der Herstellung, Versuchsdurchführung als auch der Auswertung liegen. Im Gegensatz dazu finden alle Untersuchungen eine annähernd gleiche Querdehnzahl für das PUR.

Wie bereits in Abschnitt 2.2.1 thematisiert, haben die Randbedingungen während der Herstellung maßgeblichen Einfluss auf die Eigenschaften des PUR. In keiner der zuvor beschriebenen Arbeiten finden sich genauere Angaben zur Herstellung der Probekörper. Lediglich der jeweils verantwortliche Forschungspartner wird benannt. Daraus kann jedoch geschlossen werden, dass der zur Herstellung angewendete Prozess nicht in allen Fällen gleich war. Während SPS Technology die Proben für Teixeira de Freitas (2012, S. 61) herstellte, wurde dies für Weißenborn (2008, S. 25) von BASF Polyurethanes übernommen, die über keinen industriellen Fertigungsprozess für das PUR verfügen. Dass Unterschiede in den Eigenschaften zwischen Laborprobekörpern und solchen bestehen, die mit dem industriellen Prozess gefertigt wurden, thematisierte bereits eine frühere Veröffentlichung des Autors (vgl. Händler u. Lange 2019). Auch innerhalb eines Herstellungsprozesses können bereits Unterschiede zwischen einzelnen Chargen entstehen. Wie sich eine Änderung der Vernetzungstemperatur (bspw. infolge des Umgebungsklimas oder der Bauteilgeometrie) auswirken kann, zeigen exemplarisch die Kurven der Untersuchungen von SPS Technology (2012a) in Abbildungen 2.14.

¹Die Abweichungen der Dehngrenze liegen dazu gegensätzlich. Dies wird an dieser Stelle jedoch nicht weiter diskutiert, da die Dehngrenze keine direkt messbare Größe ist sondern indirekt vom E -Modul abhängt.

Tabelle 2.3: Vergleich ausgewählter Materialparameter des PUR bei Raumtemperatur (RT) aus quasi-statischen Zugversuchen der zuvor beschriebenen Quellen¹

Eigenschaft		SPS	Weißborn	SPS	Teixeira
		Technology		Technology	de Freitas
		2002	2008	2011a	2012
E_t	in MPa	874 ± 123	550	686 ± 10	721 ± 54
$\sigma_{t,p}$	in MPa	16,1	-	21,9 ± 0,5	15,1 ± 0,3
$\sigma_{t,u}$	in MPa	33,9 ± 0,4	-	26,7 ± 0,4	25 ± 1,1
$\varepsilon_{t,u}$	in %	32,1 ± 6,2	-	26 ± 3,0	26,6 ± 4,8
ν		0,36	0,37	0,38	-

Wie in den Grundlagen zum mechanischen Verhalten von Kunststoffen in Abschnitt 2.1.2 bereits erläutert reagieren Polymere unterschiedlich steif in Abhängigkeit von der Belastungsgeschwindigkeit. Während Teixeira de Freitas (2012, S. 63) ihre Versuche mit einer Geschwindigkeit von 5 mm/min durchführte, machen die Dokumentationen von SPS Technology dazu keine Angaben. Die Konformität zu DIN EN ISO 527 legt die Vermutung nahe, dass die Belastungsgeschwindigkeiten zumindest in einer ähnlichen Größenordnung lagen. Trotzdem können Abweichungen in der Wahl der Dehnrates möglicherweise zu den Unterschieden in den Ergebnissen beigetragen haben. Im Gegensatz dazu widerspricht bereits die von Weißborn (2008, S. 28) angegebene Dehnrates in den Zugversuchen von 1 %/s seinen eigenen Ergebnissen. Setzt man einen Schulterprobekörper (vgl. Abb. 3.2) mit einer freien Länge von etwa 100 bis 150 mm voraus,² entspricht dies einer Belastungsgeschwindigkeit von 60 bis 90 mm/min. Verglichen mit Teixeira de Freitas (2012) wäre diese etwa um den Faktor 12 bis 18 größer. Selbst mit veränderten Stoffeigenschaften aufgrund von Unterschieden in der Herstellung hätte dies zu einer messbar höheren Steifigkeit als der angegebenen führen müssen.

In allen Untersuchungen abgesehen von Weißborn (2008) wird die Dehngrenze über die aus dem Metallbau stammende Methode der 0,2%-Dehnung ermittelt. Es werden jedoch keine genaueren Angaben zur Auswertung gemacht. So wurde z. B. nicht präzisiert, ob der Sekantenmodul oder eine Regressionsgerade zur Auswertung des E -Moduls verwendet wurde bzw. in welchem Bereich der Versuchskurven die Auswertung erfolgte. Zwar gibt DIN EN ISO 527 den Auswertebereich genau vor, dieser liegt jedoch im Bereich sehr geringer Dehnungen, sodass es im Fall von Störeinflüssen durch den Versuchsaufbau sinnvoll sein kann, einen anderen Bereich zu wählen. Unterschiede in der Auswertung oder besagte Störeinflüsse beeinflussen den gemessenen E -Modul und die rechnerisch daraus ermittelte Dehngrenze.³

¹Der Übersichtlichkeit halber werden nur die mit den anderen Arbeiten vergleichbaren Kennwerte angegeben. Dabei werden die Standardabweichungen zur besseren Beurteilung mit aufgeführt falls vorhanden.

²Probekörper dieser Art wurden sowohl von Teixeira de Freitas als auch von Weißborn verwendet.

³Dieses Phänomen wird im Rahmen der Druckversuche zum Vergleich mit anderen Arbeiten in Abschnitt 3.2.1 abermals aufgegriffen und näher erläutert.

Als Konsequenz aus den zuvor beschriebenen Beobachtungen werden für einen Vergleich mit den Untersuchungen vorliegender Arbeit folgende Festlegungen getroffen:

- Da die Materialeigenschaften nur indirekt über Vergleichsberechnungen bestimmt wurden und von den gefundenen Parametern nur der E -Modul von Interesse ist, der weit von allen anderen Arbeiten abweicht, werden die Ergebnisse von Weißenborn (2008) nicht weiter berücksichtigt.
- Aufgrund des großen Unterschieds in den gemessenen Steifigkeiten werden die DMT Analysen vorliegender Arbeit vornehmlich mit den Kurven der letzten Untersuchungen von SPS Technology (2012a) an der ursprünglichen Rezeptur verglichen (farbig in Abb. 2.16). Die DMTA aus den Untersuchungen von SPS Technology aus den Jahren 2002 und 2011 bleiben unberücksichtigt.
- Für die Einordnung der quasi-statischen Versuchen dieser Arbeit werden dagegen alle Erkenntnisse zu den Stoffeigenschaften des PUR von SPS Technology (2002 und 2011a) und von Teixeira de Freitas (2012) herangezogen (schwarz ausgefüllte Symbole in Abbildung 2.16) sowie die Mindestanforderungen nach DNVGL-CP-0097.

3 Grundlagen zu den experimentellen Untersuchungen am PUR des SPS und Vorversuche zu dessen Vergleichbarkeit

Nach den Grundlagen zu Polymeren allgemein und dem PUR im SPS, zeigt dieses Kapitel die experimentellen Grundlagen der vorliegenden Arbeit. Zunächst wird ein Überblick über die durchgeführten Untersuchungen und verwendeten Probekörper gegeben. Anschließend werden grundlegende Vorversuche zur Vergleichbarkeit des betrachteten Stoffs beschrieben.

3.1 Grundlagen zu den experimentellen Untersuchungen am Polyurethan des Sandwich Plate Systems

Aufbauend auf der zuvor durchgeführten Analyse des Stands der Forschung, wird in diesem Abschnitt die experimentelle Zielsetzung des ersten Teils konkretisiert. Anhand eines Versuchsprogramms werden die durchgeführten Versuche jeweils kurz beschrieben und in den Gesamtkontext der experimentellen Methodik eingeordnet. Anschließend werden zusätzliche Informationen zur Herstellung der verwendeten Probekörper gegeben.

3.1.1 Zielsetzung und Methodik von Teil I

Bereits in der Einführung zu dieser Arbeit in Abschnitt 1.3 wurde erläutert, dass für den Einsatz des SPS im Neubau von Bahnbrücken, dessen Eigenschaften in Abhängigkeit von der Zeit und der Temperatur bekannt sein müssen. Die Analyse der bisherigen Forschung zu dem PUR im vorherigen Abschnitt 2.2.2 zeigte, dass seine Eigenschaften bereits mehrfach unter verschiedenen Temperaturen untersucht wurden. Deren Abhängigkeit von der Zeit hingegen, wurde bislang einzig in einer internen Untersuchung des Herstellers SPS Technology (2012b) betrachtet. Diese reicht in ihrer Tiefe nicht aus, um das Verhalten eines tragenden SPS-Bauteils über die Lebensdauer einer Brücke zu prognostizieren. Auch existieren zwar Daten zu den temperaturabhängigen Eigenschaften des PUR, bislang wurde jedoch kein Versuch unternommen dafür ein Materialmodell zu formulieren. Eine in DNVGL-CP-0097 zu findende Gleichung dient lediglich als Mindestanforderung zur Qualitätssicherung (vgl. Abb. 2.14).

Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit werden daher das *linear-viskoelastische Materialverhalten* bzw. die *linear-viskoelastischen Eigenschaften* des speziellen PUR im SPS mithilfe umfangreicher Untersuchungen charakterisiert.¹ Dafür wurden Experimente mit verschiedenen untergeordneten Zielen durchgeführt, deren Ergebnisse zur linear-viskoelastischen Charakterisierung des PUR im SPS zusammengeführt werden. Der methodische Aufbau der experimentellen Untersuchung kann anhand des Versuchsprogramms in Abbildung 3.1 nachvollzogen werden.

Die Grundlage aller Untersuchungen bildet die Vergleichbarkeit des konkret betrachteten Stoffs mit dem PUR, welches in der Literatur beschrieben wird. Vereinfacht soll zunächst anhand der in Abschnitt 3.2 beschriebenen Versuche festgestellt werden, ob es sich um das gleiche Material handelt. Nur wenn diese Voraussetzung gegeben ist, besteht eine Rechtfertigung um die Erkenntnisse aus den weiteren Experimenten auf „das PUR im SPS“ allgemein zu übertragen. Da die Ergebnisse aller Versuche auch stark von deren Durchführung abhängen, wurde darauf geachtet die jeweiligen Versuchsnormen der Kunststoffprüfung einzuhalten, die auch schon in anderen Untersuchungen am PUR zum Einsatz kamen (vgl. SPS Technology 2002, S. 16). Darüber hinaus verbessert die Einhaltung möglichst vieler Standards die Reproduzierbarkeit der Ergebnisse vorliegender Arbeit, bspw. zur Qualitätssicherung in einer späteren Anwendung.

Um Fehleinschätzungen bspw. durch systemische Verfälschungen entgegen zu wirken und die Ergebnisse der Versuchsreihen besser einordnen zu können, wurden mehrere Versuchsarten herangezogen. Der Vergleich mit der Literatur erfolgt auf Basis gemessener Stoffkenngrößen aus uniaxialen Zug- (T) und Druckversuchen (C) sowie aus Temperatur-Sweeps der DMTA (D-TS). Hierfür stehen seitens des Herstellers und anderer Untersuchungen genügend Vergleichswerte zur Verfügung. Die Versuche dienen außerdem in einem ersten Schritt der Charakterisierung des PUR in Abhängigkeit von der Temperatur. Mit ihrer Hilfe wird sich zeigen, dass erhöhte Temperaturen nicht nur direkten Einfluss auf das Verhalten des Stoffs haben, sondern diesen auch strukturell verändern. Um dieses Phänomen genauer zu beleuchten, spielen im Weiteren die Temperatur-Sweeps der DMTA (D-TS) eine zentrale Rolle. Sie werden daher sowohl für den Vergleich mit der Literatur, als auch für die viskoelastische Charakterisierung des PUR genutzt.

Zusammen mit den Temperatur-Sweeps bilden die in Abschnitt 4.1 beschriebenen Temperatur-Frequenz-Sweeps der DMTA (D-TFS) den Schwerpunkt der Untersuchungen. Aus ihnen können methodisch die meisten Erkenntnisse gezogen werden, da sich unter Anwendung des bereits beschriebenen Prinzips der Zeit-Temperatur-Verschiebung (ZTV) das zeitabhängige Verhalten des Stoffs weit über das experimentelle Fenster hinaus bestimmen lässt (vgl. Abschnitt 2.1.5). Nachdem sich zeigen wird, dass die Temperatur auch nachhaltig die Struktur des PUR beeinflusst, werden zwei Methoden zur Auswertung der D-TFS-Versuche untersucht, welche diesen Einfluss unterschiedlich berücksichtigen. Um die Ergebnisse der DMTA und die aus ihnen abgeleiteten Modelle kritisch zu prüfen und gegebenenfalls zu untermauern werden sie mit unabhängig voneinander durchgeführten Kriech- bzw. Relaxationsversuchen verglichen. Diese werden nach ihrer Beanspruchungsart, Bauteiltemperatur und Dauer unterschieden.

¹In den mechanischen Grundlagen in Abschnitt 2.1 wurde bereits beschrieben, dass sich das zeit- und temperaturabhängige Verhalten von Polymeren gegenseitig beeinflussen. Daher werden beide unter dem Oberbegriff der *viskoelastischen Eigenschaften* zusammengefasst.

- In Kriechversuchen unter uniaxialem Zug (Abkürzung: *TC* für engl.: *Tension Creeping*) wurden mehrere Probekörper bei Raumtemperatur dauerhaft mit konstanten Gewichtskräften von jeweils ca. 50, 100 und 200 N auf Zug belastet und ihre Deformation über eine Dauer von 1000 h gemessen (zu finden in Abschnitt 4.2.1).
- In Kurzzeit-Kriechversuchen (Abkürzung: *TCL* für engl.: *Tension Creeping Linearity*) wurden Probekörper bei Raumtemperatur für jeweils kurze Zeit einer konstanten Zugbelastung ausgesetzt, welche mehrfach schrittweise erhöht wurde. Mithilfe der Versuche soll die Linearitätsgrenze des PUR näherungsweise verortet werden, um die Interpretation der Kriechversuche unter Zug zu unterstützen (zu finden in Anhang AI-6.2).
- In Relaxationsversuchen unter uniaxialem Zug (Abkürzung: *TR-TTS* für engl.: *Tension Relaxation-Time-Temperature Superposition*) wurde Probekörpern bei verschiedenen Temperaturen jeweils eine initiale Zugdeformation aufgezwungen und über mehrere Stunden die Kraft gemessen. Die Versuche sollen zusätzlich dazu dienen das ZTV-Gesetz zu überprüfen (zu finden in Abschnitt 4.2.2).
- In Relaxationsversuchen unter Schub (Abkürzung: *SR* für engl.: *Shear Relaxation*) wurde mehreren Schubprobekörper bei drei verschiedenen Temperaturen jeweils eine initiale Schubdeformation aufgezwungen und über 1000 h das Abfallen der ausgelösten Kraft gemessen (zu finden in Abschnitt 4.3.1).
- In Steifigkeitsversuchen unter Schub (Abkürzung: *ST* für engl.: *Stiffness*) wurde die Kurzzeit-Schubsteifigkeit von allen Probekörpern der beschriebenen Langzeit-Relaxationsversuche (SR) gemessen. Dies war erforderlich, da in den SR-Versuchen nur die Kraft und deren Abfall über die Zeit gemessen werden konnte, nicht aber die Schubdeformation. Die ST-Versuche helfen bei der Bestimmung der initialen Schubsteifigkeiten der SR-Versuche (zu finden in Anhang AI-7.1).
- In weiteren Kurzzeit-Relaxationsversuchen unter Schub (Abkürzung: *SR-TTS* für engl.: *Shear Relaxation-Time-Temperature Superposition*) wurde, nach dem gleichen Prinzip der zuvor beschriebenen Steifigkeitsversuche (ST), die Schubsteifigkeit von Probekörpern bei verschiedenen Temperaturen und deren Abfall über mehrere Stunden gemessen. Auch diese Versuche sollen dazu dienen das ZTV-Gesetz zu überprüfen (zu finden in Abschnitt 4.3.2).

Bei den Kriechversuchen unter stufenweise steigender Zuglast (TCL) und den Steifigkeitsversuchen unter konstanter Schubdeformation (ST) handelt es sich um sogenannte *Hilfsversuche*, mit denen die Auswertungen und Interpretationen der Kriech- (TC) bzw. Relaxationsversuche (SR) unterstützt bzw. erweitert werden. Da sie allein nur bedingte Aussagekraft im Vergleich mit den DMTA haben, werden die Hilfsversuche nicht direkt in der Arbeit präsentiert sondern nur in den erwähnten Anhängen mit einigen Erläuterungen angefügt.

Nach der versuchsgestützten Charakterisierung des PUR durch die DMTA im Vergleich mit den Ergebnissen der anderen Experimente, wird in Kapitel 5 ein analytisches Modell zur Beschreibung von dessen linear-viskoelastischem Materialverhalten entwickelt. Zunächst werden verschiedene ZTV-Gesetze verglichen, um die Abhängigkeit der Steifigkeit des PUR von der Temperatur zu modellieren.

Die Formulierung des Einflusses der Zeit erfolgt über ein Relaxationsspektrum in Form einer Prony-Reihe, welche aus einer Funktionsanpassung an die Ergebnisse der D-TFS-Versuche hergeleitet wird. Danach werden die beiden gefundenen Abhängigkeiten von der Temperatur und der Zeit in einem vereinfachten Modell zur Beschreibung des linear-viskoelastischen Verhaltens des PUR vereint. Abschließend wird dieses abermals mit ausgewählten Ergebnissen aus Versuchen und der Literatur verglichen.

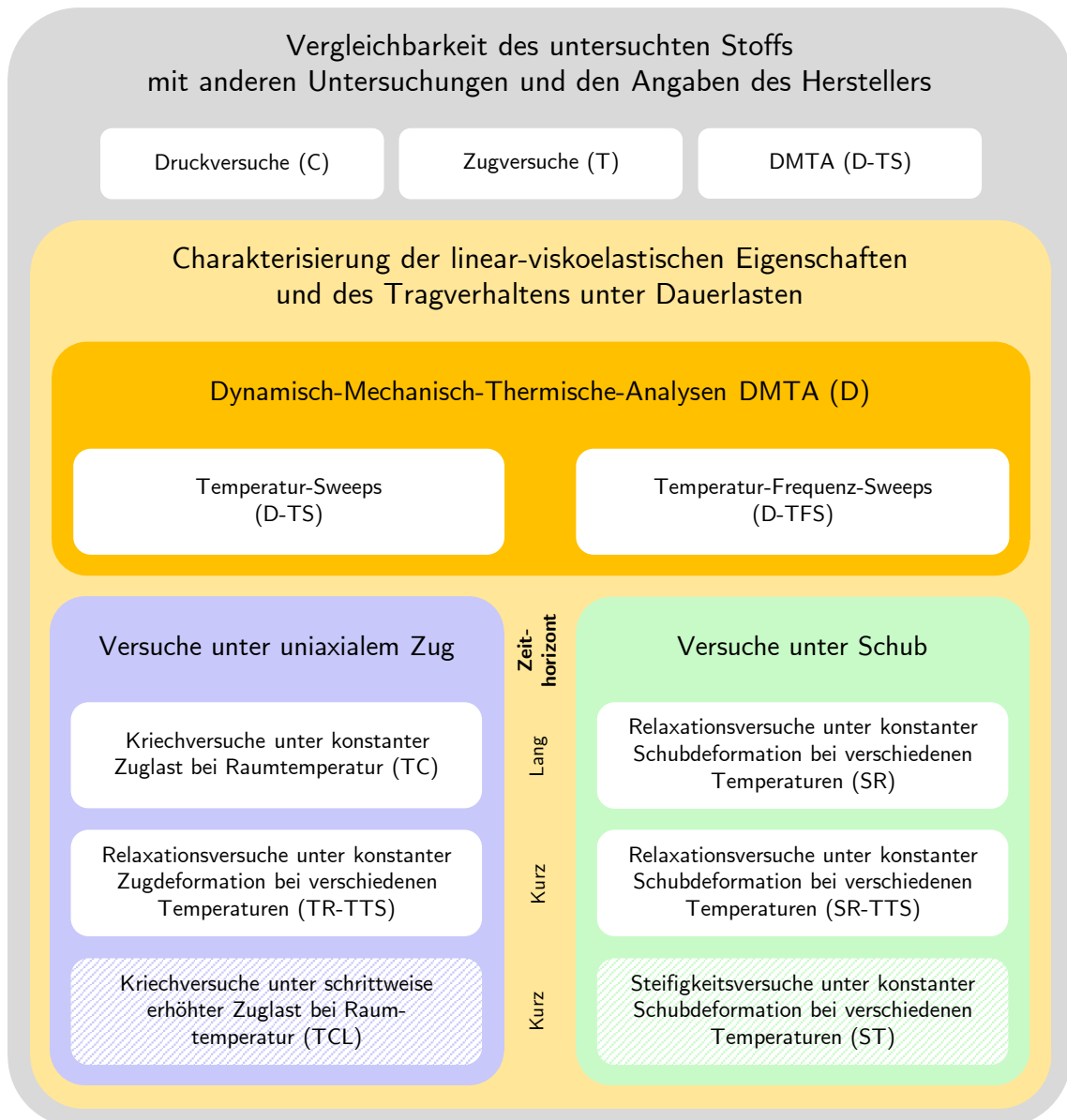


Abbildung 3.1: Versuchsprogramm zur Charakterisierung der linear-viskoelastischen Eigenschaften des PUR im SPS und dessen Langzeitverhalten (Bei den mit Schraffur hinterlegten handelt es sich um die Hilfsversuche zu den ursprünglichen Kriech- bzw. Relaxationsversuchen)

3.1.2 Die Probekörper und ihre Herstellung

Für die verschiedenen Versuche wurden vier Typen von Probekörpern verwendet, deren Nennmaße sofern möglich entsprechend den jeweiligen Prüfnormen gewählt wurden. Die Probekörper und ihre Nennmaße sind in Abbildung 3.2 dargestellt. Für alle Versuche unter uniaxialem Zug wurden Zugprobekörper vom Typ A2 nach DIN EN ISO 20753 verwendet. Für die quaderförmigen DMTA-Probekörper wurden die gemäß DIN EN ISO 6721-2 bevorzugten Abmessungen gewählt. Für zylinderförmige Probekörper in Druckversuchen wird seitens EN ISO 604 nur ein dimensionsloses Mindestverhältnis von Durchmesser zu Länge formuliert, welches von der im Versuch zu messenden Größe und der größten auftretenden Dehnung abhängt. Diese wurde für die Druckversuche zu maximal 30 % festgelegt und die Abmessungen der Probekörper entsprechend gewählt.

Lediglich für die Probekörper der Versuche unter Schubbeanspruchung gab es keine direkten normativen Vorgaben. Diese wurden daher in Anlehnung an DIN EN 12090 als symmetrische Doppelprobekörper aus zwei PUR-Schichten und drei Stahllamellen ausgebildet. Die Dicke der Probekörper wurde so festgelegt, dass trotz geringer Deformationen angemessen hohe Kräfte entstehen. So wurde sichergestellt, dass auch innerhalb der Grenzen der linearen Viskoelastizität des PUR die auftretenden Kräfte verlässlich genau gemessen werden konnten (vgl. Abschnitt 2.1.2).

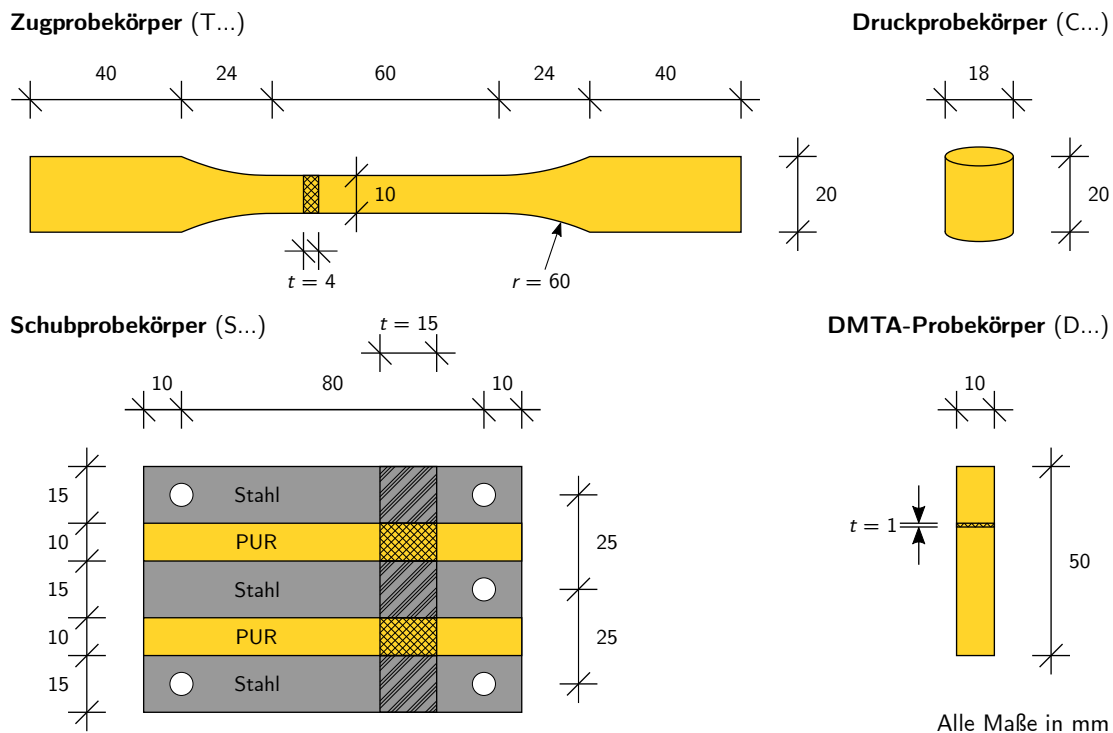


Abbildung 3.2: In den Versuchen verwendete Probekörper und ihre Nennmaße (In den 2-D Darstellungen sind dessen Querschnitt und Dicke im jeweiligen Probekörper schraffiert angedeutet)

Die in Abbildung 3.2 gezeigten Maße der Schubprobekörper wurden in Anlehnung an die Erkenntnisse von Heyder et al. (2002) gewählt. Sie hatten in einer numerischen Untersuchung gezeigt, dass mit zunehmender Schichthöhe eines auf Schub beanspruchten Probekörpers im Verhältnis zu dessen Breite die Abweichung zwischen wahren und gemessenen Schubmodul steigt. Je größer dieses Verhältnis wird, desto mehr Lastabtrag erfolgt über Biegung. Wird wie in gängigen Prüfverfahren (vgl. DIN EN 12090) reine Schubtragwirkung vorausgesetzt, werden somit die Ergebnisse für den Schubmodul verfälscht. Um diesen Effekt möglichst gering zu halten, wurde das entscheidende Verhältnis von Schichthöhe zu -breite zu 0,1 gewählt und die Dimensionen der Schubprobekörper entsprechend ausgelegt. Nach den Erkenntnissen von Heyder et al. (2002) sollte der etwaige Fehler in einer Messung des Schubmoduls so nicht mehr als 2% betragen.

Alle Probekörper für die Untersuchungen wurden von SPS Technology mit der ursprünglichen Rezeptur des PUR aus 2002 hergestellt (vgl. Abschnitt 2.2.2). Dabei kam der bereits vielfach erprobte Fertigungsprozess zum Einsatz, wie dieser auch in der industriellen Produktion von SPS-Elementen angewendet wird (vgl. Abschnitt 1.2.1). Mehrere stählerne, formstabile Boxen, deren Oberflächen anders als im Regelfall nicht behandelt wurden, dienten als Schalung (s. Abb. 3.3 o.l.). Die reaktiven Grundkomponenten wurden in die Formen injiziert und zeitgleich vermischt. Dabei betrug die Reaktionstemperatur etwa 65 °C. Nach der Injektion wurden die noch reagierenden Rohlinge in ihren Formen für weitere zwei Stunden in einem Ofen bei ca. 80 °C nachbehandelt. Nach dem vollständigen Auskühlen wurden die Ränder der Schalungen mit einer Metallsäge entfernt und die verbliebenen Deckbleche der Schalung vom PUR getrennt. Durch die glatten, unbehandelten Oberflächen der Bleche war dies zerstörungsfrei möglich. Danach wurden die für die Untersuchungen erforderlichen Probekörper durch Wasserstrahlschneiden aus den Rohlingen (s. Abb. 3.3 r.) herausgearbeitet.

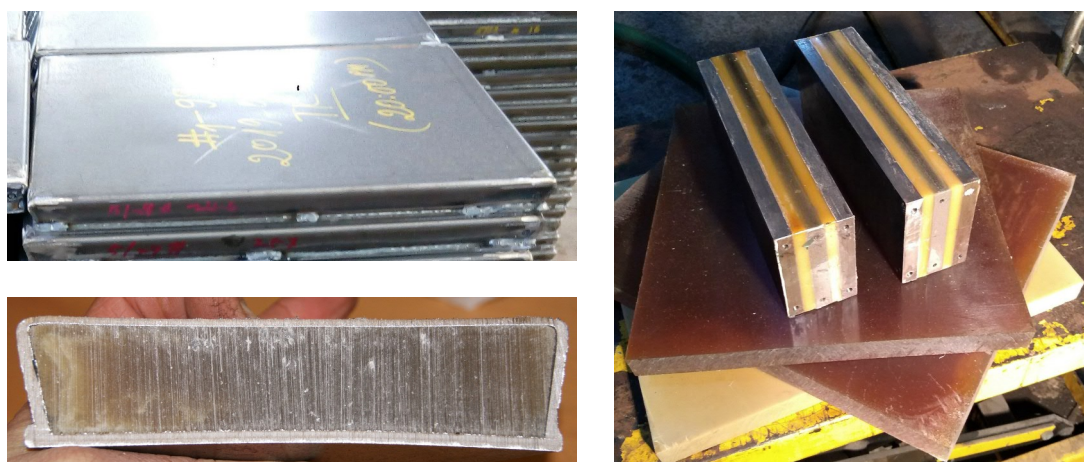


Abbildung 3.3: Metallschalungen zur Herstellung der PUR-Probekörper (o.l.), Schnitt durch erhärtetes PUR in der Schalung (u.l.) und ausgeschaltete Rohlinge vor der Weiterverarbeitung (r.) (Quelle: SPS Technology)

Da in den Schubprobekörpern die Stahlbleche und das PUR im Verbund stehen müssen, unterschieden sich die Schalungen zu deren Herstellung von den zuvor beschriebenen. Die Stahlblechflächen, welche einen Verbund mit dem PUR eingehen sollten, wurden durch Sandstrahlen vorbehandelt, um die erforderliche Rauigkeit zu erreichen (vgl. Feldmann et al. 2010, S. 28 f.)

und anschließend mit geschliffenen Blechen zu einer offenen Schalung zusammengesetzt (s. Abb. 3.4). Die Injektion des reaktiven Gemischs erfolgte dann durch die offen verbliebene Oberseite der Schalung, bevor diese durch ein weiteres geschliffenes Blech von oben abgedeckt wurde. Auch die Schubprobekörper wurden nach dem Gießen für zwei Stunden bei ca. 80 °C nachbehandelt. Anschließend wurden die geschliffenen Bleche der Schalung wieder entfernt und die Rohlinge (s. Abb. 3.3 r.) mittels Metallsäge in Scheiben der vorgesehenen Dicke geschnitten.

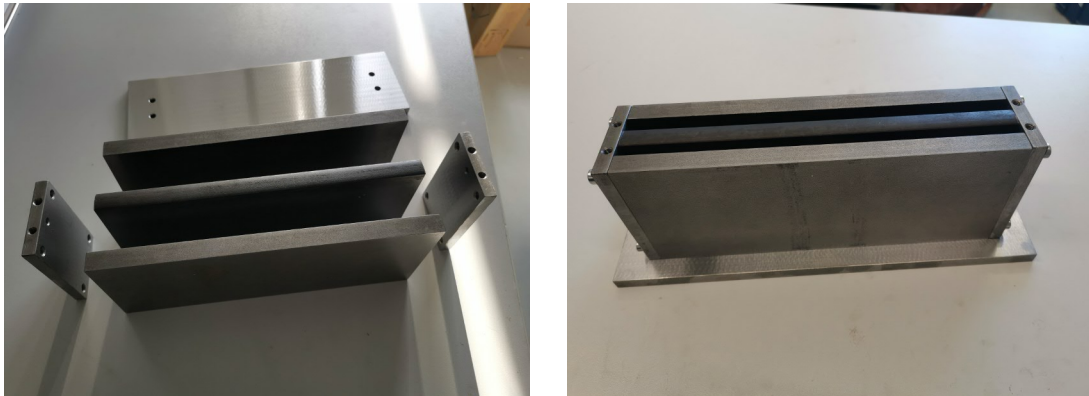


Abbildung 3.4: Metallschalung zur Herstellung der Schubprobekörper in unmontiertem- (l.) und zusammengesetztem Zustand (r.)

Bis zu ihrem jeweiligen Einsatz wurden alle Versuchskörper bei Raumtemperatur unter Ausschluss von Tageslicht gelagert, um etwaigen Alterungseffekten daraus vorzubeugen. Kurz vor ihrem Einsatz wurden die jeweiligen Probekörper ebenfalls bei Raumtemperatur in Anlehnung an DIN EN ISO 16012 vermessen und anschließend für die notwendigen Prüfbedingungen konditioniert. Die Konditionierungszeiten wurden dabei je nach Versuch festgelegt, da die Temperatur und ihre Auswirkung auf das PUR unter Anderem Gegenstand einzelner Untersuchungen ist. Genauere Angaben hierzu werden in den einzelnen Versuchsbeschreibungen gemacht.

Vor der Herstellung der Probekörper durch SPS Technology wurden unter Anleitung im Labor von BASF Polyurethanes bereits erste Versuchskörper selbst hergestellt. Die meisten wurden für Vorversuche zur Auslegung der Versuchsapparaturen verwendet und werden im Rahmen der Arbeit daher nicht gezeigt. Einige wenige Versuche sind jedoch trotz ihrer abweichenden Herstellung in ihren Ergebnissen so aussagekräftig, dass diese gezeigt werden. Die Probekörper und mit ihnen durchgeführte Versuche sind zur Unterscheidung mit dem Zusatz *L* für *Labor* gekennzeichnet.

3.2 Versuche zum Vergleich mit bisherigen Arbeiten zum PUR

Wie bereits zur Methodik geschildert, wird in grundlegenden Versuchen zunächst überprüft, ob der für die Untersuchungen verwendete Stoff mit dem in anderen Arbeiten zu SPS beschriebenen PUR vergleichbar ist. Dieser Abschnitt zeigt die dafür durchgeführten quasi-statischen Kurzzeitversuche unter uniaxialen Druck und Zug bei verschiedenen Temperaturen sowie die Temperatur-Sweeps der DMTA. Die Ergebnisse der Versuche werden dargelegt und sogleich diskutiert bzw. mit den Stoffeigenschaften aus der zuvor analysierten Literatur verglichen. Die Betrachtungen dieses Abschnitts sollen dabei sowohl die argumentative Basis für eine Übertragbarkeit der gewonnenen Erkenntnisse liefern, als auch die Konformität der Probekörper untereinander klären. Wie sich zeigen wird, können aus den Versuchen noch weitere Erkenntnisse zu Eigenschaften des PUR unter Einfluss der Temperatur gezogen werden.

3.2.1 Druckversuche bei verschiedenen Temperaturen

Es wurden jeweils fünf uniaxiale Druckversuche bei drei verschiedenen Temperaturen (Raumtemperatur, -20 und 60 °C) an einer Universalprüfmaschine durchgeführt. Abbildung 3.5 zeigt den Versuchsaufbau mit eingebautem Probekörper. Die Versuche erfolgten in Anlehnung an die Prüfnorm EN ISO 604. Im Vorfeld sollten die Probekörper entsprechend den langen Konditionierungszeiten nach DIN EN ISO 291, für jeweils 24 Stunden in einem Klima- bzw. Gefrierschrank temperiert werden. Aufgrund eines terminlichen Konflikts wurde die Zeitspanne auf etwa eine Woche ausgedehnt, was jedoch zunächst nicht als problematisch angesehen wurde.¹



Abbildung 3.5: Versuchsaufbau der Druckversuche in der Übersicht (l.) und im Detail (r.)

¹Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird sich zeigen, dass sowohl die Temperierung eines PUR-Probekörpers an sich, als auch die Dauer der Temperierung, sehr wohl Einfluss auf dessen Eigenschaften haben.

Da die Versuche nicht in einer gekapselten Klimakammer stattfinden konnten und mit einer Änderung der Probekörpertemperatur während des Einbaus und des Versuchs zu rechnen war, wurden die Probekörper jeweils 10 K wärmer bzw. kälter temperiert, als die angestrebten Temperaturen von -20°C und 60°C . Für den Versuch wurde der jeweilige Probekörper der Temperierung entnommen, in die Maschine eingebaut und eine Vorlast gemäß Norm von etwa 100 N aufgebracht. Die Temperatur des Probekörpers wurde mithilfe eines Infrarot-Thermometers kontrolliert und der Versuch gestartet sobald seine Oberfläche die angestrebte Versuchstemperatur erreicht hatte. Während die -20°C -Probekörper sich nur langsam erwärmten, verloren die 60°C warmen ihre Temperatur sehr schnell. Daher wurde improvisatorisch ein Heißluftföhn eingesetzt um dem starken Abfall der Probekörpertemperatur entgegen zu wirken, welche dabei kontinuierlich mit dem Infrarot-Thermometer überprüft wurde. Die Versuchsgeschwindigkeit wurde zu 1,2 mm/min festgelegt, was einer Dehnungsrate von 1‰/s entspricht.

Abbildung 3.6 zeigt die gemessenen Versuchskurven bei den verschiedenen Temperaturen. Außerdem dargestellt sind die einzigen in der Literatur verfügbaren exemplarischen Kurven von Druckversuchen von SPS Technology (2002) bei diesen Temperaturen. Der qualitative Vergleich der Kurven zeigt bereits deutliche Unterschiede. Die Versuche bei Raumtemperatur und -20°C passen im Anfangsbereich zwar zu denen der Literatur, zeigen dann aber ausgeprägte Maxima, die in den Vergleichskurven nicht zu finden sind. Die 60°C -Kurven hingegen weichen stark von der Literatur ab. Während in allen anderen Versuchen die Steifigkeit mit steigender Dehnung bis zum Maximum abnimmt, steigt diese im Fall der 60°C -Versuche leicht aber kontinuierlich an und es zeigt sich keinerlei Maximum.

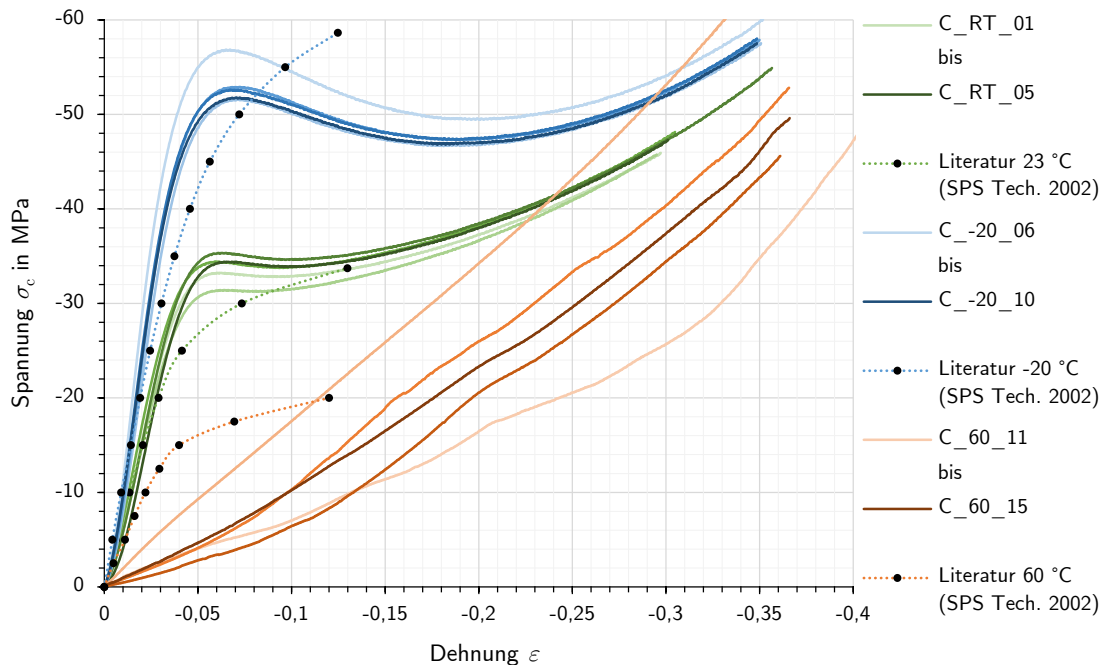


Abbildung 3.6: Kurven der Druckversuche bei den verschiedenen Temperaturen (Raumtemperatur, -20 und 60°C) und von SPS Technology (2002) gegebene exemplarische Versuchskurven bei den gleichen Temperaturen

Als Gründe für die großen Abweichungen der 60 °C-Kurven können strukturelle Veränderungen im PUR oder Fehler in der Versuchsdurchführung vermutet werden. So könnte die Temperierung das Gefüge der Probekörper verändert haben oder das improvisierte Zuführen von Hitze verfälschte die Messungen. Daher werden im weiteren Vergleich mit der Literatur die 60 °C-Kurven zunächst vernachlässigt. Deren Gestalt und die Auswirkungen der Temperatur werden in zusätzlichen Versuchen untersucht.

In den -20 °C-Kurven sind ebenfalls Störeinflüsse aus der Temperaturänderung während der Versuche zu vermuten. Anders als bei den 60 °C-Versuchen wurde der Änderung der Probekörpertemperatur hier nicht entgegengewirkt, weshalb die Proben mit zunehmender Versuchsdauer wärmer wurden. Dies führt indirekt zu einem Abflachen der -20 °C-Kurven mit zunehmender Stauchung bzw. Versuchsdauer. Während sich die Raumtemperatur-Kurven nach dem Maximum wieder der Literatur annähern, bleibt dies bei den kalten Versuchen aus.

Aus den Versuchen bei Raumtemperatur und bei -20 °C werden die Stoffkennwerte ausgewertet und in Abbildung 3.7 denen von SPS Technology (2002 und 2011a) qualitativ gegenübergestellt. Die vollständigen Daten werden in Anhang AI-2.1 dargestellt. Trotz der Vorlast traten Nachgiebigkeiten im Versuchsaufbau in Erscheinung welche in Form eines leichten Durchhangs am Beginn der Kurven in Abbildung 3.6 erkennbar sind. Dieser würde die Auswertung des jeweiligen E -Moduls in den nach EN ISO 604 vorgegebenen Dehnungsgrenzen stark verfälschen. Daher wurden die E -Moduln abweichend von der Norm auf die Spannung bezogen im Bereich der Kurven zwischen 5 und 10 MPa ausgewertet.

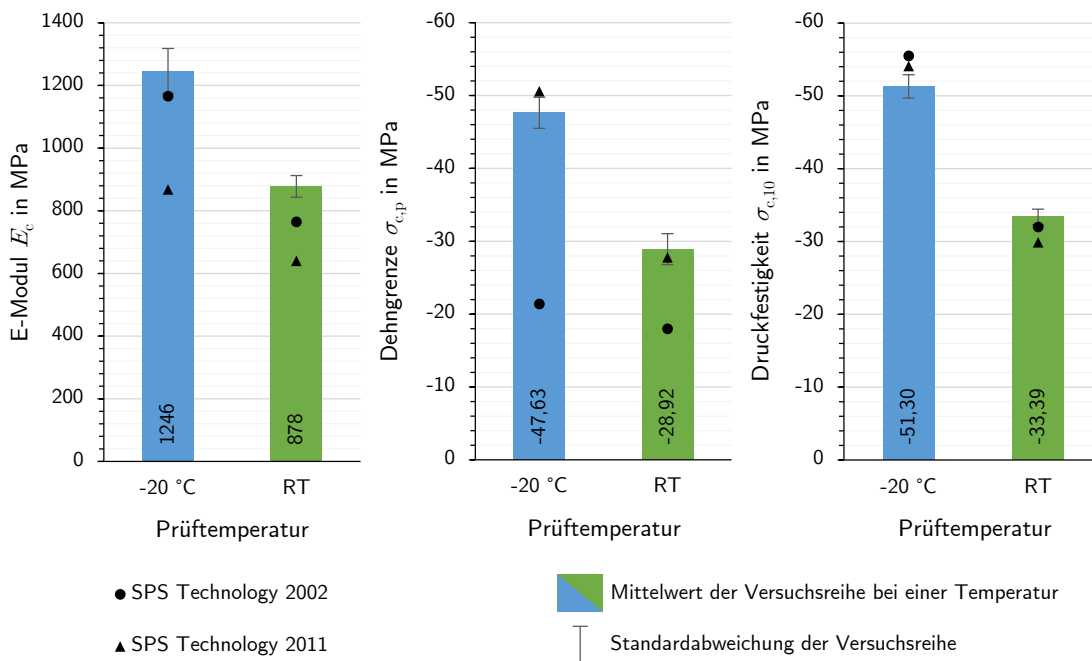


Abbildung 3.7: Auswertung der Druckversuche im Vergleich mit den von SPS Technology (2011a) angegebenen mittleren Eigenschaften der zwei Rezepturen des PUR

Da sich Kunststoffe im entropieelastischen Bereich auch für kleine Dehnungen schon nicht-linear verhalten, variiert der E -Modul in Abhängigkeit von den Grenzen des Bereichs in dem er bestimmt wird. Daher geben sowohl EN ISO 604 als auch DIN EN ISO 527 die gleichen Dehnungsgrenzen für den Auswertungsbereich vor. Dieser Bereich ist mit nur 0,5 bis 2,5‰ jedoch sehr klein und damit anfällig für Störungen.

Die Größe der Dehngrenze σ_p hängt indirekt vom E -Modul ab, da sie analog zu den vorherigen Arbeiten sowohl für Druck als auch für Zug über die aus dem Metallbau stammende 0,2%-Dehngrenze ermittelt wird (vgl. DIN EN ISO 6892-1). Für ideale, nichtlineare Spannungs-Dehnungs-Beziehungen mit monoton abnehmender Steifigkeit gilt: Je näher der Auswertebereich des E -Moduls dem Nullpunkt liegt und je kleiner dieser ist, desto höher ergibt sich der E -Modul und desto geringer wird die 0,2%-Dehngrenze. Gibt es Nachgiebigkeiten im Versuchsaufbau, treten diese meist am Beginn der Spannungs-Dehnungs-Beziehung in Erscheinung, wo sie sich teilweise oder ganz mit dem nach Norm definierten Auswertungsbereich überschneiden. Bei stringenter Auswertung in diesem Bereich führt dies zur Verfälschung der Ergebnisse.

Wie der Vergleich in Abbildung 3.7 zeigt, passen die mittleren gemessenen Eigenschaften des PUR zu der nach Angaben von SPS Technology verwendeten Rezeptur aus 2002. Lediglich die Dehngrenze weicht stark von dem Ergebnis der Literatur ab und passt besser zu der modifizierten Rezeptur. Der Grund hierfür liegt in den größeren Steifigkeiten und den ausgeprägten Kurvenmaxima in deren Folge der Auswertungspunkt der 0,2% Dehngrenze zu höheren Spannungen rutscht (vgl. Abb. 3.6).

Um zu überprüfen ob die Temperierung das PUR strukturell veränderte und zu den Abweichungen in den zuvor gezeigten 60 °C-Kurven führte, wurden ergänzende Druckversuche durchgeführt (TRT-Versuche). Dafür wurden Probekörper unterschiedlich lang bei ca. 70 °C temperiert, wie zuvor für die warmen Versuche. Vier Probekörper wurden für 24 h im Ofen belassen, während drei Stück bereits nach nur 1 h wieder heraus genommen wurden. Alle Probekörper wurden im Anschluss auf Raumtemperatur abgekühlt und analog zu den anderen Druckversuchen getestet. Dieses Vorgehen wurde gewählt, um die Auswirkungen der Temperierung auf die Struktur des PUR unabhängig von einer möglicherweise fehlerbehafteten Temperaturregelung im Versuch zu überprüfen.

Abbildung 3.8 zeigt die Ergebnisse der zusätzlichen Versuche der zwei unterschiedlich lang temperierten Gruppen im Vergleich zu den untemperierten Versuchen bei Raumtemperatur und der exemplarischen Versuchskurve von SPS Technology (2002). Wie an den Kurven zu erkennen ist, hat die Temperierung die Eigenschaften des PUR beeinflusst. So wurde die Anfangssteifigkeit leicht reduziert und anstatt ausgeprägter Maxima wie in den untemperierten Kurven, finden sich nun Abknickpunkte. Hier sinkt der jeweilige E -Modul deutlich, eine horizontale Tangente tritt jedoch nicht auf. Die Kurven liegen bis auf einen Ausreißer zwar unter der Vergleichskurve der Literatur, von der Gestalt sind sie ihr aber ähnlicher als die Kurven der untemperierten Versuche. Die Dauer der Temperierung scheint tendenziell einen positiven, wenn auch im Mittel vergleichsweise geringen Einfluss auf die Eigenschaften zu haben.

Auch die Stoffkennwerte der ergänzend temperierten Versuche werden ausgewertet und in Abbildung 3.9 den untemperierten Versuchen und der Literatur gegenübergestellt. Die umfassenden Daten sind in Anhang AI-2.2 zu finden. Auch hier zeigen sich die zuvor bereits beschriebenen Phänomene. Die Eigenschaften des Stoffs werden durch die Temperierung verschlechtert. Während sich die Steifigkeit und die Druckfestigkeit bei 10% Dehnung nur leicht

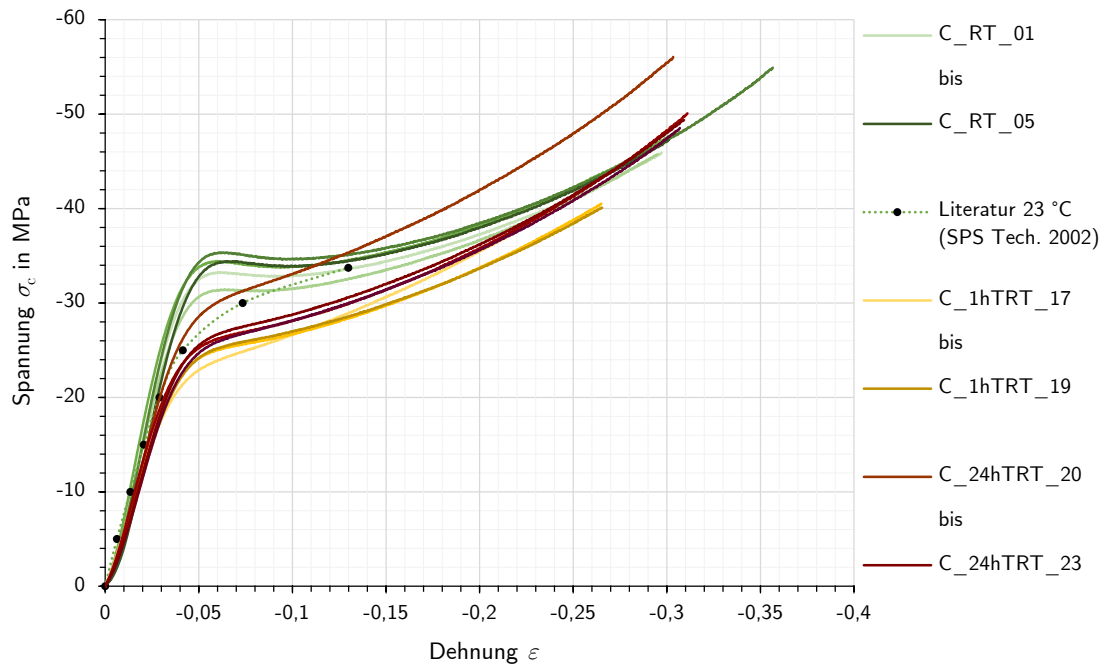


Abbildung 3.8: Kurven der Druckversuche bei Raumtemperatur nach einer Temperierung (TRT) von 1 h bzw. 24 h im Vergleich mit den untemperierten Versuchen (RT) und der exemplarischen Versuchskurve von SPS Technology (2002)

verringern, geht die Dehngrenze durch das Verschwinden der Maxima stark zurück. In Gänze liegen die temperierten Versuche aber näher an den von SPS Technology (2002) für ihre Rezeptur angegebenen Eigenschaften. Auch die bereits zuvor festgestellte Erhöhung der Kennwerte durch die längere Temperierung ist zu erkennen.

Die Veränderungen des PUR durch die Temperierung können als physikalische Alterung im Sinne einer *Temperung* interpretiert werden. Infolge der Erwärmung könnten sich im Stoff erstarrte Zustände der Molekülketten und damit innere Spannungen gelöst haben, was dessen Eigenschaften wie z. B. die Steifigkeit veränderte (vgl. Ehrenstein u. Pongratz 2007, S. 59f.). Auch die Reduzierung der Streubreite der Ergebnisse (bis auf einen Ausreißer) sprechen für eine Temperung. Mit ihr können Materialien nachträglich homogenisiert werden, um reproduzierbare Prüfergebnisse zu erhalten (DIN EN ISO 472). Die nach längerer Temperierung eintretende Verbesserung der gleichen Eigenschaften wird von der Definition einer Temperung jedoch nicht erfasst. Es könnte sich hierbei um eine Überlagerung mit einem weiteren Alterungsprozess handeln. Dieser kann jedoch durch seine schwächere Ausprägung und allein anhand der Druckversuche nicht genau identifiziert werden.

Übertragen auf die zuvor bereits diskutierten 60 °C-Versuche (vgl. Abbildung 3.6) ist anzunehmen, dass die Erhitzung der Probekörper deren Eigenschaften veränderte. Die Kurven zeigen jedoch eine außerordentlich niedrige Steifigkeit und einen stark veränderten Verlauf gegenüber den restlichen Versuchen. Ausgehend vom Vergleich der Versuchskurven in Abbildung 3.8, erscheint es unwahrscheinlich, dass die Struktur der 60 °C-Probekörper durch eine Temperung derart stark verändert wurde, um für diese Kurvenverläufe verantwortlich zu sein. Eine fehlerhaft Durchführung der Versuche ist hier wahrscheinlicher. Es liegt nahe, dass die in

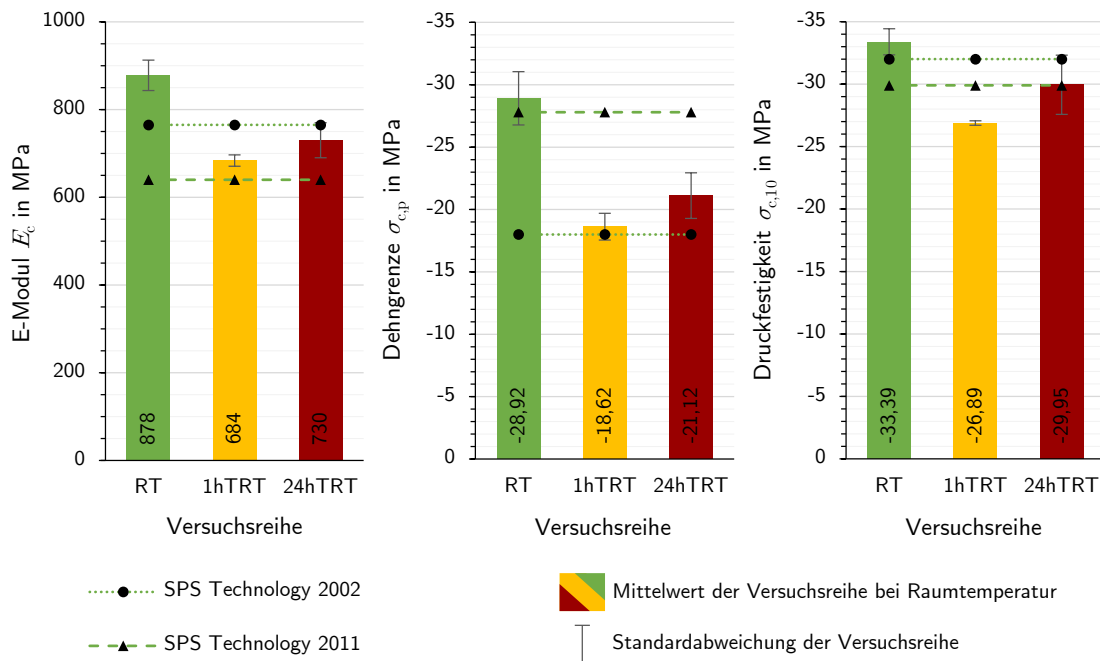


Abbildung 3.9: Auswertung aller Druckversuche bei verschiedenen Temperaturen im Vergleich mit den in der Literatur angegebenen Mittelwerten für die zwei verschiedenen Rezepturen des PUR aus den Jahren 2002 und 2011

den Versuchen tatsächlich vorherrschenden Temperaturen deutlich höher waren als ursprünglich angenommen und auch nicht konstant gehalten werden konnten. Bei dem improvisierten Wärmen der Probekörper wurde deren äußere Temperatur zwar kontrolliert, jedoch waren sowohl die Heiz- als auch die Messmethode nur sehr ungenau. Die Temperatur des Heißluftföhns selbst konnte weder präzise eingestellt noch kontrolliert werden. Auch kann keine Aussage getroffen werden, ob bei den Infrarot-Messungen tatsächlich die Temperatur auf der Probekörperoberfläche gemessen wurde oder ob z. B. der Luftstrom des Föhns die Messung verfälschte. Für eine Verfälschung sprechen die schwankenden Verläufe der 60 °C-Kurven und deren Streuung im Vergleich zu den anderen Versuchen.

3.2.2 Zugversuche bei verschiedenen Temperaturen

Nach den Erkenntnissen aus den Druckversuchen wurden die uniaxiale Zugversuche an einer Universalprüfmaschine mit Klimakammer durchgeführt (s. Abb. 3.10). Auf diese Weise konnten die drei verschiedenen Versuchstemperaturen (Raumtemperatur, -20 und 60 °C) in den Probekörpern auch während der Versuche gleichbleibend gehalten werden. Je Temperaturstufe wurden drei Versuche in Anlehnung an DIN EN ISO 527 durchgeführt. Die Prüfnorm gibt einen zusätzlichen Verweis auf DIN ISO 23529, welche genauere Angaben zu den erforderlichen Konditionierungszeiten von Elastomeren enthält. Die Probekörper wurden für die Versuche in Anlehnung daran mit jeweils ca. 30 min nur kurz konditioniert um Alterungseffekte zu minimieren. Die Temperatur im Probenraum wurde während der Versuche durch einen Messfühler nahe den Proben kontinuierlich überprüft (s. Abb. 3.10 r.). Sie entsprach bis auf eine Schwankung von ± 1 °C dem jeweils eingestellten Wert. Die Versuchsgeschwindigkeit wurde

zu 6 mm/min festgelegt, was bei einer mittleren Dehnlänge von $L_0 \approx 100$ mm einer Dehnungsrate von 1 %/s entspricht. Zur Dehnungsmessung wurde ein berührungsloses optisches Messsystem der Firma Correlated Solutions eingesetzt, welches auf dem Prinzip der digitalen Bildkorrelation basiert (Abkürzung: *DIC* für engl.: *Digital Image Correlation*).

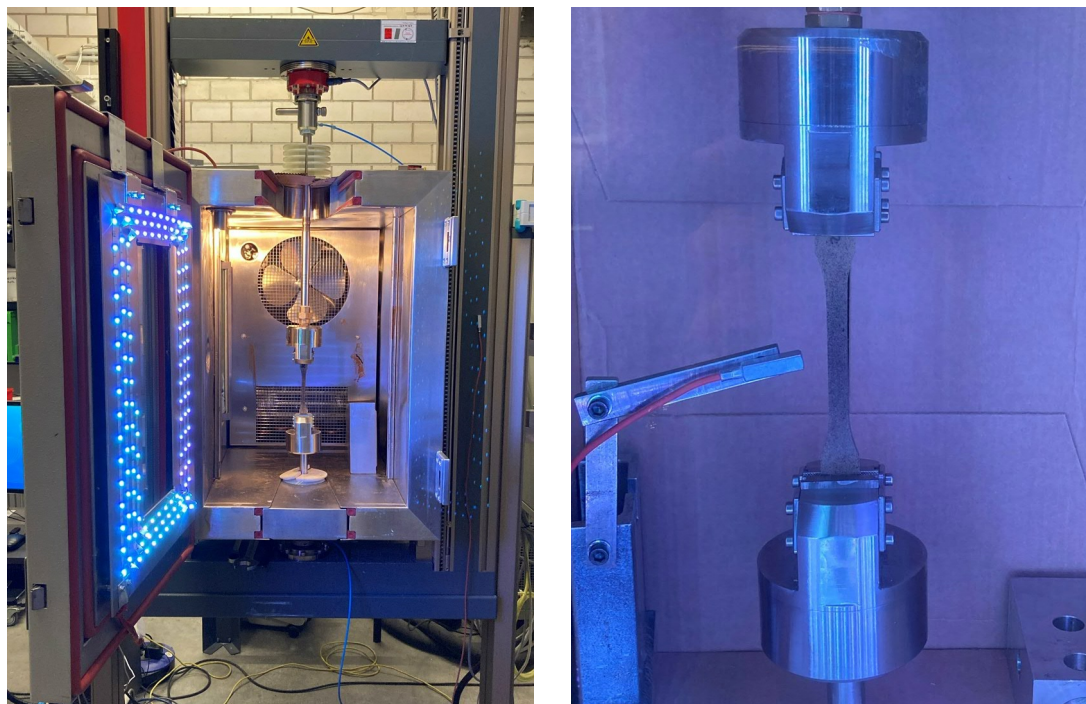


Abbildung 3.10: Versuchsaufbau der Zugversuche in der Übersicht mit geöffneter Klimakammer (l.) und im Detail während eines Versuchs mit Temperatursensor (r.)

Abbildung 3.11 zeigt die Spannungs-Dehnung-Kurven aller Zugversuche bei den verschiedenen Temperaturen im Vergleich mit den von SPS Technology (2002) und Teixeira de Freitas (2012) exemplarischen gegebenen Kurven bei den gleichen Temperaturen. Anders als in den Druckversuchen liegen im qualitativen Vergleich die Versuchskurven bei -20 und 60 °C deutlich näher bei den Vergleichskurven von SPS Technology (2002). Lediglich die Versuche bei Raumtemperatur weichen davon ab. Im Gegensatz dazu sind die Kurven der Versuche bei Raumtemperatur und die exemplarische von Teixeira de Freitas (2012) nahezu identisch. Bemerkenswert ist auch die geringe Streuung der Versuchskurven, sodass z. B. deren Verläufe bei Raumtemperatur fast deckungsgleich sind.

Analog zu Abbildung 3.7 werden ebenfalls die aus den Zugversuchen ausgewerteten Stoffkennwerte denen von Teixeira de Freitas (2012) und den Rezepturen aus 2002 und 2011 gegenübergestellt. Dabei zeigen sich die gleichen Tendenzen, wie bereits zuvor qualitativ an den Versuchskurven erörtert, weswegen auf eine detaillierte Darstellung an dieser Stelle verzichtet wird. Lediglich die Bruchdehnung der warmen Versuche weicht weiter von dem Vergleichswert von SPS Technology (2002) ab, als die restlichen Parameter. Für die generelle Aussage aus den Versuchen wird dem jedoch keine Bedeutung beigemessen. Die Darstellung des Vergleichs und die einzelnen Ergebnisse in tabellarischer Form sind in Anhang AI-3 zu finden.

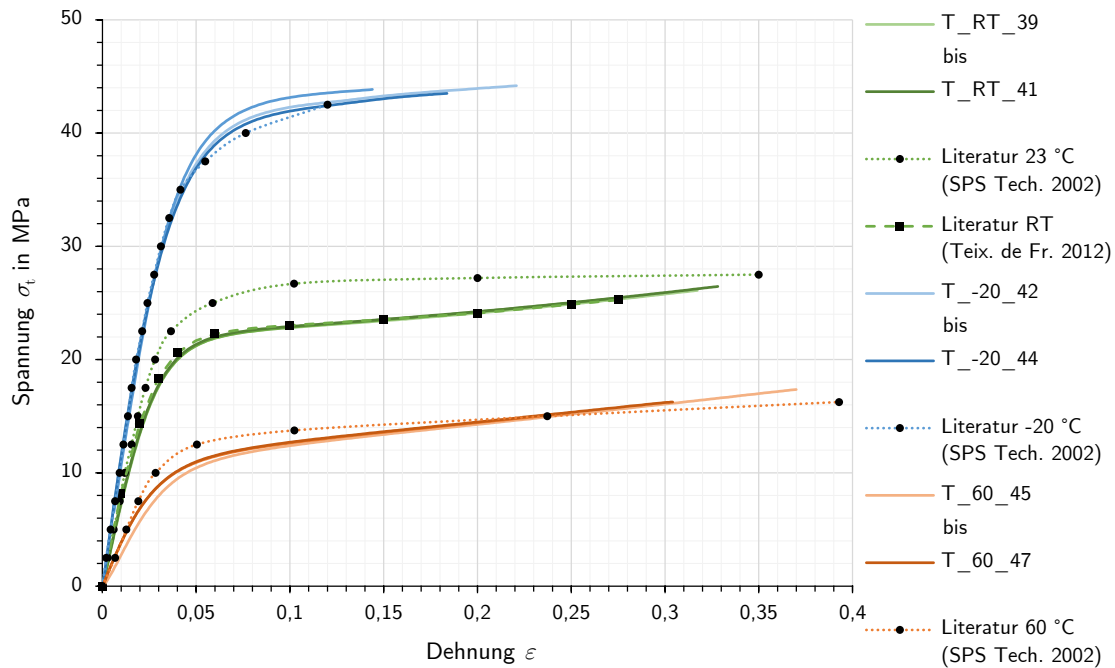


Abbildung 3.11: Kurven der Zugversuche bei verschiedenen Temperaturen im Vergleich mit exemplarische Versuchskurven aus der Literatur bei den gleichen Temperaturen

3.2.3 Dynamisch-Mechanisch-Thermische Analysen

Als aussagekräftigstes Instrument für den Vergleich der Steifigkeit über einen weiten Temperaturbereich wurden DMT Analysen nach DIN EN ISO 6721-2 an dem PUR gemacht. Für die Beschreibung des Versuchsaufbaus sei an dieser Stelle auf den folgenden Abschnitt 4.1 verwiesen, welcher sich detailliert der DMTA widmet. Weil dort allerdings nicht vordergründig der Vergleich mit anderen Arbeiten behandelt wird, erfolgt hier ein Vorgriff auf die DMT Analyse.

In drei Temperatur-Sweeps wurden die Probekörper zunächst auf 150 °C aufgeheizt und die Temperatur für 30 min gehalten. Danach wurde die Messung gestartet und mit einer Rate von 2 K/min von 150 bis -80 °C heruntergekühlt, während kontinuierlich die Steifigkeit des oszillierenden Probekörpers gemessen wurde. Wie in der Versuchspraxis üblich, wurde dabei eine Frequenz der Torsionsschwingung von 1 Hz und eine maximale Amplitude der Gleitung $\gamma = 0,1\%$ verwendet.

Abbildung 3.12 zeigt die in den Versuchen aufgezeichneten Speichermoduln G' im Vergleich zur Literatur. Ähnlich zu den Zugversuchen ist die Streuung der Ergebnisse sehr gering. Jedoch ergeben sich Unterschiede zu den Kurven der Untersuchung von SPS Technology (2012a). Obwohl die Probekörper für die DMTA in der Herstellung nur bei 80 °C nachbehandelt wurden, erscheint es im Vergleich, als hätte die Temperatur während ihrer Vernetzungsreaktion wesentlich höher gelegen. Die Speichermoduln der drei Versuche sind in hohen Temperaturen deutlich größer als mit einer Vernetzungstemperatur von 80 °C zu erwarten gewesen wäre. Der β -Übergang ist ausgeprägt und der α -Übergang liegt noch höher als jener der Vergleichskurven mit einer Vernetzungstemperatur von 147 °C.

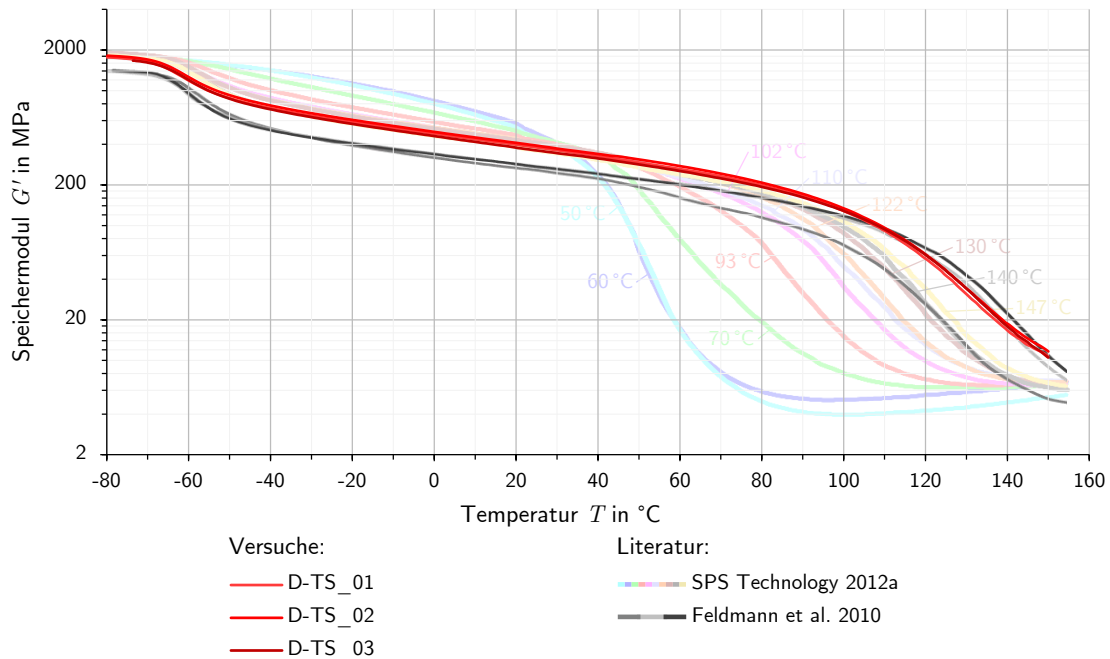


Abbildung 3.12: Kurven der in den DMTA aufgezeichneten Speichermoduln im Vergleich mit den Kurven von SPS Technology (2012a) und Feldmann et al. (2010)

Diese Phänomene lassen vermuten, dass auch die Probekörper der DMT Analysen strukturell verändert wurden. So könnte die angewandte Heizfolge eine ähnliche Temperatur bzw. Alterung der Probekörper verursacht haben, wie diese in den Druckversuchen aufgetreten ist. Diese These wird zusätzlich durch die bereits in Abschnitt 2.2.3 zitierten Beobachtungen von Feldmann et al. (2010) untermauert. In ihrer DMTA setzten sie den Probekörper zwei Heiz- und einem Kühlzyklus zwischen jeweils -80 und 200 °C aus während die Steifigkeit gemessen wurde. Die Ergebnisse liegen wie bereits im Vergleich der Literatur in Abschnitt 2.2.3 erwähnt etwas niedriger, was aber für die eigentliche Beobachtung unerheblich ist. Wie in Abbildung 3.12 zu erkennen ist, liegt die Kurve des zweiten Heizzyklus (dunkelgrau) deutlich über der des ersten. Auch hier scheint es als habe allein die Temperierung im Versuchsablauf den Probekörper bereits strukturell verändert. Die Veränderung in den Kurven erscheint außerdem ähnlich zu jener, die in SPS Technology (2012a) eintritt, wenn die Vernetzungstemperatur erhöht wird. Dies könnte bedeuten, dass ein Erhitzen auch längere Zeit nach der Herstellung noch ähnliche Effekte auf das PUR hat, wie eine erhöhte Temperatur während der Polymerisation.

3.2.4 Schlussfolgerungen

Die grundlegenden Versuche zeigen, dass der untersuchte Stoff mit dem von SPS Technology (2002) charakterisierten PUR vergleichbar ist. Dies bestätigen vor allem die Zugversuche, deren Ergebnisse sehr gut zu denen der Literatur passen. Auch wenn die Messungen bei Raumtemperatur leicht von denen von SPS Technology (2002) abweichen, so sind sie fast deckungsgleich mit den Ergebnissen von Teixeira de Freitas (2012). Ebenfalls die gemessenen Druckeigenschaften bei Raumtemperatur und -20 °C sind trotz Abweichungen mit der Literatur vergleichbar. Lediglich die in den DMTA gemessenen Steifigkeiten weisen größere Unter-

schiede zu den Vergleichswerten der ähnlichen Herstellungsart auf. Die Speichermoduln zeigen in ihren Verläufen dennoch qualitativ große Ähnlichkeiten zu den von SPS Technology (2012a) gezeigten Kurven des Stoffes. Dies bekräftigt die These der Vergleichbarkeit des Stoffs trotz der Abweichungen.

Zusätzlich zur Beantwortung der ursprünglichen Frage der Vergleichbarkeit, können weitere Erkenntnisse aus den Versuchen abgeleitet werden. So zeigen diese, dass das PUR empfindlich auf Temperaturänderungen reagiert. Entsprechend sollte bei temperierten Versuchen die Konditionierungszeit möglichst kurz gehalten werden sowie die Temperatur während des Versuchs präzise einstellbar und kontrollierbar sein.

Die wichtigste Erkenntnis aus den grundlegenden Versuchen ist, dass ein Erhitzen auch längere Zeit nach der Herstellung noch strukturelle Veränderungen des PUR herbeizuführen scheint, welche die Eigenschaften des Stoffs messbar beeinflussen. Gerade für die Bestimmung der viskoelastischen Eigenschaften des PUR über Temperatur-Frequenz-Sweeps im Rahmen dieser Arbeit spielt dies eine entscheidende Rolle. Aber auch generell sollte in zukünftigen Untersuchungen darauf geachtet werden, die Temperaturhistorie der Probekörper zu überwachen. So könnten die Ergebnisse verfälscht werden, wenn der Stoff einer erhöhten Temperatur ausgesetzt wird. Niedrige Temperaturen haben zwar einen direkten Einfluss auf den Stoff, verändern nach den zuvor gemachten Beobachtungen hingegen nicht nachhaltig sein Gefüge.

4 Experimentelle Untersuchung der viskoelastischen Eigenschaften des speziellen PUR im SPS

Nachdem alle Grundlagen dargelegt und die Voruntersuchungen abgeschlossen sind, zeigt dieses Kapitel die Experimente zu den viskoelastischen Eigenschaften des PUR untergliedert nach Belastungsart und -dauer. Zunächst werden detailliert die verschiedenen DMT Analysen beschrieben und ausgewertet, welche die Hauptversuche zur Charakterisierung des PUR bilden. Danach werden die Kriech- bzw. Relaxationsversuche unter verschiedenen Belastungen und Temperaturen gezeigt und deren Ergebnisse jeweils mit denen der DMTA verglichen.

4.1 Dynamisch-Mechanisch-Thermische Analysen (DMTA) zur Charakterisierung der viskoelastischen Eigenschaften des speziellen PUR im SPS

Nachdem in den grundlegenden Versuchen in Abschnitt 3.2 erste Erkenntnisse zum Einfluss der Temperatur auf die Eigenschaften des PUR im SPS gewonnen werden konnten, vertieft dieses Kapitel die Untersuchungen zu dessen viskoelastischen Eigenschaften. Anhand eines speziellen Temperatur-Sweeps wird zunächst das Phänomen der Änderung der Eigenschaften durch die Temperierung noch einmal näher betrachtet, um daraus Rückschlüsse auf den Umgang damit in den anschließenden Versuchen mit variierender Temperatur zu ziehen. Mit den Temperatur-Frequenz-Sweeps wird schließlich das viskoelastische Verhalten des PUR untersucht. Zunächst wird ein vereinfachter Zusammenhang für dessen Steifigkeit in Abhängigkeit von der Zeit gesucht, welcher mit den Langzeituntersuchungen verglichen werden kann.

Die Versuche wurden an einem Rotationsrheometer mit Temperierkammer durchgeführt (s. Abb. 4.1). Es arbeitet in seinem Aufbau nach dem in DIN EN ISO 6721-2 beschriebenen Torsionspendel-Verfahren B (vgl. Abschnitt 2.1.4). Dieses ermöglicht die Normalkraft im Probekörper während des Versuchs gezielt zu regeln. Die Temperierung erfolgt mithilfe einer Konvektionsheizung, die in Kombination mit einem Stickstoff-Verdampfungssystem arbeitet. Durch Heizen und Einblasen von verdunstetem Stickstoff können so präzise Temperaturen und Temperieraten in einem Arbeitsbereich von -130 bis 300 °C erreicht werden.

4.1.1 Temperatur-Sweeps (D-TS)

Um die Auswirkungen einer Temperierung auf das PUR genauer zu untersuchen, dessen Vernetzungsreaktion bereits länger zurück liegt, wurden Versuche mit mehreren Temperatur-Sweeps in Reihe durchgeführt. Zwischen der Herstellung der Proben und den Versuchen lag hierbei mehr als ein Jahr. Da die Versuche rein der phänomenologischen Beobachtung dienen

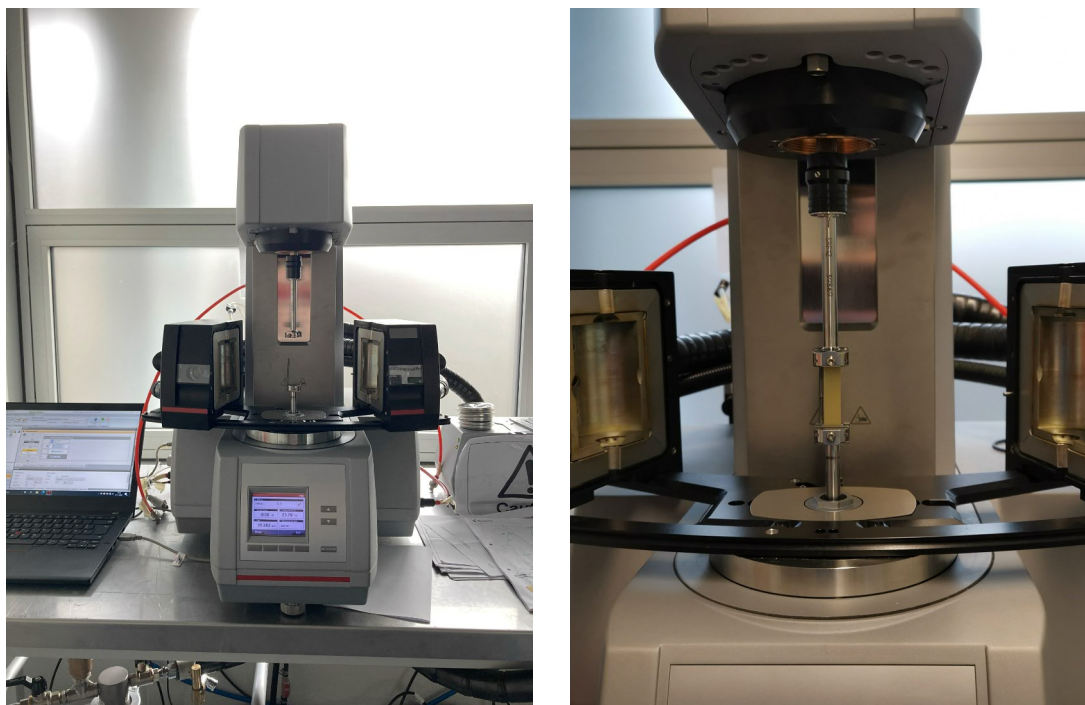


Abbildung 4.1: Rotationsrheometer für die DMTA in der Übersicht mit geöffneter Temperierkammer, Steuerungscomputer und Kühlaggregat (l.) sowie Probenaufnahme mit Probekörper (r.)

und die Anzahl der Probekörper begrenzt war, wurde zunächst nur ein Versuch durchgeführt. Zwei weitere Versuche mit ähnlichen Temperaturprogrammen wurden mit Laborprobekörpern aus der selbst produzierten Charge (L) gemacht. Ihre Ergebnisse bestätigen die des ersten Versuchs, tragen zur Deutung des Phänomens ansonsten aber nichts bei. Auf deren Darstellung wird daher an dieser Stelle verzichtet. Ihre Ergebnisse sind in Anhang AI-4 beigefügt.

Abbildung 4.2 zeigt das Temperaturprogramm des Versuchs D-TS_04 und den gemessenen Speichermodul G' . Der Versuch besteht aus sechs Zyklen, die wiederum in vier verschiedenen Phasen unterteilt sind: Jeder Zyklus begann mit einer Haltezeit von 10 min bei -60°C . Darauf folgte ein Heiz-Sweep bis zur Zieltemperatur des jeweiligen Zyklus. Dort wurde die Temperatur für jeweils 30 min gehalten. Anschließend folgte ein Kühl-Sweep in dem die Temperatur wieder auf das Start-Niveau von -60°C herunter gefahren wurde. Die Temperierungsrate in allen Heiz- und Kühl-Sweeps betrug dabei 5 K/min . Die hohen Zieltemperaturen der Zyklen wurden in chronologischer Abfolge zu $75, 75, 100, 125, 150$ und 150°C festgelegt. Während des gesamten Versuchs wurden für die Torsionsschwingung die Frequenz mit 1 Hz und die Amplitude der Schubdeformation mit $\gamma_0 = 0,1\%$ konstant gehalten.

Die Abfolge der Temperierung wurde auf diese Weise gewählt, damit der Speichermodul einer jeweiligen Phase mit der des vorherigen Zyklus verglichen werden kann. So sollen etwaige Effekte der Temperierung in den dazwischen liegenden Phase untersucht werden. Abbildung 4.3 zeigt die Verläufe der Speichermoduln der verschiedenen Heiz-Sweeps und deren Verhältnisse. Dabei wird der Speichermodul eines Heiz-Sweeps auf den des jeweils vorangegangenen bezogen. So wird bspw. durch das Verhältnis (2/1) sichtbar, wie sich das Material durch die Temperierung im ersten Zyklus veränderte. Die Verhältnis-Kurven sind in der Abbildung daher entsprechend der Zyklen eingefärbt, welche die etwaigen Veränderungen verursachten.

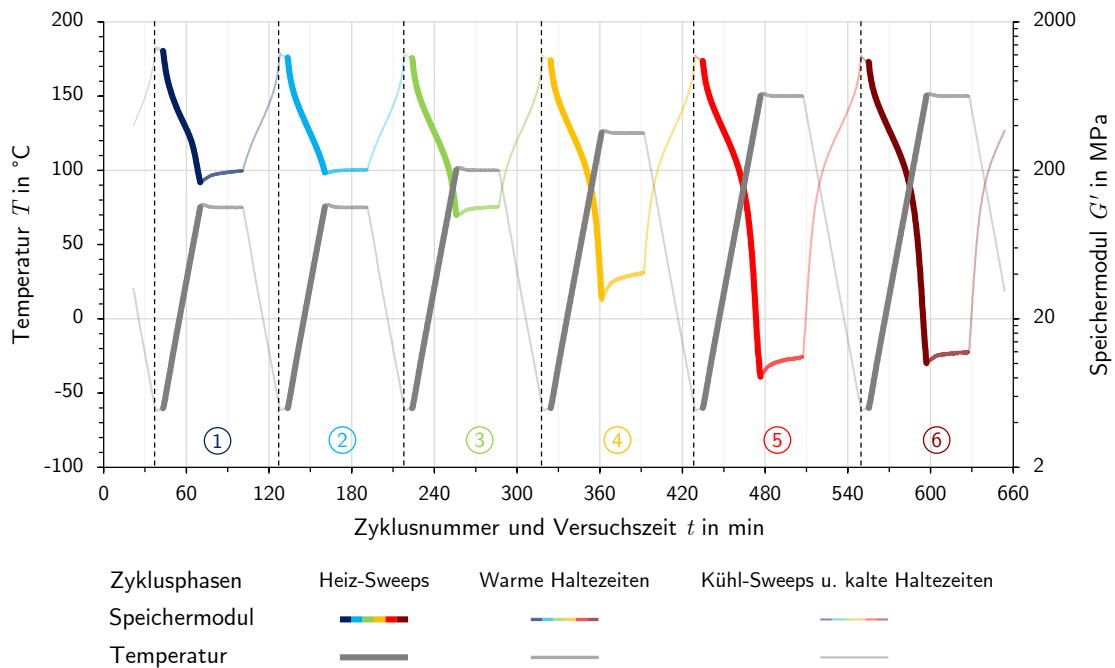


Abbildung 4.2: Ablauf des Versuchs D-TS_04 mit den sechs Temperaturzyklen und dem über alle Zyklusphasen gemessenen Speichermodul G'

Es ist zu erkennen, dass der Speichermodul sich mit jedem Temperaturzyklus verändert. Schon die erste Temperierung der Probe bei 75 °C führt im Vergleich der ersten beiden Heiz-Sweeps zu einer deutlichen Reduzierung der Steifigkeit für Temperaturen unter 60 °C . Oberhalb dieser Grenze führt die Temperierung hingegen zu einer Steigerung der Steifigkeit von bis zu 15%. Ein erneutes Aufheizen bis auf 75 °C verändert die Steifigkeit hingegen kaum. Zwar ist der anfängliche Effekt im nächsten Zyklus bei 100 °C wieder sichtbar, er fällt im Vergleich zum Ersten aber immer noch geringer aus. Ähnlich wie dort beobachtet, sinkt die Steifigkeit in niedrigen Temperaturen, während sie für hohe zunimmt. Die weiteren Heiz-Sweeps bei 125 und 150 °C verändern die Eigenschaften unterhalb 60 °C nicht mehr. Der Speichermodul bei hohen Temperaturen steigt indes mit einer Zunahme von jeweils über 30% deutlich.

Die Ergebnisse bestätigen die bereits angestellte Vermutung, zu den strukturellen Veränderungen des PUR. Der Effekt der Temperierung passt zu den bereits in Abschnitt 3.2.3 gemachten Beobachtungen. Das Phänomen der Reduktion der Steifigkeit für niedrige bei deren gleichzeitiger Zunahme für hohe Temperaturen, ähnelt stark den Änderungen der Kurvenverläufe in Abbildung 2.14 bei Erhöhung der Vernetzungstemperatur. Entsprechend den Interpretationen von SPS Technology (2012a) scheint auch weit nach der Herstellung eine Temperierung des PUR noch dessen Vernetzung zu erhöhen. Der nachträgliche Effekt im Versuch ist allerdings schwächer ausgeprägt als eine Temperaturerhöhung in gleichem Maße bei der Herstellung. Eine nachträgliche thermisch induzierte Alterung die zur Zunahme von Vernetzungspunkten im Polymer führen kann beschreibt auch Menard (1999, S. 111 ff.). Diese äußert sich in einer Verschiebung des α -Übergangs zu höheren Temperaturen sowie in der Erhöhung des Speichermoduls G' in der Region vor dem Übergang (vgl. auch Badia et al. 2013, S. 373 ff.). Beide Phänomene sind in den Kurven des Versuchs zu erkennen. Die Reduktion des Speichermoduls in den niedrigen Temperaturbereichen wird damit jedoch nicht erklärt.

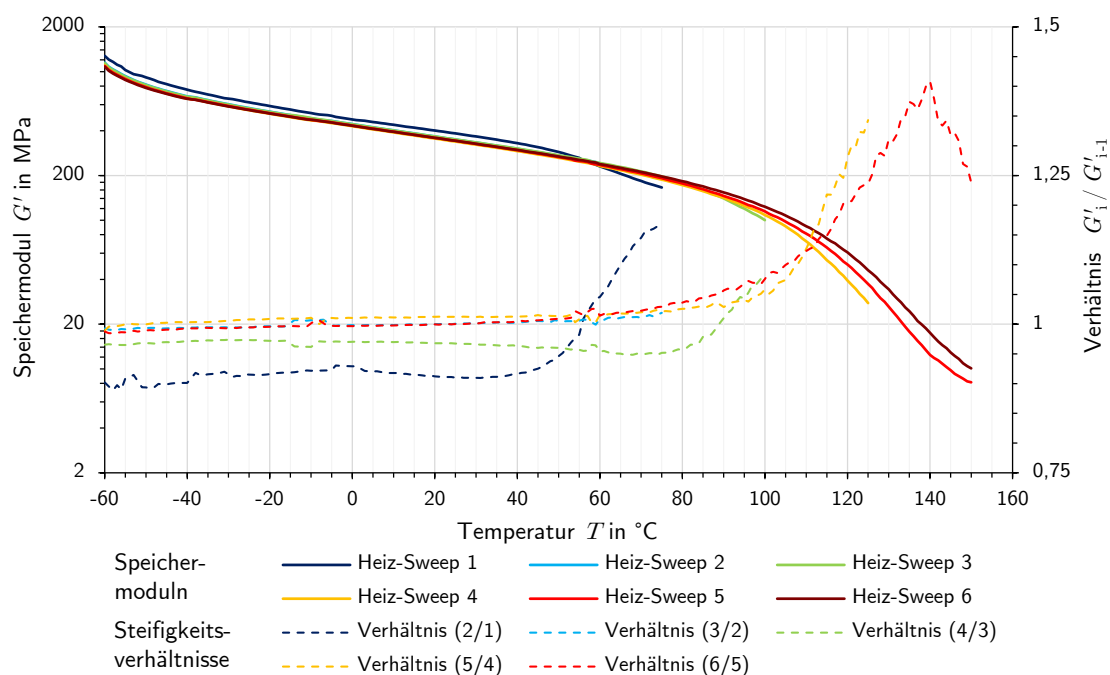


Abbildung 4.3: Speichermodulkurven der sechs Heiz-Sweeps des Versuchs D-TS_04 und Verhältnisse des jeweils in einem Heiz-Sweep gemessenen Speichermoduls bezogen auf den des vorherigen Zyklus

Wie bereits in Abschnitt 3.2.1 beschrieben, scheinen sich hier zwei Alterungsvorgänge zu überlagern. Dafür sprechen die unterschiedlichen Stufen in der Steigerungen der Steifigkeit. Die Temperierung im ersten Zyklus entspricht am ehesten einer Temperung nach Definition von Ehrenstein u. Pongratz (2007, S. 59 f.). Sie löst den durch Abkühlen nach der Herstellung erstarrten Zustand im Material und die Bewegungsfähigkeit der Molekülketten nimmt zu. Diese können nun eine energetisch günstigere Anordnung einnehmen und innere Zwänge werden abgebaut. Darüber hinaus bilden sich erste zusätzliche Vernetzungen, was zur Änderung der Eigenschaften in höheren Temperaturen führt. In den folgenden Zyklen hat sich nach der Temperung bereits ein Zustand nächstmöglich dem inneren Gleichgewicht eingestellt und die Vernetzung nimmt durch die Erhöhung der Temperatur zunächst nur moderat zu. Durch das Überschreiten des zweiten Glasübergangs in dem Copolymer und damit einer signifikanten Steigerung der Bewegungsfähigkeit der Molekülketten in der harten Phase, kommt es in den Zyklen bei 125 und 150 °C zu einer stärkeren Zunahmen von Vernetzungspunkten und damit auch der Steifigkeit.

Anders als bei einer Temperung handelt es sich bei dem zweiten auftretenden Phänomen um einen chemischen Alterungsvorgang der irreversibel ist. Dieser wird in der Literatur als *Nachpolymerisation* (vgl. DIN 50035), stellenweise aber auch als *Nachvernetzung* bezeichnet (vgl. Elsner et al. 2008, S. 100 bzw. Ehrenstein u. Pongratz 2007, S. 381). Die beiden in den Versuchen beobachteten Alterungserscheinungen können über längere Zeiträume auch ohne Zutun auftreten. Da diese im vorliegenden Fall zwar unbeabsichtigt aber doch künstlich herbeigeführt wurden, werden für die beiden Phänomene folgend die nach Ansicht des Autors aktiven Begrifflichkeiten *Temperung* und *Nachvernetzung* verwendet.

Auf die weiteren Untersuchungen hat vor allem die Nachvernetzung, trotz ihrer eigentlich teilweise positiven Effekte für den Stoff, negative Auswirkungen. Die in den Langzeituntersuchungen dieser Arbeit verwendeten Probekörper wurden genauso gelagert wie die der DMTA und erfuhren währenddessen die gleiche Temperaturgeschichte. Entsprechend sollten sich in Messungen ähnliche Eigenschaften ergeben. Werden die Probekörper in der DMTA aber unbeabsichtigt nachvernetzt und deren Gefüge verändert, kann dies die Ergebnisse verfälschen und einen Vergleich erschweren. Die Messungen zeigen vermutlich nicht den ursprünglichen Zustand der Probekörper sondern den infolge der Temperierung veränderten. Dies wurde sowohl in den ersten Temperatur-Sweeps (vgl. Abschnitt 3.2.3), als auch den ersten Temperatur-Frequenz-Sweeps nicht bedacht. Letztere Ergebnisse wurden daher verworfen und für die weiteren Untersuchungen ein modifiziertes Versuchsprogramm angewendet, um dem Phänomen in den DMTA-Messungen Rechnung zu tragen.

4.1.2 Temperatur-Frequenz-Sweeps (D-TFS)

Die Temperatur-Frequenz-Sweeps der DMTA spielen, wie bereits in Abschnitt 2.1.4 beschrieben, für die Ermittlung der viskoelastischen Eigenschaften des PUR im SPS und dessen Langzeitverhalten eine entscheidende Rolle. Mithilfe des Prinzips der Zeit-Temperatur-Verschiebung (ZTV) kann aus einzelnen Speichermodulkurven, gemessen bei verschiedenen Temperaturen, eine Masterkurve ermittelt werden (Masterung), welche die Steifigkeit des Stoffs über einen weiten Frequenzbereich beschreibt. Diese kann anschließend in den Zeitbereich transformiert werden um die Steifigkeit des PUR in Abhängigkeit von der Zeit zu beschreiben (vgl. Abschnitt 2.1.4 bzw. Menard 1999, S. 182).

Zum Zeitpunkt der ersten Versuche (D-TFS_01 und D-TFS_02) war die Problemstellung der strukturellen Veränderung des PUR noch nicht bekannt und die Temperierung wurde angesichts der Nachvernetzung unvorteilhaft gewählt.¹ So wurden die Probekörper schon vor Beginn der Messungen stark nachvernetzt und verhielten sich danach in hohen Temperaturen deutlich zu steif. Gerade die in diesem Temperaturbereich gemessenen Speichermoduln sind jedoch entscheidend, da sie in einer Masterung zu niedrigen Frequenzen bzw. langen Zeiten verschoben werden (vgl. Abb. 2.9). Hierin liegt das Problem von DMT Analysen an dem sich strukturell verändernden PUR. Wird die Nachvernetzung in der Wahl des Versuchsablaufs nicht berücksichtigt, kann dies zu einer deutlichen Fehleinschätzung des Langzeitverhaltens führen. Nach Bekanntwerden des Phänomens, wurden daraufhin vier weitere Versuche mit einem abgewandeltem Ablauf durchgeführt. Auch wenn bei einer Versuchsdauer von mehr als einem halben Tag eine Veränderung der Probekörper nicht verhindert werden kann, so sollte durch eine Anpassung des Temperaturprogramms der Einfluss der Nachvernetzung auf die Ergebnisse zumindest minimiert werden.

Abbildung 4.4 zeigt die modifizierten Temperaturprogramme der Versuche D-TFS_03 bis 06. Anhand der Darstellung mit den verschiedenen Phasen wird folgend die Durchführung der Versuche beschrieben. Im weiteren Kapitel wird danach am Beispiel des Versuchs D-TFS_03 schrittweise die Versuchsauswertung gezeigt.¹ Dabei werden zwei verschiedene Arten der Masterung betrachtet: Die konventionelle Art mit einer rein horizontalen Verschiebung über die Frequenz (vgl. Abschnitt 2.1.5) und eine eigens abgewandelte Form mit einer zusätzlichen vertikale Verschiebung der Kurven, welche die Nachvernetzung berücksichtigen soll.

¹Wichtige Informationen und Ergebnisse der hier nicht konkret gezeigten Versuche werden zum Vergleich mit den weiteren Untersuchungen in gleicher Weise aufbereitet in Anhang AI-5.2 gegeben.

Durchführung und Temperaturprogramm

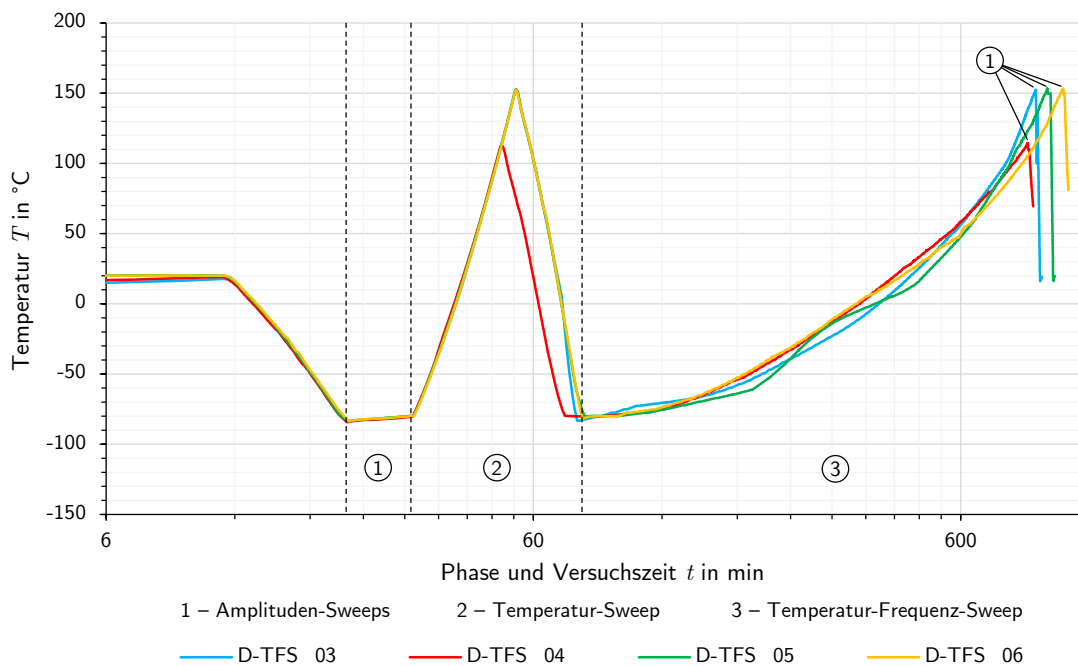


Abbildung 4.4: Versuchsabläufe der D-TFS-Versuche anhand der Temperaturprogramme

1. Am Beginn und am Ende eines jeden Versuchs wurde eine sogenannte Linearitäts-Prüfung mit einem Amplituden-Sweep durchgeführt. Damit wurde sichergestellt, dass der gesamte Versuch im LVE-Bereich stattfand und die Gesetzmäßigkeiten der linearen Viskoelastizität anwendbar sind.
2. Vor dem eigentlichen TF-Sweep eines jeden Versuchs wurde ein zusätzlicher Temperatur-Sweep mit einer hohen Temperierrate von 10 K/min und einer Frequenz von 1 Hz durchgeführt. Es wird angenommen, dass die während des ersten Heiz-Sweeps einsetzenden Temper- und Nachvernetzungseffekte durch die schnelle Temperierung und die gleichzeitig streng monoton fallende Steifigkeit noch nicht stark ausgeprägt sind. Die in dieser Phase gemessenen Eigenschaften sollten demnach der ursprünglichen, untemperierten Beschaffenheit des PUR am nächsten kommen.
3. Danach wurde im eigentlich TF-Sweep die Temperatur stufenweise von -80 bis 150 °C ¹ in 2,5 K-Schritten erhöht. Auf jeder Temperaturstufe erfolgte ein Frequenz-Sweep von 0,1 bis 10 Hz, wobei die Frequenz logarithmisch gesteigert und über den Frequenzbereich gleichmäßig verteilt 25 mal die Eigenschaften gemessen wurden. So fiel der dreizehnte Messpunkt genau in der Mitte jeder Messreihe auf die Frequenz von $f = 1\text{ Hz}$ (vgl. Abb. 4.6). Pro Versuch ergaben sich maximal 93 Frequenz-Sweeps, deren Dauer jeweils etwa 2 min betrug.

¹In einem Versuch (D-TFS_04) wurde die maximale Temperatur mangels ausreichendem Stickstoffvorrats zur Temperaturregulierung auf 100 °C reduziert.

Festlegungen und Voraussetzungen zur Anwendung der ZTV

In einem ersten Schritt werden die Ergebnisse der Versuche analysiert, um die Anwendbarkeit der ZTV zu prüfen und Festlegungen für die Auswertung zu treffen. Abbildung 4.5 zeigt exemplarisch die Ergebnisse des Versuchs D-TFS_03 aus dem Temperatur-Sweep bei 1 Hz und die Messwerte bei gleicher Frequenz aus den TF-Sweeps (die Ergebnisse der anderen Versuche befinden sich in Anhang AI-5.3). Analog zu den D-TS-Versuchen des vorherigen Abschnitts 4.1.1, können aus den Kurvenverläufen auch hier die gleichen Schlüsse gezogen werden. So ist an der Zunahme des Speichermoduls G' erkennbar, dass nach der ersten TS-Messung und im Laufe des TF-Sweeps ein Nachvernetzen stattgefunden haben muss. Auch die Kurven des Verlustmoduls G'' und des Verlustfaktors $\tan \delta$ bestätigen das Phänomen, da sich deren Maxima (T_α) zu höheren Temperaturen verschieben. Dies bekräftigt die Vermutung, dass der Effekt in der Auswertung berücksichtigt werden sollte.

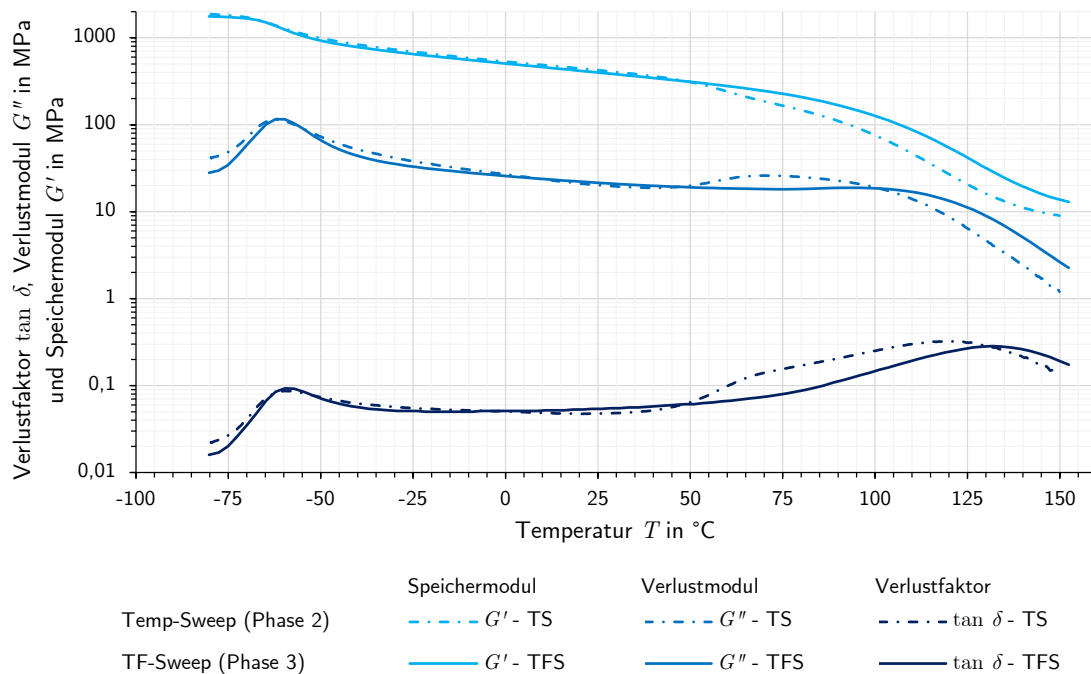


Abbildung 4.5: Ergebnisse des Temperatur-Sweeps und der TF-Sweeps bei $f = 1$ Hz von D-TFS_03

Aus dem Verlustfaktor $\tan \delta$ kann eine weitere für die Auswertung wichtige Erkenntnis gewonnen werden. Sowohl im Temperatur- als auch im TF-Sweep zeigt sich zwischen den Glasübergängen ein Bereich in dem dieser annähernd parallel zur Abszisse verläuft. Obwohl angesichts der Notwendigkeit einer Vertikalverschiebung der Kurven die Ermittlung der horizontalen Verschiebungsfaktoren über den Verlustfaktor $\tan \delta$ sinnvoll erscheint, ist dieser wegen seines Verlaufs als Größe für die ZTV ungeeignet. Ein Verschiebungsfaktor zwischen zwei Kurven kann nur dann eindeutig bestimmt werden, wenn diese Steigungen aufweisen (Dealy u. Plazek 2009). Daher wird für alle Versuche die Ermittlung der Verschiebungsfaktoren über den Speichermodul G' durchgeführt.

Abbildung 4.6 zeigt exemplarisch die in den Frequenz-Sweeps des Versuchs D-TFS_03 gemessenen Speichermodul in Abhängigkeit von der Temperaturstufe und der Frequenz f . Die Kurvenverläufe zeigen Messungenauigkeiten am Beginn eines jeden Frequenz-Sweeps, welche auf den Einschwingvorgang des Torsionspendels zurückzuführen sind. Sowohl die aufgebrachte Scherdeformation, als auch die Normalkraft im Probekörper entsprachen zu Beginn der Sweeps nicht den voreingestellten Zielwerten und pendelten sich erst nach etwa 10 s ein. Da die Messpunkte äquidistant über den Frequenzbereich der Sweeps verteilt sind, die Frequenz aber logarithmisch erhöht wurde, verursachte der Einschwingvorgang deutliche Verfälschungen in den Messdaten der ersten sechs Punkte. Diese unphysikalischen Abweichungen waren in allen D-TFS-Versuchen zu beobachten (vgl. Anhang AI-5.2 und AI-5.3). Daher bleiben die ersten sechs Messpunkte aller Frequenz-Sweeps in allen Versuchsauswertungen unberücksichtigt (s. gestrichelte Linie in Abb. 4.6).

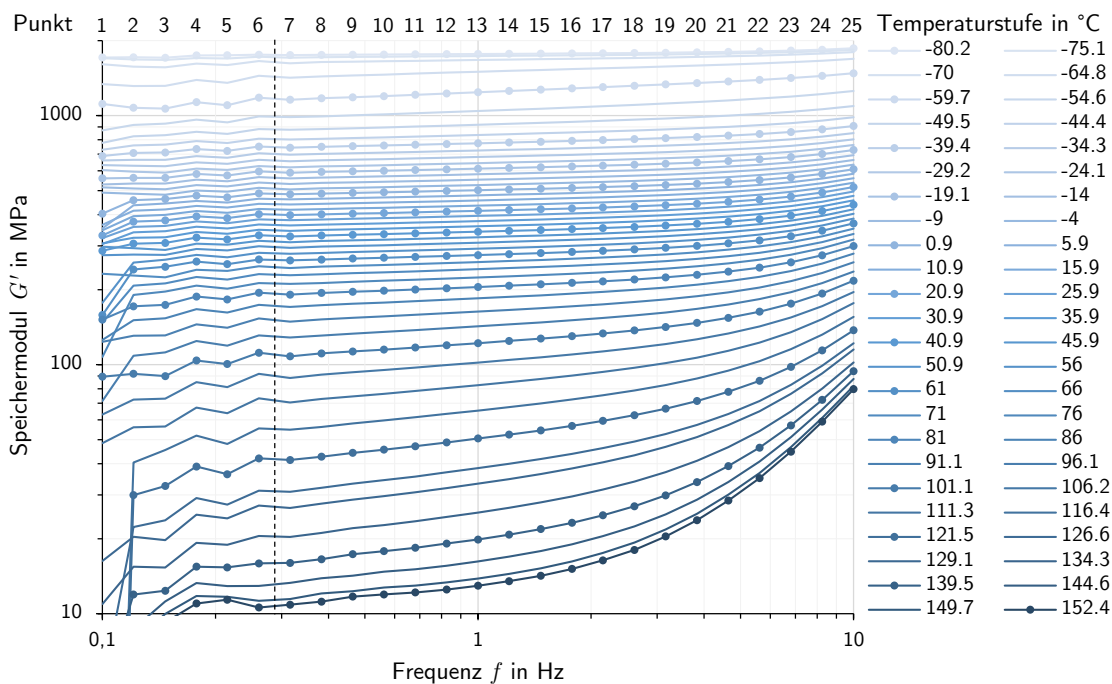


Abbildung 4.6: Ausgewählte Ergebnisse der TF-Sweeps des Versuchs D-TFS_03. Der Übersichtlichkeit halber wurde nur jeder zweite Sweep dargestellt und für diejenigen mit 20 K Abstand die Messpunkte sichtbar gemacht.

Die in den Amplituden-Sweeps (Phase 1) der D-TFS-Versuche überprüfte Bedingung der Linearität ist in allen Versuchen unabhängig von der modifizierten Temperierfolge erfüllt. Auf eine detaillierte Darstellung der Ergebnisse wird an dieser Stelle aufgrund der untergeordneten Bedeutung verzichtet. Eine konsolidierte Fassung der Linearitäts-Prüfungen aller Versuche wird in Anhang AI-5.1 gegeben.

Als Voraussetzung für die Anwendbarkeit des ZTV-Prinzips gilt, dass das betrachtete Polymer als *thermorheologisch einfach* charakterisiert werden kann. Dies gilt allgemein nur für Stoffe, „die während der Messung bei Temperaturänderung den Charakter ihrer Struktur nicht ändern“ (Mezger 2016, S. 90). Wie die Temperatur-Sweeps des vorherigen Abschnitts 4.1.1 zeigen, trifft dies auf das vorliegende PUR streng genommen nicht zu. Dieses verändert sich über die Dauer einer Temperierung durch Tempern und Nachvernetzen.

Betrachtet man die Ergebnisse in Abbildung 4.6, so zeigt sich dies in den Sweeps bei hohen Temperaturen. Die Abstände der Speichermodul-Kurven verringern sich mit zunehmender Versuchszeit bzw. Frequenz. Dieses Anwachsen des Speichermoduls ist in tiefen Temperaturen nicht zu beobachten, weshalb vermutet werden kann, dass es aus der temperaturinduzierten Nachvernetzung resultiert.

Auch van Gorp u. Palmen (1998) erwarten „a priori“, dass sich Polymer-Blends, zu denen vorliegendes PUR gezählt werden kann, thermorheologisch komplex verhalten, wenn sich ihre Struktur mit der Temperierung verändert oder deren Komponenten unterschiedlich empfindlich auf Temperaturänderungen reagieren. Die Eignung zur Anwendung der ZTV sinkt dabei mit zunehmender Separierung der Glasübergänge beider Komponenten. Beides trifft auf das vorliegende PUR zu. Dennoch berichten sie auch von Fällen in denen die ZTV trotz vorherrschender Komplexität erfolgreich war. Auch Dealy u. Plazek (2009) schließen eine Anwendbarkeit der ZTV für thermorheologisch komplexe Polymere nicht aus, wenn die Ergebnisse und ihre Präzision entsprechend eingeordnet werden.

Als Instrumente zur Beurteilung der Anwendbarkeit des ZTV-Prinzips, können der *van Gorp-Palmen-Plot* (Abkürzung: *vGP-Plot*) nach van Gorp u. Palmen (1998) und der *modifizierte Cole-Cole-Plot* (Abkürzung: *mCC-Plot*) nach Cole u. Cole (1941) herangezogen werden. Für thermorheologisch einfache Stoffe sollten in beiden Plots die Messwerte aller Frequenz-Sweeps eine zusammenhängende Funktion ergeben. Die entstehenden mCC- und vGP-Masterkurven zeigen über ihre Extremwerte die im Stoff wirkenden Relaxationsmechanismen, welche für thermorheologisch einfache Stoffe alle die gleiche Abhängigkeit von der Temperatur haben (Dealy u. Plazek 2009).

Abbildung 4.7 zeigt den mCC-Plot des Versuchs D-TFS_03 in dem für alle Frequenz-Sweeps die Messwerte des Verlustmoduls G'' über denen des Speichermoduls G' in doppelt-logarithmischem Maßstab aufgetragen sind. Auf den ersten Blick bilden die Messdaten keine zusammenhängende Funktion. Verbindet man jedoch alle Punkte der gleichen Frequenz (im vorliegenden Fall $f = 1$ Hz), ergibt sich die schwarz gestrichelte Kurve, auf deren Verlauf die Mehrheit aller Messpunkte der Frequenz-Sweeps liegen.

Auffällig ist dabei, dass die Abweichungen der Messdaten von dieser Kurve mit sinkendem Speichermodul G' (steigender Temperaturstufe) zunehmen. Bis zu der orange hervorgehobenen Stufe bei 101,1 °C weichen lediglich die letzten zwei Punkte aller Frequenz-Sweeps erkennbar von der schwarz gestrichelten Kurve ab. Mit jeder höheren Temperaturstufe steigt jedoch die Zahl der abweichenden Messpunkte. Dies wird auch daraus ersichtlich, dass die Distanz zwischen der 1 Hz-Kurve und einer weiteren Kurve beginnend bei 101,1 °C durch den jeweils 23. Messpunkt der Frequenz-Sweeps bei 6,81 Hz mit jeder Temperaturstufe größer wird. Die Abweichungen können als temperaturinduzierte Verschiebungen der einzelnen Sweep-Kurven in der komplexen Ebene interpretiert werden (vgl. Abschnitt 2.1.5).

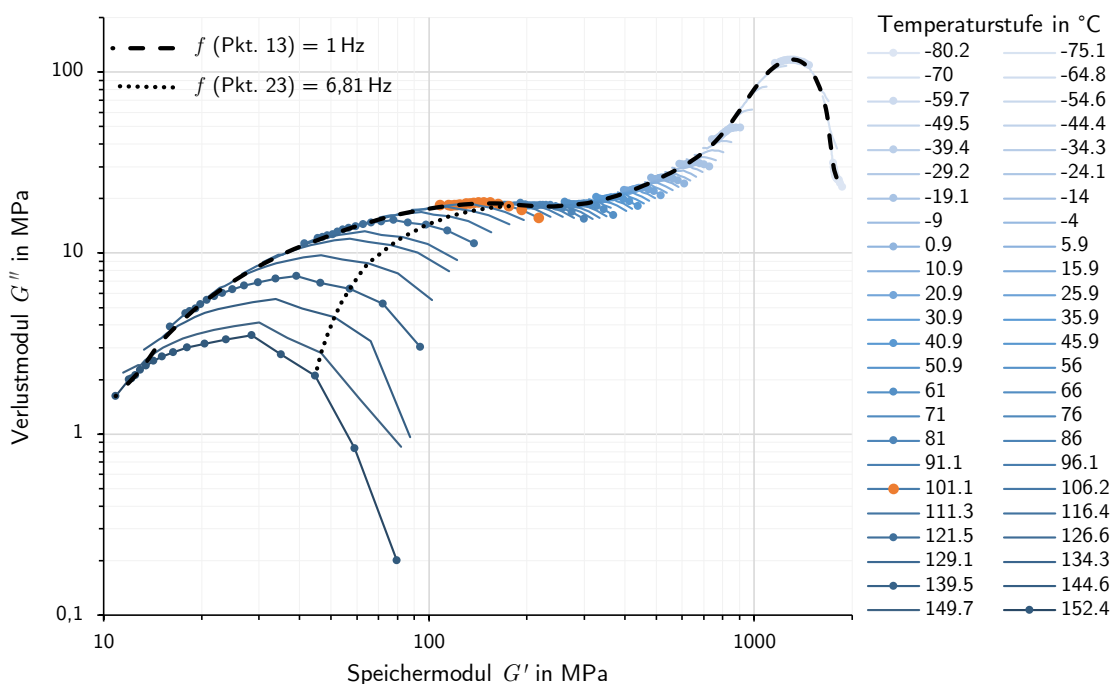


Abbildung 4.7: mCC-Plot des Versuchs D-TFS_03. Die Messpunkte ausgewählter Frequenz-Sweeps sind dargestellt und als unphysikalisch identifizierten Versuchsdaten ausgeblendet.

Unterhalb von 101,1 °C kann noch davon ausgegangen werden, dass es sich bei der gezeigten näherungsweise um die mCC-Masterkurve handelt. Darüber hingegen ist es nicht möglich eine Aussage über die tatsächliche Lage der mCC-Masterkurve zu treffen, die letztendlich alle Messpunkte in sich vereinen würde. Die dargestellte Kurve bei 1 Hz kann demnach nicht in Gänze als mCC-Masterkurve bezeichnet werden. Sie zeigt aber, dass zumindest unterhalb von ca. 100 °C eine ZTV möglich sein sollte.

Die gleichen Phänomene lassen sich auch an dem in Abbildung 4.8 dargestellten vGP-Plot beobachten. In diesem ist der Verlustfaktor $\tan \delta^1$ über dem Absolutwert des komplexen dynamischen Moduls $|G^*|$ aufgetragen. Auch hier nehmen die Abweichungen der Frequenz-Sweep-Messdaten von der potentiellen vGP-Masterkurve oberhalb der orange hervorgehobenen Stufe bei 101,1 °C mit der Temperatur zu.

Neben den bisherigen Beobachtungen kann anhand des vGP-Plots außerdem die Notwendigkeit einer vertikalen Verschiebung über den Faktor b_T beurteilt werden (van Gurp u. Palmén 1998). Durch eine Faktorisierung des Speichermoduls G' und des Verlustmoduls G'' mit b_T werden die Kurven beider Moduln im Frequenz- bzw. Zeitbereich in Abhängigkeit von der Temperatur vertikal verschoben (z. B. in Abb. 4.6). Die großen Abweichungen zwischen den Messdaten der einzelnen Temperaturstufen des vGP-Plots oberhalb von 100 °C sprechen zunächst für die Notwendigkeit einer vertikalen Verschiebung. Bei näherer Betrachtung zeigt sich jedoch, dass die Anwendung des Faktors b_T nach der Literatur im vorliegenden Fall nicht zu sinnvollen Ergebnissen führt.

¹In dem ursprünglich von van Gurp u. Palmén (1998) vorgeschlagenen Plot wird auf der Ordinate die Phasenverschiebung δ in ° aufgetragen. Da diese im vorliegenden Fall jedoch gering ist (maximal 17°), gelten die Zusammenhänge für kleine Winkel und auf eine Umrechnung wird verzichtet.

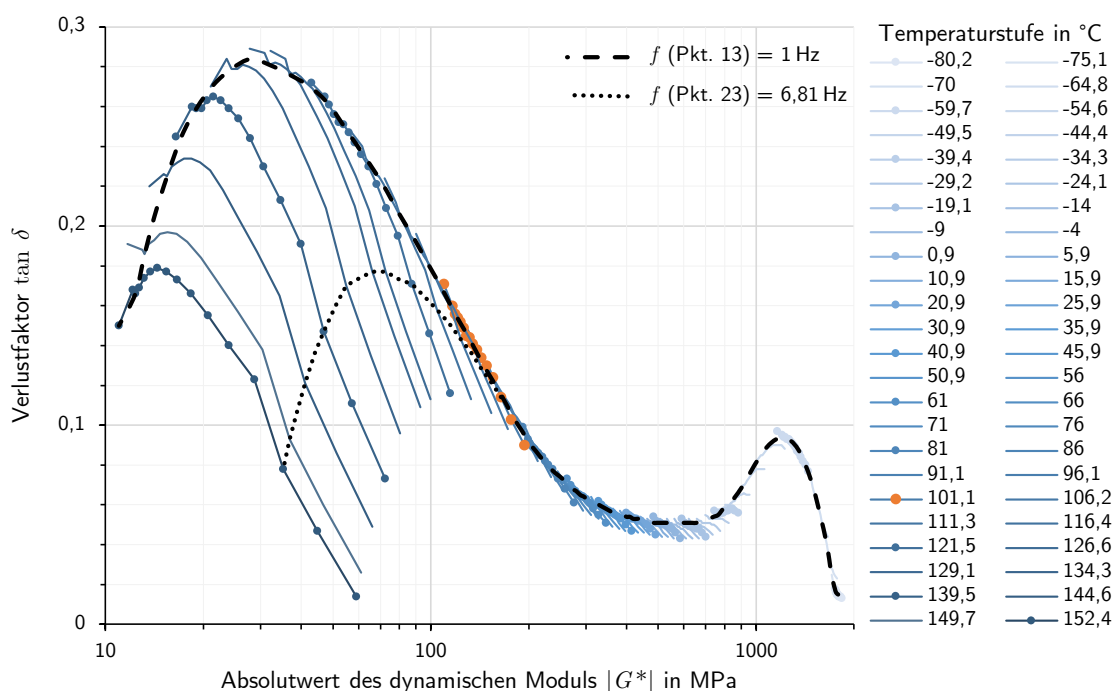


Abbildung 4.8: Van Gorp-Palmen-Plot des Versuchs D-TFS_03. Die Messpunkte ausgewählter Frequenz-Sweeps sind dargestellt und als unphysikalisch identifizierten Versuchsdaten ausgeblendet. Anders als ursprünglich bei van Gorp u. Palmen (1998) wird der Verlustfaktor $\tan \delta$ statt der Phasenverschiebung δ auf der Ordinate verwendet.

Der *vertikale Verschiebungsfaktor* b_T berücksichtigt die temperaturabhängige Änderung der Dichte eines Polymers und deren Auswirkungen auf die viskoelastischen Eigenschaften (Mezger 2016, S. 231). Da er als Vorfaktor den Speicher- G' und Verlustmodul G'' gleichermaßen beeinflusst, kürzt er sich aus dem Verlustfaktor $\tan \delta$ heraus (vgl. Bae et al. 2011).

$$\tan \delta = \frac{b_T \cdot G''}{b_T \cdot G'} = \frac{G''}{G'} \quad (4.1)$$

In den Absolutwert des dynamischen Moduls dagegen geht er weiterhin linear ein.

$$b_T \cdot |G^*| = \sqrt{(b_T \cdot G')^2 + (b_T \cdot G'')^2} \quad (4.2)$$

Demnach verursacht der Faktor im vGP-Plot eine Verschiebung der Sweep-Kurven entlang der Abszisse. Letzterer Zusammenhang kann theoretisch zur Ermittlung von b_T genutzt werden (Dealy u. Plazek 2009). Dies wäre im vorliegenden Fall erforderlich, da der in der Literatur behandelte Ansatz zur Berechnung von b_T tiefere Kenntnisse über die Entwicklung der Dichte des PUR über die Temperatur erfordert (vgl. Brinson u. Brinson 2008, S. 238). Experimentelle Untersuchungen zur Dichte des speziellen PUR in Abhängigkeit von der Temperatur wurden jedoch bisher nicht durchgeführt. Auch SPS Technology (2002 bzw. 2011a) stellen hierzu keine Daten bereit. Eine genauere Betrachtung des vGP-Plots unter dem Gesichtspunkt der Ermittlung von b_T zeigt jedoch, dass auch eine Verschiebung der Sweep-Kurven entlang der Abszisse nicht zu einer Masterkurve führen kann, die alle Messpunkte der Frequenz-Sweeps auf sich vereint.

Weiterhin würden die Frequenz-Sweeps der hohen Temperaturstufen in der Masterung zu größeren Steifigkeiten verschoben. Dies widerspricht jedoch den an Abbildung 4.5 gemachten Beobachtungen, dass die Steifigkeit des PUR in hohen Temperaturen vor dem Nachvernetzen stets geringer ist als danach. Des Weiteren wird aus den dort gezeigten Ergebnissen erkenntlich, dass die Nachvernetzung unterschiedliche Auswirkungen auf den Speichermodul G' und den Verlustmodul G'' hat. Auch dies widerspricht dem konventionellen Konzept des vertikalen Verschiebungsfaktors b_T aus der Literatur (vgl. Bae et al. 2011).

Ein Vergleich der hier gezeigten Plots mit denen der ersten beiden D-TFS-Versuche in Anhang AI-5.2 zeigt ein weiteres Phänomen. Obwohl ebenfalls durch das falsche Programm in den Versuche D-TFS_01 und D-TFS_02 über 100°C keine Frequenz-Sweeps gemacht wurden, zeigen die Messdaten ihrer mCC- und vGP-Plots auch unter 100°C schon eine erkennbar bessere Übereinstimmung mit der jeweiligen Masterkurve. Dies zeigt sich auch im Vergleich mit den Plots der restlichen Versuche D-TFS_04 bis D-TFS_06 in Anhang AI-5.3. Für die fälschlicherweise nachvernetzten Versuche bestätigt sich demnach die Anwendbarkeit der ZTV deutlich, während dies für die neuerlichen Versuche nur bedingt der Fall ist.

Dies lässt darauf schließen, dass die zu beobachtende thermorheologische Komplexität des PUR in den neuen Versuchen durch die parallel ablaufende Nachvernetzung erzeugt wird. Ist diese weitestgehend abgeschlossen, sodass sich der Vernetzungsgrad bei Temperaturerhöhung nicht mehr signifikant ändert, sollte sich das Polymer fortan thermorheologisch einfach verhalten. Wie bereits beschrieben, sind die Änderung der Dichte eines Polymers und der dies berücksichtigende Faktor b_T von der Temperatur abhängig. Dabei tritt die Dichteänderung unabhängig von der Temperierfolge und wiederkehrend in Erscheinung (vgl. Brinson u. Brinson 2008, S. 236). Eine einmalige Änderung des Gefüges kann damit jedoch nicht erfasst werden.

Aus zuvor genannten Gründen und in Ermangelung ausreichender Daten zu dessen Dichte in Abhängigkeit von der Temperatur wird b_T im Sinne der Literatur für die Analyse des PUR nicht herangezogen. Die während des Versuchs ablaufende Nachvernetzung scheint der Hauptgrund für die zu beobachtende thermorheologische Komplexität zu sein. Trotzdem wird davon ausgegangen, dass das ZTV-Prinzip anwendbar ist.

Um die Möglichkeit einer Berücksichtigung von Änderungen der Steifigkeit durch die Nachvernetzung zu untersuchen, werden je Versuch zwei Auswertungen mit anschließender Masterung durchgeführt. In der Auswertung nach der konventionelle Methode (M1) werden die Speichermodul-Kurven rein horizontal verschoben. In der zweiten Methode (M2) erfolgt vor der horizontalen zunächst eine vertikale Verschiebung mittels eines neuen Faktors. Dieser neue vertikale Verschiebungsfaktor wird über einen ingenieurmäßigen Ansatz ermittelt und zur besseren Abgrenzung gegenüber dem zuvor beschriebenen Faktor der Literatur als $c(T)$ bezeichnet. Mit der Vertikalverschiebung durch $c(T)$ wird der Versuch unternommen das Phänomen der Nachvernetzung näherungsweise zu erfassen und eine Rückrechnung auf den initialen Zustand des jeweiligen Probekörpers zu vollziehen.

Vertikale Verschiebung mit $c(T)$

Wie bereits an Abbildung 4.5 diskutiert, nimmt die Steifigkeit des PUR über die Dauer eines D-TFS-Versuchs zu, was zur Verfälschung der Messungen in den Temperatur-Frequenz-Sweeps führen kann. Durch einen vorgeschalteten Temperatur-Sweep mit einer Frequenz von $f = 1$ Hz ist der ursprüngliche Zustand des Stoffs näherungsweise bekannt. Dieses Wissen kann genutzt werden, um die Ergebnisse der Speichermoduln G' auf ihr ursprüngliches Niveau zurückzurechnen. Aus den Messwerten der Phasen 2 und 3 des Versuchs wird dafür ein eigener *vertikaler Verschiebungsfaktor* $c(T)$ bzw. c_T ermittelt, welcher die Veränderungen im PUR über den Verlauf der TF-Messungen erfasst.

$$c(T) \equiv c_T = \frac{G'_{TS}(T)}{G'_{TFS}(T, f = 1 \text{ Hz})} \quad (4.3)$$

Abbildung 4.9 zeigt die Ergebnisse der Speichermoduln G' aller D-TFS Versuche, sowie die sich daraus ergebenden Faktoren $c(T)$. Die genauen Ergebnisse der einzelnen Versuche sind in Anhang AI-5.3 zu finden. Vor der horizontalen Verschiebung nach Methode (M2), werden alle in den Frequenz-Sweeps gemessenen Werte des Speichermoduls G' mit dem zugehörigen Faktor $c(T)$ der jeweiligen Temperaturstufe multipliziert (s. Gl. 4.4). Dies erzeugt eine vertikale Starrkörper-Verschiebung aller Speichermodulkurven (bspw. in Abb. 4.6). Die Veränderung des PUR innerhalb eines Frequenz-Sweeps kann damit jedoch nicht erfasst werden.

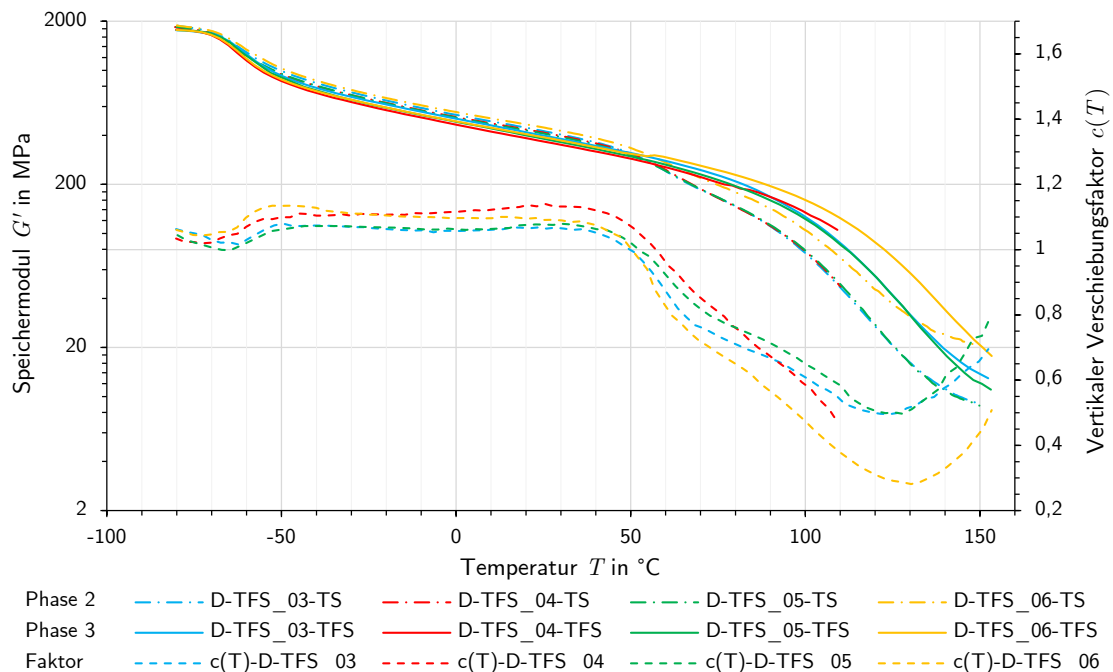


Abbildung 4.9: Speichermoduln G' aus den Phasen 2 und 3 aller D-TFS-Versuche bei $f = 1$ Hz und daraus ermittelte vertikale Verschiebungsfaktoren $c(T)$ über der Temperatur

Ermittlung der horizontalen Verschiebungsfaktoren über Superposition

Um aus den Daten der D-TFS-Versuche Kurven von den viskoelastischen Größen des PUR über einen weiten Bereich zu generieren, werden die Einzelkurven der Frequenz-Sweeps in der Masterung basierend auf dem in Abschnitt 2.1.5 beschriebenen ZTV-Prinzip über der Zeit- bzw. Frequenzachse verschoben, sodass diese eine zusammenhängende Masterkurve für die angestrebte Referenztemperatur ergeben. Hierfür könnten die jeweiligen Kurven nach optischen Maßstäben verschoben werden „bis sie sich zu überlagern scheinen“ (Dealy u. Plazek 2009). Dies kann jedoch bei mehreren Masterungen mit verschiedenen Referenztemperaturen zu Ungenauigkeiten in den Masterkurven führen.

Um eine Masterung nach objektiven und für alle Versuche gleichbleibenden Maßstäben zu gewährleisten, werden die horizontalen Verschiebungsfaktoren numerisch über eine abgewandelte Form des von Cho (2009) und Bae et al. (2011) präsentierten geometrischen Verfahrens zur *Minimierung der Bogenlänge* ermittelt. Dabei wird die Länge eines aus den Punkten zweier Messkurven entstehenden Bogens durch Verschiebung einer der Kurven minimiert (s. Abb. 4.10). Im vorliegenden Fall erfolgt die Ermittlung der Verschiebungsfaktoren inkrementell zwischen jeweils zwei direkt benachbarten Frequenz-Sweeps i und j auf den Temperaturstufen T_i und T_j mit $j = i + 1$ und $T_j = T_i + \Delta T$. Als Referenztemperatur wird stets die jeweils niedrigere Temperatur T_i gewählt, um den Wertebereich des zu ermittelnden Faktors auf das Intervall zwischen 0 und 1 zu begrenzen.

Der entsprechende Zusammenhang in der Nomenklatur vorliegender Arbeit mit Berücksichtigung des zuvor eingeführten vertikalen Verschiebungsfaktors lautet demnach:

$$c(T_i) \cdot G'(\omega, T_i) = c(T_j) \cdot G'(\omega \cdot a_{i/j}, T_j) \quad (4.4)$$

wobei

$$a_{i/j} = a(T_i, T_j) = \frac{\omega_i}{\omega_j} = \frac{f_i}{f_j} \quad (4.5)$$

der *inkrementelle Faktor zur horizontalen Verschiebung* der Kurve j auf die Referenztemperatur T_i ist. Es handelt sich zwar um eine reguläre Verschiebung nach dem ZTV-Prinzip, diese hat jedoch eine grundlegende Bedeutung für alle weiteren Untersuchungen dieser Arbeit. Aus diesem Grund wird das spezielle Verfahren in Anlehnung an den englischen Begriff der ZTV folgend als *Superposition* bezeichnet. So soll im weiteren Verlauf der Arbeit darauf eindeutig Bezug genommen werden können. Im exemplarischen Fall des Versuchs D-TFS_03 mit auf 93 Temperaturstufen durchgeführten Frequenz-Sweeps ergeben sich damit 92 *Superpositionen*, in denen jeweils ein inkrementeller Verschiebungsfaktor ermittelt wird.

Die Umsetzung der Superpositionen erfolgte in MS Excel mittels VBA-Routinen¹. Da es sich um rein methodische Werkzeuge handelt, werden diese hier nicht weiter vertieft. Detaillierte Beschreibungen zu den konkret verwendeten Algorithmen und ein Beispiel sind in Anhang AI-5.4 zu finden. Die numerischen Ergebnisse aller inkrementellen Verschiebungsfaktoren werden in Anhang AI-5.5 gegeben. Abbildung 4.10 zeigt das geometrische Prinzip des Verfahrens nach Cho (2009) und Bae et al. (2011), welches in der abgewandelten Form in den folgend beschriebenen Schritten abläuft.

¹ *Visual Basic for Applications* (Abkürzung: *VBA*) ist eine Programmiersprache, die in den Anwendungen von *Microsoft* enthalten ist und die Möglichkeit bietet z. B. Routinen innerhalb von Excel zu implementieren.

1. Zu Beginn wird die Art der Methode unterschieden. Im Fall der Verschiebung in zwei Richtungen (M2) werden die Messwerte des Speichermoduls aller Frequenz-Sweeps zunächst über $c(T) \cdot G'(T)$ vertikal verschoben. Für die rein horizontale Verschiebung (M1) wird dabei $c(T) = \text{const.} = 1,0$ gesetzt.
2. In der Sortierung werden für jede Superposition die Messwerte der jeweils beteiligten Frequenz-Sweeps nach der Größe des Speichermoduls $G'(c_T)$ aufsteigend sortiert.
3. Die Werte der Kreisfrequenz des Frequenz-Sweeps j bei T_j werden mit dem horizontalen Verschiebungsfaktor $a_{i/j}$ multipliziert $\tilde{\omega}_j = \omega_j \cdot a_{i/j}$, während die Werte des Frequenz-Sweeps i bei der Referenztemperatur T_i unverändert bleiben $\tilde{\omega}_i = \omega_i$.
4. Die Länge $L(a_{i/j})$ des aus den sortierten Messwerten entstehenden Bogens im doppelt logarithmischen Maßstab, wird nach Gleichung 4.6 über die Summe der Längen seiner Teilstücke zwischen den Datenpunkten berechnet (vgl. Cho 2009).

$$L(a_{i/j}) = \sum_{k=2}^{n_{\text{Punkte}}} \sqrt{\left[\log \left(\frac{G'_k(c_T)}{G'_{k-1}(c_T)} \right) \right]^2 + \left[\log \left(\frac{\tilde{\omega}_k}{\tilde{\omega}_{k-1}} \right) \right]^2} \quad (4.6)$$

5. Der Verschiebungsfaktor $a_{i/j}$ wird, beginnend beim Ausgangszustand ($a_{i/j} = 1,0$), iterativ im Wertebereich $W = \{a_{i/j} \in \mathbb{R} \mid 0 < a_{i/j} \leq 1\}$ variiert und die Schritte 3 und 4 mehrfach wiederholt, bis das Minimum der Bogenlänge $L(a_{i/j})$ gefunden ist.

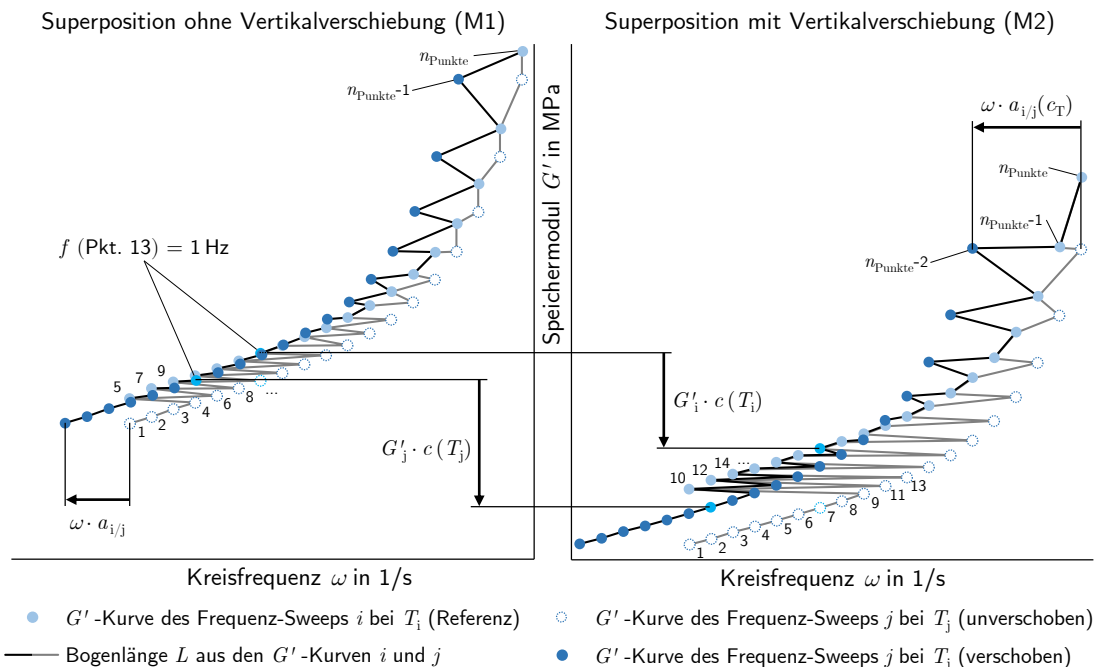


Abbildung 4.10: Systematik des Verfahrens der Superposition zur Ermittlung der inkrementellen Verschiebungsfaktoren über die Minimierung der Bogenlänge in Anlehnung an Cho (2009)

Abbildung 4.11 zeigt eine Zusammenfassung der inkrementellen Verschiebungsfaktoren $a_{i/j}$ aller D-TFS-Versuche, aufgetragen über dem Mittelwert aus Ziel- und Referenztemperatur. Zur Anschaulichkeit werden die Datenpunkte mit Linien verbunden, obwohl dies streng genommen nicht zulässig ist. Es besteht zwar ein funktionaler Zusammenhang zwischen den Verschiebungsfaktoren und der Temperatur, dieser ändert sich jedoch stark in Abhängigkeit von der Schrittweite ΔT . Ein Vergleich der Ergebnisse auf diese Weise ist im vorliegenden Fall möglich, da der Abstand der Temperaturstufen in allen Versuchen zu $\Delta T = 2,5 \text{ K}$ gewählt wurde. Lediglich in den Versuchen D-TFS_05 und D-TFS_06 treten größere Temperaturschritte auf, die durch Fehler im Versuchsablauf entstanden.

In D-TFS_05 wurden unterhalb von 0°C nur wenige Frequenz-Sweeps durchgeführt, was zu deutlich kleineren Verschiebungsfaktoren führt. In D-TFS_06 wurden die Stufen 50 und $52,5^\circ\text{C}$ fälschlicherweise übersprungen, schneller auf $54,7^\circ\text{C}$ aufgeheizt und die Temperatur gehalten. Der dortige Frequenz-Sweeps weist daher vergleichsweise hohe Steifigkeiten auf, was zu den Ausreißern führt. Aus welchen Fehlern im Versuchsablauf genau die Abweichungen entstanden, kann im Nachhinein nicht mehr geklärt werden. Alle anderen Sprünge in den Kurven sind auf Ungenauigkeiten in der Temperaturregelung im Versuch zurückzuführen.

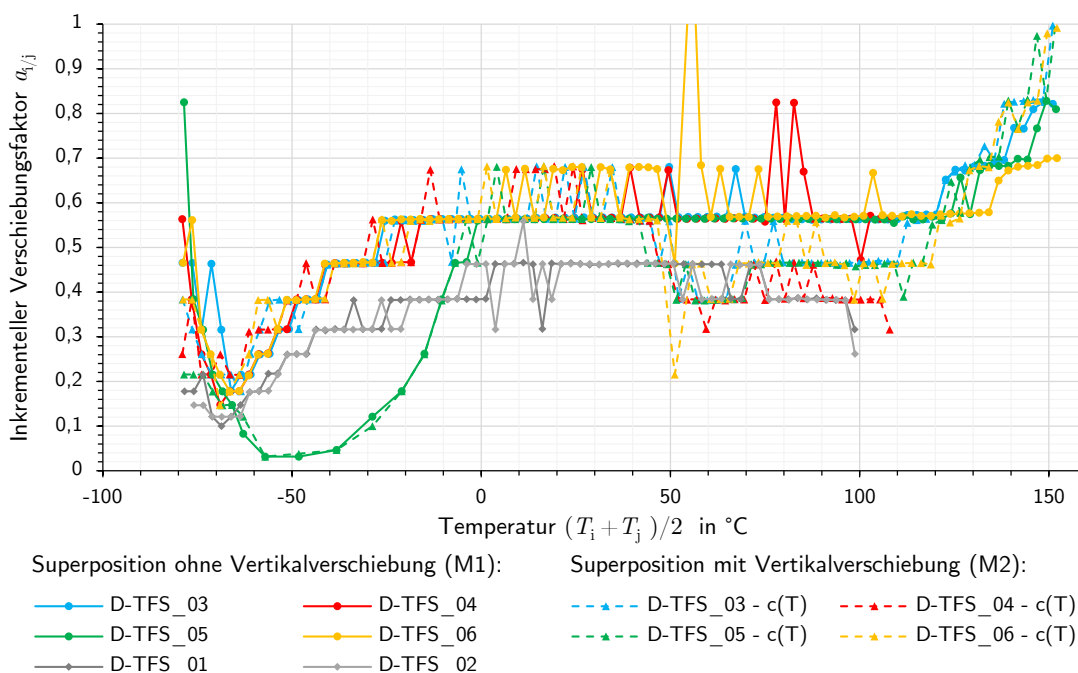


Abbildung 4.11: In den Superpositionen nach Methode (M1) und (M2) ermittelte inkrementelle Verschiebungsfaktoren $a_{i/j}$ über dem Mittelwert der Temperaturen T_i und T_j der Frequenz-Sweeps, zwischen denen die Faktoren eine Umrechnung ermöglichen (Die Schrittweite gibt die Steigerung der Temperatur ΔT zwischen den Sweeps i und j wieder)

Die Daten der neueren Versuche D-TFS_03 bis D-TFS_06 zeigen trotz der besprochenen Abweichungen klare Tendenzen. So müssen die Speichemodulkurven in den niedrigen Temperaturen durch größere Änderung der Steifigkeit im Zuge des unteren Glasübergangs T_β in den Superpositionen weiter verschoben werden. Dies führt entsprechend zu kleineren Verschiebungsfaktoren $a_{i/j}$.

Im Bereich des oberen Glasübergangs T_α hingegen müssen die Kurven weniger weit verschoben werden, was zum einen aus der ausgeprägten Breite der Dispersionsstufe und zum anderen aus den Effekten der Nachvernetzung resultiert. Durch die Zunahme des Vernetzungsgrads und damit des Speichermoduls G' in hohen Temperaturen wird der vertikale Abstand zwischen den Kurven der Frequenz-Sweeps kleiner (vgl. Abb. 4.10). Dies ist auch an der Steigung der Speichermodulkurven aus den TF-Sweeps (Phase 3) in Abbildung 4.9 zu erkennen. Analog zu der angesprochenen Steigung bleiben die nach Methode 1 ermittelten Faktoren der rein horizontalen Superposition für alle Versuche im Bereich zwischen den Glasübergängen annähernd konstant. Sie liegen von -20 bis 120 °C etwa bei $a_{i/j} \approx 0,567$ (vgl. Anhang AI-5.5).

Die nach der Methode 2 ermittelten inkrementellen Verschiebungsfaktoren unterscheiden sich von den zuvor beschriebenen nur im Bereich oberhalb von 50 °C signifikant. Dies ist auf den vertikalen Verschiebungsfaktor $c(T)$ zurückzuführen, der erst in diesem Bereich deutlich absinkt und damit die Speichermodulkurven der Frequenz-Sweeps merklich beeinflusst. Deren vertikaler Abstand zueinander wird durch die Verschiebung in den meisten Fällen vergrößert. Entsprechend müssen die Kurven in der Superposition weiter verschoben werden, was wiederum die zugehörigen horizontalen Verschiebungsfaktoren $a_{i/j}$ verkleinert.

Dies ist deutlich an der in Abbildung 4.10 gezeigten Systematik erkennbar, welche dem Beispiel in Anhang AI-5.4 entstammt. Die Faktoren im Bereich des Glasübergangs T_α werden, anders als bei der Konzeption des Faktors $c(T)$ vermutet, durch die vertikale Verschiebung in Methode 2 kaum beeinflusst. Die horizontalen Verschiebungsfaktoren beider Methoden entwickeln sich hier wieder ähnlich. Lediglich bei 150 °C liegen die Faktoren der zweifach verschobenen Kurven (M2) wieder geschlossen höher als die der Methode 1.

Mit den Daten der ersten Versuche D-TFS_01 und D-TFS_02 kann in Ermangelung eines initialen Temperatur-Sweeps nur eine Superposition mit rein horizontaler Verschiebung (M1) durchgeführt werden. Die sich ergebenden Verschiebungsfaktoren sind zu denen der neueren Versuche nach gleicher Methode (M1) um einen Betrag versetzt. Oberhalb von 50 °C ähneln sie den Werten aus der Superposition mit Vertikalverschiebung (M2) der neueren Versuche.

Die Abweichungen zwischen D-TFS_01 bzw. D-TFS_02 und D-TFS_03 bis D-TFS_06 können auf die Tatsache zurückgeführt werden, dass der Stoff im Verlauf der neueren Versuche zeitgleich verändert wurde, während dies zu Beginn der ersten beiden Versuchen bereits annähernd abgeschlossen war. Somit hat die Nachvernetzung in den ersten Versuchen einen gleichbleibend großen Einfluss auf die Ergebnisse aller Frequenz-Sweeps, während dieser in den neueren Versuchen erst mit steigender Temperatur zunimmt.

Masterung

Aus den in der Superposition ermittelten inkrementellen Verschiebungsfaktoren $a_{i/j}$, können in der Masterung diskrete Faktoren $a_{T_R}(T_S)$ zur Verschiebung jeder beliebigen Frequenz-Sweep-Kurve S bei T_S zu einer wählbaren globalen Referenztemperatur T_R eines Sweeps R berechnet werden (s. auch Schwarzl 1990, S. 204). Dafür werden alle inkrementellen Faktoren der einzelnen Superpositionen zwischen dem Sweep S und dem Referenz-Sweep R bzw. deren Kehrwerte miteinander multipliziert.

$$a_{T_R}(T_S) \equiv a_{R/S} = \begin{cases} \prod_{i=S}^{R-1} \frac{1}{a_{i/j}} = \prod_{i=S}^{R-1} a_{j/i} & \text{für } T_S < T_R \\ \prod_{i=R}^{S-1} a_{i/j} & \text{für } T_S \geq T_R \end{cases} \quad (4.7)$$

mit

$$j = i + 1 \quad \text{bzw.} \quad T_j \geq T_i$$

Die diskreten Verschiebungsfaktoren $a_{T_R}(T_S)$ ermöglichen dann die Ermittlung der Masterkurve bei T_R aus den Kurven der Frequenz-Sweeps S . Dabei gilt selbiges Prinzip der ZTV, wie es auch den Superpositionen zugrunde liegt:

$$c(T_R) \cdot G'(\omega, T_R) = c(T_S) \cdot G'(\omega \cdot a_{R/S}, T_S) \quad (4.8)$$

Demnach werden die Frequenz-Sweep-Kurven in der Masterung nach Methode 1 rein horizontal verschoben, während die Kurven nach Methode 2 über $c(T)$ zuerst vertikal und dann horizontal verschoben werden. Zum Vergleich mit den Untersuchungen im weiteren Verlauf dieser Arbeit (s. Abschnitte 4.2 und 4.3) werden über die beschriebenen Zusammenhänge aus den D-TFS-Versuchen mehrere Masterkurven für die jeweils betrachteten Temperaturen erstellt. Zunächst werden in einem ersten Vergleich die Masterkurven bei $T_R = 23^\circ\text{C}$ ermittelt und gegenübergestellt.

Die Masterkurven bei Raumtemperatur im Frequenz- und Zeit-Bereich

Abbildung 4.12 zeigt die rein horizontal gemasterten Kurven (M1) und Abbildung 4.13 die Kurven der Masterung mit vertikaler Verschiebung (M2) des Versuchs D-TFS_03. Die Kurven der restlichen Versuche bei $T_R = 23^\circ\text{C}$ werden in Anhang AI-5.6 aufgeführt. In den Abbildungen sind jeweils die Messpunkte aller Frequenz-Sweeps bei $f = 1\text{ Hz}$ miteinander verbunden. Wie zuvor am CC- und vGP-Plot bereits beobachtet, nehmen auch hier die Abweichungen der einzelnen Frequenz-Sweeps von dieser Kurve mit steigender Temperatur zu. Dennoch kann die jeweils dargestellte 1 Hz-Kurve als Masterkurve bezeichnet werden, da sie die überwiegende Mehrheit aller Datenpunkte näherungsweise auf sich vereint.

Die Abweichungen der einzelnen Frequenz-Sweep-Kurven von der 1 Hz-Kurve sind dabei in der Masterung (M2) stärker ausgeprägt als bei der rein horizontalen (M1). Die vertikale Verschiebung der Kurven durch $c(T)$ vergrößert deren vertikale Abstände, was sich bereits an den inkrementellen Verschiebungsfaktoren im Bereich von 50 bis 100°C in Abbildung 4.11 zeigt. Infolge dessen werden die Kurven weiter zu niedrigen Frequenzen verschoben, weshalb die Masterkurve (M2) zum einen länger wird und zum anderen flacher verläuft. Die gleichen Tendenzen wie zuvor beschrieben lassen sich ebenso an allen gemasterten Kurven der anderen D-TFS-Versuche beobachten. Auf deren Darstellungen wird daher an dieser Stelle verzichtet. Sie können in Anhang AI-5.6 eingesehen werden.

Um die D-TFS-Versuche in den folgenden Kapiteln mit den anderen Versuchen zum Lang- und Kurzzeitverhalten des PUR vergleichen zu können, werden die Masterkurven vom Frequenz- in den Zeitbereich überführt. Dafür müssen die Daten normalerweise wie in Abschnitt 2.1.4 beschrieben mithilfe der Fourier-Transformation umgewandelt werden. In einem ersten Schritt

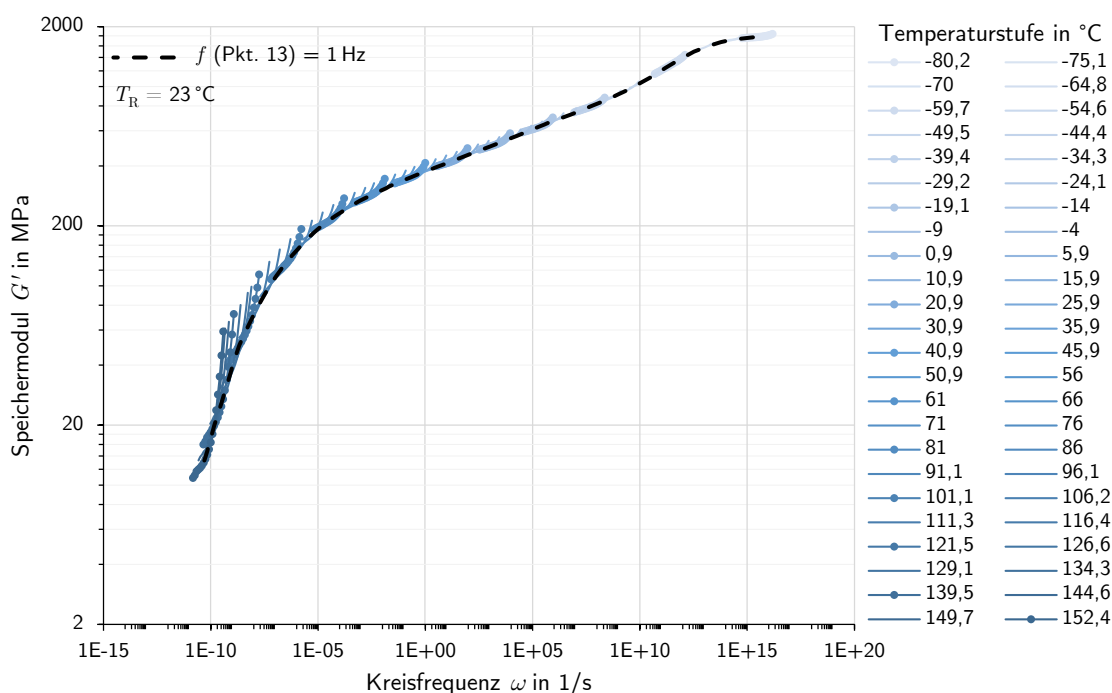


Abbildung 4.12: Horizontal gemasterte Speichermodulkurven (M1) des Versuchs D-TFS_03 für $T_R = 23\text{ °C}$ in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz ω (Die als unphysikalisch identifizierten Versuchsdaten wurden ausgeblendet und die Datenpunkte aller Frequenz-Sweeps bei $f = 1\text{ Hz}$ zu einer Kurve verbunden)

wird hier jedoch der ebenfalls bereits gezeigte, vereinfachte Ansatz 2.23 genutzt, der dem ersten und einfachsten Term des Relaxationsmoduls $G(t)$ aus den Näherungsgleichungen von Schwarzl (1990, S. 182 ff.) entspricht:

$$G(t) \approx G_D(t) = G' \left(\frac{1}{\omega} \right) \quad (4.9)$$

Es wird angenommen, dass diese Näherung zum Vergleich der D-TFS- mit den anderen Versuchen zum Langzeitverhalten des PUR zunächst hinreichend genau ist. Diese Annahme wird später im Zuge der analytischen Formulierung eines Modells zur Beschreibung der viskoelastischen Eigenschaften des PUR überprüft (s. Abschnitt 5.2.2). Abbildung 4.14 zeigt die Masterkurven aller D-TFS-Versuche aufgetragen über der Zeit auf der primären Abszisse (unten). Dank des einfachen Zusammenhangs aus Gleichung 2.24 ist es möglich auf der sekundären Abszisse (oben) die Kreisfrequenz ebenso darzustellen. Auf einen gesonderten Vergleich der Kurven im Frequenzbereich wird daher verzichtet.

Die Kurven der neueren Versuche D-TFS_03 bis 06 verlaufen, wie auch deren inkrementellen Verschiebungsfaktoren, unabhängig von der Art der Masterung über einen weiten Bereich sehr ähnlich. Erst oberhalb von 50 °C nehmen die Unterschiede zwischen den Masterungen und auch die Streubreite innerhalb der Kurven-Gruppe (M2) zu. Wie zuvor im Vergleich der gemasterten Kurven von D-TFS_03 in den Abbildungen 4.12 und 4.13 festgestellt, zeigt sich auch hier, dass die Steifigkeit der nach (M2) ermittelten Kurven für hohe Zeiten (bzw. niedrige Frequenzen) langsamer abnimmt, als die der rein horizontal gemasterten (M1).

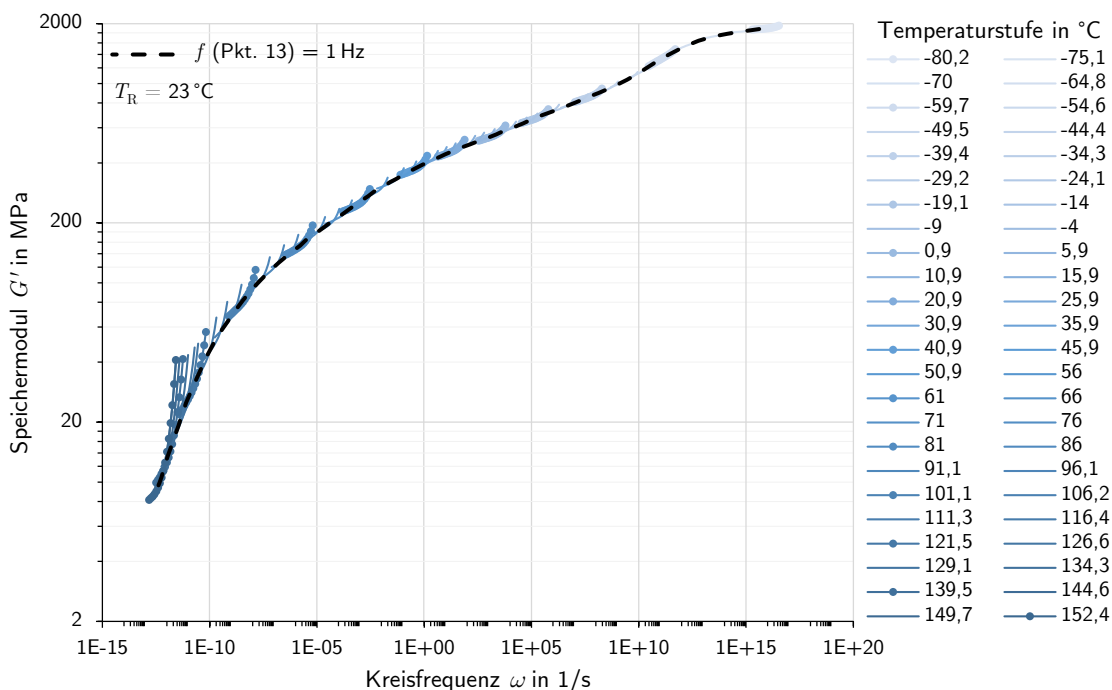


Abbildung 4.13: Vertikal und horizontal gemasterte Speichermodulkurven (M2) des Versuchs D-TFS_03 für $T_R = 23\text{ °C}$ in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz ω (Die als unphysikalisch identifizierten Versuchsdaten wurden ausgeblendet und die Datenpunkte aller Frequenz-Sweeps bei $f = 1\text{ Hz}$ zu einer Kurve verbunden)

So beträgt der Speichermodul G' von D-TFS_03 bspw. nach $1 \cdot 10^{10}\text{ s}$ mit rein horizontaler Masterung (M1) nur ca. 17 MPa während er nach (M2) mit rund 45 MPa mehr als doppelt so hoch ist. Dieses Phänomen ist insofern überraschend, als dass die ursprüngliche Intention zur Anwendung der vertikalen Verschiebung in (M2) darin bestand, die Steifigkeit in langen Zeiten nicht zu überschätzen. Bei der Konzeption der Methode mit vertikaler Verschiebung (M2) wurde angenommen, dass eine Vernachlässigung der Nachvernetzung und damit der Änderung des Speichermoduls G' genau dazu führen würde. Dabei wurde jedoch ein weiterer Effekt des im Versuch steigenden Speichermoduls außer Acht gelassen.

Bisher wurde die Nachvernetzung rein global über die Temperierung im Ablauf des gesamten Versuchs betrachtet. Jedoch werden die inkrementellen Verschiebungsfaktoren $a_{i/j}$ vor allem durch kurzfristige Änderungen zwischen den jeweils benachbarten Temperaturstufen durch die Nachvernetzung verfälscht. Diese Änderungen zeigen sich im Gefälle der Kurven in Abbildung 4.9. Dort wo Unterschiede zwischen den Steigungen der jeweiligen TFS- und TS-Kurven bestehen, ist die Steigung der zugehörigen Kurve von $c(T)$ groß. Hier beeinflusst die Nachvernetzung die Änderung des Speichermoduls von einem Frequenz-Sweep zum nächsten so stark, dass der resultierende horizontale Verschiebungsfaktor dadurch ebenfalls beeinflusst wird. Dies tritt vor allem im Bereich von 50 bis 120 °C auf, was sowohl an den $c(T)$ -Kurven in Abbildung 4.9 als auch an den inkrementellen Verschiebungsfaktoren $a_{i/j}$ in Abbildung 4.11 zu erkennen ist. Je größer die Steigung der $c(T)$ -Kurve, desto größer wird der Quotient $c(T_i)/c(T_j)$ und damit auch der vertikale Abstand der Speichermodulkurven in der Methode 2 zwischen den benachbarten Temperaturstufen T_i und T_j (vgl. Abb. 4.10 r.).

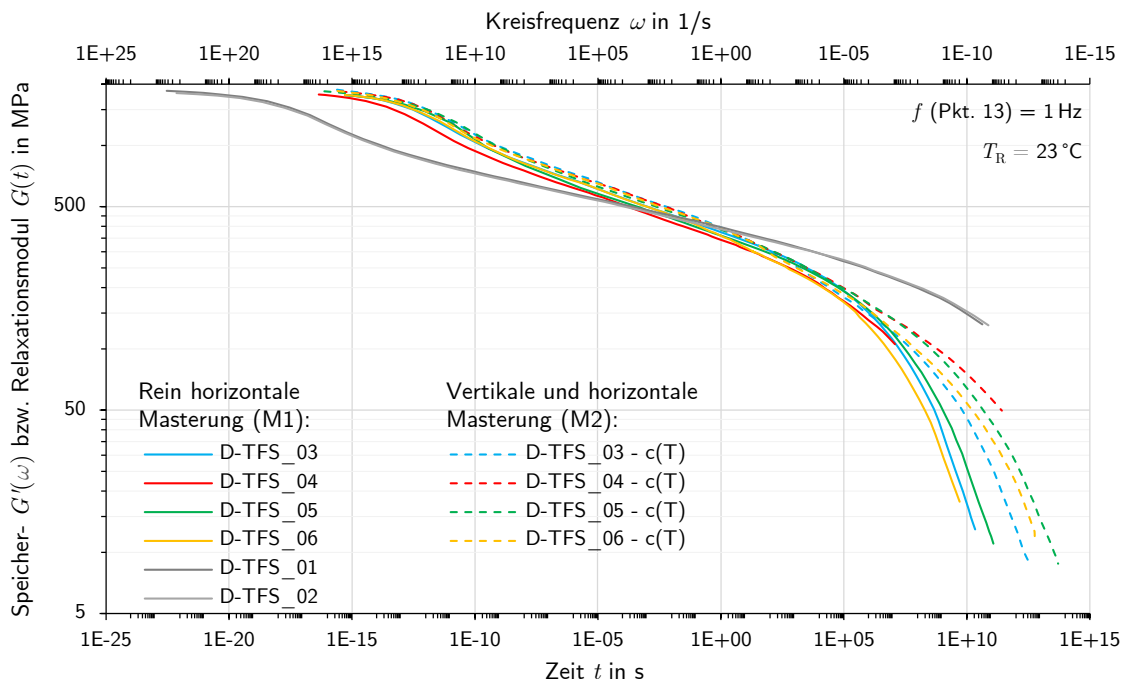


Abbildung 4.14: Masterkurven aller D-TFS-Versuche aus (M1) und (M2) für $T_R = 23^\circ\text{C}$ aufgetragen über der Kreisfrequenz ω (oben) und der über den vereinfachten Zusammenhang aus Gleichung 2.23 ermittelten Zeit t (unten)

Durch den vergrößerten vertikalen Abstand der Kurven müssen diese in der Superposition weiter verschoben werden, was den jeweiligen inkrementellen Verschiebungsfaktor verkleinert. Die zugehörige Masterkurve wird dadurch entlang der Abszisse gestreckt. Dabei hat die Streckung einen größeren Einfluss auf die Gestalt der Kurve, als die Tatsache, dass der Speichermodul G' durch $c(T)$ reduziert wurde. Dies ist beim Vergleich der letzten Datenpunkte der Masterkurven (M1) und (M2) eines Versuchs in Abbildung 4.14 zu erkennen, welche jeweils demselben Frequenz-Sweep entstammen.

Im Gegensatz dazu wird in der Superposition nach Methode 1 nur die geringere Änderung des Speichermoduls erfasst, welche in den TFS-Kurven in Abbildung 4.9 zu erkennen ist. Infolge dessen fallen die vertikalen Abstände der Speichermodulkurven und damit deren horizontale Verschiebung geringer aus (s. Abb. 4.10 l.). Die Masterkurven (M1) erscheinen dadurch gegenüber denen von (M2) gestaucht.

Welchen Effekt ein falsches Temperaturprogramm und eine daraus resultierende starke Nachvernetzung haben kann, zeigt sich indes an den Kurven der ersten Versuche D-TFS_01 und D-TFS_02. Sie bestätigen die zuvor an Abbildung 4.11 gemachten Beobachtungen. Durch die geringeren inkrementellen Verschiebungsfaktoren werden die einzelnen Frequenz-Sweep-Kurven weiter verschoben und die Masterkurven entsprechend noch mehr gestreckt als die der neueren Versuche mit der Masterung (M2). Sie zeigen nach den zuvor angeführten $1 \cdot 10^{10}$ s immer noch einen Speichermodul von $G' \approx 200$ MPa. Dies zeigt jedoch auch, welches Potential noch in dem Material steckt. So könnte bspw. das PUR im Kern von SPS-Elementen durch deren nachträgliche Wärmebehandlung gezielt verändert werden, um dessen Langzeiteigenschaften zu verbessern.

4.1.3 Schlussfolgerungen

Mit den gezeigten DMT Analysen am PUR wurden dessen viskoelastische Eigenschaften näher beleuchtet. So konnte mit den D-TS-Versuchen die These der strukturellen Veränderungen des Stoffs durch Tempern und Nachvernetzen infolge einer Temperierung weiter untermauert werden. Da die Veränderungen im Versuchsablauf von DMT-Messungen zwangsläufig auftreten, verfälschen sie diese gleichzeitig und erschweren so einen Vergleich mit Untersuchungen abweichender Temperatur-Historie (bspw. Langzeituntersuchungen bei Raumtemperatur). Überdies ergaben Analysen von mCC- und vGP-Plots, dass die Nachvernetzung des Polymers im Versuchsablauf die Ursache für dessen thermorheologische Komplexität ist. Auch wenn diese nur schwach ausgeprägt ist, wurde der Versuch unternommen die Auswirkungen der Nachvernetzung abzumildern, um sowohl die Anwendbarkeit der ZTV als auch die Vergleichbarkeit mit anderen Versuchen zu verbessern.

Dafür wurden neuerliche D-TFS-Versuche durchgeführt in denen ein abgewandeltes Temperaturprogramm zur Anwendung kam. Dieses sollte sowohl die Auswirkungen der Nachvernetzung minimieren, als auch über einen ingenieurmäßigen Ansatz eine Rückrechnung der verfälschten Ergebnisse auf den ursprünglichen Zustand ermöglichen. Ein neuer vertikaler Verschiebungsfaktor $c(T)$ wurde eingeführt, um die mittlere Veränderung des Speichermoduls G' infolge der Nachvernetzung im TF-Sweep zu erfassen. Für dessen Bestimmung wurden in einem schnellen Temperatur-Sweep zu Beginn jedes D-TFS-Versuchs die initialen Eigenschaften des PUR gemessen und mit denen aus den TF-Sweeps ins Verhältnis gesetzt.

Um die Auswirkungen des neuen Versuchsprogramms und des vertikalen Verschiebungsfaktors zu untersuchen, wurden alle D-TFS-Versuche nach zwei Methoden ausgewertet. In der konventionellen Methode 1 wurden die Frequenz-Sweep-Kurven der Versuche rein horizontal verschoben, die entsprechenden Verschiebungsfaktoren ermittelt und die Masterkurve gebildet. In Methode 2 wurde zuerst eine vertikale Verschiebung der Kurven über den Faktor $c(T)$ durchgeführt, bevor die weiteren Schritte analog zu Methode 1 erfolgten. Ein Vergleich der ermittelten Masterkurven zeigt, dass die Rückrechnung der Steifigkeit des PUR auf das Ursprungsniveau den gegenteiligen Effekt hat, als anfangs erwartet. Durch die vertikale Faktorisierung der Speichermoduln werden diese horizontal weiter verschoben, was zu einer Streckung der Masterkurven und zu einer rechnerischen Verbesserung der Eigenschaften in hohen Zeiten führt. Die nach Methode 1 rein horizontal gemasterten Kurven verlaufen dementsprechend in hohe Zeiten wegen der Nachvernetzung steiler und verlieren schneller an Steifigkeit.

Welche Methode der Auswertung die verlässlicheren Ergebnisse liefert, kann anhand der bisherigen Erkenntnisse nicht abschließend beurteilt werden. Vom physikalisch-mechanischen Standpunkt erscheint die Methode 2 mit vorheriger vertikaler Verschiebung über $c(T)$ zwar sinnvoll, jedoch bleibt fraglich, ob sie in der Lage ist, das Phänomen der Nachvernetzung im Versuch angemessen zu berücksichtigen und die ursprünglichen Eigenschaften des Stoffs abzubilden. Für eine Modellierung des Materialverhaltens und dessen Berücksichtigung im Entwurf von SPS-Bauteilen unter Dauerlast, könnten über die Methode 2 generierte Masterkurven gegenüber denen der Methode 1 auf der unsicheren Seite liegen. Daher bedarf es weiterer Analysen und Vergleiche mit anderen Untersuchungen zu den Eigenschaften des PUR.

4.2 Lang- und Kurzzeitversuche unter uniaxialem Zug zur Charakterisierung der viskoelastischen Eigenschaften des speziellen PUR im SPS

Im vorherigen Abschnitt wurden anhand mehrerer DMTA zwei Methoden zur Bestimmung der Steifigkeitsentwicklung des PUR verglichen. Um diese auf ihre Tauglichkeit zu prüfen und wenn möglich eine der Methoden zu validieren, werden sie in diesem Abschnitt mit Lang- und Kurzzeit-Versuchen unter uniaxialem Zug verglichen. Dabei werden für jeden Vergleich die Masterkurven der D-TFS-Versuche mit der entsprechenden Referenztemperatur nach den im vorigen Kapitel beschriebenen Methoden 1 und 2 erstellt. Die Ergebnisse der Versuche werden in den folgenden Kapiteln nur dann isoliert betrachtet, wenn dies sinnvoll erscheint. In allen anderen Fällen werden die Ergebnisse stets direkt im Vergleich zueinander oder mit den Masterkurven der D-TFS-Versuche analysiert. Die Ergebnisse der einzelnen Versuche werden in Abschnitten von Anhang AI-6 gegeben.

4.2.1 Langzeit-Kriechen unter konstantem Zug bei Raumtemperatur (TC)

Die Kriechversuche wurden in Anlehnung an DIN EN ISO 899-1 durchgeführt und fanden über eine Dauer von jeweils rund 1000 h statt. Dafür wurde eigens ein Versuchsstand konzipiert und errichtet, in dem je Versuch zeitgleich vier Probekörper lotrecht hängend durch Gewichte auf Zug beansprucht werden konnten. In Abbildung 4.15 links ist der Versuchsaufbau für die höchste Last von 20 kg zu sehen, die zusammen mit der Lastenleitung eine Gewichtskraft von ca. 200 N je Probekörper erzeugte. Insgesamt wurden sechs Versuche mit jeweils vier Probekörpern durchgeführt. Dabei erfolgte der Versuch auf zuvor genannter Laststufe als einziger an Laborprobekörpern aus der Herstellung bei BASF Polyurethanes. Auf den Laststufen 5 und 10 kg (etwa 50 und 100 N) wurden jeweils zwei Versuche gemacht. Außerdem wurden in einem weiteren Versuch mit 10 kg vier Probekörper untersucht, die zuvor für 1 h einer Wärmebehandlung bei 150 °C unterzogen worden waren. Tabelle 4.1 zeigt eine Aufstellung aller Kriechversuche und deren wichtigste Eckdaten.

Tabelle 4.1: Aufstellung aller durchgeführten Langzeit-Kriechversuche unter Zug bei Raumtemperatur

Bezeichnung		Dauer	Belastung		Besonderheiten
Versuch	Nr.	t in h	F_g in N	σ_0 in MPa	
TC_5_a	05 bis 08	1030	52	1,3	-
TC_5_b	29 bis 32	1100	52	1,3	-
TC_10_a	01 bis 04	1000	102	2,5	Ausfall d. Temperaturmessung
TC_10_b	16 bis 19	1010	102	2,5	-
TC_T_10	35 bis 38	2160	102	2,5	Vorbehandlung d. Probekörper für 1 h auf 150 °C
TC_20_L	54L bis 57L	930	200	5,0	Laborprobekörper

Die Dehnungen der Probekörper und deren Zunahme über die Zeit wurden berührungslos mit der Methode der digitalen Bildkorrelation (DIC) gemessen.¹ Mit einer fest im Versuchsstand verbauten, hochauflösenden Kamera wurden dafür die Probekörper fotografiert, zuerst im unbelasteten Zustand und nach Aufbringen der Last logarithmisch über die Zeit verteilt. Die Bilder wurden im Nachgang mit der Software *VIC-2D* von Correlated Solutions Inc. ausgewertet. Abbildung 4.15 zeigt rechts Beispiele von Messaufnahmen vor (oben) und während der Auswertung (unten).

Die Versuche fanden in einem innen liegenden Kellerraum statt, um größere Temperaturschwankungen in deren Verlauf möglichst zu vermeiden. Da dies dennoch nicht gänzlich verhindert werden konnte, wurde bei jedem Versuch zusätzlich ein unbelasteter Kompensations-Probekörper in die Bildebene gehängt. Dieser erfuhr die gleichen Temperaturdehnungen wie die belasteten Probekörper, was es ermöglichte diese aus den gemessenen Dehnungen nachträglich herauszurechnen. Da die Dehnung der Probekörper über deren Steifigkeit aber auch indirekt von der Temperatur abhängt, wurde sie zusätzlich aufgezeichnet. Die Lastaufbringung erfolgte mittels eines höhenverstellbaren Stempels (s. Abb. 4.15 u.l.), um eine ruckartige Belastung der Probekörper zu vermeiden.

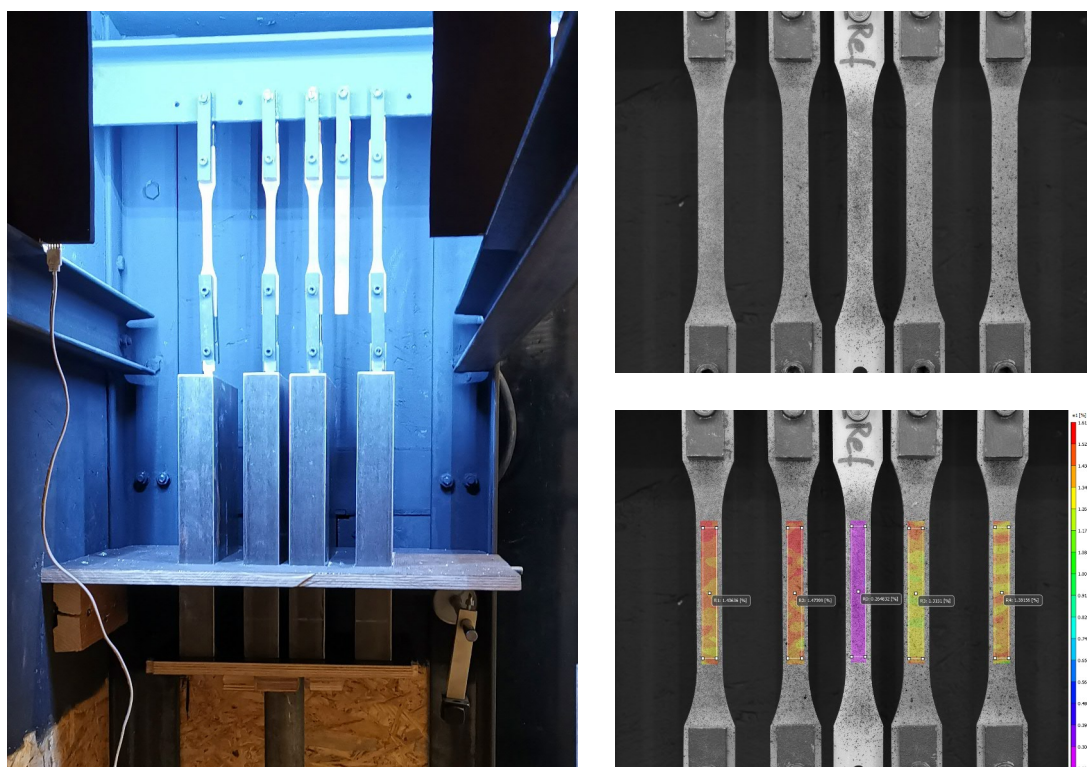


Abbildung 4.15: Versuchsaufbau zum Langzeit-Kriechen unter Zug in der Übersicht (l.) und im Detail (r.) mit Auszug aus einer Auswertung mittels DIC (Farbig dargestellt ist die Verteilung der ersten Hauptdehnung ϵ_1 nach ca. 1000 h)

¹Die DIC ist als Methode mittlerweile in der Forschung etabliert und ihre Funktionsweise wird daher nicht weiter vertieft. Für detaillierte Erläuterung sei hier auf Sutton et al. (2009) verwiesen.

Die einzelnen Ergebnisse der Versuche werden in Anhang AI-6.1 gegeben. Dabei wird die um die Ausgangsspannung σ_0 bereinigte Nachgiebigkeit über der Zeit t aufgetragen.

$$C(t) = \varepsilon(t)/\sigma_0 \quad (4.10)$$

Auf der primären Achse wird daneben die nach DIN EN ISO 899-1 eigentlich geforderte Dehnung $\varepsilon(t)$ dargestellt. Beide Größen an einer Achse anzutragen ist möglich, da die Probekörper in den einzelnen Versuchen näherungsweise die gleiche Spannung erfuhren. Alle Ergebnisse sind bereits um die mithilfe des Kompensationsprobekörpers gemessene direkte Temperaturdehnung bereinigt.

Betrachtet man die Ergebnisse der Versuche zunächst einzeln, lassen sich verschiedene Phänomene erkennen, die für den späteren Vergleich hilfreich sind. So liegen die mittleren Temperaturen der meisten Versuch bei $T \approx 21^\circ\text{C}$. Lediglich die Versuche TC_10_a und b weichen hier ab. In TC_10_a wurde aufgrund eines Fehlers die Temperatur nicht aufgezeichnet und in TC_10_b lag die Temperatur mit $T \approx 24^\circ\text{C}$ höher. Im Verlauf der Versuche TC_10_b und TC_T_10 treten Temperaturspitzen von jeweils etwa 2 bis 3 $^\circ\text{C}$ auf, die alle mit einem deutlichen Anstieg der Nachgiebigkeit einhergehen. Auch in TC_20_L ist eine ähnliche Temperaturspitze zu beobachten, die jedoch von zwei Minima umgeben ist. Hieran wird noch deutlicher, dass die Temperatur direkten Einfluss auf die Steigung des Graphen der Nachgiebigkeit C bzw. Dehnung ε hat.

An den Ergebnissen sind zusätzliche Effekte aus der Versuchsdurchführung und der Messtechnik zu beobachten. So fällt das Messwertrauschen in den Versuchen der niedrigsten Laststufe am größten aus. Dies ist auf die Auflösung des verwendeten Messverfahrens zurückzuführen, welches bei Erfassung der sehr geringen Dehnungen an seine Grenzen kommt. Im Mittel über die vielen Messungen erscheinen die Ergebnisse dennoch zuverlässig. Zusätzlich führte die Verwendung einer Konstruktion zur Lasteinleitung bei den 5 kg-Versuchen zu einer größeren Streuung. Während für die höheren Lasten an jedem Probekörper ein eigenes Gewicht hing (s. Abb. 4.15 l.), wurde auf der niedrigsten Laststufe ein Gewicht über eine Konstruktion an zwei Probekörper gehängt. Hierbei traten in der Lastverteilung vermutlich Haftreibungseffekte und Exzentrizitäten auf, welche eine ungleichmäßige Verteilung der Last und somit die größere Streuung in den Ergebnissen verursachten. Beide Effekte nehmen mit zunehmender Belastung bzw. Dehnung über die Versuche hinweg ab und die Genauigkeit der Ergebnisse steigt.

Für den Vergleich der Versuche werden alle Mittelwertkurven der Nachgiebigkeiten aus Anhang AI-6.1 in Abbildung 4.16 gegenübergestellt. Zusätzlich sind die Standardabweichungen der Versuche durch dünnere Linien der gleichen Farbe angedeutet. Zu Beginn der Versuchszeit sind nahezu alle Nachgiebigkeiten gleich. Lediglich der Versuch unter 20 kg weicht hiervon ab. Es kann vermutet werden, dass bereits zu Beginn des Versuchs die Dehnungen so groß waren, dass die Probekörper sich nicht mehr linear-viskoelastisch verhielten (vgl. Mezger 2016, S. 130). Im Bereich der linearen Viskoelastizität gilt das in Abschnitt 2.1.2 bereits beschriebene Superpositionsprinzip. Die Höhe der Spannung sollte nur einen faktoriellen Einfluss auf die Größe der Verformung haben und die Kurven der Nachgiebigkeit entsprechend deckungsgleich sein (vgl. Schwarzl 1990, S. 133). Dies trifft auf die Versuche mit nur 5 kg Belastung und TC_10_a in deren gesamten Verlauf zu. Hier kann davon ausgegangen werden, dass diese vollständig im LVE-Bereich liegen. Sie werden daher für weitere Vergleiche zu einer Mittelwertkurve der linear-viskoelastischen Nachgiebigkeit TC_LVE zusammengefasst.

Liegt deren anfängliche Nachgiebigkeit noch im selben Bereich, entfernen sich die Kurven von TC_10_b und TC_T_10 mit zunehmender Zeit deutlich von der linearen Referenz TC_LVE. Bei den Versuchen handelt es sich um jene, in deren Verlauf die Temperaturspitzen auftraten. Die Erhöhung der Temperatur und damit die Zunahme der Dehnung der Probekörper führte vermutlich dazu, dass der LVE-Bereich verlassen wurde, wodurch die Dehnungen selbst nach Abkühlung weiter stark zunahm (vgl. Abb. AI-44). In beiden Versuchen steigt die Dehnung mit Überschreiten von ca. 8‰ überproportional an und damit auch die Nachgiebigkeit. Bemerkenswert ist, dass im Versuch TC_T_10 dieser stärkere Anstieg der Dehnung zeitlich nicht mit einer Temperaturspitze zusammenfällt. Dies spricht zusätzlich für die Lage der Linearitätsgrenze in diesem Bereich.

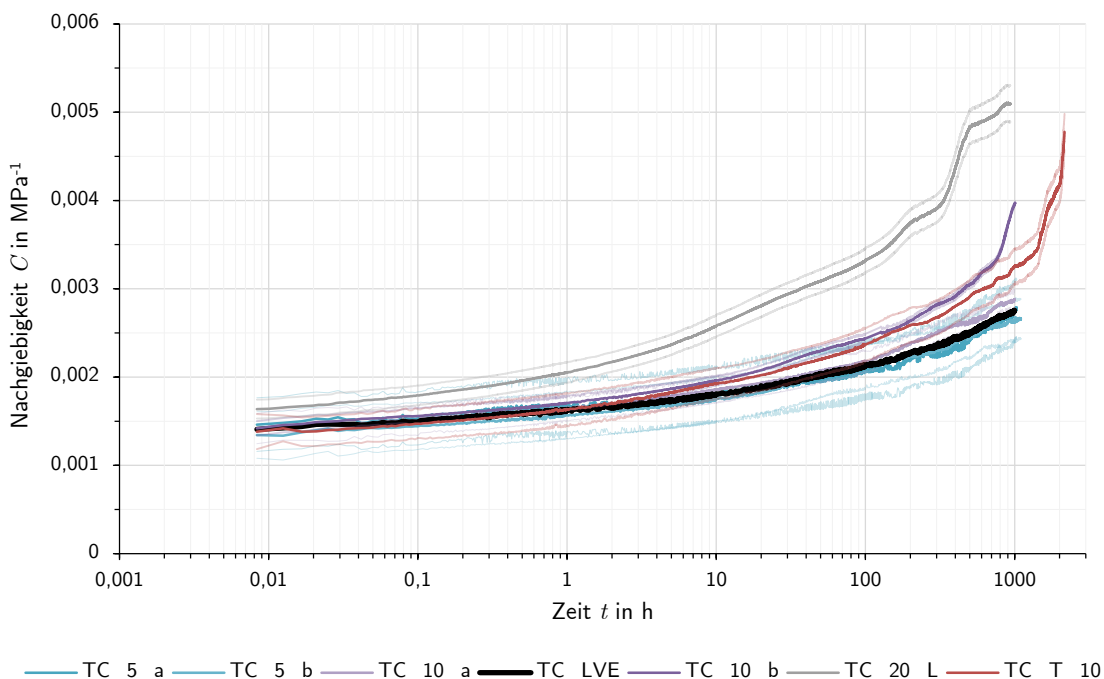


Abbildung 4.16: Vergleich der mittleren Kriechfunktionen aller TC-Versuche über der Zeit

Schwarzl (1990, S. 140) fasst die Erkenntnisse mehrerer Untersuchungen zur Grenze des LVE-Bereichs zusammen. Für die untersuchten Polymere liegt diese Grenze unterhalb des Glasübergangs zwischen 5 und 12‰, während sie sich darüber zwischen 50 und 150% bewegt. Das experimentelle Fenster der Kriechversuche an dem Copolymer liegt unterhalb des α -Übergangs und kann zumindest für dessen harte Komponente dem Glasbereich zugeordnet werden. Die Beobachtungen an den Nachgiebigkeitskurven passen ebenso zu der angegebenen Grenze der Linearität für den Glasbereich. Durch die Überlagerung der Effekte aus der Temperatur kann die Linearitätsgrenze für das PUR jedoch nicht genauer verortet werden als auf den Bereich zwischen 7 und 9‰. Um diese nochmals zu untersuchen und wenn möglich genauer zu verorten, wurden zusätzliche Kriechversuche unter steigender Zuglast bei konstanter Temperatur durchgeführt. Sie werden aufgrund ihrer untergeordneten Bedeutung hier jedoch nicht gezeigt. Ihre Dokumentation und Auswertungen ist in Anhang AI-6.2 zu finden. Die Ergebnisse bestätigen die Lage der Grenze des LVE-Bereichs bei ca. 8‰.

Für die D-TFS-Versuche wurde anhand der Amplituden-Sweeps bereits festgestellt, dass diese komplett im LVE-Bereich stattfanden und entsprechend auch nur die linear-viskoelastischen Eigenschaften des PUR zeigen können. Zum Vergleich werden dennoch alle Kriechversuche herangezogen. Dafür wird aus deren Ergebnissen zunächst über einen vereinfachten Zusammenhang nach DIN EN ISO 899-1 der Elastizitätsmodul E_{TC} in Abhängigkeit von der Zeit errechnet.

$$E_{TC}(t) \approx \frac{1}{C(t)} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon(t)} = \frac{F_g}{A_0 \cdot \varepsilon(t)} \quad (4.11)$$

Diese Berechnung wird angewendet, obwohl die Steifigkeit streng genommen nicht aus dem Kehrwert der Nachgiebigkeit berechnet werden kann. Deren Produkt ergibt sich gerade in den Dispersionsgebieten eines Polymers zu $E \cdot C \leq 1$ (Schwarzl 1990, S. 164 ff.). Die Steifigkeit kann im vorliegenden Fall also geringer ausfallen, als sie sich aus dem Zusammenhang nach Gleichung 4.11 ergibt. Diese Ungenauigkeit wird hingenommen, da wie zuvor in Abschnitt 4.1.2 beschrieben auch die Vergleichsfunktion $G_D(t)$ nur näherungsweise bestimmt wurde. Würde die Funktion akkurat aus den D-TFS Versuchen ermittelt, läge diese unterhalb der sich aus Gleichung 2.23 ergebenden Funktion $G(t) \leq G'(\omega) \leq |G^*(\omega)$ (Schwarzl 1990, S. 178 ff.). Aus den DMT Analysen ist bekannt, dass im experimentellen Bereich der Kriechversuche für das PUR $\tan \delta < 0,1$ und damit $|G^*(\omega) \approx G'(\omega)$ gilt (vgl. Abb. 4.5). Für die Kriechversuche wird entsprechend angenommen, dass auch $G_D(t)$ nicht viel geringer ausfallen sollte. Mithilfe der bekannten Querdehnzahl des PUR wird der zuvor aus den Kriechversuchen ermittelte E -Modul in den Kriech-Schubmodul (bzw. Kriechmodul) umgerechnet. Auch dies stellt eine Vereinfachung dar, welche auf der Annahme basiert, dass die Querdehnzahl über die Versuchsdauer konstant bei $\nu \approx 0,36$ bleibt.¹

$$G_{TC}(t) = \frac{E_{TC}(t)}{2(1 + \nu)} \quad (4.12)$$

Abbildung 4.17 zeigt die Masterkurven aller D-TFS-Versuche für $T_R = 23^\circ\text{C}$ im Vergleich mit den umgerechneten Kurven der Langzeit-Kriechversuche unter Zug. Um die Übersichtlichkeit zu wahren, wird statt der Kurven TC_5_a und b sowie TC_10_a deren Mittelwertkurve TC_LVE gezeigt (vgl. Abb. 4.16). Auf die Darstellung der Standardabweichungen wird aus selbigem Grund ebenfalls verzichtet. Sie kann an Abbildung 4.16 abgelesen werden.

Die Kurven der Kriechversuche liegen fast alle im gleichen Korridor wie die Masterkurven der D-TFS-Versuche und bestätigen diese damit prinzipiell. Lediglich der Versuch TC_20_L weicht hiervon deutlich ab, was darauf zurückzuführen ist, dass er vollständig außerhalb des LVE-Bereichs verläuft. Zu Beginn zeigen alle Kriechversuche ein deutlich weiches Verhalten als die D-TFS-Versuche. Dies kann auf das Tempo der Lastaufbringung in den Versuchen zurückgeführt werden, welches gerade im Bereich kurzer Zeiten (hoher Frequenzen) Einfluss auf die gemessene Steifigkeit hat.²

¹Diese Annahme stützt sich auf die Erkenntnisse, dass die Querdehnzahl des Stoffs in Abhängigkeit von der Temperatur nahezu konstant bleibt (vgl. Abschnitt 2.2.1 bzw. SPS Technology 2002, S. 25) und das PUR als thermorheologisch einfach eingestuft werden kann, womit es sich in Abhängigkeit von der Zeit und der Temperatur ähnlich verhalten sollte.

²Das gleiche Phänomen beeinflusst auch Messungen der Steifigkeit in Relaxationsversuchen, weshalb bspw. DIN 53441 empfiehlt, die zehnfache Zeit der Lastaufbringung bei der Auswertung zu vernachlässigen.

Die Kurven der Versuche TC_10_b und TC_T_10 liegen ebenfalls im Bereich der Masterkurven und weichen erst mit Verlassen des LVE-Bereichs deutlich davon ab. Die Kurven zeigen von ihrer Lage und Neigung zwar mehr Ähnlichkeit mit den Masterkurven der Methode 1. Aufgrund der Störeinflüsse aus Temperatur und Nichtlinearität, der zuvor getroffenen Annahmen und der daraus resultierenden Ungenauigkeit kann die Frage, welche Methode der Auswertung die Stoffeigenschaften besser abbildet, jedoch noch nicht abschließend beantwortet werden. Daher folgen weitere Versuche unter Zug bei anderen Temperaturen. Um den nichtlinearen Effekten vorzubeugen und die Vergleichbarkeit zu erleichtern, wurden diese nicht als Kriechversuche unter konstanter Zugbelastung, sondern als Relaxationsversuche unter konstanter Zugdeformation durchgeführt.

Neben den zuvor beschriebenen lässt sich ein zusätzliches Phänomen beobachten, welches die Nachvernetzung des PUR betrifft. So zeigen die Probekörper des Versuchs TC_T_10, obwohl sie für 1 h bei 150 °C behandelt wurden kaum ein anderes Verhalten, als jene ohne thermische Vorbehandlung. Eigentlich wäre zu vermuten gewesen, dass diese ein ähnliches Verhalten zeigen wie die D-TFS_01 und D-TFS_02, welche eine ähnliche Temperierung vor Beginn des Versuchs erfuhren. Dies untermauert die These, dass die hohe Steifigkeit in den ersten beiden D-TFS-Versuchen vor allem auf das verwendete Temperaturprogramm und die Abfolge der TF-Sweeps zurückzuführen ist und nicht auf die Nachvernetzung der Probekörper. In den weiteren Vergleichen werden die beiden ersten Versuche D-TFS_01 und D-TFS_02 daher nicht mehr berücksichtigt.

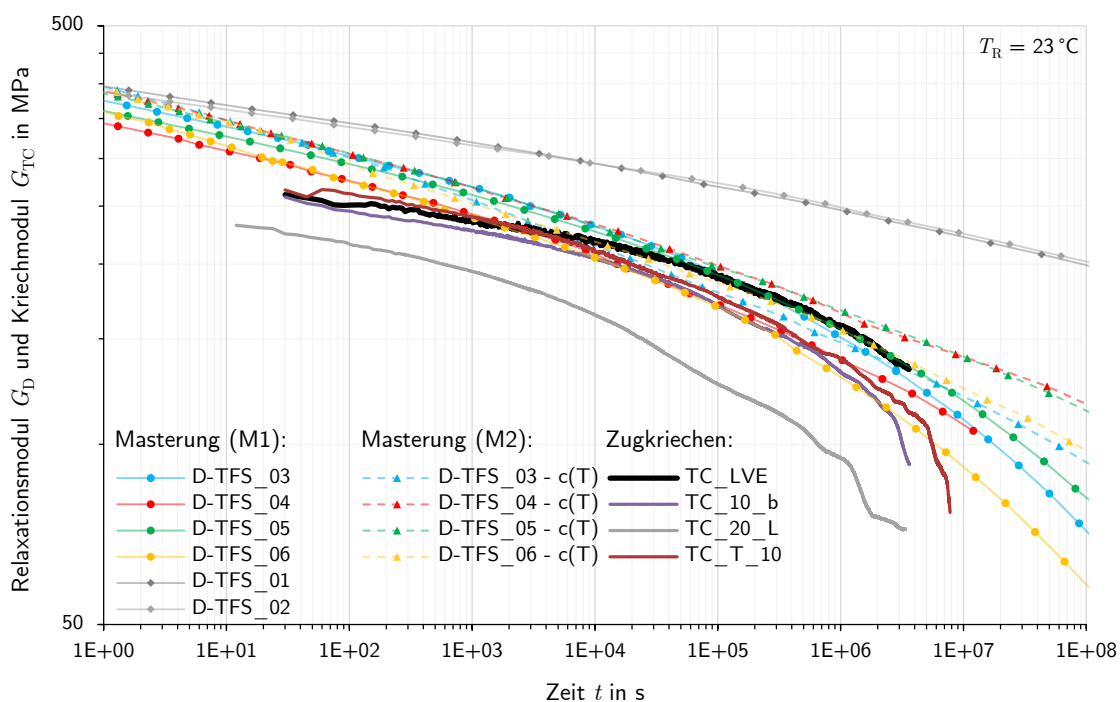


Abbildung 4.17: Vergleich der aus den TC-Versuchen ermittelten Verläufe der Kriechmoduln mit den Masterkurven der D-TFS-Versuche für $T_R = 23^\circ\text{C}$ über der Zeit

4.2.2 Kurzzeit-Relaxation unter konstanter Zugdeformation bei verschiedenen Temperaturen (TR-TTS)

Um die D-TFS-Versuche und die aus ihnen erzeugten Masterkurven über einen größeren Bereich zu prüfen, als dies mit den Kriechversuchen unter Zug möglich ist, wurden Relaxationsversuche unter Zugdeformation auf verschiedenen Temperaturstufen durchgeführt. Sie dienen außerdem im späteren Abschnitt 5.2.3 zur Überprüfung des analytischen Zusammenhangs der ZTV und dem entwickelten viskoelastischen Materialgesetz, weshalb sie den Zusatz *TTS* tragen. Insgesamt wurden 11 Versuche in Anlehnung an DIN 53441 durchgeführt.¹ Neben vier bei niedrigeren (10 und 23 °C) wurden vor allem Versuche in erhöhten Temperaturen durchgeführt, um diese mit den Bereichen der Masterkurven für lange Zeiten zu vergleichen. Dennoch war darauf zu achten, einer strukturellen Veränderungen der Probekörper vorzubeugen. Daher wurde sowohl die maximale Temperatur als auch die Dauer der warmen Versuche begrenzt. Tabelle 4.2 zeigt eine Liste aller TR-TTS-Versuche mit den wichtigsten Eckdaten.

Tabelle 4.2: Aufstellung aller durchgeführten Relaxationsversuche unter Zug (TR-TTS)

Bezeichnung		Temperatur T in °C	Dauer t in h	Deformation	
Versuch	Nr.			ΔL in mm	ε_0 in ‰
TR-TTS_10_	20	10	3	0,54	4,991
	24				4,997
TR-TTS_23_	21	23	3	0,54	4,998
	25				4,995
TR-TTS_30_	33	30	3	0,54	4,998
TR-TTS_40_	34	40	3	0,54	4,998
TR-TTS_50_	22	53	3	0,54	4,991
	26				4,998
TR-TTS_70_	27	70	1	0,54	4,991
	28				4,977
TR-TTS_75_	23	78	0,5	0,54	5,014

Die Versuche fanden in einer Klimakammer unter konstanter Temperatur statt (s. Abb. 4.18). Um eine definierte und gleichmäßig über die Probekörper verteilte Dehnung aufbringen zu können, wurden im Vorfeld deren Schultern mit einer Fräse entfernt, sodass eine freie Länge von rund 108 mm mit konstantem Querschnitt entstand (vgl. Abb. 3.2). Die Probekörper wurden mit mechanischen Klemmen so befestigt, dass in der Probenaufhängung möglichst kein Schlupf entstehen konnte. Nach dem Einbau wurden die Probekörper lastfrei auf die jeweils erforderliche Temperatur gebracht. Diese wurde kontinuierlich mittels Sensor überprüft, um direkt mit dem Versuch zu beginnen sobald sie erreicht war. Um der Entstehung von Schlupf zusätzlich vorzubeugen, wurde jeweils eine Vorlast von 5 N aufgebracht und dann der Versuch gestartet. Mit 0,5 mm/min wurde eine Verformung von 0,54 mm aufgebracht, sodass dadurch in allen Probekörpern eine Dehnung von etwa 5 ‰ erzeugt wurde. Diese wurde auf der sicheren Seite liegend gewählt, damit die Versuche stets innerhalb des LVE-Bereichs stattfanden, aber

¹Die Norm wurde zurückgezogen, bislang aber durch keine aktuelle ersetzt. Daher finden sich auch in neueren Quellen Verweise auf die vergleichsweise alte Richtlinie (s. z. B. Grellmann et al. 2015, S. 190).

die resultierenden Kräfte möglichst hoch und damit verlässlich messbar waren. Während eines gesamten Versuchs wurden der Weg und die Temperatur konstant gehalten und fortwährend kontrolliert. Die Messung von Kraft und Verformung erfolgte über die Universalprüfmaschine, während für die Temperatur ein separates Messsystem verwendet wurde.

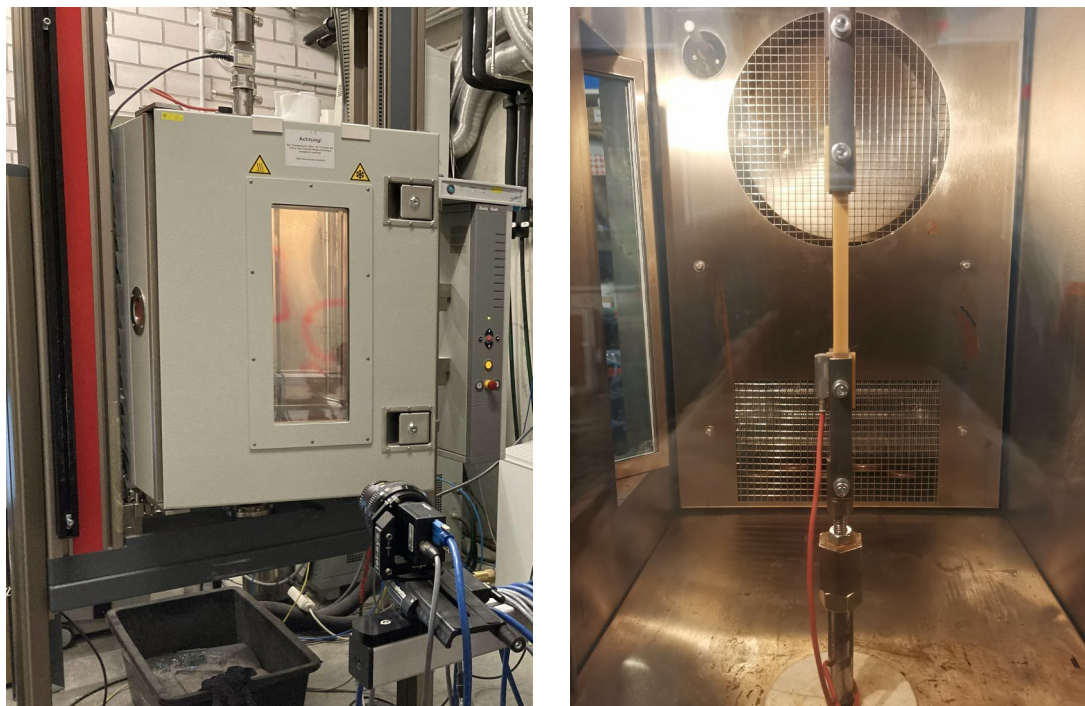


Abbildung 4.18: Versuchsaufbau der Kurzzeit-Relaxation unter Zug in der Übersicht mit Klimakammer (l.) und im Detail mit der verwendeten Probekörperaufhängung (r.)

Bei der Auswertung werden entsprechend der Empfehlung von DIN 53441 alle Daten innerhalb der zehnfachen Lastaufbringungsdauer ab Erreichen der Maximallast vernachlässigt. Damit soll vermieden werden, dass Dehnrateneffekte aus der Lastaufbringung die Ergebnisse beeinflussen. Die in einem Versuch mit konstanter Temperatur gemessene Kraft $F(t)$ wird ähnlich dem Vorgehen in den Kriechversuchen (vgl. Gl. 4.11) mithilfe der jeweiligen Probekörpermaße in den Relaxationsmodul $G_{\text{TR-TTS}}^1$ umgerechnet:

$$G_{\text{TR-TTS}}(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0 \cdot 2(1 + \nu)} = \frac{F(t) \cdot L_0}{A_0 \cdot \Delta L \cdot 2(1 + \nu)} \quad (4.13)$$

Abbildung 4.19 zeigt eine Gegenüberstellung aller Verläufe der Relaxationsmoduln über die Versuchsdauer. Es lässt sich bereits im direkten Vergleich erkennen, dass einige der Ergebnisse in Frage zu stellen sind. So verlaufen die Kurven bei 10, 23 und 30 °C bis auf eine annähernd deckungsgleich. Angesichts der Tatsache, dass bspw. der Abstand zwischen den Kurven bei 40 und 50 °C deutlich ausfällt, erscheint die Nähe der zuvor genannten Kurven unwahrscheinlich. Es ist davon auszugehen, dass trotz der vorbeugenden Maßnahmen unregelmäßige Nachgiebigkeiten im Versuchsaufbau auftraten, welche die Messungen beeinflussten.

¹Im Unterschied zum Kriechmodul G_{TC} aus den Zugkriechversuchen, handelt es sich hier um den wahren Relaxationsmodul $G_{\text{TR-TTS}} = G(t)$ nach Definition (Schwarzl 1990, S. 135).

Dennoch werden die einzelnen Versuchskurven mit den Masterkurven der D-TFS-Versuche für die jeweilige Referenztemperatur verglichen. Dafür werden diese zunächst mithilfe der inkrementellen Verschiebungsfaktoren über beide Methoden (M1 und M2) ermittelt. Da die Gegenüberstellung somit für jede Temperatur einzeln erfolgen muss, wird sie nicht an dieser Stelle präsentiert. Die Graphen sind in Anhang AI-6.3 zu finden.

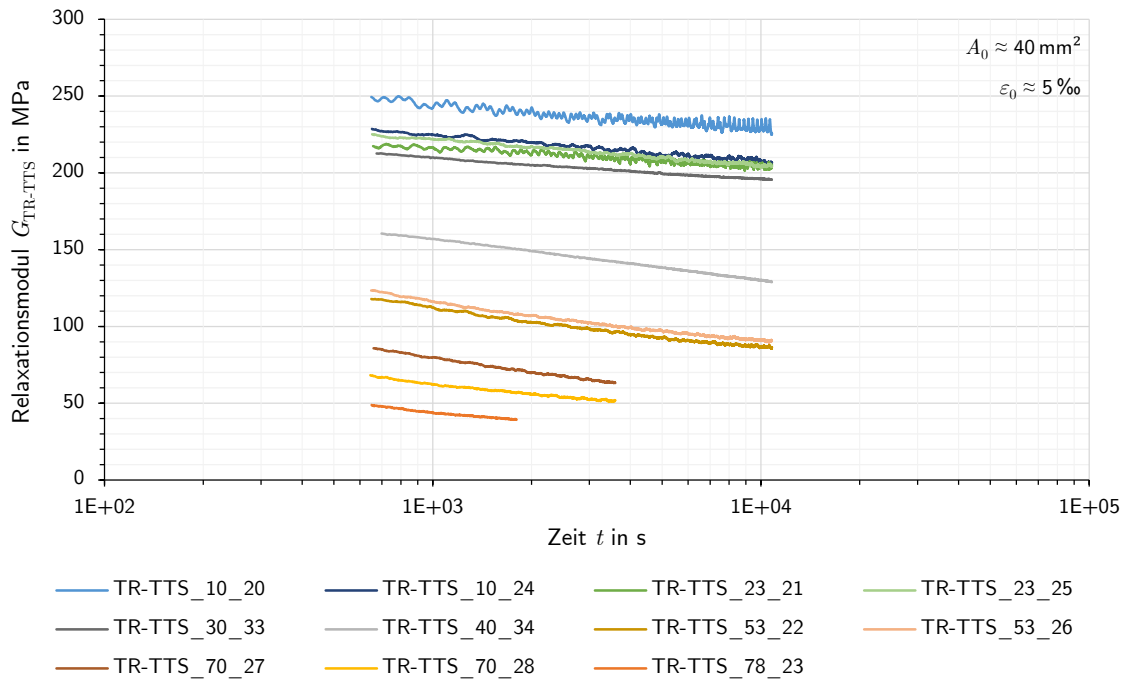


Abbildung 4.19: Vergleich der Ergebnisse für den Relaxationsmodul G_{TR-TTS} aller TR-TTS-Versuche auf verschiedenen Temperaturstufen über der Zeit

Ein Vergleich der Kurven in den Abbildungen AI-49 bis AI-55 zeigt, dass die Mehrheit der TR-TTS-Kurven im Mittel rund 20 % unter den D-TFS-Kurven liegen. Dabei haben die Kurven der TR-TTS-Versuche mit $T_R \geq 40^\circ\text{C}$ eine Steigung ähnlich zu den Masterkurven. Für die in den meisten Fällen geringere Steifigkeit G_{TR-TTS} können zwei mögliche Ursachen ausgemacht werden. So könnte es sich um einen Fehler durch die vereinfachte Berechnung des Relaxationsmoduls $G_D(t)$ nach Gleichung 2.23 handeln, der wahrscheinlich eine zu hohe Steifigkeit zeigt. Er sollte in der Regel kleiner sein als der Speichermodul $G'(\omega)$ (Schwarzl 1990, S. 178 ff.). Dieser Sachverhalt kann jedoch mithilfe der genaueren Ermittlung der Relaxationsfunktion im Zeitbereich in Abschnitt 5.2 geklärt werden.

Ein andere Ursache könnte im Auftreten von Schlupf in der kraftführenden Bauteilkette des Versuchs liegen. Die verhältnismäßig kleine initiale Deformation von 0,54 mm wurde weggesteuert aufgebracht, wobei der maßgebende Weg nur über die Lasttraverse der Universalprüfmaschine gemessen wurde. In der kraftführenden Kette zwischen den Traversen befanden sich neben dem Probekörper mehrere Bauteile, die über Gewinde, Muffen und Lochleibungsverbindungen gestoßen wurden (s. Abb. 4.18 r.). Diese Stöße könnten einen Schlupf verursacht und so den auf die Dehnung des Probekörpers entfallenden Weg reduziert haben. Ob dies allerdings der Grund für die beschriebenen Abweichungen ist, kann an dieser Stelle nicht mehr geklärt werden.

Die geringere Steigung der TR-TTS-Kurven in tieferen Temperaturen lässt vermuten, dass eine zusätzliche Nachgiebigkeit im Versuchsaufbau auftrat. Diese wahrscheinlich ideal elastische Feder in Reihe geschaltet mit dem Probekörper verringerte bei hohen Lasten (geringen Temperaturen) zusätzlich dessen initiale Deformation und beeinflusste die jeweilige Messung. Dies zeigt sich nicht nur in einer geringeren initialen Kraftantwort. Infolge der Rückstellung der Feder des Versuchsaufbaus kam es zudem zu einer Überlagerung von Relaxation und Kriechen im Probekörper. Dies wiederum führte zu einem langsameren Abfall der Kraft über die Zeit, was die abweichende Steigung der Kurven in niedrigeren Temperaturen erklärt. Mit steigender Temperatur nimmt der Anteil der Dehnung des Probekörpers an der Gesamtdehnung zu, sodass die gleich bleibende Nachgiebigkeit des Versuchsaufbaus an Einfluss verliert. Dies scheint ab einer Temperatur von etwa 40 °C der Fall zu sein.¹

Auch wenn die Ergebnisse der TR-TTS-Versuche sich durch die zuvor beschriebenen Zusammenhänge von denen der D-TFS Versuche unterscheiden, können sie diese trotzdem eingeschränkt bestätigen. Gerade in den höheren Temperaturen zeigen sie die gleichen Steigungen und liegen in einem gleichbleibenden Abstand zu den Masterkurven, was auf deren überschätzte Steifigkeit zurückzuführen ist. Diese Regelmäßigkeiten bestätigen die angewendete Verschiebung der Masterkurven nach dem ZTV-Prinzip und die dafür ermittelten Verschiebungsfaktoren. Allerdings lässt sich auch hier nicht eindeutig identifizieren, welche Methode der Masterung zu einer besseren Übereinstimmung führt.

4.2.3 Schlussfolgerungen

Mit den zuvor gezeigten Kriech- und Relaxationsversuchen unter Zug konnten die Masterkurven der D-TFS-Versuche allgemein bestätigt werden. Dabei waren jedoch Unterschiede zu beobachten, welche möglicherweise aus Ungenauigkeiten in der Umrechnung der viskoelastischen Größen des Kriechmoduls $G_{TC}(t)$ und des Relaxationsmoduls aus der DMTA $G_D(t)$ resultieren. Außerdem beeinflussten Nachgiebigkeiten im Versuchsaufbau die Ergebnisse der Relaxationsversuche, welche sich hauptsächlich in niedrigen Temperaturen zeigten in denen das PUR noch eine entsprechend hohe Steifigkeit hatte. Die angestrebte Validierung von speziellen Masterkurven nur einer der beiden Methoden (M1 oder M2) gelang hingegen nicht. Angesichts der geringen Streubreite aller Masterkurven über die Methoden hinweg und der Ungenauigkeiten in den Kriech- und Relaxationskurven, konnte hier abermals keine eindeutige Tendenz festgestellt werden. Die gefundenen Kurven werden daher im späteren Abschnitt 5.2.3 nochmals den über Funktionsanpassung aus den DMTA transformierten Kurven des Relaxationsmoduls $G(t)$ gegenübergestellt. Gerade die Kurven der Relaxationsversuche versprechen diesbezüglich weitere Erkenntnisse. Die Kriechkurven $C(t)$ aus den entsprechenden Versuchen werden zu dem späteren Vergleich ebenso herangezogen. Da ihre akkurate Umwandlung in Relaxationsfunktionen $G(t)$ aber sehr aufwendig wäre, wird angesichts der großen Zahl verfügbarer Vergleichskurven darauf verzichtet. Für den Vergleich werden weiterhin die vereinfachten Kurven des Kriechmoduls nach den Gleichungen 4.11 und 4.12 verwendet.

Zusätzlich zum Langzeitverhalten lieferten die Kriechversuche weitere wichtige Erkenntnisse. So konnte durch Versuche auf verschiedenen Laststufen die Grenze des LVE-Bereichs für das vorliegende PUR bei ca. 8 ‰ verortet werden. Das Wissen um diese Grenze hat insbesondere für die Anwendung des PUR unter kriecherzeugenden Lasten baupraktische Relevanz.

¹Das gleiche Phänomen ist in den Relaxationsversuchen unter Schub (SR) in Abschnitt 4.3.1 zu beobachten. Auch dort verfälscht die Nachgiebigkeit der Versuchsanlage die Ergebnisse für niedrige Temperaturen. Eine tiefere Interpretation des Phänomens an einem Beispiel wird zusätzlich in Anhang AI-8 gegeben.

Nur wenn die Deformationen des PUR über die gesamte Nutzungsdauer eines Bauwerks den LVE-Bereich nicht verlassen, kann deren zeitlicher Verlauf über die in vorliegender Arbeit behandelten Gesetzmäßigkeiten und Modelle prognostiziert werden. Zusätzliche Versuche zur genaueren Untersuchung der Linearitätsgrenze (s. Anhang AI-6.2), konnten die Erkenntnisse aus den Kriechversuchen bestätigen. Dabei waren die Abweichungen von der linearen Viskoelastizität aber auch bei 1 % Dehnung noch im vertretbaren Rahmen.

Auch zur Nachvernetzung des PUR durch Temperierung lieferten die Kriechversuche neue Erkenntnisse. Anders als nach Auswertung der ersten D-TFS-Versuche erwartet, hatte die Vorbehandlung der Probekörper bei 150 °C für 1 h keinen merklichen Einfluss auf deren Kriechverhalten. Die Kurven zeigten sehr ähnliche Verläufe wie Versuche mit der gleichen Belastung ohne Temperierung. Es kann demnach davon ausgegangen werden, dass durch thermische Nachbehandlung von SPS-Elementen keine merklich positiven Effekte für deren Langzeitverhalten erzielt werden können. Daraus abgeleitet bekräftigt dieses Ergebnis, dass in zukünftigen DMT Analysen an dem PUR genau auf dessen Temperierung geachtet werden sollte. Nunmehr ist die große Abweichung zwischen den temperierten Kriechversuchen und den D-TFS-Versuchen 01 und 02 einzig auf die Versuchsabfolge in der DMTA zurückzuführen. Ein falsches Versuchs- bzw. Temperaturprogramm könnte sonst abermals zu ähnlichen Abweichungen und damit einer deutlichen Fehleinschätzung der Eigenschaften des Stoffs führen.

4.3 Lang- und Kurzzeitversuche unter Schub zur Charakterisierung der viskoelastischen Eigenschaften des speziellen PUR im SPS

Um die DMT Analysen zusätzlich mit Versuchen anderer Art zu überprüfen, werden sie in diesem Abschnitt Lang- und Kurzzeit-Versuchen unter Schub gegenübergestellt. Im Vorfeld wurden unter Schub nur vernachlässigbar geringe Deformationen erwartet, weshalb auf Kriechversuche verzichtet und ausschließlich Relaxationsversuche durchgeführt wurden. Wie zuvor die Versuche unter Zug, werden auch die Ergebnisse der Relaxation unter Schub direkt mit Masterkurven aus den D-TFS-Versuchen für die entsprechende Referenztemperatur verglichen. Auf die Darstellung einzelner Versuchsergebnisse wird aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet. Diese sind im jeweiligen Teil von Anhang AI-7 zu finden.

Relaxationsversuche unter Schub sind normativ nicht geregelt. Daher wurden mehrere Normen artverwandter Versuche herangezogen, auf deren Basis die Apparaturen und Probekörper konzipiert und hergestellt wurden. So wurde sich in Anlehnung an DIN ISO 8013 für einen Doppelscherversuch in modifizierter Form entschieden. Wie bereits in Abschnitt 3.1.2 gezeigt, bestehen die Probekörper dafür aus drei Stahllamellen verbunden durch zwei Schichten des massiven PUR (vgl. Abb. 4.20 oben oder 3.2).

Alle Apparaturen wurden in Anlehnung an DIN EN 12090 so ausgebildet, dass die Probekörper über ihre äußeren Lamellen fixiert wurden und diese sich nicht zueinander verschieben konnten. Die Innere der Stahllamellen wurde hingegen nur durch das PUR in Position gehalten. Durch diese Art der Befestigungen und die Symmetrie der Aufbauten, sollte möglichen Sekundäreffekten aus Biegung und Exzentrizität vorgebeugt werden. Abbildung 4.20 zeigt oben eine von drei baugleichen Versuchsapparaturen für die Langzeitversuche (SR) und Abbildung 4.24 zeigt in der Mitte die Versuchsapparatur der Kurzzeitversuche (SR-TTS). In den Versuchen selbst wurde auf verschiedene Weisen eine initiale Verschiebung der inneren gegen die äußeren Lamellen aufgebracht, was eine Schubverzerrung und damit eine Schubspannung in den PUR-Schichten induzierte. Die daraus resultierende Schubkraft und deren Abfall über die Zeit wurden über die Versuchsdauer aufgezeichnet. Die spezifischen Versuchsapparaturen und deren Eigenheiten werden in den folgenden Abschnitten genauer beschrieben.

4.3.1 Langzeit-Relaxation unter Schubdeformation bei verschiedenen Temperaturen (SR)

Zur Untersuchung der Langzeit-Relaxation des PUR unter Schub erfolgten auf den Temperaturstufen -20 , 20 und 60 °C jeweils zwei Versuche. Dabei wurden in jedem Versuch drei Probekörper aus einer Charge¹ belastet und der Kraftabfall für 1000 h gemessen. Die Versuchsapparaturen wurden dafür so konzipiert, dass die Belastung auf möglichst kleinem Raum aufgebracht, gemessen und in sich kurz geschlossen werden konnte. So konnten die Apparaturen flexibel und platzsparend in verschiedenen Klimaschränken eingesetzt werden (s. Abb. 4.20). Die initiale Deformation der Schubprobekörper wurde mit einer Feingewindeschraube über Druck auf die innere Lamelle aufgebracht. Die Aufzeichnung der Kraft im System erfolgte mittels einer dazwischen geschalteten Kraftmessdose, welche zusammen mit einem stählernen Ankerblock reibungsarm auf Teflon geführt wurde.

¹Wie in Abschnitt 3.1.2 beschrieben wurden die Schubprobekörper in zwei Chargen (a und b) hergestellt. Um etwaige Abweichungen zwischen diesen zu kompensieren und die gemittelten Eigenschaften zu messen, wurde aus jeder Charge jeweils die gleiche Anzahl von Probekörpern getestet.

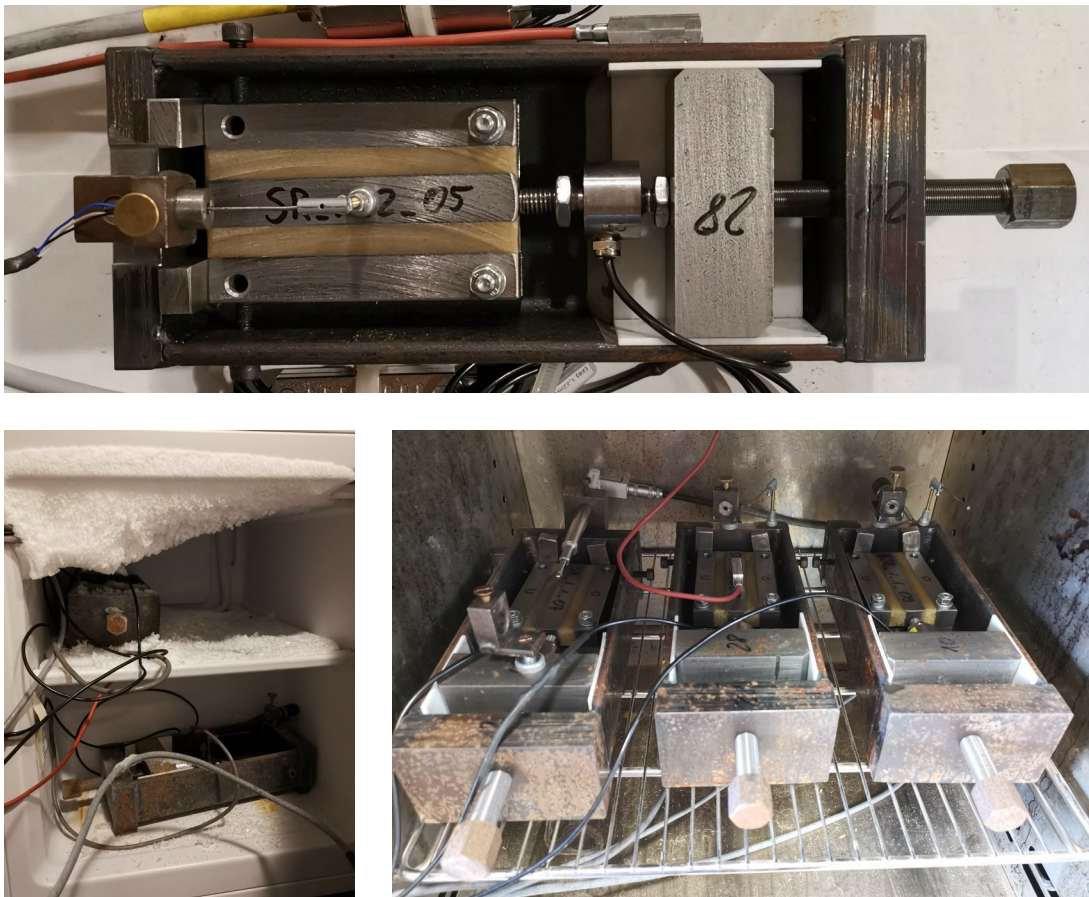


Abbildung 4.20: Versuchsapparatur für die Langzeit-Relaxation unter Schub im Detail (o.) sowie unter den klimatisierten Bedingungen für -20°C (u.l.) und 50°C (u.r.)

Ursprünglich sollte in jedem Versuch eine zuvor festgelegte initiale Schubdeformationen aufgebracht und in Anlehnung an DIN ISO 8013 über die Verschiebung der mittleren Lamelle mithilfe eines induktiven Wegaufnehmers zwischen deren Mitte und der Apparatur gemessen werden. Nach den ersten Versuchen stellte sich jedoch heraus, dass die verwendeten Wegaufnehmer zu unpräzise waren und die korrekte Aufbringung einer gezielten Deformation nicht möglich war. Daher wurde als initiale Belastung in allen Versuchen eine Kraft zwischen 1000 und 1500 N aufgebracht, die überschlägig eine Schubspannung von 0,3 bis 0,5 MPa in den PUR-Schichten erzeugen sollte.¹ Zusätzlich wurde die geringe Höhe der Belastung als geeignet angesehen, da sie selbst in der weichsten Versuchskonstellation bei 50°C immer noch zu einer Schubgleitung von $\gamma \leq 3\text{‰}$ führen würde und damit alle Versuche sicher im LVE-Bereich bleiben. In Ermangelung genauerer Sensoren bzw. alternativer Methoden zur Messung auf dem beengten Raum, wurden die Deformationen der Probekörper weiterhin mit der ursprünglichen Methode gemessen, allerdings nicht zur Auswertung herangezogen. Stattdessen wird die Relaxation in den Probekörpern über das Verhältnis der über die Zeit gemessenen Kraft zu ihrer Ausgangsgröße nach 30 min bzw. 1800 s bestimmt.

¹Schubspannungen dieser Größenordnung sind für eine querorientierte SPS-Fahrbahn mit einer Spannweite von $l = 4,40\text{ m}$ aus ständigen Lasten zu erwarten (bspw. in der in Anhang AII-7.1 untersuchten Ausführung).

$$\frac{G_{SR}(t)}{G_{SR}(1800\text{ s})} = \frac{F(t)}{F(1800\text{ s})} \quad (4.14)$$

Zur Ermittlung des Relaxationsmoduls $G_{SR}(t)$ ist dabei jedoch die Kenntnis des jeweiligen Schubmoduls im Ausgangszustand $G_{SR}(1800\text{ s})$ erforderlich. Um diesen zu bestimmen, wurden daher zusätzliche Kurzzeit-Relaxationsversuche, analog zu denen des nachfolgenden Abschnitts, an allen verwendeten Probekörpern durchgeführt. Da die Versuche zur Bestimmung der Ausgangs-Schubmoduln dienen, werden sie zur besseren Unterscheidung in diesem Kontext als *Steifigkeitsversuche* (Abkürzung: *ST*) bezeichnet. Bei der entsprechenden Versuchstemperatur wurde auf die innere Lamelle der Probekörper eine Kraft von 1200 N aufgebracht und der Weg nach deren Erreichen konstant gehalten. Über mehr als 30 min wurde dann sowohl die Kraft als auch die Schubdeformation in den PUR-Schichten¹ gemessen und die Entwicklung der Steifigkeit ausgewertet. Der Schubmodul bei $t = 30\text{ min}$ wird zu $G_{ST}(1800\text{ s}) \hat{=} G_{SR}(1800\text{ s})$ definiert und dem initialen Schubmodul der Langzeit-Relaxationsversuche gleichgesetzt. Der Zeitpunkt für die Gleichsetzung wird dabei zu 30 min gewählt, um sicher zu stellen, dass die gemessenen Steifigkeiten in beiden Versuchen einen entsprechend DIN 53441 ausreichenden zeitlichen Abstand zum jeweiligen Belastungsbeginn aufweisen. Die Ergebnisse der Steifigkeitsversuche werden konsolidiert in Anhang AI-7.1 gegeben. Die folgend dargestellten Abbildungen 4.21 bis 4.23 zeigen jeweils eine Zusammenfassung aller Relaxationsversuche unter Schub auf einer Temperaturstufe im Vergleich zu den Masterkurven der D-TFS-Versuche für die gleiche Referenztemperatur. Die einzelnen Ergebnisse und eine Aufstellung aller Relaxationsversuche sind in Anhang AI-7.2 zu finden.

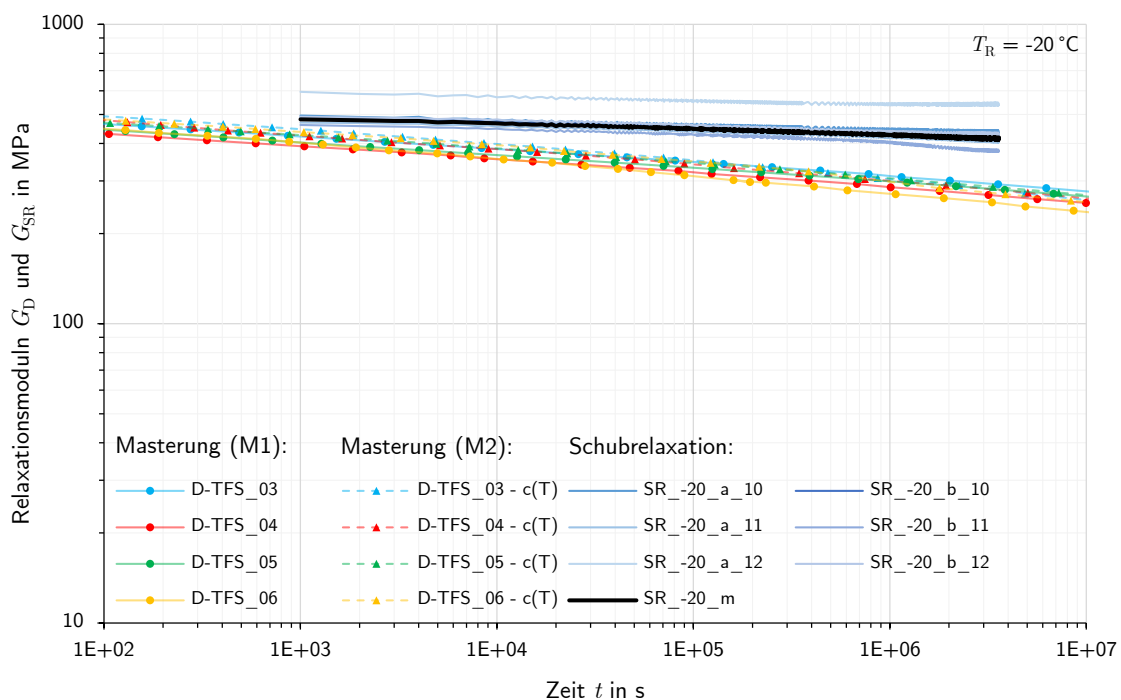


Abbildung 4.21: Verläufe der aus den SR-Versuchen ermittelten Relaxationsmoduln bei -20 °C und der Masterkurven der D-TFS-Versuche für die gleiche Referenztemperatur über der Zeit

¹Die Messung erfolgte mittels DIC, wodurch direkt die Schubgleitung im PUR ohne Störeinflüsse (wie z. B. andere Nachgiebigkeiten) ausgewertet werden konnte (vgl. auch Abb. 4.24).

Der Vergleich der SR-Kurven bei -20°C und Raumtemperatur mit den Masterkurven der D-TFS-Versuche zeigt zwei Phänomene. Zum einen verhält sich das PUR der Schubprobekörper generell steifer als das der restlichen. Dies wird aus den initialen Steifigkeiten der SR-Kurven ersichtlich bzw. den Kurven der ST-Versuche, aus denen diese hervorgehen (s. Anhang AI-7.1). Die höhere Steifigkeit kann auf geometrische Effekte oder Ungenauigkeiten in den Probekörpern zurückgeführt werden. Auch könnten trotz gleicher Nachbehandlung Unterschiede zwischen den Rohlingen aus der Herstellung bestehen (vgl. Abschnitt 3.1.2). Beispielsweise könnten die innen liegenden Stahlteile der Schubprobekörper durch ihre höhere Leitfähigkeit die Wärme besser in den Rohlingen verteilt und damit den Vernetzungsprozess gegenüber jenen ohne Stahleinlagen begünstigt haben.

Zum anderen zeigen alle Relaxationsversuche der beiden kälteren Temperaturstufen nur einen sehr geringen Abfall der Last und damit der errechneten Steifigkeit. Liegt der Relaxationsmodul G_{SR} zu Beginn im Mittel nur ca. 15 % über den D-TFS-Vergleichskurven, so sind es am Ende des Versuchs knapp 50 % bei -20°C und rund 70 % bei Raumtemperatur. Ähnlich dem bereits in Abschnitt 4.2.2 beobachteten Phänomen, kann auch hier der Grund in der Nachgiebigkeit der Versuchsapparaturen vermutet werden. Bei vergleichsweise hoher Steifigkeit des PUR in niedrigen Temperaturen, nimmt der Anteil der Verformung aus der Apparatur an der Gesamtverformung zu und der Anteil des PUR verringert sich entsprechend. Dies wiederum führt bei dessen Relaxation zu einem geringeren Kraft- bzw. Steifigkeitsabfall gemessen am Gesamtsystem.¹

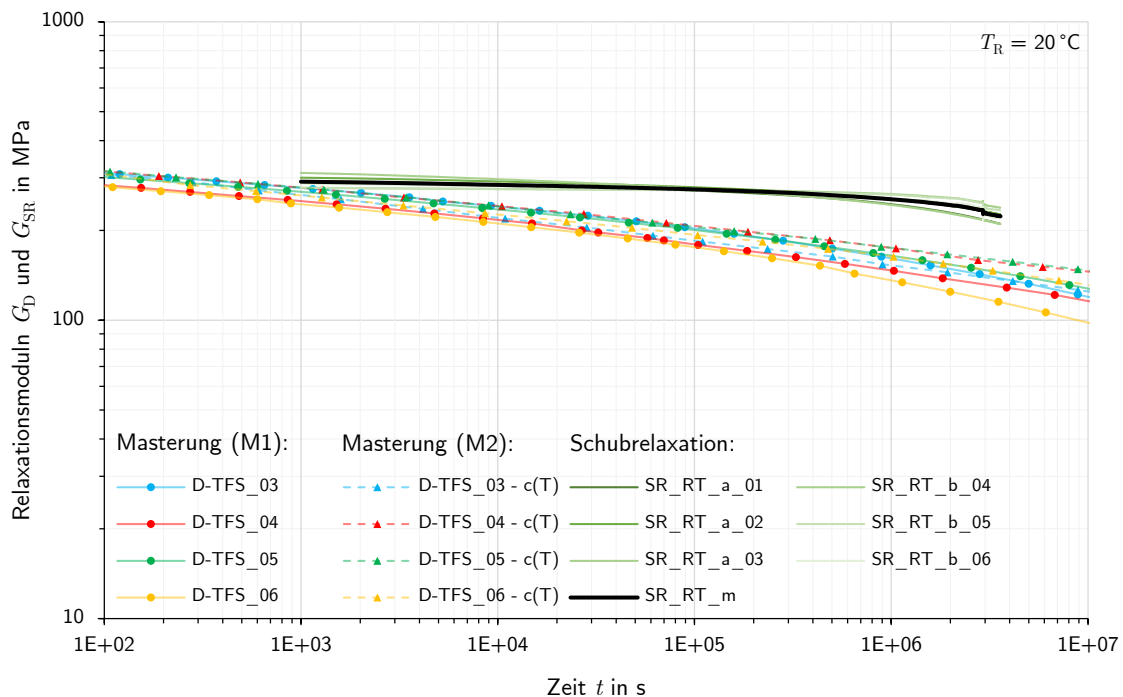


Abbildung 4.22: Verläufe der aus den SR-Versuchen ermittelten Relaxationsmodul bei 20°C und der Masterkurven der D-TFS-Versuche für die gleiche Referenztemperatur über der Zeit

¹Eine tiefere Erläuterung des Phänomens wird in Anhang AI-8 gegeben.

Zusätzlich erschwerend wird das Phänomen der Nachgiebigkeit der Versuchsanordnung noch durch die fehlende direkte Deformationsmessung verschleiert. Normalerweise läge die initiale Gesamtsteifigkeit der Reihenschaltung aus dem PUR-Probekörper und der Versuchsanordnung unterhalb der Masterkurven und würde sich diesen mit zunehmender Zeit annähern (vgl. Abb. AI-49 bis AI-52). Im vorliegenden Fall konnte für den Ausgangswert jedoch nicht die initiale Steifigkeit des Gesamtsystems direkt gemessen werden, sodass die Steifigkeit des PUR aus den ST-Versuchen über $G_{ST}(1800\text{ s}) \hat{=} G_{SR}(1800\text{ s})$ zugrunde gelegt wurde. G_{ST} ist durch die direkte Messung der Schubdeformation mittels digitaler Bildkorrelation jedoch unverfälscht (vgl. Anhang AI-7.1). Daher wird die in den Langzeitversuchen eigentlich geringer ausfallende Gesamtsteifigkeit des Systems nicht ersichtlich.

Bei den vorliegenden Verhältnissen wäre eine präzise Messung der Schubdeformationen im PUR über die gesamte Versuchsdauer notwendig gewesen. Die Relaxationsversuche unter Schub bei den niedrigen Temperaturen können in dieser Form demnach keine Erkenntnisse über die Eigenschaften des PUR und deren Entwicklung über die Zeit liefern. Die zugrunde gelegten Steifigkeitsversuche (ST) an den gleichen Probekörpern indes können dies sehr wohl. Sie bestätigen deutlich die aus den D-TFS-Versuchen abgeleiteten Masterkurven (s. Anhang AI-7.1). Lediglich zu der Frage nach der Auswertungsmethode, können die ST-Versuche bei $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$ und Raumtemperatur nichts beitragen. Dies war angesichts der Erkenntnisse aus den TR-Versuchen allerdings zu erwarten (vgl. Abschnitt 4.2.2). Bei diesen wurde bereits festgestellt, dass in den betrachteten Temperaturbereichen die Masterkurven unabhängig von der Auswertungsmethode dafür zu dicht aneinander liegen.

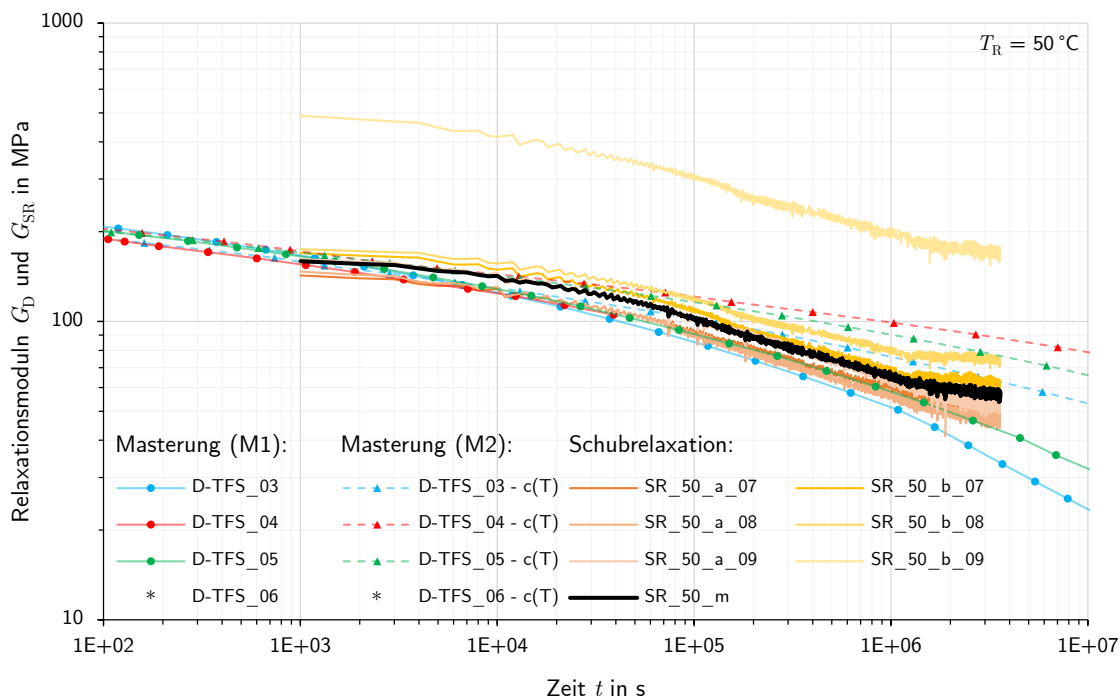


Abbildung 4.23: Verläufe der aus den SR-Versuchen ermittelten Relaxationsmoduln bei $50\text{ }^{\circ}\text{C}$ und der Masterkurven der D-TFS-Versuche für die gleiche Referenztemperatur über der Zeit * (Die Masterkurve von D-TFS_06 konnte nicht zu $T_R = 50\text{ }^{\circ}\text{C}$ verschoben werden, da für diese Temperatur keine Messdaten im Versuch vorhanden sind, wie bereits in Abschnitt 4.1.2 beschrieben)

Ähnlich zu den Relaxationsversuchen unter Zug nimmt auch im vorliegenden Fall der Einfluss der Apparatur und ihrer Nachgiebigkeit mit steigender Temperatur (sinkender Steifigkeit im PUR) ab. Für die Versuche bei 50 °C kann ähnlich den TR-Versuchen davon ausgegangen werden, dass diese die Eigenschaften des PUR genauer wiedergeben können. Deren in Abbildung 4.23 dargestellten Ergebniskurven liefern daher besser verwertbare Erkenntnisse über das PUR. Geht man davon aus, dass auch hier die Steifigkeit der Schubprobekörper in Gänze geringfügig höher liegt als die der restlichen (vgl. Anhang AI-7.1), sprechen die Kurvenverläufe der Relaxationsmoduln G_{SR} deutlich für eine konventionelle Ermittlung der Verschiebungsfaktoren (M1). So verlaufen die SR-Kurven gerade in hohen Zeiten von ihrer Steigung sehr ähnlich zu den D-TFS-Masterkurven nach der Methode 1. Es zeigt sich lediglich ein Ausreißer, der jedoch auf die Ausgangssteifigkeit $G_{ST}(1800\text{ s})$ zurückzuführen ist.¹ Selbst wenn die verfälschende Wirkung der Versuchsapparaturen auch in den 50 °C-Versuchen noch bestand, spricht dies für die Anwendung der Methode 1. Analog zu den Versuchen bei –20 °C und Raumtemperatur müssten auch die Kurven der warmen SR-Versuche oberhalb der D-TFS-Kurven liegen. Wie Abbildung 4.23 zeigt, fallen diese jedoch schneller ab und verlaufen unterhalb von den nach Methode 2 ausgewerteten Masterkurven.

4.3.2 Kurzzeit-Relaxation unter Schubdeformation bei verschiedenen Temperaturen (SR-TTS)

Da die Versuche zur Ermittlung der Steifigkeit (ST) im Gegensatz zu den Relaxationsversuchen (SR) verlässlich funktioniert hatten, wurden zusätzliche Versuche zur Kurzzeit-Relaxation unter Schubdeformation durchgeführt. Ähnlich den Kurzzeit-Versuchen zur Relaxation unter Zug (TR-TTS) erfolgten auch hier einzelne Versuche bei verschiedenen Temperaturen. Diese wurden in 5 K Schritten zwischen den bereits untersuchten 20 und 50 °C abgestuft. Tabelle 4.3 gibt eine Aufstellung der ausgeführten Versuche mit deren Eckdaten. Die Dauer wurde für alle Versuche bei 30 min belassen, da längere Aufzeichnungen bei Verwendung der DIC zu sehr großen Datenmengen geführt hätten. Außerdem wurde angenommen, dass die Versuche trotz ihrer Kürze genügend Aussagekraft besitzen. Da sie analog zu ihrem Pendant unter Zug in Abschnitt 5.2.3 ebenfalls zur Validierung des ZTV-Gesetzes dienen sollen, tragen sie auch den Zusatz *TTS* in der Bezeichnung. Abbildung 4.24 zeigt den Versuchsaufbau in der verwendeten Universalprüfmaschine mit Klimakammer.

Tabelle 4.3: Aufstellung aller durchgeführten Kurzzeit-Relaxationsversuche unter Schub (SR-TTS)

Bezeichnung		Temperatur T in °C	Dauer t in min	Belastung	
Versuch	Nr.			F_0 in N	τ_0 in kPa
SR-TTS_25_	a_04	25	30	1200	391
SR-TTS_30_	a_06	30	30	1200	390
SR-TTS_35_	b_01	35	30	1200	387
SR-TTS_40_	b_02	40	30	1200	389
SR-TTS_45_	b_03	45	30	1200	387

¹In dem zugehörigen Versuch ST_50_b_09 konnte die Steifigkeit des Probekörpers nicht korrekt gemessen werden (s. Anhang AI-58).

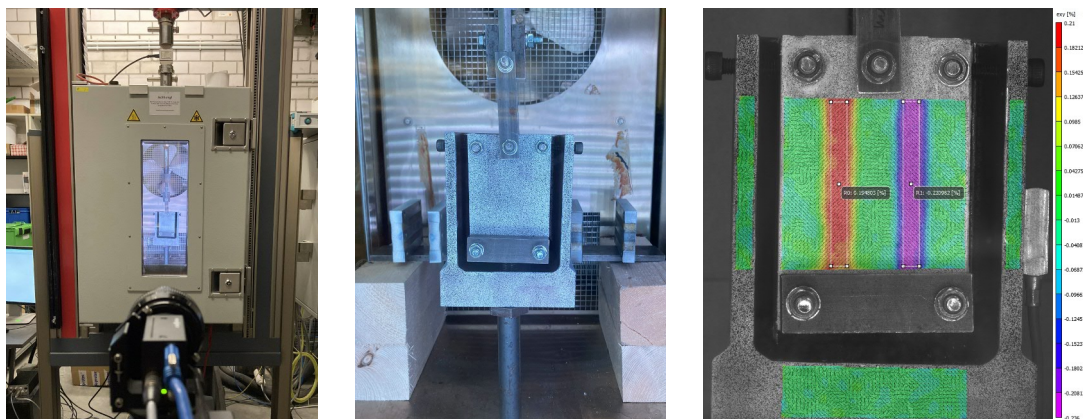


Abbildung 4.24: Versuchsaufbau der Kurzzeit-Relaxation unter Schub bei verschiedenen Temperaturen in der Übersicht (l.) und im Detail der Probekörperaufhängung (m.) mit Auszug aus einer Auswertung der Schubgleitung γ mittels DIC (r.)

Die Probekörper wurden zunächst lastfrei konditioniert und ihre Temperatur dabei fortwährend kontrolliert. Sobald die erforderlichen Bedingungen erreicht waren, wurde eine Zugkraft von 1200 N auf die inneren Lamelle aufgebracht, diese gegen die äußeren beiden verschoben und damit eine Schubverzerrung in den PUR-Schichten induziert. Die Probekörperaufhängung war dabei ähnlich zu denen der SR-Versuche konzipiert, damit keine Verschiebungen der äußeren Lamellen auftraten und Effekte aus Biegung vermieden wurden. Über die gesamte Versuchsdauer wurde die Kraft F und deren Abfall aufgezeichnet und mittels DIC die Schubdeformation γ in den PUR-Schichten gemessen. Dies ermöglichte es den Relaxationsmodul $G_{\text{SR-TTS}}^1$ unabhängig von etwaigen Nachgiebigkeiten im Versuchsaufbau direkt zu ermitteln:

$$G_{\text{SR-TTS}}(t) = \frac{\tau(t)}{\gamma(t)} = \frac{F(t)}{2 A_0 \cdot \gamma(t)} \quad (4.15)$$

Abbildung 4.25 zeigt alle aus den Messungen der SR-TTS-Versuche über Gleichung 4.15 ermittelten Kurven der Relaxationsmoduln im Vergleich. Entsprechend der Empfehlung von DIN 53441 wurden die anfänglichen Daten nach Erreichen der Maximalbelastung vernachlässigt, um Effekte auf die Steifigkeit aus der Lastaufbringung auszuschließen. Anders als bei den TR-TTS-Versuchen, sind hier keine Unstimmigkeiten zu beobachten (vgl. Abb. 4.19). Alle Kurven sind trotz der nur geringen Temperaturunterschiede deutlich voneinander abgesetzt. Einzig die Schwankungsbreite der Messungen ist in den niedrigen Temperaturen größer als in hohen. Dies kann auf das Messwerttrauschen der DIC zurückgeführt werden, welches bedingt durch die begrenzte Auflösung für kleine Verzerrungen zunimmt.

Die Kurven der Relaxationsmoduln werden ebenfalls den Masterkurven der D-TFS-Versuche für die jeweilige Referenztemperatur gegenübergestellt. Da dies wiederum nur für jede Temperaturstufe einzeln erfolgen kann, werden die Abbildungen gesammelt in Anhang AI-7.3 gezeigt. Der Vergleich der Kurven mit den jeweiligen Masterkurven bestätigt die Beobachtung aus den Steifigkeitsversuchen (ST), dass die Schubprobekörper grundsätzlich steifer sind als die Restlichen. Dabei haben die SR-TTS-Kurven einen annähernd gleichbleibenden Ab-

¹Die Berechnung des Relaxationsmoduls G_{ST} in den Steifigkeitsversuchen (vgl. Abschnitt 4.3.1) erfolgte auf die gleiche Weise.

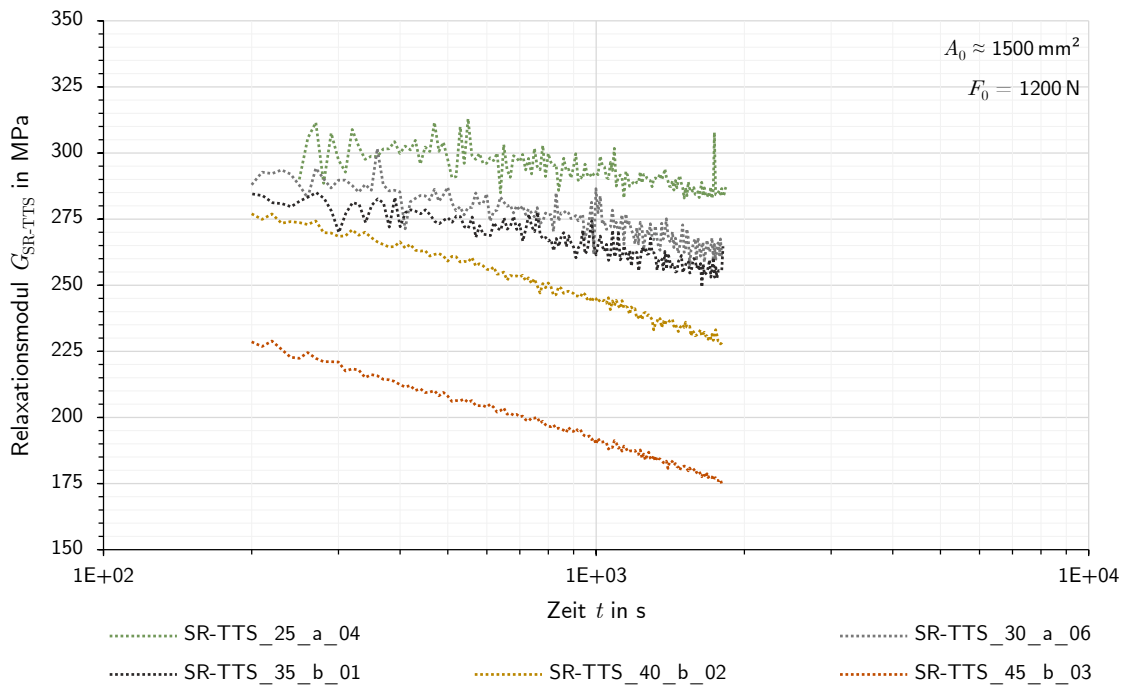


Abbildung 4.25: Vergleich der Ergebnisse für den Relaxationsmodul $G_{\text{SR-TTS}}$ aller SR-TTS-Versuche über der Zeit

stand zu ihren Vergleichskurven. Sie bestätigen demnach ebenfalls allgemein die Masterkurven der D-TFS-Versuche. Analog zu den Steifigkeitsversuchen können die SR-TTS-Versuche keine Erkenntnisse in der Frage nach der zu verwendenden Methode (M1 oder M2) in der ZTV liefern.

4.3.3 Schlussfolgerungen

Die Ergebnisse der gezeigten Relaxationsversuche unter Schub sind sehr unterschiedlich zu bewerten. Die Langzeitversuche bei -20°C und Raumtemperatur können nur schwerlich für weitere Vergleiche herangezogen werden. Ihre Ergebnisse wurden durch die Nachgiebigkeit der Versuchsapparaturen und das Fehlen der zugehörigen Deformationsmessung stark verfälscht. Aus den Versuchen können so keinerlei Erkenntnisse gezogen werden, ohne dass diese dafür basierend auf Annahmen rechnerisch noch weiter manipuliert werden müssten. Angesichts der daraus resultierenden Ungenauigkeit und der Zahl alternativ verfügbarer Vergleichsversuche wird darauf verzichtet.

Einzig in den Langzeitversuchen bei 50°C fallen die Störeinflüsse aus den nachgiebigen Versuchsapparaturen vernachlässigbar gering aus. So sind die Ergebnisse nicht nur als einzige verwertbar, sondern zeigen auch durch ihre lange Dauer eine deutliche Tendenz, welche Methode zur Ermittlung der Verschiebungsfaktoren (M1 oder M2) die genauere ist. Entgegen der ursprünglichen Vermutungen können die konventionell über eine rein horizontale Verschiebung ermittelten Faktoren und die daraus gemasterten Kurven die Eigenschaften des PUR in langen Zeiten besser wiedergeben. Dies spricht klar gegen die Anwendung der in Abschnitt 4.1.2 vorgeschlagenen vertikalen Verschiebung über den Faktor $c(T)$. Für die weiteren Analysen sollten demnach die nach Methode 1 ermittelten Werte und Kurven zugrunde gelegt werden.

Die Steifigkeitsversuche bestätigen die Masterkurven der D-TFS-Versuche und bekräftigen die These der fehlerhaften Langzeitversuche in niedrigen Temperaturen. Obwohl sie ursprünglich als Hilfversuche für die Langzeitrelaxation gedacht waren, werden die ST-Versuche zusammen mit den SR-TTS-Versuchen für weitere Vergleiche und die Validierung des ZTV-Gesetzes in Abschnitt 5.2.3 herangezogen.

Aus den Kurzzeit-Versuchen lassen sich auch Erkenntnisse für zukünftige experimentelle Untersuchungen des PUR unter Schub ableiten. So ist es wahrscheinlich, dass bedingt durch die hohe Steifigkeit des PUR immer irgend geartete Nachgiebigkeiten im Versuchsaufbau auftreten werden, welche die Messungen beeinflussen. Entsprechend sollte stets die Deformation direkt am Probekörper mit aufgenommen werden, um ohne Annahmen oder Manipulationen auf dessen Steifigkeit schließen zu können. Hierfür bildet die digitale Bildkorrelation ein geeignetes Werkzeug.

5 Entwicklung eines viskoelastischen Materialmodells für das PUR im SPS

Das vorherige Kapitel präsentierte unter Anderem die Untersuchungen zu den viskoelastischen Eigenschaften des PUR im SPS und deren Ergebnisse. Dabei wurde durch den Vergleich der Versuche herausgefunden, dass Masterkurven aus der DMTA mit rein horizontaler Verschiebung (Methode 1) am besten geeignet sind, um dessen Langzeitverhalten wiederzugeben. In diesem Kapitel wird darauf aufbauend ein analytisches Modell hergeleitet, welches die Steifigkeit des PUR in Abhängigkeit von Zeit und Temperatur näherungsweise erfasst.

Dafür wird zunächst ein möglichst präziser Ansatz für die Abhängigkeit von der Temperatur in Form eines ZTV-Gesetzes gesucht. Um die Abhängigkeit von der Zeit zu formulieren, werden danach zunächst die diskreten Relaxationsspektren der D-TFS-Versuche in Form von Prony-Reihen bestimmt. Dabei werden die nach der Methode 1 ermittelten Masterkurven zugrunde gelegt. Als Zwischenkontrolle erfolgt ein Vergleich der Prony-Reihen mit den Kriech- bzw. Relaxationsversuchen. Diese werden dafür mithilfe des zuvor ermittelten ZTV-Gesetzes zu der Referenztemperatur der Pronyreihen verschoben. Aus den gefundenen Zusammenhängen wird im letzten Schritt ein Modell für das PUR hergeleitet, welches in der Lage ist dessen Steifigkeit in Abhängigkeit von Temperatur und Zeit möglichst genau abzubilden. Das Modell wird abschließend abermals den Versuchsergebnissen gegenübergestellt und kritisch geprüft.

Bei den Interpretationen einiger Versuche im vorherigen Kapitel zeigte sich, dass deren Ergebnisse durch Fehler in der Durchführung stark verfälscht wurden, was sie für weitere Vergleiche unbrauchbar macht. Daher werden sowohl die Versuche D-TFS_01 und D-TFS_02 als auch die Relaxationsversuche unter Schub bei den Temperaturen -20°C und Raumtemperatur für die Vergleiche dieses Kapitels nicht mehr herangezogen.

5.1 Das Zeit-Temperatur-Verschiebungs-Gesetz (ZTV) des PUR

Um ein Modell für die Steifigkeit des PUR formulieren zu können, muss neben der zeitlichen Entwicklung auch dessen Abhängigkeit von der Temperatur erfasst werden. Dafür ist ein adäquater Ansatz zur Beschreibung des Zusammenhangs der Zeit-Temperatur-Verschiebung im PUR zu finden. In diesem Abschnitt werden daher drei verschiedene analytische ZTV-Gesetze mit den diskreten Verschiebungsfaktoren aus den D-TFS-Versuchen verglichen. Bei den ersten beiden handelt es sich um die bereits in Abschnitt 2.1.5 vorgestellten, weit verbreiteten Funktionen nach Arrhenius bzw. Williams, Landel und Ferry (WLF). Diese gelten jedoch nur in bestimmten Dispersionsgebieten, weshalb die Möglichkeit ihrer Anwendung auf das vorliegende Copolymer fraglich ist.

Während sich für die Arrhenius-Funktion mehrere Angaben zu deren Gültigkeitsbereich finden (Glaszustand oder Schmelze), kann mit der WLF-Funktion das Verhalten im Glas-Kautschuk-Übergang oder das Fließen dargestellt werden (vgl. Abschnitt 2.1.5). Wie in Abschnitt 2.2.1

beschrieben, besteht das PUR aus zwei Komponenten, welche über einen weiten Temperaturbereich in unterschiedlichen Zuständen vorliegen. Während sich die harte Phase unterhalb von $T_\alpha \approx 125^\circ\text{C}$ energie-elastisch verhält, befindet sich die weiche Phase oberhalb von $T_\beta \approx -55^\circ\text{C}$ bereits im entropieelastischen Bereich. Das Copolymer als Ganzes lässt sich zwischen den genannten Temperaturen entsprechend keinem Zustand eindeutig zuordnen. Ungeachtet der Frage nach deren Gültigkeitsbereich weckt dies Zweifel an der Möglichkeit zur Anwendung der konventionellen Verschiebungsgesetze.

Um ein möglichst genaues Modell für den Zusammenhang der Zeit-Temperatur-Verschiebung im PUR zu finden, werden in diesem Abschnitt drei analytische Ansätze für ZTV-Gesetze mit den diskreten Verschiebungsfaktoren aus den D-TFS-Versuchen verglichen. Trotz der zuvor erwähnten Zweifel zu deren Anwendbarkeit, werden die konventionellen Funktionen (Arrhenius und WLF) betrachtet. Daneben wird als Alternative zusätzlich ein empirischer Ansatz in Form einer Exponential-Funktion untersucht. Abbildung 5.1 zeigt exemplarisch die dafür herangezogenen, nach Gleichung 4.7 ermittelten diskreten Verschiebungsfaktoren aus dem Versuch D-TFS_03 für ausgewählte Referenztemperaturen.

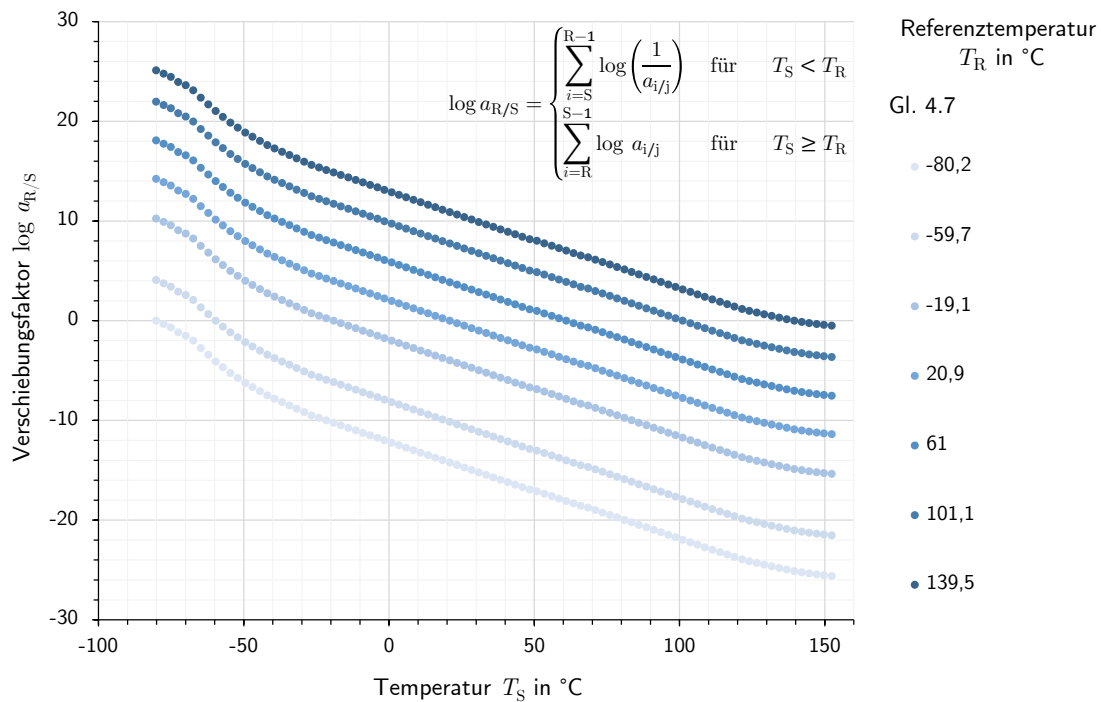


Abbildung 5.1: Über Gleichung 4.7 ermittelte diskrete Verschiebungsfaktoren $\log a_{R/S}$ von D-TFS_03

Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden die dazwischen liegenden Kurven anderer Referenztemperaturen nicht dargestellt. In Anlehnung an die Darstellungen der Frequenz-Sweep-Kurven in Abschnitt 4.1.2 werden die Kurven für verschiedene Referenztemperaturen farblich ähnlich gehalten. Auch der zur Berechnung verwendete Zusammenhang ist in der Abbildung noch einmal dargestellt. In den folgenden Unterkapiteln werden die gezeigten diskreten Verschiebungsfaktoren den analytischen ZTV-Ansätzen für die jeweilige Referenztemperatur qualitativ gegenübergestellt. Anhand des Versuchs D-TFS_03 wird so die Eignung des jeweiligen Ansatzes exemplarisch diskutiert. Die Verschiebungsfaktoren der anderen Versuche und deren Vergleiche mit den ZTV-Ansätzen werden im jeweiligen Teil von Anhang AI-9 gegeben.

5.1.1 Der Ansatz nach Arrhenius

Bereits in den Grundlagen zur ZTV in Abschnitt 2.1.5 wurde die Arrhenius-Funktion in der Nomenklatur vorliegender Arbeit vorgestellt:

$$\log a_{R/S} = \frac{E_a}{\ln 10 \cdot R} \cdot \left(\frac{1}{T_S} - \frac{1}{T_R} \right) \quad (2.28)$$

mit

E_a : Aktivierungsenergie in J/mol
 R : universelle Gaskonstante 8,3145 J/(mol K)
 T : absolute Temperaturen in K

Um den Ansatz zu verwenden, muss zunächst die Aktivierungsenergie E_a bestimmt werden, welche charakteristisch für ein thermorheologisch einfaches Material ist. Diese lässt sich mithilfe des sogenannten Arrhenius-Diagramms bestimmen, indem der Verschiebungsfaktor logarithmiert über der reziproken absoluten Temperatur aufgetragen wird (Mezger 2016, S. 91). Abbildung 5.2 zeigt exemplarisch das Arrhenius-Diagramm des Versuchs D-TFS_03 für die Referenztemperatur von $T_R = 125 \text{ °C} \approx T_\alpha$.

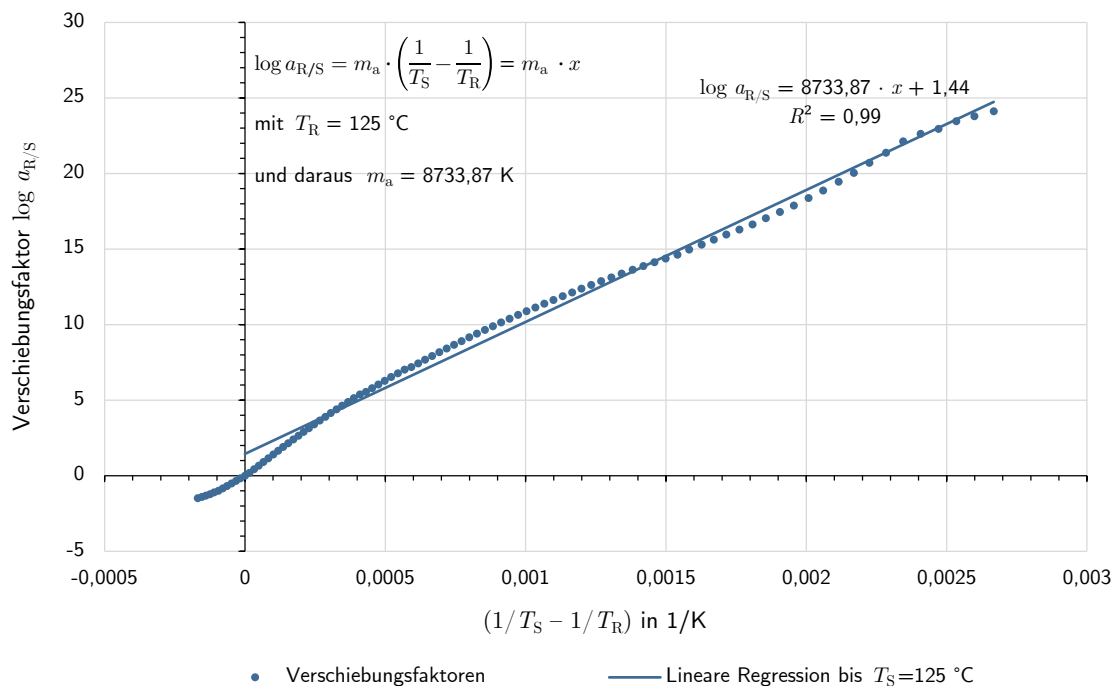


Abbildung 5.2: Arrhenius-Diagramm der Verschiebungsfaktoren $\log a_{R/S}$ des Versuchs D-TFS_03 für $T_R = 125 \text{ °C}$ mit linearer Regressionsfunktion¹ über alle Faktoren $a_T (T_S \leq T_R)$

Aus den Punkten sollte sich eine Gerade ergeben, über deren Steigung die Aktivierungsenergie E_a ermittelbar ist. Auch sollte die Kurve in der Regel bei der Glasübergangstemperatur abknicken und darunter nichtlinear verlaufen (vgl. Moser 2013, S. 27 ff.). Für das vorliegende

¹Bei dem Maß R^2 in der Abbildung handelt es sich in diesem Fall um das *Bestimmtheitsmaß* der Regression und nicht um die zuvor definierte universelle Gaskonstante R .

PUR ist jedoch ein solcher Knick weder bei T_α noch bei T_β zu erkennen. Daher wird die harte Phase als ausschlaggebender Teil des Polymers angenommen, welche sich bis $T_\alpha \approx 125^\circ\text{C}$ im Glasbereich befindet. Bis zu dieser Temperatur wird die mittlere Steigung der Kurve über eine Regressionsgerade und deren Steigung m_a ermittelt (s. Abb. 5.2). Die Aktivierungsenergie ergibt sich daraus zu:

$$\begin{aligned} E_a &= m_a \cdot R \cdot \ln 10 \\ &= 8733,87 \text{ K} \cdot 8,3145 \text{ J}/(\text{mol K}) \cdot \ln 10 \\ &= 167\,210 \text{ J/mol} \end{aligned} \tag{5.1}$$

Über den Ansatz 2.28 können damit die Verschiebungsfunktionen für alle Referenztemperaturen berechnet werden. Abbildung 5.3 zeigt die Funktionen für D-TFS_03 im Vergleich mit den diskreten Faktoren. Wie zu erkennen, liefert der Arrhenius-Ansatz für niedrige Referenztemperaturen noch vergleichsweise genaue Ergebnisse. Für höhere Temperaturen werden die Abweichungen jedoch größer, da sich die diskreten logarithmischen Faktoren im Bereich zwischen -30 und 100°C annähernd linear entwickeln. Der Arrhenius-Ansatz vermag durch seine Form jedoch nicht diesen Verlauf wiederzugeben. Gerade für die praktisch relevanten Referenztemperaturen um $T_R \approx 20^\circ\text{C}$ besteht nur auf einem kleinen Intervall eine gute Übereinstimmung zwischen der Verschiebungsfunktion und den diskreten Faktoren. Dies legt die Vermutung nahe, dass der Anteil der harten Phase des PUR allein nicht ausreicht, um über den Arrhenius-Ansatz als Modell den Zusammenhang der ZTV für den gesamten Stoff zu beschreiben.

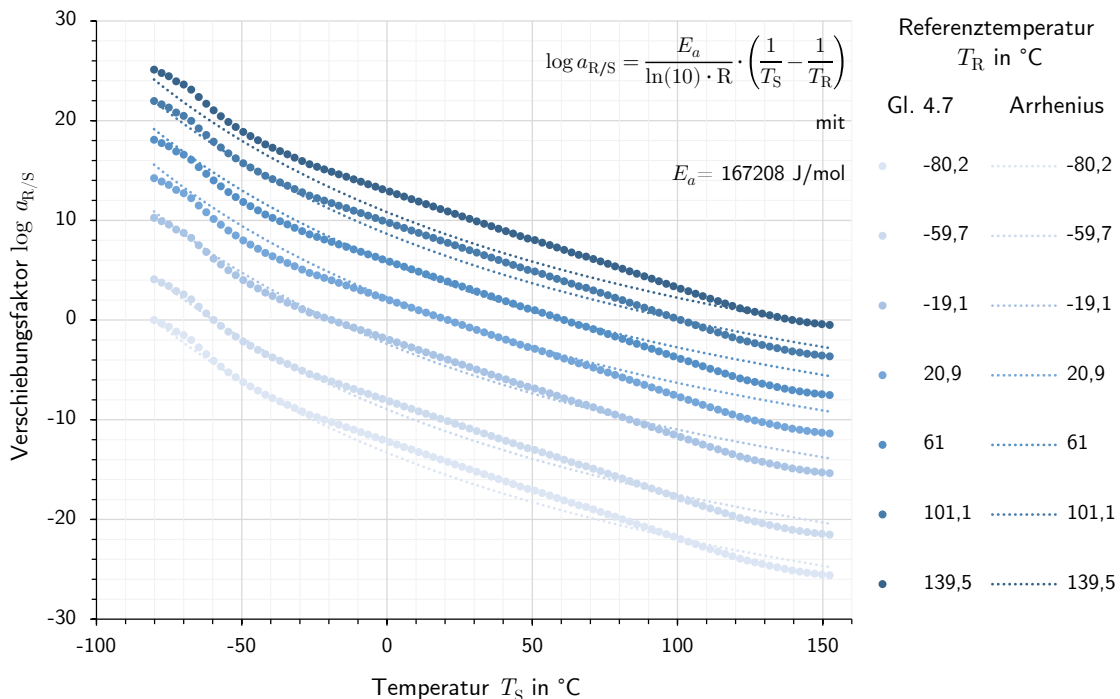


Abbildung 5.3: Verschiebungsfaktoren $\log a_{R/S}$ des Versuchs D-TFS_03 aus diskreter Berechnung und über den Arrhenius-Ansatz

Für die anderen D-TFS-Versuche erfolgt die Ermittlung der jeweiligen Aktivierungsenergie E_a analog und wird daher nicht gezeigt. Die daraus resultierenden Ergebnisse für den Arrhenius-Ansatz und deren Vergleich mit den diskreten Verschiebungsfaktoren der anderen Versuche werden in Anhang AI-9.1 gegeben. An den Ergebnissen sind die gleichen Phänomene wie zuvor in Abbildung 5.3 zu beobachten, was die aus D-TFS_03 gezogenen Schlüsse bekräftigt. Der Arrhenius-Ansatz wird demnach als mögliches Modell zur Beschreibung des Zusammenhangs der ZTV für das PUR im SPS nicht weiter verfolgt.

5.1.2 Der Ansatz nach Williams, Landel und Ferry (WLF)

Anders als die Arrhenius- eignet sich die WLF-Funktion sowohl zur Beschreibung des Übergangs vom Glas- zum Kautschukbereich, als auch des Schmelz- bzw. Fließbereichs (Schwarzl 1990, S. 204 ff.). Um den reinen Glasbereich zu beschreiben, ist sie hingegen nicht geeignet (Brinson u. Brinson 2008, S. 243). Obwohl sich dessen harte Komponente bis $T_\alpha \approx 125^\circ\text{C}$ noch im Glaszustand befindet, bietet der Ansatz trotzdem Potential das Verhalten des PUR abzubilden, da die Dispersionsstufe von T_α sehr breit ist und weit oberhalb von T_β liegt. So sollte sich die weiche Komponente bereits ausgeprägt entropieelastisch verhalten, während die harte eine langsame aber stetigen Erweichung durchläuft.

Wie bereits in Abschnitt 2.1.5 erläutert, werden zur Bestimmung der Verschiebungsfunktionen über den WLF-Ansatz entweder die Konstanten c_1 und c_2 für jede Referenztemperatur oder die Invarianten I_1 und I_2 benötigt:

$$\log a_{R/S} = -\frac{c_1 \cdot (T_S - T_R)}{c_2 + T_S - T_R} = \frac{I_1}{(T_R - I_2)} \cdot \frac{(T_S - T_R)}{(I_2 - T_S)} \quad (2.29)$$

Mezger (2016, S. 229 f.) zeigt eine Methode zur Bestimmung der WLF-Konstanten für eine Referenztemperatur. In dem teils grafischen Verfahren werden die Faktoren, ähnlich zur Bestimmung der Aktivierungsenergie für den Arrhenius-Ansatz, über die Steigung und den Aufpunkt einer Regressionsgeraden berechnet. Im vorliegenden Fall können damit jedoch keine sinnvollen Ergebnisse erzielt werden. Daher wird alternativ eine händische Iteration auf Basis der Invarianten durchgeführt. Auf diese Weise können alle Kurven für verschiedene Referenztemperaturen zugleich verändert werden. Deren Abweichung von den diskreten Verschiebungsfaktoren wird dabei mit der Summe der Fehlerquadrate über alle Kurven geprüft. Die Invarianten werden so lange händisch iteriert, bis ein hinreichend genaues Minimum des Fehlers erreicht ist.

Abbildung 5.4 zeigt exemplarisch die für den Versuch D-TFS_03 gefundenen Invarianten und die daraus resultierenden Verschiebungsfunktionen im Vergleich zu den diskreten Faktoren. Es fällt auf, dass $T_\infty \equiv I_2 = -372^\circ\text{C}$ wesentlich tiefer liegt, als mit dem absoluten Nullpunkt bei $-273,15^\circ\text{C}$ physikalisch vereinbar. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die händische Anpassung der Funktionen im vorliegenden Fall über einen sehr weiten Temperaturbereich durchgeführt wurde. Dieser überstreicht von -70 bis 150°C beide Glasübergänge, womit streng genommen auch der Gültigkeitsbereich zur Anwendung des WLF-Ansatzes überschritten wird.

Die streng korrekte Umsetzung des WLF-Ansatzes ist im vorliegenden Fall jedoch ohnehin in Frage zu stellen. Wie bereits am Arrhenius-Ansatz diskutiert, entwickeln sich die logarithmischen Verschiebungsfaktoren über einen weiten Bereich annähernd linear. Auch liegen die

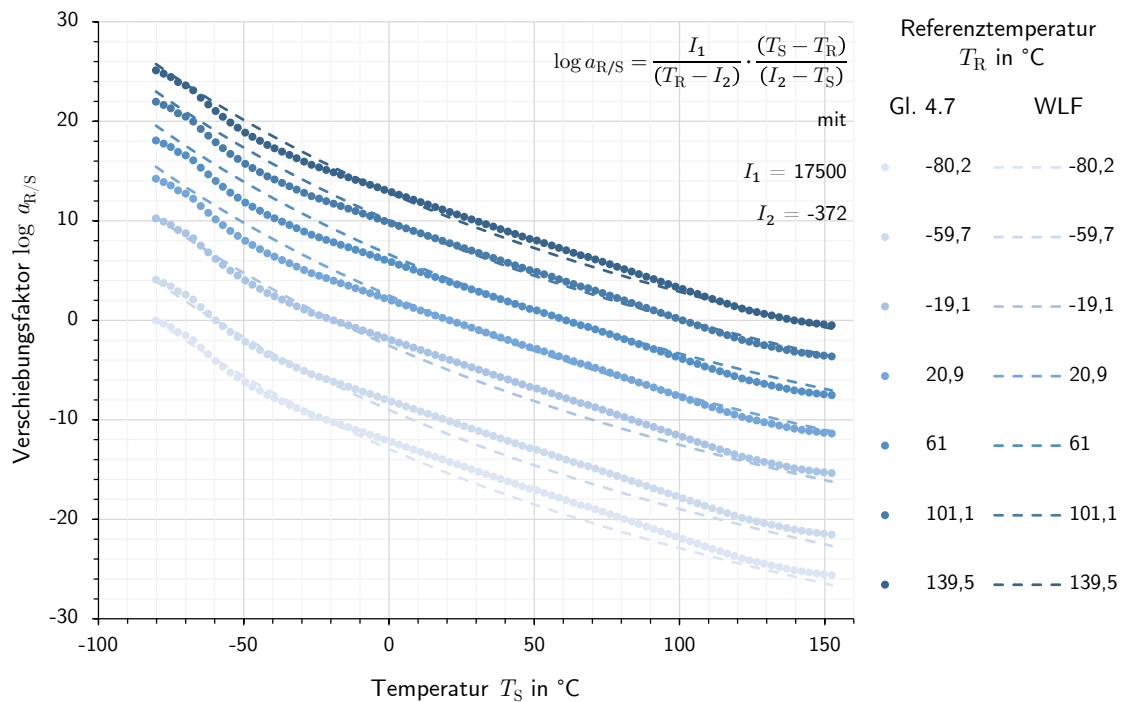


Abbildung 5.4: Verschiebungsfaktoren $\log a_{R/S}$ des Versuchs D-TFS_03 aus diskreter Berechnung und über den WLF-Ansatz

beiden Phasen des Copolymers in diesem Bereich in unterschiedlichen Zuständen vor. Beide Phänomene erschweren die Anwendung des WLF-Ansatzes, bzw. machen sie im streng physikalischen Sinne seiner Urheber gar unmöglich.

Das vorrangige Ziel besteht jedoch darin, einen Ansatz zu finden mit dem die Verschiebungsfaktoren über einen weiten Temperaturbereich möglichst genau durch stetige Funktionen abgebildet werden können. Diese Anforderungen erfüllt der WLF-Ansatz mit den gefundenen Invarianten zumindest hinreichend, weshalb er in dieser Form beibehalten wird. Um Irritationen zu vermeiden, wird im Weiteren auf die Bezeichnung T_∞ verzichtet und die entsprechende Invariante ausschließlich mit I_2 bezeichnet.

Neben den hier gezeigten, finden sich in Anhang AI-9.2 die diskreten Faktoren der restlichen D-TFS-Versuche im Vergleich mit den Verschiebungsfunktionen aus dem WLF-Ansatz und den zugehörigen Invarianten. Die Ergebnisse fallen ähnlich zu denen von D-TFS_03 aus. Der WLF-Ansatz ist in der Lage die Verschiebungsfaktoren besser abzubilden als der Arrhenius-Ansatz. Dennoch bestehen auch hier Abweichungen zu den Faktoren, resultierend aus der Krümmung der Funktionen.

5.1.3 Ein empirischer Exponential-Ansatz

Wie sich in den vorangegangenen Abschnitten zeigte, passen die konventionellen Ansätze zur Formulierung eines funktionalen Zusammenhangs für die ZTV nur bedingt. Alternativ könnten weitere Ansätze aus der Literatur zu Rate gezogen werden (z. B. Woicke et al. 2004). Diese sind in ihrer Form aber meist nicht weniger kompliziert und können dabei trotzdem nur einen Teil des charakteristischen Verlaufs der Verschiebungsfaktoren abbilden. Angesichts

der sich im praktisch relevanten Temperaturbereich kontinuierlich entwickelnden Faktoren, wird daher die Verwendung eines einfachen Exponential-Ansatzes untersucht. Wie die Gleichungen 5.2 und 5.3 zeigen, ähnelt dieser dem Arrhenius-Ansatz, wobei die Temperaturdifferenz jedoch über den Zähler eingeht. Der Ansatz findet sich in ähnlicher Form z. B. bei Osswald u. Rudolph (2015, S. 61).

$$a_{R/S} = \frac{1}{m \sqrt[m]{e^{(T_S - T_R)}}} \quad (5.2)$$

$$= e^{\frac{(T_R - T_S)}{m}}$$

$$\log a_{R/S} = \frac{(T_R - T_S)}{\ln 10 \cdot m} \quad (5.3)$$

Im einfach logarithmischen Graph ergeben sich daraus lineare Funktionen deren Steigung die Konstante m steuert. Diese wird abermals mithilfe einer Regression auf dem linearen Stück des relevanten Temperaturbereichs bestimmt. Abbildung 5.5 zeigt exemplarisch den e-Ansatz mit der zugehörigen Steigungszahl m im Vergleich mit den Verschiebungsfaktoren des Versuchs D-TFS_03. Es ist zu erkennen, dass der e-Ansatz für den praktisch relevanten Fall $T_R \in W \wedge T_S \in W$ mit $W = \{T \mid -30^\circ\text{C} \leq T \leq 120^\circ\text{C}\}$ sehr genaue Ergebnisse liefert. Sobald eine der Temperaturen jedoch außerhalb dieses Bereichs liegt ($T_R \notin W \vee T_S \notin W$), fällt die Abweichung deutlich größer aus (s. z. B. die Kurven für $T_R = -80^\circ\text{C}$ in Abb. 5.5).

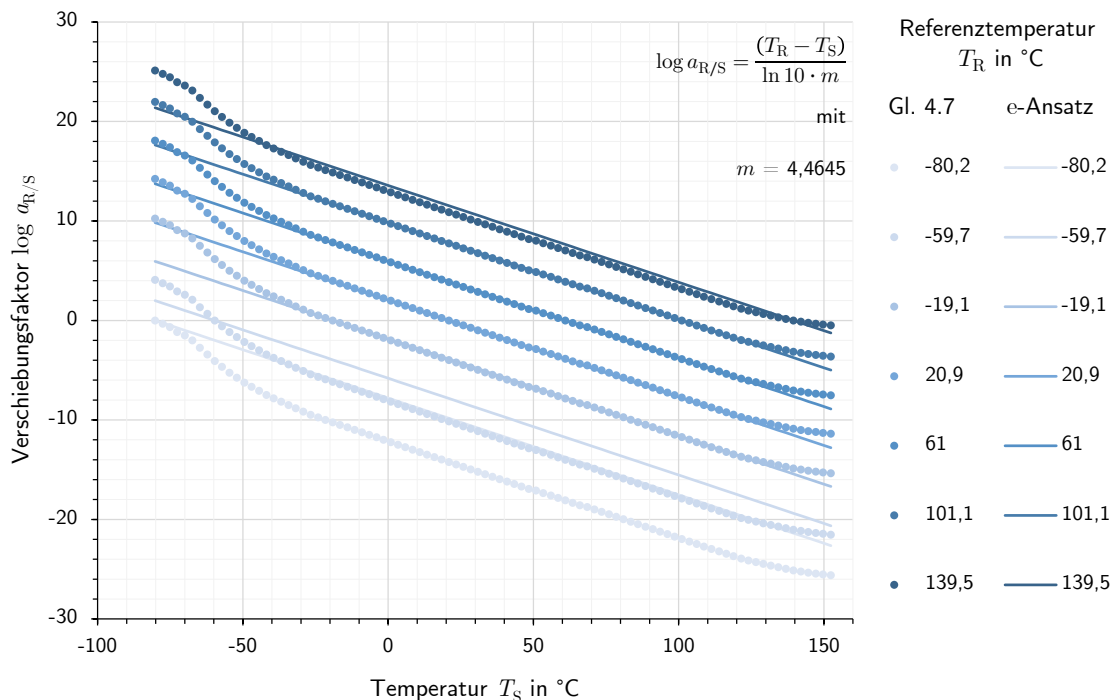


Abbildung 5.5: Verschiebungsfaktoren $\log a_{R/S}$ des Versuchs D-TFS_03 aus diskreter Berechnung und über den e-Ansatz

Grund dafür ist die Tatsache, dass alle Ansatzfunktionen ihren Schnittpunkt mit den Verläufen der diskreten Verschiebungsfaktoren im Punkt $T_S = T_R$ haben wo $a_{R/S} = 1$ bzw. $\log a_{R/S} = 0$ wird.¹ Liegt der Schnittpunkt außerhalb des Bereichs W auf dem die Konstante m ermittelt wurde, entsteht eine große Abweichung, da die Funktion zu den linear verlaufenden Verschiebungsfaktoren parallel verschoben wird.

Die gleichen Phänomene lassen sich auch an den Vergleichen der Faktoren aus den anderen D-TFS-Versuchen mit den Ansatzfunktionen und ihrer zugehörigen Steigung in Anhang AI-9.3 beobachten. In den Versuchen D-TFS_04 und D-TFS_06 treten lediglich kleine Unregelmäßigkeiten im Bereich S auf, welche die lineare Entwicklung der Verschiebungsfaktoren stören und so zu Abweichungen zwischen Faktoren und Ansatzfunktionen führen. Diese können auf Unregelmäßigkeiten im Ablauf des jeweiligen Versuchs zurückgeführt werden. So wurden bspw. im Verlauf von D-TFS_06 die Frequenz-Sweeps auf den Stufen 50 und 52,5 °C übersprungen und die Temperatur stattdessen längere Zeit auf 54,7 °C gehalten. Dies führte zu einem deutlichen Ausreißer in den inkrementellen Verschiebungsfaktoren (vgl. Abb. 4.11), welcher wiederum für die Knicke im Verlauf der diskreten Verschiebungsfaktoren sorgt (s. Abb. AI-80). Um Unstetigkeiten dieser Art bei der Regression auszusparen, wurde die Steigungszahl m in den betreffenden Versuchen auf einem kleineren Intervall davor bzw. dahinter ermittelt. Dies verschlechtert in erster Konsequenz zwar die Fehlerquadratsumme, gibt aber letztendlich die Steigung des ungestörten Verlaufs der Verschiebungsfaktoren genauer wieder.

5.1.4 Vergleich und Schlussfolgerungen

Um abschließend entscheiden zu können welcher der Ansätze im Modell für das viskoelastischen Verhalten des PUR Anwendung finden soll, werden diese nochmals verglichen. Der Vergleich erfolgt dabei im praktisch relevanten Temperaturbereich und abermals exemplarisch am Versuch D-TFS_03, da dieser fehlerfrei und ohne ungewollte Änderungen in der Temperierung ablief. In Abbildung 5.6 sind ausgewählte Verläufe der diskreten Verschiebungsfaktoren für die Referenztemperaturen -30 , 20 , 70 und 120 °C aufgetragen und den Funktionen nach den drei zuvor beschriebenen Ansätzen gegenübergestellt. Es zeigt sich, dass der empirische Exponential-Ansatz im Bereich zwischen -30 bis 120 °C die diskreten Verschiebungsfaktoren am genauesten abbildet. Lediglich in sehr hohen und niedrigen Temperaturen liefert bspw. der WLF-Ansatz eine besser Übereinstimmung. Dafür ist dieser im praktisch relevanten Bereich dazwischen stellenweise unpräzise. Die gleichen Schlüsse lassen sich ebenso aus dem Vergleich der verschiedenen Ansätze für die restlichen Versuche in Anhang AI-9 ziehen. Mangels tieferer Aussagekraft werden diese jedoch nicht mehr in gleicher Weise aufbereitet wie D-TFS_03. Die aus allen Versuchen gefundenen Konstanten der einzelnen Ansätze werden in Tabelle AI-22 zusammengefasst.

Eine weitere Möglichkeit der Überprüfung bietet die direkte Nachrechnung der inkrementellen Verschiebungsfaktoren $a_{i/j}$, wie sie in Abschnitt 4.1.2 durch die Superposition bestimmt wurden. Abbildung 5.7 zeigt die Faktoren $a_{i/j}$ von D-TFS_03 analog zu Abbildung 4.11. Außerdem dargestellt sind die mittels der drei ZTV-Ansätze für die gleichen Temperaturstufen berechneten inkrementellen Verschiebungsfunktionen. Der Vergleich bekräftigt deutlich die zuvor gewonnenen Erkenntnisse. So liefert auch hier der Exponential-Ansatz zwischen -30 und 120 °C die genauesten Ergebnisse. Lediglich außerhalb dieses Bereichs ändern sich die Faktoren, was

¹Gleiches gilt auch für die zuvor gezeigten Ansätze nach Arrhenius und WLF. Durch deren Krümmung fallen die Abweichungen zwar kleiner, aber gleichbleibend aus.

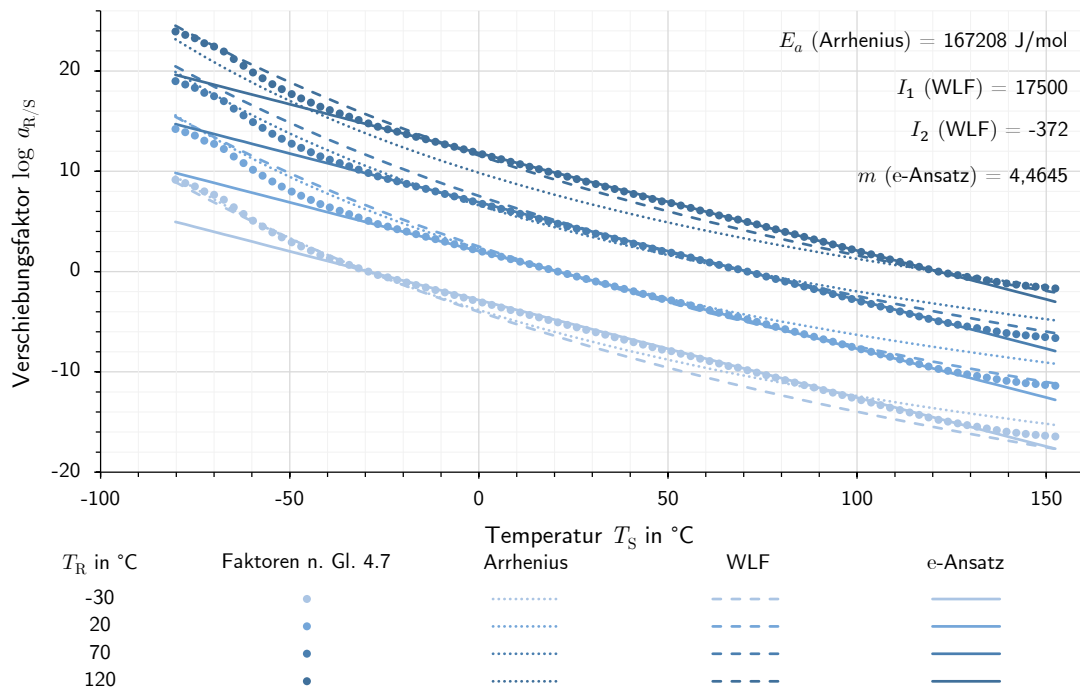


Abbildung 5.6: Diskrete Verschiebungsfaktoren $\log a_{R/S}$ des Versuchs D-TFS_03 aus diskreter Berechnung im Vergleich mit allen vorgestellten ZTV-Ansätzen

der Ansatz durch seine Einfachheit nicht abbilden kann. Der WLF-Ansatz kann hingegen die generelle Entwicklung der inkrementellen Faktoren besser darstellen. Er hat annähernd die Form einer Regressionsgeraden über alle experimentellen Datenpunkte. Der Arrhenius-Ansatz verläuft ähnlich der WLF-Funktion, ist jedoch dazu parallel verschoben. Die inkrementellen Verschiebungsfaktoren kann er somit nicht wiedergeben.

Der Vergleich anhand von Abbildung 5.7 zeigt zusätzlich, dass die Steigungszahl m für den Exponential-Ansatz auch über die inkrementellen Verschiebungsfaktoren direkt bestimmt werden kann. Dies erscheint vor allem sinnvoll, da Ausreißer in den inkrementellen Verschiebungsfaktoren leichter identifiziert und von der Regression ausgenommen werden können, als dies an den Verläufen der diskreten Faktoren der Fall ist. So konnte bereits in der Ergebnisdiskussion zur Superposition festgestellt werden (vgl. S. 90 f.), dass im Bereich von -20 bis 120 °C die inkrementellen Verschiebungsfaktoren aller Versuche mit $a_{i/j} \approx 0,567$ annähernd gleich sind (vgl. Abb. 4.11). Durch Umformen von Gleichung 5.3 lässt sich über die annähernd konstante Schrittweite der Temperatur zwischen den Frequenz-Sweeps i und j von $\Delta T \approx 2,5$ K (mit $T_j = T_i + \Delta T$) eine globale Steigungszahl $m(a_{i/j})$ für alle Versuche unabhängig von den Ausreißern ermitteln.

$$m(a_{i/j}) = \frac{(T_i - T_j)}{\ln a_{i/j}} \quad (5.4)$$

$$\approx \frac{-2,5 \text{ K}}{\ln 0,567}$$

$$\approx 4,4 \quad (5.5)$$

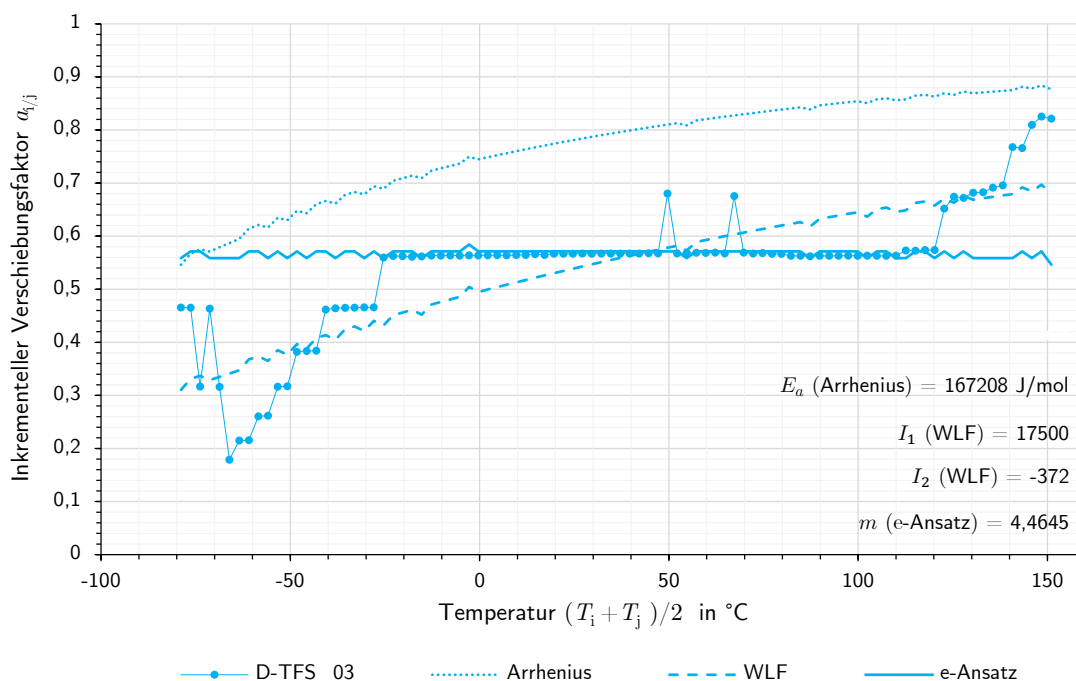


Abbildung 5.7: Inkrementelle Verschiebungsfaktoren $a_{i/j}$ des Versuchs D-TFS_03 aus der in Abschnitt 4.1.2 gezeigten Superposition und Nachrechnung derselben über alle ZTV-Ansätze

Die globale Steigungszahl liegt um ca. 18 % niedriger als der Mittelwert aus Regressionen an den diskreten Faktoren (vgl. Tab. AI-22). Dies kann vor allem auf die Ungenauigkeiten durch die Ausreißer in $(a_{i/j})$ zurückgeführt werden, welche sich infolge der Masterung (vgl. Gl. 4.7) auf den gesamten Verlauf der diskreten Verschiebungsfaktoren auswirken.

Für die Formulierung der Temperaturabhängigkeit im viskoelastischen Modell des PUR und alle folgenden Berechnungen, wird aufgrund seiner hohen Präzision der vereinfachte Exponential-Ansatz verwendet. Seine Gültigkeit wird jedoch auf den Bereich zwischen -30 und 120 °C begrenzt. Darüber hinaus wird mit der globalen als maßgebende Steigungszahl die empirische Modellkonstante $m = 4,4$ festgelegt.

Um Dopplungen zu vermeiden, erfolgt die Überprüfung des gewählten Ansatzes anhand der Versuche nicht an dieser Stelle, sondern in Abschnitt 5.2.3. Dort werden die Versuchskurven der Kurzzeit-Relaxationsversuche unter Zug und Schub über den Ansatz nach Gleichung 5.3 verschoben und den aus der DMTA ermittelten Prony-Reihen gegenübergestellt.

5.2 Das Relaxationsspektrum des PUR in Frequenz- und Zeitbereich

Der essentiellste Teil des analytischen Modells für das PUR im SPS ist die Relaxationsfunktion $G(t)$. Sie beschreibt die Änderung von dessen Steifigkeit in Abhängigkeit von der Zeit bei einer konstanten Temperatur für den linear-viskoelastischen Fall (s. Abschnitt 2.1.3). Anders als zuvor beim ZTV-Gesetz werden für die Relaxationsfunktion nicht mehrere Ansätze verglichen. Stattdessen wird direkt ein diskretes Relaxationsspektrum in Form einer Prony-Reihe verwendet, welches weithin gebräuchlich ist und durch seine hohe Variabilität das Verhalten des PUR zweifelsohne abbilden kann (s. bspw. Brinson u. Brinson 2008, S. 178 ff. oder Grellmann et al. 2015, S. 90 f.). In diesem Abschnitt wird zunächst die Ermittlung aller für das Relaxationsspektrum notwendigen Parameter über die D-TFS-Versuche gezeigt. Mit ihrer Hilfe werden dann die Prony-Reihen der vier Versuche im Zeitbereich dargestellt und mit den Ergebnissen der anderen Versuche aus den Abschnitten 4.2 und 4.3 verglichen. Damit soll nicht nur die Richtigkeit der gefundenen Relaxationsfunktionen überprüft werden, sondern auch das ZTV-Gesetz aus dem vorherigen Abschnitt.

Da es sich bei dem PUR um ein vernetztes Elastomer handelt und unter Berücksichtigung der in Abbildung 2.14 gezeigten Ergebnisse von SPS Technology (2012a), wird von der Existenz eines gummielastischen Plateaus oberhalb der α -Erweichung ausgegangen. Für die Darstellung der zeitabhängigen Steifigkeit des PUR wird daher das verallgemeinerte Maxwell-Modell mit einer parallel geschalteten Feder für den Gleichgewichtszustand in hohen Zeiten verwendet (vgl. Abb. 2.5). Die Prony-Reihe zur Beschreibung der Relaxationsfunktion lautet dann:

$$G(t) = G_{\infty} + \sum_{i=1}^n G_i \cdot e^{-t/\lambda_i} \quad (2.8)$$

Dabei sind zunächst die *Relaxationsstärken* G_i (auch *Prony-Parameter* genannt) und ihren zugehörigen Relaxationszeiten λ_i unbekannt und müssen mithilfe einer Funktionsanpassung (engl.: *Fit*) der Prony-Reihe an die Masterkurven des Speichermoduls im Frequenzbereich aus den D-TFS-Versuchen ermittelt werden.

5.2.1 Ermittlung der Prony-Parameter im Frequenzbereich

Für die Anpassung der Prony-Reihe an die Masterkurven im Frequenzbereich wird nach dem Vorbild von Brüller et al. (1976) und Brüller (1993) die diskrete *Methode der kleinsten Fehlerquadrate* angewendet. Um in der Handhabung der Indizes, welche in dem Verfahren auch als Zählvariablen dienen, mathematisch sauber zu verfahren, wird für den Schubmodul im Gleichgewichtszustand G_{∞} als Index statt dem Zeichen ∞ der Buchstabe e für den englischen Ausdruck *equilibrium* verwendet ($G_{\infty} \equiv G_e$). Bereits in Abschnitt 2.1.4 wurde erläutert, dass oben stehende Prony-Reihe nach Fourier-Transformation auch im Frequenz-Bereich bekannt ist, wobei die Relaxationsstärken G_i und -zeiten λ_i erhalten bleiben. Im Frequenz-Bereich hat die Reihe folgende Form:

$$G'(\omega) = G_e + \sum_{i=1}^n \frac{G_i \cdot \omega^2 \cdot \lambda_i^2}{1 + \omega^2 \cdot \lambda_i^2} \quad (2.21)$$

Für den Fit einer Prony-Reihe ist es möglich, je Summand einen der beiden Parameter G_i oder λ_i in Abhängigkeit vom anderen zu ermitteln und so die Zahl der Unbekannten zu halbieren. Die Relaxationszeiten werden daher zu je einer Zeitdekade festgelegt (bspw. $\lambda_1 = 1 \cdot 10^{12}$ s, $\lambda_2 = 1 \cdot 10^{11}$ s usw.). Auf diese Weise hängt die Anzahl der für die Reihe benötigten Summanden von der Breite des Bereichs ab in dem sie dargestellt werden soll.¹

Zwischen der Zielfunktion (Prony-Reihe) und der Masterkurve des jeweiligen Versuchs, wird die Summe der Fehlerquadrate über N Messpunkte $G'_M(\omega_j)$ des Speichermoduls gebildet.

$$F^2(G_e, G_1, G_2, \dots, G_n) = \sum_{j=1}^N \left[G'_M(\omega_j) - G_e - \sum_{i=1}^n \frac{G_i \cdot \omega_j^2 \cdot \lambda_i^2}{1 + \omega_j^2 \cdot \lambda_i^2} \right]^2 \quad (5.6)$$

Um das Minimum der Fehlerquadratsumme zu finden, wird diese nach den einzelnen unbekanntem Prony-Parametern partiell differenziert.

$$\frac{\partial F^2(G_e, G_1, G_2, \dots, G_n)}{\partial G_k} = 0 \quad \text{mit } k = e, 1, 2, \dots, n \quad (5.7)$$

Für $k = e$ ergibt sich:

$$\frac{\partial F^2}{\partial G_e} = -2 \cdot \sum_{j=1}^N \left[G'_M(\omega_j) - G_e - \sum_{i=1}^n \frac{G_i \cdot \omega_j^2 \cdot \lambda_i^2}{1 + \omega_j^2 \cdot \lambda_i^2} \right] = 0 \quad (5.8)$$

und daraus:

$$\sum_{j=1}^N G'_M(\omega_j) = \sum_{j=1}^N \left[G_e + \sum_{i=1}^n \frac{G_i \cdot \omega_j^2 \cdot \lambda_i^2}{1 + \omega_j^2 \cdot \lambda_i^2} \right] \quad (5.9)$$

Für $k = 1, 2, \dots, n$ ergibt sich:

$$\frac{\partial F^2}{\partial G_k} = -2 \cdot \left(\frac{\omega_j^2 \cdot \lambda_i^2}{1 + \omega_j^2 \cdot \lambda_i^2} \right) \cdot \sum_{j=1}^N \left[G'_M(\omega_j) - G_e - \sum_{i=1}^n \frac{G_i \cdot \omega_j^2 \cdot \lambda_i^2}{1 + \omega_j^2 \cdot \lambda_i^2} \right] = 0 \quad (5.10)$$

und daraus:

$$\sum_{j=1}^N G'_M(\omega_j) \cdot \left(\frac{\omega_j^2 \cdot \lambda_i^2}{1 + \omega_j^2 \cdot \lambda_i^2} \right) = \sum_{j=1}^N \left[G_e + \sum_{i=1}^n \frac{G_i \cdot \omega_j^2 \cdot \lambda_i^2}{1 + \omega_j^2 \cdot \lambda_i^2} \right] \cdot \left(\frac{\omega_j^2 \cdot \lambda_i^2}{1 + \omega_j^2 \cdot \lambda_i^2} \right) \quad (5.11)$$

Aus den Gleichungen 5.9 und 5.11 lässt sich ein lineares Gleichungssystem bilden, in dem die Prony-Parameter G_k mit $k = e, 1, 2, \dots, n$ die Unbekannten sind. Dabei muss zwingend $N > n$ gelten, da das Gleichungssystem sonst unterbestimmt und nicht lösbar ist. Es entspricht dem System einer Normalgleichung (vgl. Press et al. 2007, S. 789 ff.) mit folgender Form:

$$\mathbf{A}^T \cdot \vec{G}'_M = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \vec{G}_k \quad (5.12)$$

¹Dieses Vorgehen ermöglicht zusätzlich eine kompakte Form zur Berechnung der Steifigkeit $G(t)$ für lange Zeiten, wie später in Abschnitt 5.3.1 noch gezeigt wird.

Darin ist \mathbf{A} eine $N \times (n + 1)$ - Matrix der folgenden Form:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\omega_1^2 \cdot \lambda_1^2}{1 + \omega_1^2 \cdot \lambda_1^2} & \frac{\omega_1^2 \cdot \lambda_2^2}{1 + \omega_1^2 \cdot \lambda_2^2} & \cdots & \frac{\omega_1^2 \cdot \lambda_n^2}{1 + \omega_1^2 \cdot \lambda_n^2} \\ 1 & \frac{\omega_2^2 \cdot \lambda_1^2}{1 + \omega_2^2 \cdot \lambda_1^2} & \frac{\omega_2^2 \cdot \lambda_2^2}{1 + \omega_2^2 \cdot \lambda_2^2} & \cdots & \frac{\omega_2^2 \cdot \lambda_n^2}{1 + \omega_2^2 \cdot \lambda_n^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \frac{\omega_N^2 \cdot \lambda_1^2}{1 + \omega_N^2 \cdot \lambda_1^2} & \frac{\omega_N^2 \cdot \lambda_2^2}{1 + \omega_N^2 \cdot \lambda_2^2} & \cdots & \frac{\omega_N^2 \cdot \lambda_n^2}{1 + \omega_N^2 \cdot \lambda_n^2} \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

Der Vektor \vec{G}'_M mit N Zeilen enthält die Messwerte der Masterkurve im Frequenzbereich und \vec{G}_k mit $(n + 1)$ Zeilen die gesuchten Relaxationsstärken bzw. Prony-Parameter:

$$\vec{G}'_M = \begin{pmatrix} G'_M(\omega_1) \\ G'_M(\omega_2) \\ G'_M(\omega_3) \\ G'_M(\omega_4) \\ \vdots \\ G'_M(\omega_N) \end{pmatrix} \quad \vec{G}_k = \begin{pmatrix} G_e \\ G_1 \\ G_2 \\ \vdots \\ G_n \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

Die Lösung ergibt sich durch Umformen der Normalengleichung 5.12 zu:

$$\vec{G}_k = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \vec{G}'_M \quad (5.15)$$

Abbildung 5.8 zeigt exemplarisch das Ergebnis der Anpassung der Prony-Reihe an den Versuch D-TFS_03 nach der zuvor beschriebenen Prozedur. Um mit der Prony-Reihe möglichst hohe Zeiten darstellen zu können, wurde für die Messpunkte \vec{G}'_M anders als bisher nicht der 13. Punkt aus der Mitte der Frequenz-Sweep-Messreihen bei $f = 1$ Hz verwendet, sondern der niedrigste verwendbare Messpunkt Nr. 7 mit $f \approx 0,38$ Hz (vgl. Abb. 4.6). Dessen Kurve stellt außerdem ein gutes Mittel zwischen den Verläufen der anderen Messpunkte dar (vgl. auch Abb. 4.12).

Was zusätzlich ins Auge fällt, ist der weiterführende Verlauf der Prony-Reihe für niedrige Frequenzen (hohe Zeiten). Hier nähert sich die Reihe durch ihr letztes Glied einem Grenzwert an, welcher tiefer liegt als der letzte Messwert. Diese Extrapolation resultiert aus der Form des Maxwell-Modells mit der parallel geschalteten Feder für den Gleichgewichtszustand (vgl. Abb. 2.5). Deren Steifigkeit G_e ist wie alle Prony-Parameter zunächst unbekannt und wird über das Gleichungssystem bestimmt. Ihr sollte jedoch besondere Aufmerksamkeit geschenkt werden, ob sie die Eigenschaft des Elastomers auf dem zuvor erwähnten gummielastischen Plateau wiedergibt. Bereits in der Diskussion zu Abbildung 2.14 wurde festgestellt, dass die Steifigkeit in diesem Bereich etwa gegen 7 MPa strebt. Im vorliegenden Fall der Ergebnisse aus dem Versuch D-TFS_03 kann die Extrapolation diesen Zusammenhang darstellen. Die Ergebnisse aller Prony-Parameter aus den Anpassungen an die vier D-TFS-Versuche werden in einer tabellarischen Aufstellung in Anhang AI-10 gegeben.

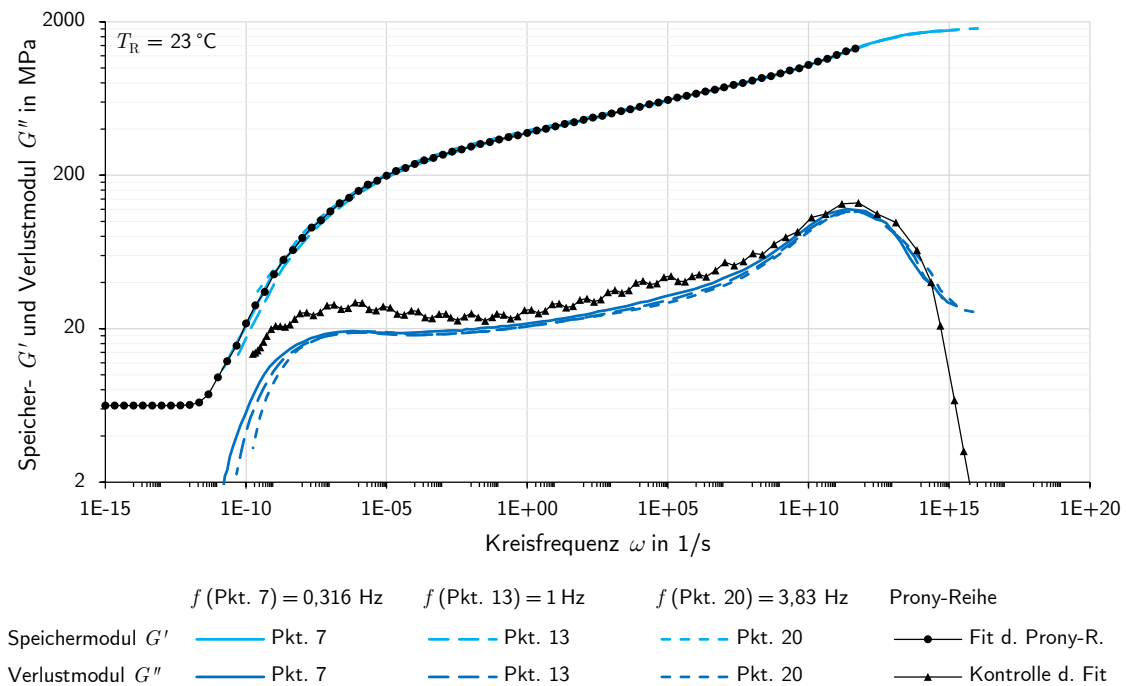


Abbildung 5.8: Speicher- und Verlustmodulkurven verschiedener Auswertepunkte von D-TFS_03 im Vergleich mit der an den Speichermodul in Punkt 7 angepassten Prony-Reihe

Die über den Speichermodul ermittelten Prony-Parameter G_i werden zusätzlich über den Zusammenhang des in den Frequenzbereich transformierten Verlustmoduls kontrolliert:

$$G''(\omega_j) = \sum_{i=1}^n G_i \cdot \frac{\omega_j \cdot \lambda_i}{1 + \omega_j^2 \cdot \lambda_i^2} \quad (2.22)$$

Dabei wird der aus den Prony-Parametern berechnete Verlustmodul im Frequenzbereich $G''(\omega_j)$ den Messwerten $G''_M(\omega_j)$ aus dem jeweiligen D-TFS-Versuch gegenübergestellt. Abbildung 5.8 zeigt auch diese Kurven exemplarisch für den Versuche D-TFS_03. Sie lassen gerade im Bereich geringer Frequenzen Abweichungen erkennen. Diese können jedoch weder durch Variation des auszuwertenden Messpunkts, noch durch Änderung des Frequenzbereichs der Anpassung minimiert werden. In Anbetracht der guten Übereinstimmung der Prony-Reihe des Speichermoduls mit der Ursprungsfunktion, werden die verhältnismäßig geringen Abweichungen in der Kontrolle des Verlustmoduls daher hingenommen.

5.2.2 Die Prony-Reihen im Zeitbereich

Mit den ermittelten Relaxationsstärken G_i werden über die zu Beginn dieses Abschnitts wiederholte Gleichung 2.8 die Prony-Reihen aller D-TFS-Versuche im Zeitbereich dargestellt. Abbildung 5.9 zeigt die Verläufe der so ermittelten Relaxationsmoduln $G(t)$ im Vergleich mit den Kurven der Speichermoduln $G_D(t)$, welche über den einfachen Zusammenhang aus Gleichung 4.9 in den Zeitbereich umgerechnet wurden. Ein Vergleich der zueinander gehörenden Kurven eines Versuchs zeigt zunächst das von Schwarzl (1990, S. 179 f.) allgemein beschriebene Phänomen: Der Speichermodul $G_D(t)$ ist stets größer als der Relaxationsmodul

$G(t)$. Im vorliegenden Fall des PUR ist der Unterschied jedoch gleichbleibend gering, sodass die zeitabhängige Steifigkeit auch mit hinreichender Genauigkeit über den Speichermodul $G_D(t)$ ausgedrückt werden kann. So sollte es in zukünftigen Untersuchungen (bspw. zur Qualitätskontrolle) genügen, den Speichermodul zu ermitteln und diesen über den vereinfachten Zusammenhang in den Zeitbereich zu transformieren.

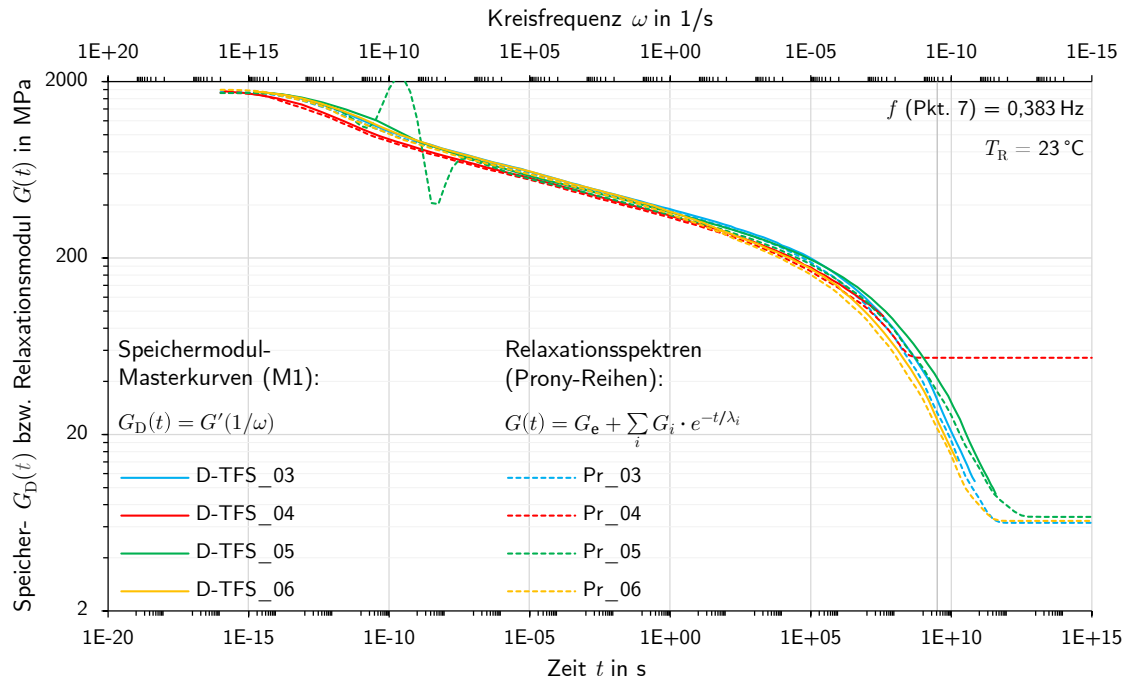


Abbildung 5.9: Vergleich der Prony-Reihen des Relaxationsmoduls aller D-TFS-Versuche mit den Masterkurven des über Gleichung 2.23 in den Zeitbereich transformiert Speichermoduls

Es fallen aber auch Unstimmigkeiten an den Kurven auf, die aus der Durchführung des jeweiligen Versuchs resultieren. Bereits in der Interpretation der inkrementellen Verschiebungsfaktoren an Abbildung 4.11 wurde diskutiert, dass im Versuch D-TFS_05 fälschlicherweise nur wenige Frequenz-Sweeps unterhalb von 0°C durchgeführt wurden. In der Anpassung der Prony-Reihe sind in dem zugehörigen Frequenzbereich entsprechend nur wenige Datenpunkte vorhanden (vgl. Abb. AI-37). Dies führt dazu, dass die Funktionsanpassung in diesem Versuch für kleine Relaxationszeiten keine sinnvollen Ergebnisse liefert, was sich in den Wellen im Verlauf der Prony-Reihe Pr_05 in Abbildung 5.9 zeigt. Die zugehörigen Prony-Parameter des Versuchs D-TFS_05 für Relaxationszeiten $\lambda_i \leq 1 \cdot 10^{-6}$ s werden entsprechend in den weiteren Berechnungen vernachlässigt.

Da der TF-Sweep von D-TFS_04 nur bis 100°C gefahren wurde und somit Daten des Speichermoduls in hohen Temperaturen fehlen, endet auch die zugehörige Prony-Reihe verfrüht. Deren Wert für die Steifigkeit im Gleichgewichtszustand G_e ist entsprechend deutlich zu hoch und wird für die weiteren Berechnungen nicht berücksichtigt. Die Werte für den Gleichgewichtszustand der anderen Versuche liegen alle in einem Bereich von $G_e \approx 6,5$ MPa. Zwar handelt es sich sowohl bei diesem Plateauwert als auch dem Kurvenverlauf davor streng genommen um Extrapolationen über den letzten Frequenz-Sweep bei 150°C hinaus, wonach deren Lage nicht direkt bewiesen werden kann. Wie jedoch bereits erwähnt, kann der Gleichgewichtszustand des gummielastischen Niveaus bei 7 MPa vermutet werden, wozu die errechneten Werte der Prony-

Reihen passen. Darüber hinaus haben Fehler im Plateau und dem Verlauf davor durch die absolut nur noch sehr geringe Steifigkeit in diesem Bereich keine großen Auswirkungen bezogen auf die Ausgangssteifigkeit. Weiterhin beginnt der Bereich der Extrapolation erst oberhalb einer Zeit von $10 \cdot 10^{10} \text{ s} \approx 317 \text{ a}$ und damit weit über dem rechnerisch für Brücken anzusetzenden Alter von 100 a. Für die rechnerische Prognose des linear-viskoelastischen Verhaltens einer Brücke mit SPS nach konventionellen Maßstäben, sollte dieser Zeitraum entsprechend ausreichen. Unter diesen Gesichtspunkten werden die extrapolierten Daten als hinreichend genau angenommen und in weiteren Berechnungen verwendet.

5.2.3 Vergleich mit den statischen Versuchen und Schlussfolgerungen

Die Prony-Reihen der D-TFS-Versuche werden in diesem Abschnitt den Ergebnissen der anderen Versuche im Zeitbereich gegenübergestellt. Mithilfe des in Abschnitt 5.1 gefundenen ZTV-Gesetzes (s. Gl. 5.3) werden dafür die Kurven aller Kriech- und Relaxationsversuche über der Zeitachse zur Referenztemperatur der Relaxationsfunktionen von $T_R = 23^\circ\text{C}$ verschoben. Auf diese Weise können sowohl die Prony-Reihen als auch das ZTV-Gesetz überprüft werden. Der Übersichtlichkeit halber erfolgen die Vergleiche getrennt nach der Versuchsart. Der verwendete Zusammenhang der ZTV wird im jeweiligen Vergleich mit angegeben.

Abbildung 5.10 zeigt die Kriechversuche unter Zug (TC) des Abschnitts 4.2.1 im Vergleich zu den Relaxationsfunktionen. Die Kurven der Kriechversuche werden anders als bei ihrem ersten Vergleich in Abbildung 4.17 nun wieder getrennt dargestellt, da in den Versuchen leicht unterschiedliche Temperaturen vorherrschten (vgl. Anhang AI-6.1). Die einzelnen Kur-

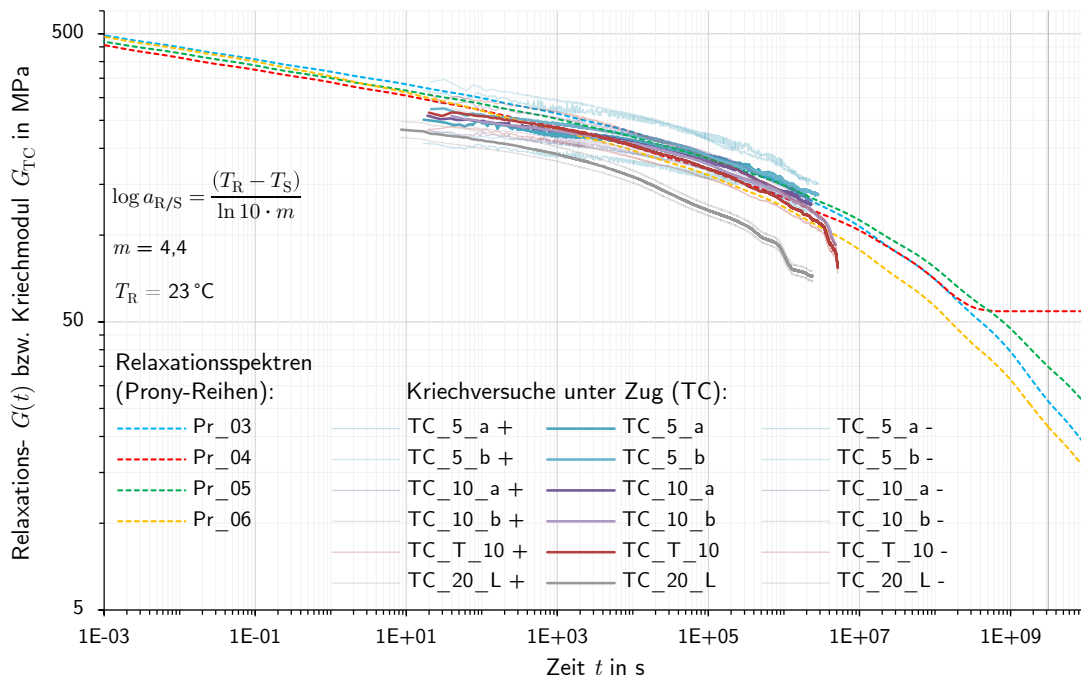


Abbildung 5.10: Vergleich der Prony-Reihen des Relaxationsmoduls aller D-TFS-Versuche mit den Langzeit-Kriechversuchen unter Zug bei Raumtemperatur (Die Kurven der Kriechversuche zeigen den Mittelwert über die vier Probekörper des jeweiligen Versuchs und die \pm Standardabweichung)

ven sind entsprechend der mittleren Temperatur im Versuch mit dem ZTV-Gesetz über der Zeitachse verschoben. Die Gegenüberstellung zeigt, dass die Prony-Reihen in der Lage sind, die Kriechversuche im LVE-Bereich wiederzugeben. Lediglich im Anfangsbereich (bis ca. 1 h nach Lastaufbringung) verhalten sich die Probekörper der Kriechversuche weicher. Dies wurde bereits auf das Tempo der Lastaufbringung im Versuch zurückgeführt. Danach verlaufen die Mittelwertkurven der linear-viskoelastischen Kriechversuche und die Relaxationsfunktionen im gleichen Korridor. Erst mit Überschreiten der Linearitätsgrenze ändern die Kriechversuche TC_10_b und TC_T_10 ihre Richtung und laufen deutlich aus dem Bereich der Prony-Reihen heraus.

Der Versuch TC_20_L weicht auch hier als Ganzes stark ab, was bereits darauf zurückgeführt wurde, dass er sich durch seine hohe Belastung von Beginn an nichtlinear verhält. Die gute Übereinstimmung der Prony-Reihen mit den linear-viskoelastischen Kriechversuchen bestätigt die bereits in Abschnitt 4.2.1 getroffene Annahme, dass für das PUR in diesem Bereich die folgende vereinfachte Beziehung 5.16 näherungsweise gültig ist. Auf eine Umrechnung der Relaxations- in Retardationsspektren oder die genauere Ermittlung der Stoffparameter aus den Kriechversuchen wird aus diesem Grund verzichtet.

$$E \cdot C \approx G \cdot J \approx 1 \quad (5.16)$$

Abbildung 5.11 zeigt die Prony-Reihen im Vergleich zu den mittels ZTV verschobenen Kurzzeit-Relaxationsversuchen unter Zug (TR-TTS). Es fällt ins Auge, dass sich aus den Versuchen bis auf wenige Ausnahmen eine geringere Steifigkeit ergibt als aus den Prony-Reihen. Bereits im Vergleich mit den Speichermodulkurven der DMTA in Abschnitt 4.2.2 waren diese Abweichungen vorhanden (vgl. auch Anhang AI-6.3). Dort wurden sie noch auf einen möglichen Unterschied von $G_D(t)$ zu $G(t)$ und die vereinfachte Umrechnung vom Frequenz- in den Zeitbereich über Gleichung 2.23 zurückgeführt. Im vorherigen Abschnitt wurde jedoch gezeigt, dass die Transformation nur eine geringe Änderung herbeiführt und näherungsweise $G_D(t) \approx G(t)$ gilt. Folglich haben sich die Versuche der Zugrelaxation generell weicher verhalten.

Dass fast alle Kurven um das gleich Maß von den Prony-Reihen abweichen, untermauert die ebenfalls bereits zuvor aufgestellte These eines Schlupfs im Versuchsaufbau. Aufgrund seines Ursprungs in den stählernen Bauteilverbindungen ist dieser nur von der initial aufgebrachten Deformation, nicht aber von der Zeit oder der Temperatur abhängig. Da die aufgebrachte Deformation in allen TR-TTS-Versuchen konstant 0,54 mm betrug, kann davon ausgegangen werden, dass ein auftretender Schlupf in deren Folge ebenfalls in allen Versuchen die gleiche Größenordnung hatte. Die dadurch verringerte initiale Dehnung der Probekörper führt zu der beobachteten vertikalen Verschiebung der Kurven des Relaxationsmoduls G_{TR-TTS} .

Wie auch im direkten Vergleich mit den D-TFS-Versuchen sind an den Kurven der Versuche mit Temperaturen unter 40 °C geringere Steigungen zu beobachten. Diese wurden bereits auf die elastische Nachgiebigkeit des Versuchsaufbaus zurückgeführt, welche die Steifigkeitsmessung leicht verfälschten (vgl. Abschnitt 4.2.2 bzw. Anhang AI-8). Abseits des Vergleichs der Steifigkeit wurden die Zugrelaxationsversuche bei verschiedenen Temperaturen aber zu einem weiteren Zweck durchgeführt. Mit ihrer Hilfe soll das aus der DMTA abgeleitete ZTV-Gesetz überprüft werden (vgl. Abschnitt 3.1.1). Trotz der geringer ausfallenden Steifigkeit können die verschobenen TR-TTS-Versuche den gefundene Zusammenhang der ZTV bestätigen. Bis auf wenige Ausnahmen fallen alle auf eine gemeinsame Kurve, welche zu den Prony-Reihen im Mittel parallel verläuft.

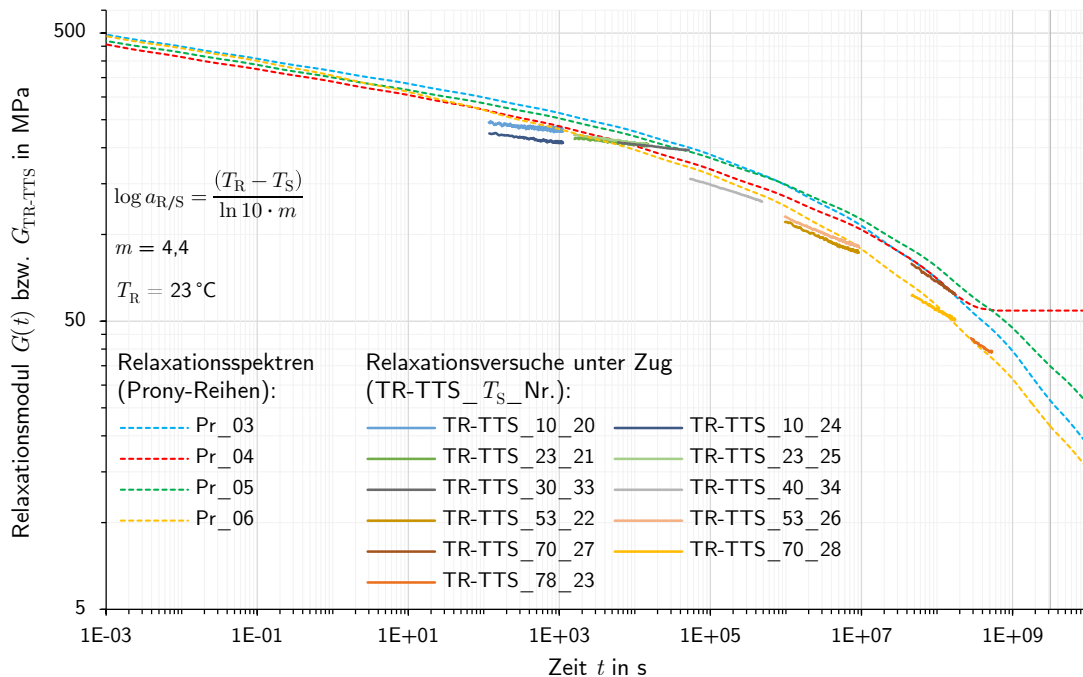


Abbildung 5.11: Vergleich der Prony-Reihen aller D-TFS-Versuche mit den einzelnen Kurzzeit-Relaxationsversuchen unter Zug (TR-TTS) bei verschiedenen Temperaturen, welche mithilfe des gefundenen Zusammenhangs der ZTV verschoben wurden

Aufgrund der in Abschnitt 4.3.1 diskutierten Fehler in der Durchführung der Langzeit-Relaxationsversuche unter Schub (SR) werden diese hier nicht für einen Vergleich herangezogen. Stattdessen werden die zu ihrer Auswertung durchgeführten Hilfsversuche zur Bestimmung der Steifigkeit (ST) mit aufgeführt. Diese erfolgten in gleicher Weise wie die Versuche der Kurzzeit-Schubrelaxation bei verschiedenen Temperaturen (SR-TTS) und hatten sich in ihren Messungen als wesentlich zuverlässiger gezeigt. Abbildung 5.12 zeigt die Prony-Reihen im Vergleich mit den einzelnen Kurven der Kurzzeit-Relaxation unter Schub (SR-TTS) und den Mittelwertkurven der Steifigkeitsversuche (ST) gleicher Art an den Schubprobekörpern der Langzeitversuche.

Analog zu den zuvor beschriebenen Versuchen unter Zug, bleibt auch das bei Auswertungen der Schubversuche bereits beobachtete Phänomen im Vergleich zu den Prony-Reihen erhalten: Das PUR der Schubprobekörper zeigt eine generell höhere Steifigkeit als die restlichen Probekörper. Dies wurde bereits auf Unterschiede in der Herstellung zurückgeführt. Die einzelnen Versuche deuten nach ihrer Verschiebung durch den gefundenen ZTV-Ansatz ebenfalls eine Kurve an. Sie entspricht in ihrer Form den Prony-Reihen, liegt zu diesen aber durch die höheren Steifigkeit der Probekörper parallel verschoben. So können dennoch sowohl die für das PUR gefundenen Prony-Reihen, als auch das ZTV-Gesetz deutlich bestätigt werden.

Wie zu Beginn dieses Abschnitts gezeigt, konnten aus den Speichermodul-Masterkurven der D-TFS-Versuche Prony-Parameter ermittelt werden, die eine Spektral-Darstellung der Relaxationsfunktion des PUR im Zeitbereich ermöglichen (s. Anhang AI-10). Die gefundenen Prony-Reihen wurden mit den unabhängig voneinander durchgeführten Kriech- und Relaxationsversuchen unter Zug bzw. Schub der Abschnitte 4.2 und 4.3 verglichen. Abgesehen von geringfügigen und begründbare Abweichungen ergab sich in allen Fällen eine gute Über-

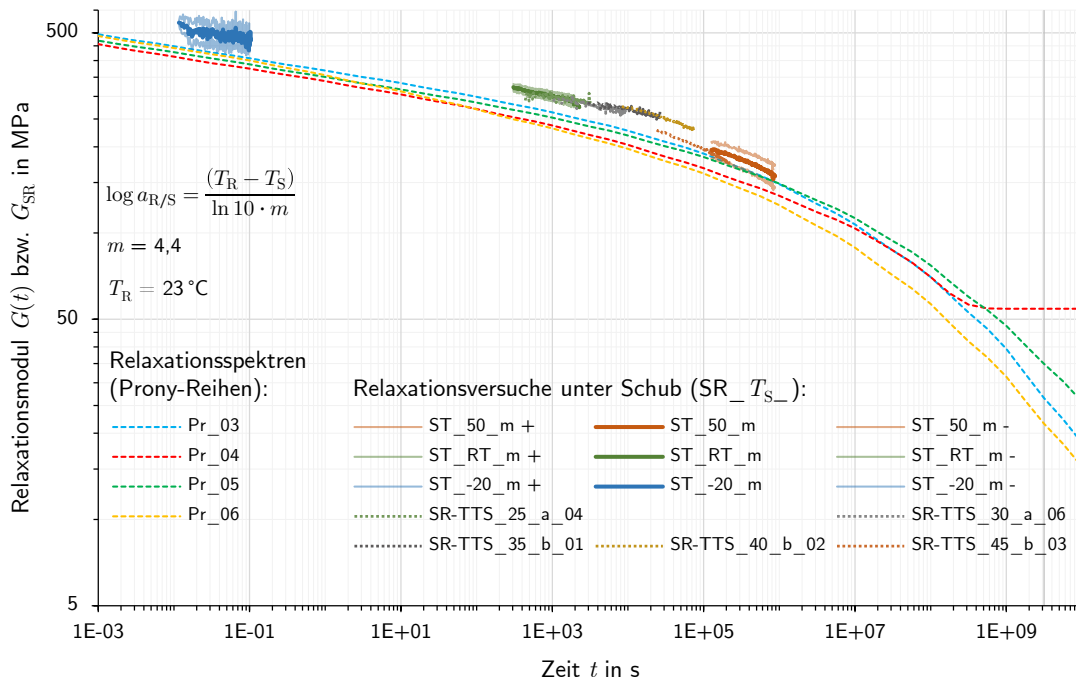


Abbildung 5.12: Vergleich der Prony-Reihen des Relaxationsmoduls aller D-TFS-Versuche mit den verschobenen Kurzzeit-Relaxationsversuchen unter Schub bei verschiedenen Temperaturen (SR-TTS) und den Steifigkeitsversuchen gleicher Art (ST), welche im Vorfeld der Langzeit-Relaxation durchgeführt wurden (Aufgrund ihrer Vielzahl wird für die ST-Versuche die jeweilige Mittelwertkurve mit \pm Standardabweichung angegeben)

einstimmung. Auf diese Weise konnten nicht nur die ermittelten Prony-Parameter bestätigt werden, sondern auch der zuvor bereits in Abschnitt 5.1 gefundene Zusammenhang zur Beschreibung der ZTV. Trotz Vernachlässigung der Langzeit-Relaxationsversuche unter Schub, stützen die Versuchsergebnisse diejenigen der DMTA und die daraus ermittelten Prony-Reihen bis zu einer Zeit von annähernd $t \approx 6 \cdot 10^8$ s.

Betrachtet man die Masterkurven des Speichermoduls aus den D-TFS-Versuchen ebenfalls als durch die anderen Versuche bestätigt, stützen diese die Prony-Reihen darüber hinaus bis zu einer Zeit von etwa $t \approx 1 \cdot 10^{11}$ s. Dabei beträgt die geringste durch die D-TFS-Versuche bestätigte mittlere Steifigkeit $G(1 \cdot 10^{11} \text{ s}) \approx 10 \text{ MPa}$, was ca. 3% der von SPS Technology (2002) angegebenen Kurzzeit-Steifigkeit des PUR entspricht. Aus den Untersuchungen von SPS Technology (2012a) ist außerdem bekannt, dass das PUR auf seinem gummielastischen Plateau noch eine Steifigkeit von etwa 7 MPa besitzt (vgl. Abb. 2.14). Der sich aus den Anpassungen der Prony-Reihen ergebende Wert für die Gleichgewichtssteifigkeit von $G_e \approx 6,5 \text{ MPa}$ kann daher als realistisch eingestuft werden. Der Verlauf der Relaxationsfunktionen zwischen diesen beiden bekannten Steifigkeiten und seine zeitlichen Ausdehnung ist jedoch unbekannt. Für höhere Zeiten $t > 1 \cdot 10^{11}$ s stellen die Prony-Reihen demnach Extrapolationen dar, die sich auf keine experimentellen Werte mehr stützen. Da der Abfall der Steifigkeit in diesem unbekanntem Bereich, bezogen auf die angesprochene Kurzzeitsteifigkeit, jedoch nur noch ca. 1% beträgt, wird die Extrapolation des Verlaufs der Steifigkeit hier als akzeptabel angesehen.

5.3 Ein linear-viskoelastisches Materialmodell für das PUR

In den ersten beiden Abschnitten dieses Kapitels wurden konkrete Ansätze gezeigt, welche geeignet sind die Abhängigkeit des PUR von der Temperatur und der Zeit zu beschreiben. In diesem Abschnitt wird nun aus den beiden Ansätzen ein auf das spezielle PUR im SPS angepasstes Modell formuliert, mit dem dessen Steifigkeit beschrieben werden kann. Es soll dabei nicht nur das in den Versuchen beobachtete Verhalten hinreichend genau abbilden, sondern auch eine verhältnismäßig einfache, geschlossene Anwendung ermöglichen. Dafür wird in den folgenden Abschnitten zunächst aus dem diskreten ein semi-kontinuierliches Relaxationsspektrum entwickelt, in welches danach der Temperaturansatz eingearbeitet wird. Abschließend wird das Modell zur Validierung mit verschiedenen Versuchsergebnissen verglichen.

5.3.1 Ein semi-kontinuierliches Relaxationsspektrum

Im vorherigen Abschnitt wurde das Verhalten des PUR über die Zeit mit diskreten Relaxationsspektren angenähert. Diese basieren auf der bereits vorgestellten Prony-Reihe des verallgemeinerten Maxwell-Modells (vgl. Abschnitt 2.1.3):

$$G(t) = G_e + \sum_{i=1}^n G_i \cdot e^{-t/\lambda_i} \quad (2.8)$$

Die Reihe ist gekennzeichnet durch eine diskrete Anzahl von Relaxationsstärken G_i und -zeiten λ_i , welche im Zuge der in Abschnitt 5.2.1 beschriebenen Funktionsanpassung ermittelt wurden. Wie Tabelle AI-23 vermittelt, kann die Berechnung der Steifigkeit $G(t)$ mit zunehmender Zahl der Prony-Parameter numerisch aufwendig werden, da diese einzeln in der Summe zu berücksichtigen sind. Eine alternative Art der Formulierung wäre ein kontinuierliches Spektrum, wie es bspw. von Schwarzl (1990, S. 144) beschrieben wird. Sowohl die analytische Ermittlung des kontinuierlichen Spektrums, als auch die Berechnung der Steifigkeit daraus ist mathematisch jedoch sehr aufwendig. So müsste für Letzteres stets eine Integration des Relaxationsspektrums in den Grenzen des betrachteten Zeitraums vorgenommen werden. Um besagten Aufwand zu verringern, wird zur Formulierung des Modells daher eine Zwischenform beider Varianten gewählt: Ein diskretes Relaxationsspektrum, bei dem die Prony-Parameter durch eine Funktion angenähert werden und das Spektrum somit semi- (halb-) kontinuierlich machen.

In Abbildung 5.13 sind die in Tabelle AI-23 gezeigten Prony-Parameter aller D-TFS-Versuche und ihre Mittelwerte¹ über der logarithmierten Relaxationszeit aufgetragen. Wie zu erkennen ist, ergibt sich zwischen $\log \lambda = -9$ und $\log \lambda = 9$ ein Bereich, in dem die Parameter G_i nur eine geringe Streuung aufweisen und einen Funktionsverlauf erkennen lassen. Dieser kann über eine Regression mittels Exponentialfunktion angenähert werden, welche im Logarithmischen eine Gerade darstellt und die folgende Form hat.

$$G_i = \bar{G}_{1s} \cdot e^{-(\bar{p} \cdot \log \lambda_i)} \quad (5.17)$$

¹Die Tatsache, dass die Relaxationszeiten in Abschnitt 5.2.1 für alle Versuche gleich gewählt wurden, ermöglicht es, einen Mittelwert über die Relaxationsstärken einer Zeitdekade zu bilden (vgl. Anhang AI-10).

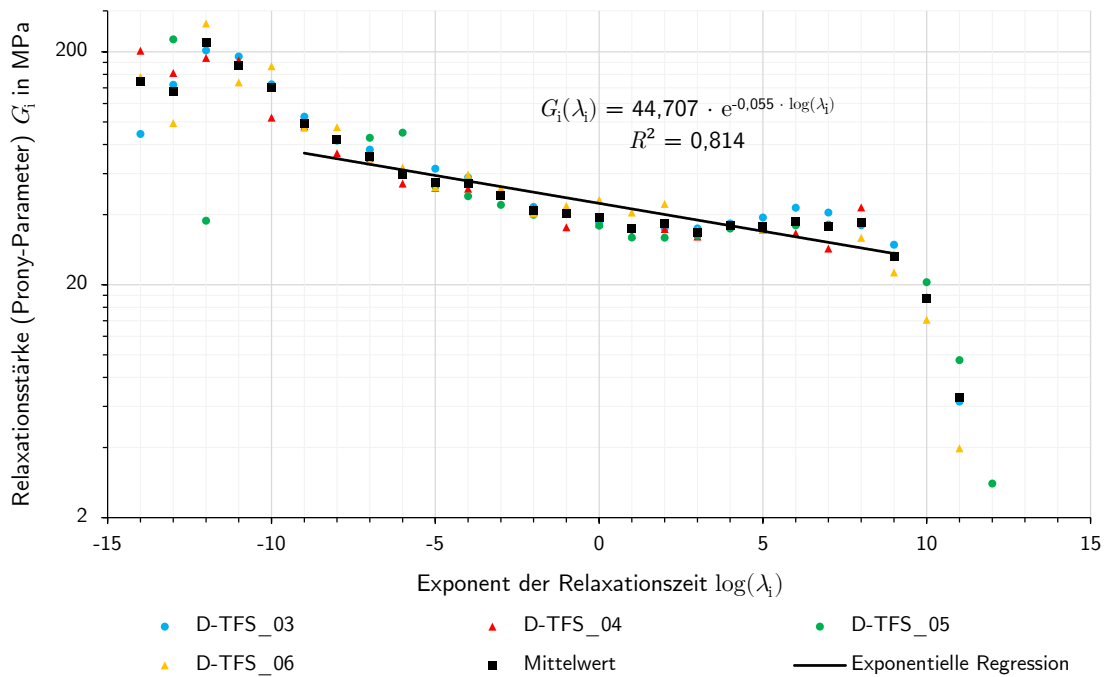


Abbildung 5.13: Vergleich der Prony-Parameter aller D-TFS-Versuche aus Tabelle AI-23 und ihr Mittelwert mit zugehöriger Regression¹ durch eine Exponentialfunktion zwischen $\log \lambda = -9$ und $\log \lambda = 9$

Die mit einem Querstrich versehenen Parameter steuern dabei die Form der Regressionsfunktion für G_i und damit auch wesentlich die Form der schlussendlichen Relaxationsfunktion des Modells. \bar{G}_{1s} ist der Aufpunkt der Regressionsfunktion (vgl. Abb. 5.13), dessen Relaxationszeit $\lambda = 1$ s beträgt. Er beeinflusst die Höhe der Steifigkeit in Form einer vertikalen Verschiebung der Modellfunktion. \bar{p} stellt die Steigung der Regressionsgeraden im logarithmischen Diagramm dar und beeinflusst entsprechend auch die Steigung der Modellfunktion. Eine etwaige Rekalibrierung des Modells kann, neben der bereits mehrfach erwähnten Steifigkeit des Polymers im Gleichgewichtszustand G_e , hauptsächlich über diese beiden Parameter erfolgen.

Die Grenzen des Bereichs in dem die Prony-Parameter bestimmt werden haben ebenfalls Einfluss auf die Modell-Parameter. Sie sollten daher schon vor der Ermittlung der Relaxationsstärken G_i so gewählt werden, dass sie entweder zu dem zu rekalibrierenden Modell passen oder zumindest alle im gleichen Bereich liegen (vgl. Tab. AI-23). Für eine Rekalibrierung des hier gezeigten Modells sollten die Prony-Parameter entsprechend für Relaxationszeiten von etwa $\min \lambda = 1 \cdot 10^{-15}$ s bis $\max \lambda = 1 \cdot 10^{12}$ s bestimmt werden. Im vorliegenden Fall werden aus der Regression die Parameter zu $\bar{G}_{1s} = 45$ MPa und $\bar{p} = 0,05$ gewählt. Daraus ergibt sich die folgende Näherungsfunktion für die Relaxationsstärken G_i :

$$G_i \approx 45 \cdot e^{-\left(\frac{\log \lambda_i}{20}\right)} \quad (5.18)$$

¹Wie schon in Abbildung 5.2, handelt es sich bei R^2 um das *Bestimmtheitsmaß* der gezeigten Regression.

Dieser Ansatz wird, der Nummerierung von Tabelle AI-23 folgend, zwischen $\lambda_3 = 1 \cdot 10^{10}$ und $\lambda_{27} = 1 \cdot 10^{-14}$ s verwendet. Die Grenzen des Bereichs der Regression werden dabei bewusst überschritten. Wie sich in Abschnitt 5.3.3 zeigen wird, entstehen durch die Abweichungen zu den numerisch ermittelten Prony-Parametern außerhalb des Bereichs zwar Ungenauigkeiten. Diese wären für niedrige Zeiten jedoch noch größer, wenn die Parameter für $\log \lambda_i < -9$ zu $G_i = 0$ gesetzt würden. Auf die Verwendung der Relaxationsstärken mit $\log \lambda_i > 10$ wird hingegen verzichtet, da sich diese auf den gesamten Verlauf der Relaxationsfunktion auswirken und mit der verhältnismäßig einfachen Regression nicht korrekt zu erfassen sind. Ihre Wirkung würde über die e-Funktion somit stark überschätzt. Über den angegebenen Bereich zur Verwendung der Näherung für die Prony-Parameter ergibt sich durch Einsetzen der Gleichung 5.18 in 2.8 die neue Prony-Reihe mit $G_\infty \equiv G_e$ zu:

$$G(t) = G_e + 45 \cdot \sum_{i=3}^{27} e^{-\left(\frac{\log \lambda_i}{20} + \frac{t}{\lambda_i}\right)} \quad (5.19)$$

Die Steifigkeit im Gleichgewichtszustand ergibt sich wie zuvor bereits angegeben zu $G_e = 6,5$ MPa. Um die Handhabung der Gleichung zu vereinfachen, wird die Abhängigkeit der Summe von der in Tabelle AI-23 verwendeten Nummerierung für i entfernt. Stattdessen werden die Zählvariable und davon abhängige Ausdrücke direkt durch die Dekaden $\log \lambda_i$ der betrachteten Relaxationszeiten ausgedrückt:

$$G(t) = 6,5 + 45 \cdot \sum_{k=-14}^{10} e^{-\left(\frac{k}{20} + \frac{t}{10^k}\right)} \quad (5.20)$$

Gleichung 5.20 stellt eine allgemeine Form des Modells für $T_R = 23^\circ\text{C}$ dar, mit der bspw. eine grafische Darstellung der Steifigkeitsentwicklung wie in Abbildung 5.16 möglich ist. Praktisch werden jedoch meist nur einzelne Werte der Funktion zu bestimmten Zeitpunkten gesucht.¹ Gerade für hohe Zeiten ist es nicht notwendig die komplette Summe zu berechnen, da alle Summanden zwei Dekaden unterhalb des betrachteten Zeitpunktes keine Anteile mehr zur Steifigkeit liefern. Gleichung 5.20 kann daher für den händischen Einsatz optimiert und in folgende Form gebracht werden:

$$G(t) = 6,5 + 45 \cdot \sum_{k=\lfloor \log t - 2 \rfloor}^{10} e^{-\left(\frac{k}{20} + \frac{t}{10^k}\right)} \quad (5.21)$$

Dabei wird die untere Grenze der Summe aus dem abgerundeten Wert des Exponenten der gesuchten Zeit t in s ermittelt und aus oben genanntem Grund um zwei reduziert. Für die Ermittlung der Steifigkeit nach 100 a $\approx 3,15 \cdot 10^9$ s müssen so bspw. nicht 25, sondern nur 3 Summanden berechnet und addiert werden.

¹In der Ermittlung der Verformungen über die Lebensdauer einer Brücke wird bspw. in der Regel nur der Zeitpunkt am Ende von deren Lebensdauer betrachtet (vgl. Abschnitt 7.3.3).

5.3.2 Der Relaxationsmodul in Abhängigkeit von der Zeit und der Temperatur

Nachdem die Modellfunktion des Relaxationsmoduls $G(t)$ für das PUR in Abhängigkeit von der Zeit hergeleitet wurde, soll nun dessen Abhängigkeit von der Temperatur implementiert und das Modell graphisch dargestellt werden. Bereits in Abschnitt 5.1 wurde gezeigt, dass der Einfluss der Temperatur auf die Relaxationsmechanismen im PUR zwischen -30 und 120°C durch Gleichung 5.2 beschrieben werden kann. Eine Änderung der Temperatur erzeugt analog zur bisher betrachteten Frequenz eine Verschiebung der Relaxationsfunktion über der Zeitachse. Über folgenden Zusammenhang wird die Kurve von einer Referenzzeit t_R bei der Referenztemperatur T_R zur Zeit t_S bei der betrachteten Temperatur T_S verschoben:

$$t_S = \frac{t_R}{a_{R/S}} = t_R \cdot e^{\frac{T_S - T_R}{m}} \quad (5.22)$$

Dieser Zusammenhang kann unter Präzisierung der Parameter in die Relaxationsfunktion 5.20 direkt integriert werden. Dafür wird die Referenztemperatur $T_R = 23^\circ\text{C}$ gesetzt, sodass auch der Index S, der in den vergangenen Kapiteln verwendet wurde, um einen Bezug zu einem Sweep der D-TFS-Versuche herzustellen, fallen gelassen werden kann. Für den Steigungsparameter des ZTV-Gesetzes wird nach Abschnitt 5.1.4 direkt $m = 4,4$ eingesetzt. Die Modellfunktion des Relaxationsmoduls für das PUR in Abhängigkeit von der Zeit und der Temperatur lautet demnach:

$$G(t, T) = 6,5 + 45 \cdot \sum_{k=-14}^{10} e^{-\left(\frac{k}{20} + \frac{t}{10^k} \cdot e^{(T-23)/4,4}\right)} \quad (5.23)$$

Die für die Handrechnung optimierte Gleichung 5.21 ergibt sich analog zu:

$$G(t, T) = 6,5 + 45 \cdot \sum_{k=\lfloor \log t - 2 \rfloor}^{10} e^{-\left(\frac{k}{20} + \frac{t}{10^k} \cdot e^{(T-23)/4,4}\right)} \quad (5.24)$$

Unter dem zusätzlichen Einfluss der Temperatur kann die resultierende Relaxationsfunktion $G(t, T)$, ähnlich dem von Menges (1984, S. 115) gezeigten Prinzip, als Fläche im Zeit-Temperatur-Raum interpretiert werden. Abbildung 5.14 stellt die Modellfläche in erweiterten Grenzen dar. Obwohl diese bei der Bestimmung enger gesteckt waren¹, wird der betrachtete Raum hier erweitert. Dies erfolgt, um die Grenzen der Funktion und ihren Gültigkeitsbereich aufzuzeigen. In Abbildung 5.15 wird die Relaxationsfunktion zusätzlich in Form einer Höhenliniendarstellung gezeigt. Diese ermöglicht es, die Steifigkeit des PUR für einen Zeitpunkt und eine Temperatur auf schnelle Weise durch ablesen zu bestimmen.

In den Abbildungen sind zwei Plateaus in der Fläche zu erkennen, welche unterschiedlich zu bewerten sind. Bei dem unteren bei $6,5\text{ MPa}$ (in Abb. 5.15 o.r.) handelt es sich um das bereits mehrfach angesprochene gummielastische Plateau des PUR. Dieses besitzt einen mechanischen Ursprung und kann als untere Grenze der Steifigkeit des PUR verstanden werden. Eine Anwendung der Relaxationsfunktion in diesem Bereich sollte demnach möglich sein. Dies wird jedoch im nächsten Abschnitt nochmals überprüft werden.

¹Für die Zeit lagen die Grenzen bei $1 \cdot 10^{-14}\text{ s} < t \leq 1 \cdot 10^{10}\text{ s}$ und für die Temperatur bei $-30^\circ\text{C} < T \leq 120^\circ\text{C}$.

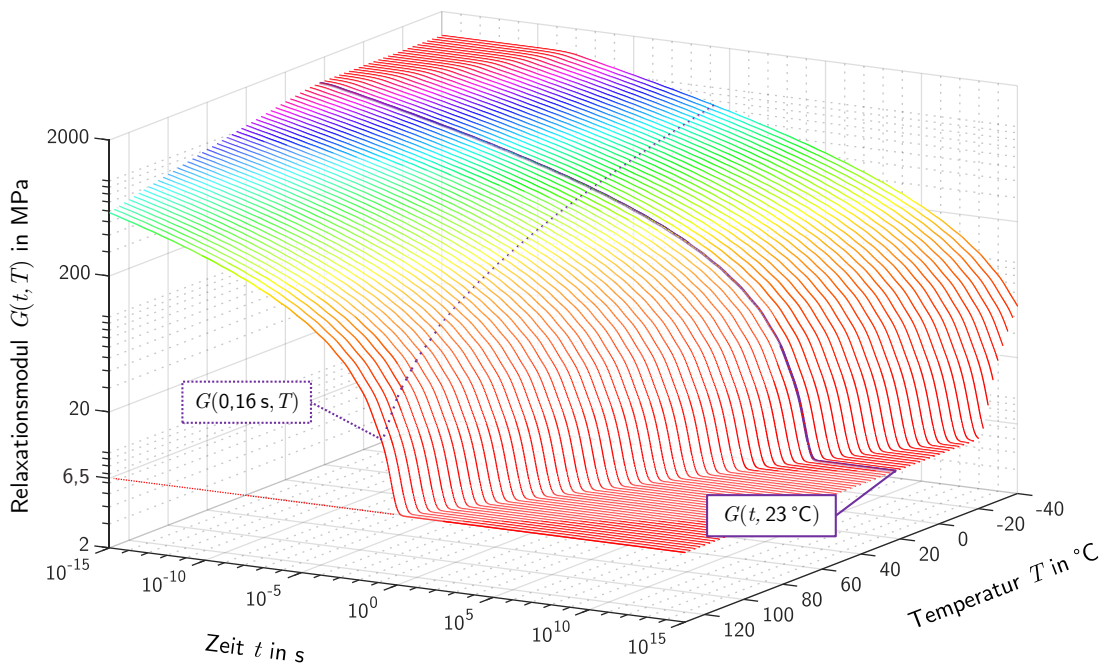


Abbildung 5.14: Die Relaxationsfunktion $G(t, T)$ des PUR im Zeit-Temperatur-Raum

Bei dem oberen Plateau handelt es sich im Gegensatz dazu um eine nicht mechanisch begründbare Eigenheit des Modells. Da dieses in Abschnitt 5.2.1 auf Basis der erwähnten Steifigkeit im Gleichgewichtszustand G_e ermittelt wurde, hängt die Höhe des oberen Plateaus G_{\max}^1 über folgenden allgemeinen Zusammenhang von den Prony-Parametern ab (Schwarzl 1990, S. 181):

$$G_{\max} = G_e + \sum G_i \approx 1330 \text{ MPa} \quad (5.25)$$

Da die Zahl der Prony-Parameter jedoch frei gewählt ist und diese zusätzlich durch einen analytischen Ansatz angenähert wurden, entspricht die Höhe des oberen Plateaus nicht der wahren mechanischen Größe des spontanen *Momentanwerts der Steifigkeit* $G_0 \neq G_{\max}$ (vgl. Schwarzl 1990, S. 136). Vielmehr handelt es sich um einen willkürlichen Wert, welcher aus der kleinsten gewählten Relaxationszeit von $\min \lambda = 1 \cdot 10^{-14} \text{ s}$ für eine Referenztemperatur von $T = 23 \text{ °C}$ resultiert. Hier liegt demnach die Grenze der Gültigkeit des Modells, welche bei einer Verschiebung der Funktion zu längeren Zeiten ebenfalls mit verschoben wird. Auf dem gesamten oberen Plateau besitzt das Modell der Relaxationsfunktion des PUR demnach keine Gültigkeit mehr. Angesichts der unrealistischen Kombination der Eingangsparameter besitzt dieser Bereich jedoch keine praktische Relevanz.

¹Diese wird in einer alternativen Form der Prony-Reihe oftmals als G_0 bezeichnet, was hier aus gegebenem Grund jedoch nicht übernommen wird.

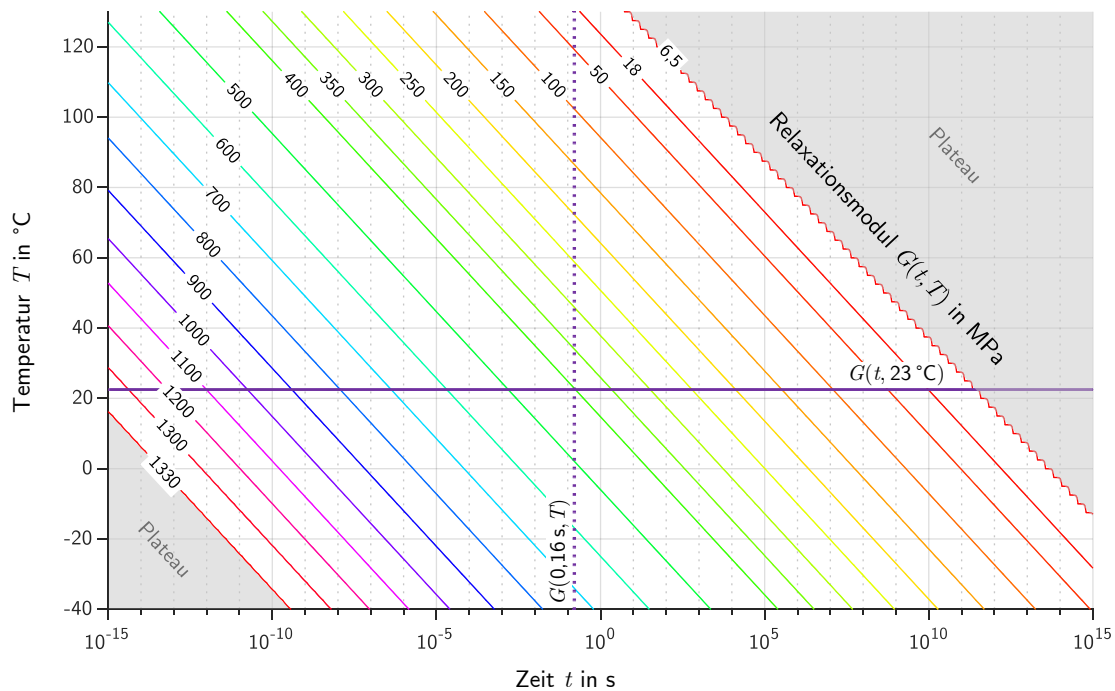


Abbildung 5.15: Die Relaxationsfunktion $G(t, T)$ des PUR dargestellt mit Höhenlinien über der Zeit und der Temperatur

5.3.3 Vergleich und Schlussfolgerungen

Die zuvor entwickelte Modellfunktion des Relaxationsmoduls $G(t, T)$ wird im Folgenden sowohl in der Zeit-Steifigkeits- als auch der Temperatur-Steifigkeits-Ebene verschiedenen Versuchen gegenübergestellt. Die Abbildungen 5.14 und 5.15 zeigen bereits die Vergleichsfunktionen $G(t, 23^\circ\text{C})$ und $G(0,16\text{ s}, T)$ des Modells in der jeweilige Ebene. Der Vergleich über die Temperatur erfolgt dabei nur näherungsweise und auf Basis der grundlegenden Erkenntnis aus Abschnitt 5.2.2, dass im Fall des PUR der Zusammenhang zwischen Zeit und Frequenz vereinfacht nach Gleichung 2.24 angenommen werden kann. Um die Übersicht zu wahren, erfolgen die Vergleiche ausschließlich mit den DMT Analysen. In Abschnitt 5.2.3 wurden diese bereits durch die statischen Versuche bestätigt. Für den Vergleich in der Zeit-Steifigkeits-Ebene wird aus den Prony-Reihen außerdem eine Mittelwertfunktion gebildet, welche als Referenz für das Modell dient.

Abbildung 5.16 zeigt die Prony-Reihen, ihren Mittelwert und die Relaxationskurve des Modells im Vergleich. Zusätzlich ist die Abweichung der Relaxationsfunktion vom Mittelwert angegeben. Das Modell passt im praktisch relevanten Bereich gut zu den Prony-Reihen der Versuche. Zwischen $1 \cdot 10^{-10}\text{ s} < t \leq 6 \cdot 10^9\text{ s}$ betragen die Abweichungen nicht mehr als 6%. Erst oberhalb von etwa $6 \cdot 10^9\text{ s}$ weicht das Modell stärker von den Prony-Reihen ab, da bei dessen Formulierung die Relaxationsstärken mit $-\text{zeiten } \lambda_i > 1 \cdot 10^{10}\text{ s}$ nicht berücksichtigt wurden (vgl. Abb. 5.13). Die Modellkurve fällt daher stärker ab, als dies für die Prony-Reihen der Fall ist und nähert sich schneller der Gleichgewichtsteifigkeit G_e an. Im Vergleich mit den Versuchen in Abschnitt 5.2.3 wurde bereits beschrieben, dass die Prony-Reihen etwa ab $t \geq 1 \cdot 10^{11}\text{ s}$ selbst Extrapolationen darstellen und mit Unsicherheiten behaftet sind. Die stärkeren Abweichungen des Modells für $t > 6 \cdot 10^9\text{ s}$ liegen dem gegenüber auf der sicheren Seite

und sind somit annehmbar. Darüber hinaus ist ohnehin fraglich, ob Zeiten dieser Größenordnung realistisch eine Relevanz haben. So beträgt bei $t = 1 \cdot 10^{10} \text{ s} \approx 317 \text{ a}$ die Abweichung erst ca. -16% . Dieser Zeitraum übersteigt die rechnerische Zielgröße der Lebensdauer einer Brücke von 100 a deutlich und sollte für den Entwurf eines Bauwerks ausreichen.

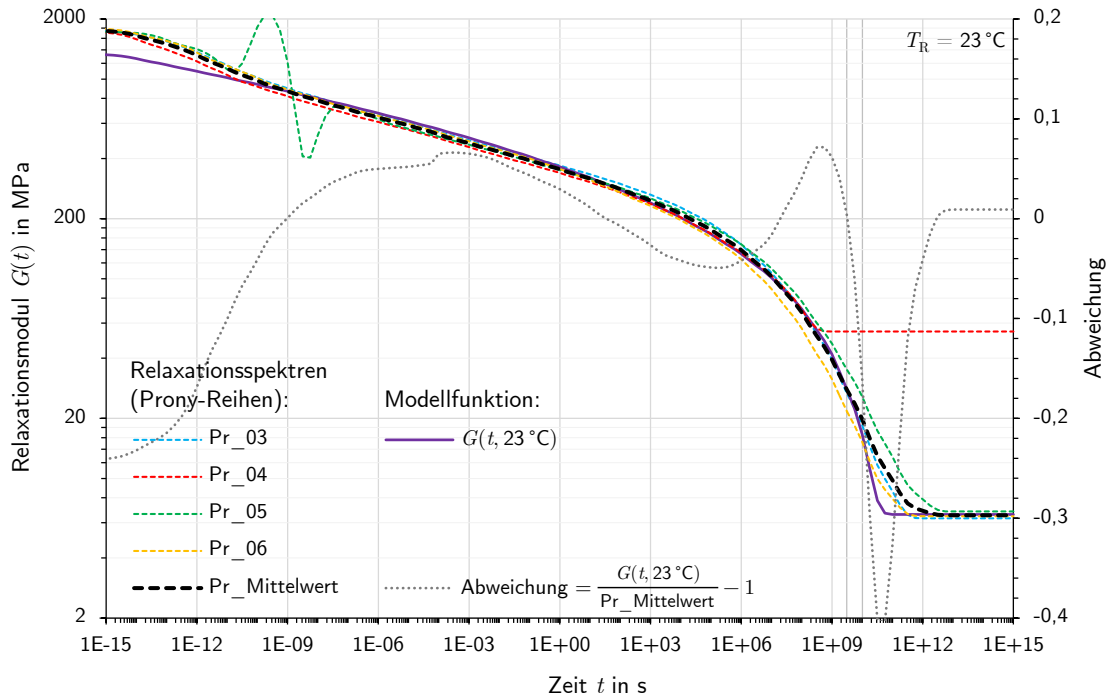


Abbildung 5.16: Vergleich der Modellfunktion $G(t, 23 \text{ °C})$ nach Gleichung 5.23 mit den Prony-Reihen aller D-TFS-Versuche für $T_R = 23 \text{ °C}$ und ihrem Mittelwert

Für kürzere Zeiten $t < 1 \cdot 10^{-10} \text{ s}$ erkennt man oberhalb einer Steifigkeit von $G \geq 1000 \text{ MPa}$ klare Abweichungen des Modells von den Prony-Reihen, welche bei $t \approx 1 \cdot 10^{-12} \text{ s}$ den β -Übergang zeigen. Dies liegt ebenfalls in dem nur groben Modell für die Relaxationsstärken begründet, die in ihrer Verteilung eigentlich auch den β -Übergang erkennen lassen (s. Abb. 5.13). Bei der Annäherung durch die Exponentialfunktion 5.18 wurde dies jedoch nicht berücksichtigt. Der Verlauf des Modells kann den Glasübergang der weichen Phase demnach nicht abbilden. Angesichts der unwahrscheinlichen Randbedingungen für ein Auftreten dieses Falls (vgl. Abb. 5.15), sind aber auch diese stärkeren Abweichungen hinnehmbar. Überführt man bspw. die Zeit wieder überschlägig in eine Frequenz, müsste das PUR in einem Bauteil bei -40 °C immer noch Vibrationen mit $f > 100 \text{ 000 Hz}$ ausgesetzt sein, damit die genannten Abweichungen überhaupt zum Tragen kommen. Für höhere Temperaturen liegt die Frequenz ab der die Ungenauigkeiten auftreten noch höher.

Bisher wurden alle Bemühungen auf die möglichst genaue Abbildung des Verhaltens des PUR in Abhängigkeit von der Zeit konzentriert. Über das eingearbeitete ZTV-Gesetz sollte das Modell aber auch in der Lage sein, dessen Abhängigkeit von der Temperatur bei konstanter Zeit annähernd zu erfassen. Unter Voraussetzung der Anwendbarkeit der vereinfachten Beziehung zwischen Zeit und Frequenz nach Gleichung 2.24, sollten die bei $f = 1 \text{ Hz}$ durchgeführten Temperatur-Sweeps demnach mit dem Modell bei $t = 1/(2\pi \cdot f) = 0,16 \text{ s}$ vergleichbar sein.

Wie der Vergleich mit den Temperatur-Sweep-Kurven der D-TFS-Versuche in Abbildung 5.17 zeigt, liegt die Modellfunktion nah an den Kurven des bereits nachvernetzten PUR (D-TFS_0x-TFS), verhält sich aber immer noch weicher. Dies resultiert aus der Anwendung der Methode 1 zur Erstellung der Masterkurven auf denen die Prony-Reihen und das Modell basieren (vgl. Abschnitt 4.1.2). Es kann demnach nicht berücksichtigen, dass die initiale Steifigkeit in hohen Temperaturen kleiner ist und erscheint gegenüber den Kurven des initialen Speichermoduls (D-TFS_0x-TS) auf den ersten Blick unsicher. Dieser Unterschied gilt jedoch nur für den Vorgang der erstmaligen Temperaturerhöhung.

Wie die Versuche des Abschnitts 4.1.1 zeigen konnten, ziehen erhöhte Temperaturen im PUR eine deutliche Nachvernetzung und damit wiederum eine Steigerung der Steifigkeit nach sich. Infolgedessen sollte sich das PUR bereits im Laufe der ersten moderaten Erhitzung dem Modell annähern. Für die Abbildung von dessen Verhalten in Abhängigkeit von der Temperatur über seine gesamte Nutzungsdauer erscheint das Modell also dennoch geeignet.

Durch den verhältnismäßig einfachen Zusammenhang zur Abbildung des Einflusses der Temperatur (vgl. Abschnitt 5.1.3), verhält sich das Modell von den Anwendungsgrenzen ähnlich wie im Zeitbereich. Es kann ein breiter, praktisch relevanter Bereich abgedeckt werden. An den Übergängen zum gummielastischen Plateau ($T > 120^\circ\text{C}$) und zum Glasbereich der weichen Phase ($T < -30^\circ\text{C}$) verliert das Modell hingegen an Genauigkeit. Eine Anwendung außerhalb der genannten Grenzen ist entsprechend nicht zu empfehlen.

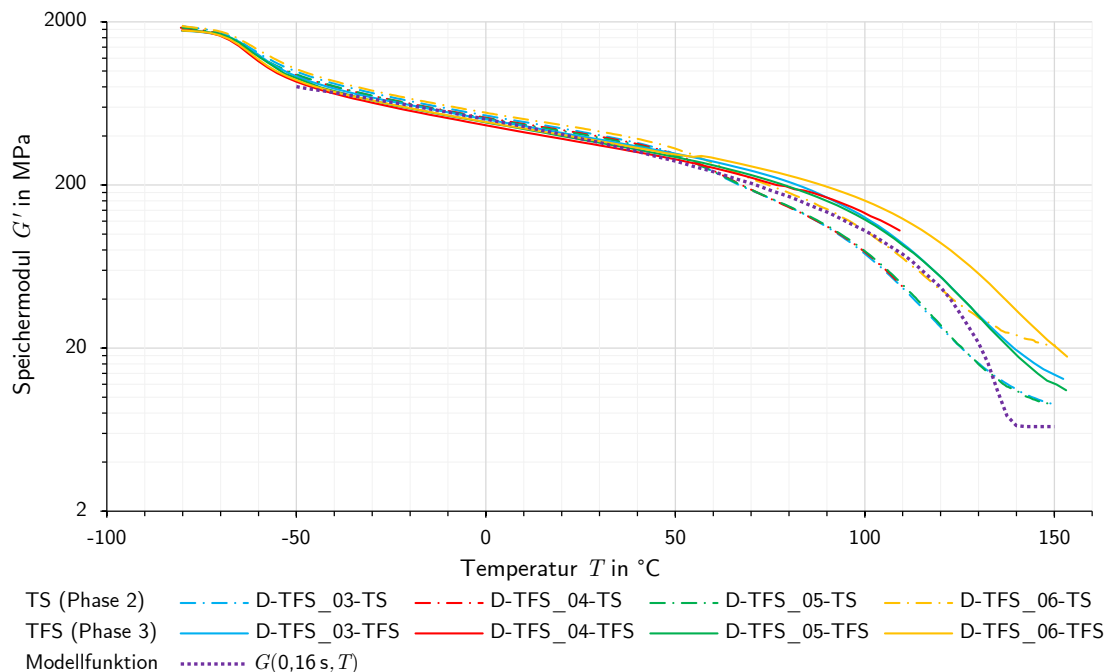


Abbildung 5.17: Vergleich der Modellfunktion $G(0,16\text{ s}, T)$ nach Gleichung 5.23 mit den Temperatur-Sweeps der D-TFS-Versuche analog zu Abb. 4.5 (Angesichts der verschiedenen Temperaturskalen der Versuche wurde auf die Berechnung eines Mittelwerts verzichtet)

Auch im Vergleich mit den ersten D-TS-Versuchen dieser Arbeit und der Literatur in Abbildung 5.18 zeigen sich ähnliche Phänomene wie zuvor beschrieben. Die Versuche, welche alle bereits nachvernetzt sind, verhalten sich analog zu den vorher beschriebenen D-TFS-Versuchen steifer als das Modell (vgl. D-TFS_0X-TFS in Abb. 5.17). Zu den Vergleichsversuchen der Literatur ergeben sich hingegen die gleichen Unterschiede, wie sie bereits in Abschnitt 3.2.3 diskutiert wurden. Die Modellfunktion zeigt, wie auch alle anderen Versuche dieser Arbeit, eine deutlich höhere Steifigkeit im Vergleich zu den Versuchen von Feldmann et al. (2010). Diese wurden aber bereits in Abschnitt 2.2.3 infrage gestellt. Verglichen mit SPS Technology (2012a) beschreibt das Modell ein PUR, das einer Polymerisationstemperatur von mehr als $150\text{ }^{\circ}\text{C}$ ausgesetzt wurde. Wie bereits beschrieben verändert sich das PUR jedoch beim ersten Erhitzen durch das Nachvernetzen nachhaltig und wird steifer. Demnach kann auch hier das Modell trotz der Abweichungen als geeignet angesehen werden, um das Verhalten des PUR nach dem ersten Erhitzungsvorgang in den genannten Anwendungsgrenzen von $-30\text{ }^{\circ}\text{C} < T < 120\text{ }^{\circ}\text{C}$ zu beschreiben.

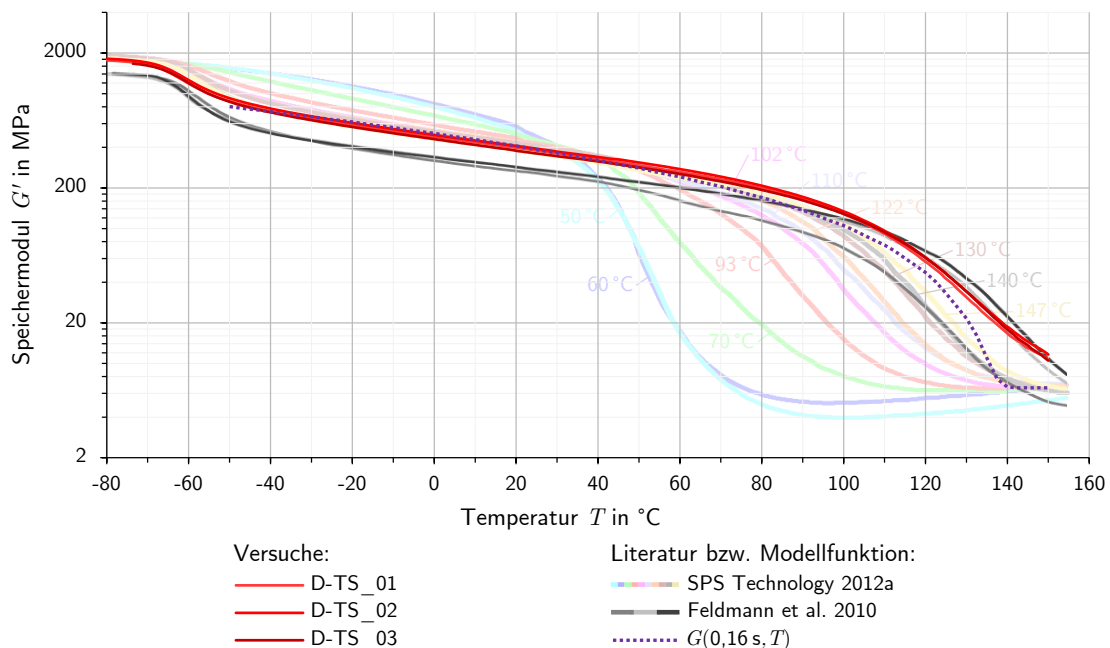


Abbildung 5.18: Vergleich der Modellfunktion $G(0,16\text{ s}, T)$ nach Gleichung 5.23 mit den Temperatur-Sweeps der ersten D-TS-Versuche und den Kurven der Literatur (analog zu Abb. 3.12)

Die Vergleiche bestätigen, dass das entwickelte Modell 5.23 geeignet ist, um das PUR im für die Anwendung relevanten Bereich zu modellieren. Mit seiner Hilfe kann zukünftig die Steifigkeit des PUR diskret in Abhängigkeit von der Zeit und der Temperatur berechnet werden, um das viskoelastische Verhalten des Stoffs zu beschreiben. Dieses finale Ergebnis des ersten Teils vorliegender Arbeit wird im zweiten Teil weiter verwendet, um die Auswirkungen der schwankenden Kernsteifigkeit im SPS auf Ebene der Sandwichbauteile zu untersuchen. Die Zusammenfassung der umfangreichen Erkenntnisse von Teil I erfolgt gemeinsam mit jenen von Teil II am Schluss der Arbeit in Kapitel 8.

Teil II

Das Tragverhalten von Sandwichelementen mit biegesteifen Deckschichten und veränderlicher Kernsteifigkeit unter Biegung

6 Die Berechnung von Sandwichelementen und geeignete Verfahren zur Anwendung auf das SPS mit veränderlicher Kernsteifigkeit

Wie bereits in der Einführung in Kapitel 1 beschrieben, untersucht die vorliegende Arbeit, ob das SPS mit seinem speziellen Kernwerkstoff im Bahnbrückenbau eingesetzt werden kann. Um dies zu beurteilen, bedarf es genauer Kenntnisse über dessen Verhalten in Abhängigkeit von der Temperatur als auch der Zeit. Im ersten Teil dieser Arbeit wurde dafür das spezielle PUR und seine viskoelastischen Eigenschaften bereits eingehend untersucht. Zuletzt wurde daraus ein Materialmodell abgeleitet, welches die Steifigkeit des PUR in Abhängigkeit von der Zeit und der Temperatur charakterisiert.

Im zweiten Teil wechselt die Untersuchung nun von der Werkstoff- auf die Bauteil-Ebene. Hier werden die Auswirkungen der veränderlichen Kernsteifigkeit auf die Tragwirkung im Verbund mit Stahl betrachtet. Da im Rahmen der vorliegenden Arbeit ausschließlich Material- und keine Bauteilversuche durchgeführt wurden, sind die Untersuchungen des zweiten Teils entsprechend alle theoretischer Natur und stützen sich rein auf die Erkenntnisse aus dem ersten Teil und anderen Arbeiten. Für Sandwichbalken mit biegesteifen Deckschichten wird abhängig von deren Dimensionen und unter verschiedenen Randbedingungen analysiert, wie diese auf eine veränderliche Steifigkeit ihres Kerns reagieren.

Bereits in einer früheren Veröffentlichung des Autors konnte gezeigt werden, dass SPS-Elemente in Abhängigkeit ihrer geometrischen Verhältnisse unterschiedlich stark von der Nachgiebigkeit ihres Kerns beeinflusst werden (Händler u. Lange 2019). Im Vergleich zu einem Blech äquivalenter Steifigkeit werden Optimierungspotentiale hinsichtlich Masse und Aufbauhöhe eines SPS-Elements aufgezeigt, welche von einer veränderlichen Kernsteifigkeit mit hoher Wahrscheinlichkeit zusätzlich beeinflusst werden. Neben der Klärung der generellen Frage nach dem Verhalten von SPS unter schwankender Kernsteifigkeit, werden als weiteres Ziel daher Empfehlungen für deren praktische Dimensionierung als Fahrbahnelemente von Bahnbrücken erarbeitet. Bevor eine Studie sich diesen Fragen in allgemeiner Form widmen kann, muss zunächst jedoch geklärt werden, welches Berechnungsverfahren als Instrument für die Betrachtungen geeignet ist. Das aktuelle Kapitel schafft hierfür die notwendigen Grundlagen.

Im ersten Abschnitt wird die Sandwich-Tragwirkung allgemein sowie verschiedene Verfahren zu deren Berechnung vorgestellt und die bisher auf SPS angewendeten Methoden diskutiert. In einer Voruntersuchung an exemplarischen SPS-Elementen werden danach ausgewählte Verfahren hinsichtlich ihrer Eignung und Genauigkeit verglichen. Neben der Wahl eines Verfahrens für die Studie sollen mit dem Vergleich auch geeignete, praktisch relevante Verfahren im Hinblick auf den Entwurf von SPS-Elementen identifiziert werden.

6.1 Sandwichelemente und Verfahren zu deren Berechnung

Zur Beschreibung des Tragverhaltens von Sandwichelementen existieren verschiedene Verfahren, die sich in grundlegenden Annahmen, Detaillierungsgrad und Berechnungsaufwand unterscheiden. In diesem Abschnitt werden ausgewählte, nach aktuellem Stand der Technik und Normung etablierte Verfahren vorgestellt, die für eine Anwendung auf das SPS von Interesse sind. Auch wird ein Überblick über die bisher auf SPS angewendeten Verfahren gegeben und deren Eignung im Hinblick auf den Einsatz des Systems im Bahnbrückenbau diskutiert. Zunächst wird dafür eine Einführung in das Tragprinzip von einachsig abtragenden Sandwichelementen im Allgemeinen gegeben.

6.1.1 Das Tragprinzip von Sandwichelementen

Die Sandwichbauweise ist eine Sonderform der Verbundbauweise und kombiniert in der Regel drei Schichten unterschiedlicher Beschaffenheit zu einem für Biegung optimierten Bauteil. Meist bestehen die äußeren Deckschichten dabei aus einem Material mit hoher Tragfähigkeit, welche durch einen weniger tragfähigen, aber dafür leichteren Kernwerkstoff verbunden werden. So entsteht ein Synergieeffekt bei dem das Bauteil im Verbund tragfähiger und steifer wird als die Summe seiner einzelnen Bestandteile (Jungbluth u. Berner 1986, S. 7 ff.). Die konkreten Erscheinungsformen der Sandwichbauweise sind dabei vielfältig. So werden bspw. die Bestandteile von Verbundglas (VG bzw. VSG), Balkenschichtholz oder der Wellpappe des alltäglichen Paketkarton nach dem Sandwichprinzip kombiniert, um die erwünschten Eigenschaften zu erreichen (Zenkert 1997, S. 11 ff.). In der wohl bekanntesten und mit dem Begriff *Sandwich* meist assoziierten Ausführung, verbindet ein leichter Kern aus Kunststoffhartschaum zwei dünne metallische Deckschichten. Diese Bauweise ist sowohl im Fassadenbau als auch in der Luft- und Raumfahrt weit verbreitet. Das SPS zählt im Sinne dieser Definition mit stählernen Deckschichten und seinem Kern aus massivem PUR, für den isotropes Verhalten vorausgesetzt werden kann, ebenfalls zu den klassischen Vertretern der Sandwichbauweise.

Um ein Bauteil für Biegung zu optimieren, gilt es mit möglichst viel von dessen Querschnittsfläche einen großen Hebelarm auf ihren Gesamtschwerpunkt zu erzeugen, um so seine Biegesteifigkeit zu maximieren. Gleichzeitig sollte der für Biegung unbrauchbare innere Bereich des Querschnitts, bis auf die zur Schubübertragung erforderliche Fläche ausgespart werden, um das Eigengewicht zu minimieren. Im Profil- wie auch im Stahlbau wird dies durch I-förmige Querschnitte erzielt, deren Flansche die Biegesteifigkeit erzeugen und durch den Steg gekoppelt sind (Klein 2013, S. 68 f.). Sandwichelemente funktionieren mit ihren auf Abstand gebrachten Deckschichten nach dem gleichen Prinzip. Im Unterschied zu I-Profilen werden sie jedoch nicht punktuell durch einen Steg, sondern kontinuierlich durch einen Kern aus leichterem Material verbunden. Neben dem Übertrag der Schubkräfte stützt dieser zusätzlich die Deckschichten und wirkt Instabilitäten unter Druckbeanspruchung entgegen. So können mit Sandwichelementen auch flächige Strukturen mit sehr dünnen Deckschichtdicken gebildet werden, ohne die Notwendigkeit zusätzlich aussteifender Strukturen wie z. B. Rippen.

Zur Beschreibung des Tragverhaltens konventioneller Bauteile ist die Anwendung der klassischen *Biegetheorie* in den meisten Fällen gerechtfertigt. Sowohl in klassischen Verbund-¹ als auch monolithischen Stahl- oder Betonbauteilen ist die Schubsteifigkeit gegenüber der Biegesteifigkeit meist sehr viel dominanter. So können bspw. für einen Balken die Anteile aus

¹Gemeint ist hier die im Bauwesen verbreitete Verbundbauweise aus Stahlbeton und Baustahl.

der Schubverzerrung an der Gesamtverformung vernachlässigt und dieser als *schubstarr* betrachtet werden. Sein Querschnitt bleibt in jedem Punkt gerade und auch zu der verformten Stabachse stets senkrecht,¹ wie an den lokalen Koordinatensystemen in Abbildung 6.1 links zu erkennen ist. (Gross et al. 2007, S. 115)

Für Sandwichelemente ist diese Annahme in der Regel nicht gerechtfertigt, da sie sich aufgrund des hohen Steifigkeitsunterschieds zwischen Deckschichten und Kern wesentlich schubweicher verhalten. Zusätzlich zu jenen aus Biegung, treten nicht zu vernachlässigende Verformungen des Bauteils aus der Schubverzerrung des Kerns in Erscheinung (s. Abb. 6.1 m.).² Die Querschnittsebene bleibt infolge dessen nicht gerade und es können sich unterschiedliche Verdrehungen³ der jeweiligen Schicht ergeben (s. Abb. 6.1 r.). Einachsig abtragende Sandwichelemente verhalten sich unter Biegung also ähnlich wie Träger im sogenannten Teilverbund, deren Flansche nachgiebig miteinander gekoppelt sind. Die Schnittgrößen und Spannungen innerhalb des Trägers verteilen sich entsprechend der Steifigkeiten auf die verschiedenen Bestandteile, da diese aus Verträglichkeit alle die gleiche Durchsenkung erfahren. Sandwichelemente sind demnach im Allgemeinen innerlich statisch unbestimmt⁴. (Stamm u. Witte 1974, S. 93)

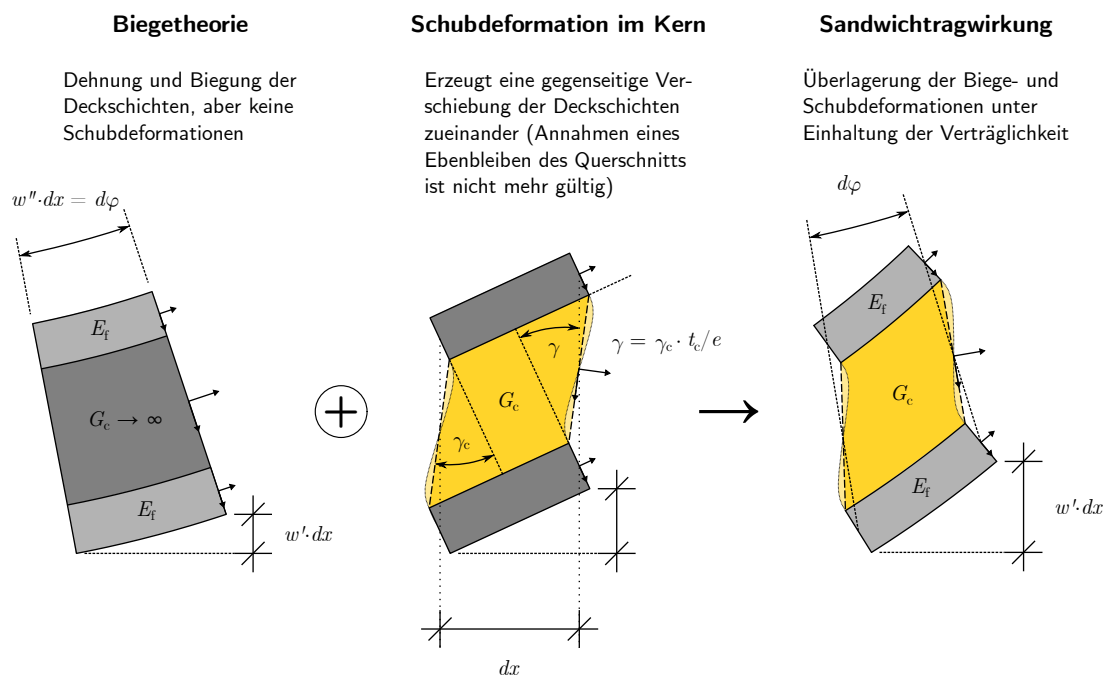


Abbildung 6.1: Seitenansicht eines frei geschnittenen Elements eines Sandwichbalkens mit seinen Deformationsanteilen getrennt (l. bzw. m.) und in Überlagerung (r.) angelehnt an Plantema (1966, S. 2) und Allen (1969, S. 43)

¹Diese Annahmen bezeichnet man als *Bernoulli-Hypothese*. Balken welche diese erfüllen werden auch als *Euler-Bernoulli-Balken* bezeichnet. (Öchsner 2016, S. 5 f.)

²Für die Deckschichten wird in den gängigen Sandwichtheorien die Schubverzerrung weiterhin vernachlässigt.

³Dieser Deformationsanteil wird meist vernachlässigt indem ein in Dickenrichtung unnachgiebiger Kern vorausgesetzt wird. Die Deckschichten bleiben dann stets parallel. (Stamm u. Witte 1974, S. 82)

⁴Für dünne Deckschichten im Vergleich zum Kern verliert sich dieser Zustand, weshalb bspw. die konventionellen Sandwichelemente des Fassadenbaus mit ebenen und quasi ebenen Deckschichten als innerlich statisch bestimmt behandelt werden.

Um die innere Verteilung der Schnittgrößen und Spannungen zu erläutern, zeigt Abbildung 6.2 exemplarisch den Querschnitt eines Sandwichbalkens, welcher mithilfe der Sandwichtheorie für biegesteife Deckschichten¹ berechnet wurde (Stamm u. Witte 1974, S. 82 ff.). Die Schubsteifigkeit S beeinflusst zusammen mit der Spannweite l maßgeblich die Größe der durch den Kern übertragenen Querkraft Q_S . Diese ermöglicht erst, dass sich in den Deckschichten Normalkräfte N_i aus Biegung und entsprechende Membranspannungen $\sigma_{S,i}$ aufbauen. Die Deckschichten folgen aus Verträglichkeit der Durchsenkung des Balkens. Mit zunehmender Dicke t_i steigt ihr Vermögen selbst Querkräfte Q_i zu übertragen, welche ebenfalls Biegemomente M_i und -spannungen σ_i induzieren. Die aus den Teilschnittgrößen entstehenden Spannungen summieren sich in den Deckschichten zu den letztendlich resultierenden Spannungsverläufen auf. Während die betragsmäßig größten Biegespannungen stets am Rand des Gesamtquerschnitts zu finden sind, können die maximalen Schubspannungen in Abhängigkeit von deren Dicke auch innerhalb der Deckschichten liegen (vgl. Abb 7.1). Da in der Regel aber die Schubtragfähigkeit des Kerns bzw. der Grenzschicht wesentlich geringer ist als die der Deckschichten, wird für eine Querkraftbemessung meist die Kernschubspannung τ_S maßgebend.

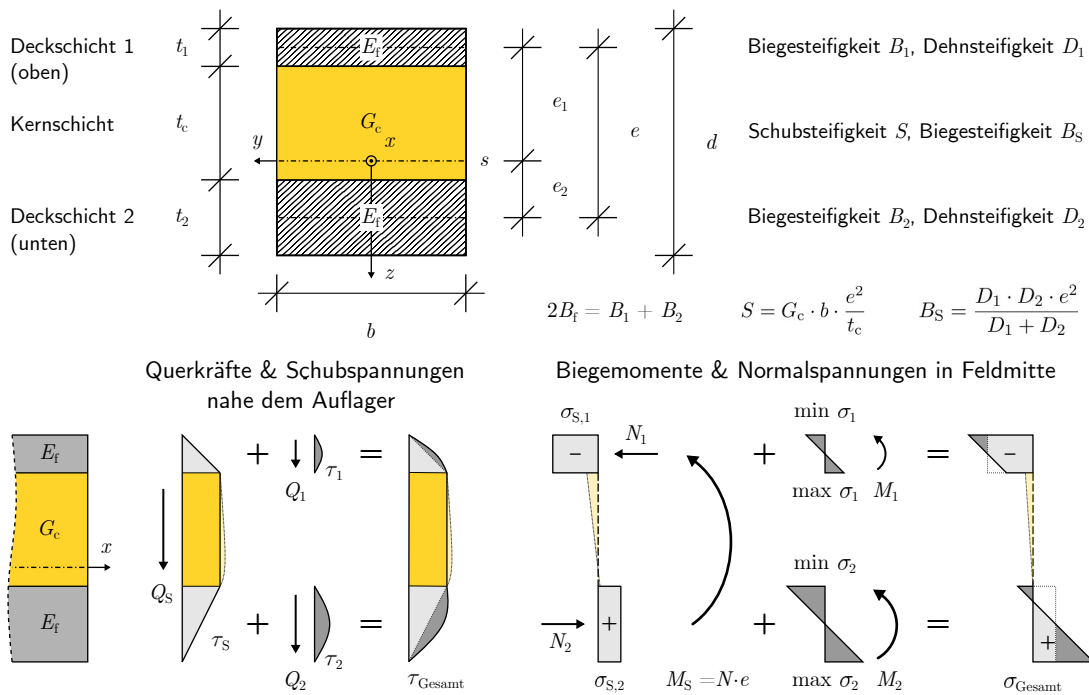


Abbildung 6.2: Querschnitt eines Sandwichbalkens mit seinen Abmessungen und Eigenschaften in der verwendeten Nomenklatur und in ihm herrschende Schnittgrößen und Spannungen, getrennt nach Sandwichtragwirkung (gelb und hellgrau) und Biegetragwirkung der Deckschichten (dunkelgrau) in Anlehnung an Stamm u. Witte (1974, S. 85)

Die Bedingungen der Verträglichkeit herrschen nicht nur im Bezug auf die gemeinsame Durchsenkung aller Teile des Sandwichs, sondern an jeder Stelle im Element. Wie in Abbildung 6.1 an den beiden rechten Teilstücken angedeutet, wird der Kern streng genommen nichtlinear verzerrt, weil innerhalb und zwischen den Schichten ohne Versagen keine abrupten Deformationsänderungen auftreten können. Diese Schubverzerrungen haben wiederum einen parabol-

¹Für die Grundlagen, Annahmen und Vereinfachungen der Berechnungstheorie sei auf Abschnitt 6.1.2 verwiesen, in dem diese genauer erläutert werden.

schen Verlauf der Kernschubspannung τ_S und lineare Normalspannungen im Kern zur Folge, die in Abbildung 6.2 angedeutet sind (vgl. auch Klein 2013, S. 198). Ihre Größe und Auswirkung sind jedoch nur gering, da die Steifigkeit der Kernschicht in der Regel sehr viel kleiner ist als die der Deckschichten¹. Zugunsten einer einfacheren Berechnung werden sie daher in der Regel vernachlässigt (Allen 1969, S. 10 ff.) und eine geradlinige Schubverzerrung des Kerns wird vorausgesetzt (vgl. Abb. 6.1). Die Verträglichkeit wird dadurch nur in geringem Maße hinsichtlich der Schubgleitung im Kern verletzt, sodass sich lokale Knicke an den Schichtgrenzen zeigen. Hier treten aber auch regulär durch die wechselnde Steifigkeit Unstetigkeiten auf, wie bspw. im Schubspannungsverlauf.

Aus dem beschriebenen Tragverhalten mit seiner Redundanz durch die verschiedenen Anteile lässt sich bereits erahnen, dass eine Steifigkeitsänderung in einem der Teile zu Umlagerungen und damit Änderungen der Schnittgrößen und Spannungen führt. Verringert sich bspw. die Steifigkeit des Kerns G_c , tun es ihr alle Schnittkräfte und Spannungen aus der Sandwichtragwirkung gleich (Index S in Abb. 6.2). Die Schubsteifigkeit S und damit auch die Gesamtsteifigkeit des Sandwichs sinken und dessen Durchsenkung steigt. Die Biegesteifigkeit der Deckschichten $B_1 + B_2 = 2 B_f$ bleibt hingegen unverändert, sodass ihr Anteil an der Gesamtsteifigkeit steigt. Infolge dessen ziehen sie einen größeren Teil der wirkenden Gesamtschnittgröße auf sich und die Sandwichschnittgrößen sinken (Stamm u. Witte 1974, S. 106). In welchem Maß eine Umlagerung der Schnittgrößen von statten geht und sich die Gesamtverformung des Bauteils erhöht, hängt von den geometrischen Verhältnissen im Querschnitt, den Steifigkeiten der Materialien und der Spannweite des Systems ab. So können die Umlagerungen z. B. nur auftreten, wenn das dafür notwendige Maß an Redundanz im Sandwichelement gegeben ist. Werden die Deckschichten im Vergleich zum Kern sehr dünn ausgestaltet, ist deren Eigenbiegesteifigkeit $2 B_f$ im Vergleich zu der des Sandwichs B_S sehr viel kleiner und dieser ist innerlich annähernd statisch bestimmt. Ein Absinken der Kernsteifigkeit G_c führt dann fast ausschließlich zum Anwachsen der Durchsenkung, während sich die Schnittgrößen im Sandwich kaum ändern (Jungbluth u. Berner 1986, S. 409 f.). Dieses Verhalten allgemein und im Bezug auf SPS näher zu untersuchen ist Gegenstand von Kapitel 7.

Die unterschiedlichen Eigenschaften und vor allem Steifigkeiten von Deckschichten und Kern bedingen nicht nur die globale Tragwirkung der Sandwichelemente unter Biegung. Sie beeinflussen bzw. verursachen auch andere, für die Sandwichbauweise charakteristische Phänomene. Da die Sandwichbauweise in den meisten Fällen mit der Intention der Gewichtsoptimierung angewendet wird (Zenkert 1997, S. 4 ff.), werden vor allem dünne Deckschichten zusammen mit einem möglichst leichten und damit auch verhältnismäßig weichen Kern verbaut. Diese Kombination begünstigt sowohl das *Knittern*, ein kurzweiliges Stabilitätsversagen der gedrückten Deckschicht, als auch Eindrückungseffekte unter konzentrierten Lasten, wie bspw. bei der Lagerung oder an Befestigungen. Diese Themen sind bis heute Gegenstand der Forschung an Sandwich-Fassadenelementen (siehe z. B. Kilian 2017 oder Nelke 2018).

In beiden Phänomenen wird die Fließgrenze der im Sandwich verwendeten Werkstoffe nicht erreicht. Es treten aber starke Verformungen auf, welche sowohl die Gebrauchstauglichkeit als auch die Tragfähigkeit der Elemente einschränken. Sie werden daher im Fassadenbau auch im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit (Abkürzung: *SLS* für engl.: *Serviceability Limit State*) betrachtet und nachgewiesen (DIN EN 14509, E.5). Weitere Versagensarten sind das Fließen einer Deckschicht, der Bruch der Kernschicht unter Schub, sowie das Versagen der Verbunds zwischen Deckschicht und Kern (Delamination) (Stamm u. Witte 1974, S. 5).

¹Dieser Steifigkeitsunterschied lässt die für ein Sandwich kennzeichnenden Schubverzerrungen erst entstehen.

Der zweite Teil vorliegender Arbeit betrachtet vordergründig die Auswirkungen einer veränderlichen Kernsteifigkeit auf das elastische Tragverhalten von Sandwichelementen mit biegesteifen Deckschichten im Gebrauchszustand, um daraus Empfehlungen für den Einsatz von SPS in Fahrbahnen von Bahnbrücken abzuleiten. Die weiteren Effekte hinsichtlich der Versagensarten und Tragfähigkeiten stehen hingegen nicht im Fokus der Untersuchung und werden rechnerisch entsprechend nicht beachtet. Lediglich mittelbaren Auswirkungen der schwankenden Kernsteifigkeit werden in diesem Kontext qualitativ diskutiert, wie bspw. deren Auswirkungen auf die elastische Tragfähigkeit der Deckschichten anhand der Spannung.

6.1.2 Verfahren zur Berechnung von einachsig abtragenden Sandwichelementen

Zur Berechnung von Sandwichelementen stehen nach dem aktuellen Stand der Technik verschiedene Verfahren zur Verfügung, welche die zuvor beschriebene Tragwirkung unterschiedlich detailliert erfassen können. So berücksichtigen bspw. Sandwichtheorien höherer Ordnung die Nachgiebigkeit des Kerns in Dickenrichtung (Frostig et al. 1992) oder den nichtlinearen Verlauf der Schubverzerrungen im Kern (Phan et al. 2012). Auch Lösungen für einen zweiachsigen Lastabtrag auf Basis der Plattentheorie haben sich bereits etabliert (Stamm u. Witte 1974, S. 125 ff. und Zenkert 1997, S. 79 ff.). Auf dem Feld der Laminattheorie existieren ebenfalls Ansätze, die eine Schubverzerrung berücksichtigen, wie bspw. die *Refined Zigzag-Theory* (Tessler et al. 2009), die *First Order- (FSDT)* oder die *Higher Order Shear Deformation Theory (HSDT)* (Reddy 2004, S. 187 bzw. 671 ff.). Diese sind von ihrem Wesen jedoch auf Lamine mit einer größeren Zahl an Schichten ausgelegt, was sie für eine Anwendung auf Sandwichelemente unhandlich macht.

Die Anwendung der untersuchten linearen Viskoelastizität zur Berechnung von Sandwichelementen setzt bereits eine Beschränkung von deren Verformung voraus (vgl. Abschnitt 2.1.2). Entsprechend werden die zuvor genannten Theorien höherer Ordnung nicht weiter behandelt. Da für die Bestandteile von stählernen Fahrbahnplatten rechnerisch in der Regel ein einachsiger Lastabtrag angenommen wird, konzentriert sich die weitere Betrachtung auf praktisch relevante Verfahren zur Berechnung ebenso abtragender Sandwichelemente. Dies geschieht auch mit dem Hintergrund, später Empfehlungen für den praktischen Entwurf von SPS-Elementen abzuleiten. Dabei soll der Fokus auf den Auswirkungen der veränderlichen Kernsteifigkeit liegen und nicht auf einem mehraxialen Lastabtrag. Für einen Überblick über weitere Berechnungsverfahren, wird an dieser Stelle auf die Arbeiten von van Straalen (1998) oder Nelke (2018) verwiesen.

Analytisch geschlossene Verfahren

Die analytische Berechnung von Sandwichelementen kann nach verschiedenen Verfahren erfolgen, die sich jedoch alle aus der Sandwichtheorie ableiten. Diese wiederum basiert wie die meisten ingenieurmäßigen Betrachtungen in der Mechanik auf Gleichgewicht und Verträglichkeit. An einem freigeschnittenen, verträglich verzerrten Element eines Sandwichbalkens wird Gleichgewicht formuliert (Stamm u. Witte 1974, S. 17 ff.). Die Schnittkräfte werden über die Querschnittswerte und Materialgesetze des Kerns und der Deckschichten mit den Verzerrungen verknüpft, wobei ausschließlich linear-elastische Materialgesetze zum Einsatz kommen. Wie zuvor bereits beschrieben, wird die Kinematik des Kerns dabei vereinfacht und für die Inkompressibilität sowie eine linearisierte Schubverzerrung angenommen ($\gamma_c = \text{const.}$). Weiter wird vorausgesetzt, dass die auftretenden Verformungen so klein sind, dass aus Ver-

drehungen entstehende Verschiebungen linearisiert berechnet werden können ($\sin \alpha \approx \alpha$). Aus diesem Grund wird auch von der *linearen* Sandwichtheorie gesprochen, obwohl diese ebenso Berechnungen nach Theorie II. Ordnung erlaubt. Um die Lösung des entstehenden Systems aus Differentialgleichungen (DGLn) so einfach wie möglich zu halten, werden außerdem über die Länge des Sandwichbalkens konstante Querschnittsgrößen und eine gleichbleibende Normalkraft vorausgesetzt.

Die Zusammenhänge zwischen der Kinematik und den Schnittgrößen am Element bezogen auf dessen Schwerachse ergeben sich als Zusammensetzung der bekannten Terme aus der Balkentheorie (Gross et al. 2007, S. 107 ff.) und den Anteilen aus der Tragwirkung des schubelastischen Verbunds (vgl. Abb. 6.2). Für genauere Angaben zu den Steifigkeiten des Querschnitts siehe Anhang AII-2 bzw. (Stamm u. Witte 1974, S. 22 u. 83 ff.).¹

$$\begin{aligned} N &= N_1 + N_2 &= (D_1 + D_2) \cdot u' \\ Q &= Q_S + Q_1 + Q_2 &= S \cdot \gamma - (B_1 + B_2) \cdot w''' \\ M &= M_S + M_1 + M_2 &= B_S \cdot \gamma' - B \cdot w'' \end{aligned} \quad (6.1)$$

Nach Bilden des Gleichgewichts ($\sum M = 0$ und $\sum V = 0$) am verzerrten Element ohne Normalkraftbelastung ($N = 0$), ergeben sich für äußerlich statisch bestimmte Sandwichbalken mit biegesteifen Deckschichten die folgenden DGLn (Stamm u. Witte 1974, S. 87):

$$\begin{aligned} -\frac{B_1 + B_2}{S} \cdot w^{IV} + \frac{B}{B_S} \cdot w'' &= -\frac{M}{B_S} - \frac{q}{S} \\ -\frac{B_1 + B_2}{S} \cdot \gamma'' + \frac{B}{B_S} \cdot \gamma &= \frac{Q}{S} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Wie bereits erwähnt, kommen in der Praxis aber auch häufig Sandwichelemente mit dünnen Deckschichten zum Einsatz. Für diesen Sonderfall können die gezeigten Zusammenhänge vereinfacht werden, indem man die Eigenbiegesteifigkeiten der Deckschichten vernachlässigt $B_1 = B_2 = B_f = 0$ wodurch die Gesamtbiegesteifigkeit $B = B_S$ rein aus der Sandwichtragwirkung resultiert. Die DGLn 6.2 ergeben sich dann zu (Stamm u. Witte 1974, S. 23):

$$w'' = -\frac{M}{B_S} + \frac{Q'}{S} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{Q}{S} \quad (6.3)$$

In der Literatur werden oftmals beide Ansätze behandelt und als *Sandwichtheorie mit dicken Deckschichten* (Gl. 6.2) bzw. *Sandwichtheorie mit dünnen Deckschichten* (Gl. 6.3) bezeichnet. Im Rahmen dieser Arbeit werden sie zur besseren Unterscheidung nach den Tragmechanismen ihrer Deckschichten mit *SST (Sandwich-Schalen-Theorie)* für die Sandwichtheorie dicker Deckschichten und *SMT (Sandwich-Membran-Theorie)* für die Sandwichtheorie dünner Deckschichten abgekürzt.²

¹Die lineare Sandwichtheorie wird von Stamm u. Witte (1974) ausführlich behandelt. Auf eine abermalige, detaillierte Herleitung wird an dieser Stelle daher verzichtet. Es werden lediglich einzelne, dem Verständnis nach Ansicht des Autors zuträgliche Zusammenhänge gezeigt.

²Im Sinne der statischen Definition können *Schalen* auf Biegung und Normalkraft beansprucht werden, während *Membrane* biegeweich sind und nur Normalkräfte übertragen können (Klein 2013, S. 74).

Für einfache Systeme, Randbedingungen und Belastungsszenarien wurden die gezeigten DGL-Systeme der SST und SMT bereits gelöst und die Verformungsfunktionen ermittelt. Stamm u. Witte (1974, S. 29 bzw. 93 ff.) zeigen sowohl für dicke (SST) als auch für dünne Deckschichten (SMT) detaillierte Lösungen, während Zenkert (1997, S. 66 ff.) sich auf die Darstellung von Durchsenkungsfunktionen für Balken mit dünnen Deckschichten (SMT) beschränkt.

Die hier gezeigten Formen der DGL-Systeme 6.2 und 6.3 können nur auf statisch bestimmte Systeme angewendet werden, da zu ihrer Lösung die Verläufe der Gesamtschnittgrößen $M(x)$ und $Q(x)$ bekannt sein müssen. Die allgemeinen DGLn zur Berechnung statisch unbestimmter Systeme werden von Stamm u. Witte (1974) an jeweiliger Stelle ebenso gegeben. Deren Lösung ist jedoch mit mehr Aufwand verbunden, da ihre Ordnung jeweils um zwei größer ist, was vor allem die Bestimmung des Partikuläranteils aus der Last erschwert (Finck von Finckenstein et al. 2006, S. 50 ff.).¹

Die Berechnung statisch bestimmter Systeme mit der SMT lässt sich noch weiter vereinfachen, da Sandwichelemente mit biegeschlaffen Deckschichten innerlich statisch bestimmt sind. So können die Schnittgrößen direkt einem Teil des Querschnitts zugeordnet werden, was bereits an der ersten DGL 6.3 zu erkennen ist. Der Kern mit seiner Schubsteifigkeit S trägt die Querkraft und die aus den Steiner-Anteilen der Deckschichten entstehende Sandwichbiegesteifigkeit B_S übernimmt das Moment (vgl. auch Abb. 6.2). Die Gesamtdurchsenkung eines Sandwichbalkens ergibt sich als Summe der getrennt ermittelbaren Durchsenkungen $w = w_M + w_Q$ aus Biege- und Schubtragwirkung.² Diese *Methode der Partialdurchsenkungen* existiert ebenso für zweiachsig abtragende Sandwichplatten mit dünnen Deckschichten (s. bspw. Stamm u. Witte 1974, S. 138 ff. oder Zenkert 1997, S. 95 ff.). Deren Lösung ist durch die zusätzliche Dimension und die damit einhergehenden Freiheitsgrade jedoch aufwendiger als ihr Pendant am Sandwichbalken.

Demgegenüber ist es laut Stamm u. Witte (1974, S. 88 f.) für Sandwichelemente mit biegesteifen Deckschichten nicht möglich, deren Verformungsanteile getrennt zu ermitteln. Aufgrund ihrer inneren statischen Unbestimmtheit ist die Verteilung der Schnittgrößen auf die Bestandteile unbekannt (z. B. wie viel der Gesamtquerkraft über die Deckschichten übertragen wird, vgl. Abb. 6.2). Wölfel (1987) präsentiert dafür ein überschlägiges Verfahren, das auf einem von Möhler (1956) für den Holzbau entwickelten Ansatz beruht.³ Zunächst wird eine Steifigkeitsziffer k_W bestimmt (s. Gl. 6.4),⁴ welche das Verhältnis der über Biege- und Schubtragwirkung erzeugten Sandwichsteifigkeit beschreibt. Da Letztere nicht nur von der Sandwichbiegesteifigkeit B_S und der Schubsteifigkeit S , sondern auch durch den Verlauf der Schnittgrößen über die Systemlänge beeinflusst wird, reicht die Berechnung über die Querschnittswerte allein nicht aus. Sie muss deshalb nach dem *Prinzip der virtuellen Kräfte* (Abkürzung: *PdvK*) erfolgen:

$$k_W = \frac{w_{S,Q}}{w_{S,M}} = \frac{B_S}{S} \cdot \frac{\int_l Q \bar{Q} dx}{\int_l M \bar{M} dx} \quad (6.4)$$

¹Für die im Rahmen dieser Arbeit betrachteten Systeme wurden die DGLn 6.2 verwendet und gelöst. Die äußere Schnittgrößenverteilung wurden nötig vereinfacht über Tabellen bzw. unter Ausnutzung von Symmetriebedingungen bestimmt (s. Abschnitt 7.1).

²Dies kann bspw. auf einfache Weise mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte erfolgen (Goris 2012, S. 4.35 ff.).

³Das Verfahren geht von den gleichen Annahmen aus, wie sie bereits für die SST beschrieben wurden (lineare Elastizität, geradlinige Schubverzerrung im Kern, kleine und linearisierte Verformungen).

⁴Wölfel (1987) benennt die Steifigkeitsziffer ursprünglich nur mit k , da im Rahmen dieser Arbeit aber verschiedene Variablen k in Erscheinung treten, wird zur besseren Unterscheidung das Symbol k_W verwendet.

Für den gelenkigen Einfeldträger präsentiert Wölfel (1987) Steifigkeitsziffern k_W für mehrere Belastungsfälle und die Krümmung aus einer Temperaturdifferenz über die Elementhöhe. Nach Zerlegung der Gesamtdurchsenkung $w = w_D + w_S$ in die Traganteile aus Deckschichtbiegung und Sandwichtragwirkung mit $w_S = w_{S,M} \cdot (1 + k_W)$, lassen sich diese ineinander einsetzen und daraus ein Verhältniswert β_0 bestimmen (s. Gl. 6.5). Dieser beschreibt den Anteil der Deckschichtbiegesteifigkeit B_D ¹ an der Gesamtbiegesteifigkeit B . β_0 ist somit für innerlich statisch unbestimmte Systeme in der Lage die Verteilung der Schnittgrößen auf die verschiedenen Traganteile darzustellen. Äußerlich muss das System dafür aber zwingend statisch bestimmt sein. Im Fall innerlicher sowie äußerlicher statischer Bestimmtheit wird $\beta_0 = 0$ und das Verfahren geht in die Methode der Partialdurchsenkungen über.

$$\beta_0 = \frac{B_D}{B_D + \frac{B_S}{(1+k_W)}} \quad (6.5)$$

Mithilfe von β_0 werden sodann die Verformung, Schnittgrößen (wie hier beispielhaft die Momente) und daraus die Spannungen in den Querschnittsteilen berechnet.

$$M_D = M \cdot \beta_0 \quad \text{und} \quad M_S = M \cdot (1 - \beta_0) \quad (6.6)$$

Berner (1998) greift das Verfahren auf und erweitert das Repertoire an Steifigkeitsziffern k_W für Sandwich-Durchlaufsysteme über zwei und drei Felder gleicher Spannweite mit biegeschlafenen Deckschichten². So lassen sich auch für diese praktisch relevanten Fälle zumindest für innerlich statisch bestimmte Sandwichelement die wesentlichen Zustandsgrößen überschlägig bestimmen. Ein Superponieren verschiedener Lastfälle ist mit dem Verfahren generell nicht möglich (Lange u. Berner 2020, S. 944), da die zugrunde liegende Steifigkeitsziffer einer Schnittgröße auch von der ursächlichen Belastung und ihrer Form abhängt (Wölfel 1987). Für die Ermittlung der Schnittgrößen und Spannungen einfacher Systeme und Lasten hat sich das Verfahren jedoch bewährt. Es ist entsprechend in vielen Literaturquellen (bspw. bei Goris 2012, S. 8.153 oder Davies 2001, S. 211 ff.), als auch in der Normung zu finden (bspw. in DIN EN 14509 oder ASTM E1300).

Numerische Verfahren

Werden die Systeme oder Belastungszustände komplizierter, kommen die analytischen Verfahren schnell an ihre Grenzen oder die Berechnung wird sehr aufwendig. Für manche Sandwichelemente (bspw. im Fassadenbau) existieren Spezialprogramme, die ein erweitertes Spektrum an Möglichkeiten bieten, praktisch aber nicht jedem Anwendenden zur Verfügung stehen (Lange u. Berner 2020, S. 945). Zur Berechnung von allgemeinen Sandwichelementen mit komplizierteren Randbedingungen bleibt entsprechend meist nur der Rückgriff auf numerische Verfahren. Auch hier existieren verschiedene Möglichkeiten, von denen nur einige hier vorgestellt werden.

¹Wölfel (1987) definiert B_D als die Summe aus den Eigenbiegesteifigkeiten beider Deckschichten. Um den Bezug zur Quelle zu behalten wird diese Schreibweise hier übernommen. In den restlichen Ausführungen der vorliegenden Arbeit wird selbiger Wert hingegen als das doppelte der mittleren Eigenbiegesteifigkeit der Deckschichten $2B_f$ definiert (vgl. Anhang AII-2.1).

²Berner (1998) zeigt auch einen Ansatz für Zweifeld-Systeme mit biegesteifer oberer Deckschicht. Dabei handelt es sich aber um einen Spezialfall, der außer in Sandwich-Dachelementen nur selten zu finden ist.

Schwarze (1984) entwickelte ein Verfahren, welches auf den zuvor gezeigten DGLn basiert und im Prinzip einen Zwischenweg der Methode der finiten Elemente (FEM) und einer analytischen Lösung nach der SST darstellt. Der zu berechnende Sandwichbalken wird dabei in endlich viele Teilstücke zerlegt, auf denen seine Zustandsfunktionen ungestört und stetig verlaufen. Als Ansatzfunktionen für deren Elementsteifigkeitsmatrix werden allgemeine Lösungen der DGLn der SST mit noch unbekanntem Integrationskonstanten verwendet. Die Teilstücke werden mittels Übergangsbedingungen verknüpft und die einzelnen Matrizen zu einer Systemmatrix zusammengesetzt. Unter Zuhilfenahme der Anfangswerte der Randelemente wird diese dann gelöst und die unbekanntem Integrationskonstanten der Elemente bestimmt. Sobald die Konstanten bekannt sind, können diese wiederum in die einzelnen Elementmatrizen eingesetzt werden, um deren Verformungsverläufe, Schnittgrößen und Spannung zu ermitteln.

Mit dem Verfahren ist eine Berechnung von Sandwichelementen sowohl mit dicken als auch dünnen Deckschichten, komplizierteren Randbedingungen und Belastungen allgemein möglich. Es muss dafür jedoch durch den Anwender selbst mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms oder Computeralgebrasystems implementiert werden¹. Dabei steigt der Aufwand deutlich mit zunehmender Komplexität des Systems bzw. der Belastung. Gerade weil dessen Diskretisierung auch unter Berücksichtigung von lastinduzierten Unstetigkeiten erfolgen muss.

In der praktischen Anwendung wird man daher in der Regel auf vorhandene Berechnungsprogramme auf Basis der FEM zurückgreifen. Auch hier stehen dem Anwender mehrere Möglichkeiten zur Verfügung Sandwichelemente abzubilden, die mit unterschiedlich hohem Aufwand in der Modellierung und Berechnungszeit einhergehen (s. bspw. Abb. 6.3). Der höchste Aufwand entsteht, wenn das Sandwichelement dreidimensional und vollständig aus Volumenelementen dargestellt werden soll. Diese Modellierungsart empfiehlt sich in der Regel nur, wenn ein hoher Detaillierungsgrad gewünscht ist. In einer leichten Abstrahierung dieser räumlichen Variante können die Deckschichten als Schalenelemente abgebildet werden, was die zu erzeugenden FE-Knoten bereits deutlich reduziert. Dabei muss jedoch vorab kritisch geprüft werden, ob die mit einer zentrischen Modellierung der Schalenelementen einhergehende Verfälschung der Bauteil- bzw. Kerndicke vernachlässigt werden kann. Unter Umständen muss den Elementen der Deckschichten ein innerer Versatz bzw. eine Exzentrizität zugewiesen werden.²

Eine stärker abstrahierte Art der Berechnung, welche praktisch die wahrscheinlich höchste Relevanz hat, stellt die *Fachwerkanalogie* dar. Diese wurde bereits von Davies (1986) beschrieben und zuletzt von Naujoks u. Misiak (2015) zur Anwendung auf Sandwich-Fassadenelemente diskutiert. Dabei wird ein Sandwichbalken mithilfe eines konventionellen Stabwerksprogramms durch einen ebenen Fachwerkträger abgebildet. Dessen durchgehender Ober- und Untergurt bilden dabei die Deckschichten und werden mit deren wahren Querschnittsparametern modelliert. Die Pfosten des Fachwerks bilden dehnstarre Koppelstäbe ($E_P \rightarrow \infty$) mit Gelenken an ihren Enden.³ Der Kern wird durch dehnelastische Diagonalen abgebildet, welche einen Ersatzquerschnitt der Fläche A_D in Abhängigkeit von den Kerneigenschaften und dem Pfostenabstand a zugewiesen bekommen (s. Gl. 6.7 bzw. Abb. 6.3). Dabei kann der Ersatzsteifigkeit E_D des Materials der Diagonalen im Modell durch den Anwender festgelegt werden (für die restlichen Formelzeichen siehe Abb. 6.2).

¹Dem Autor sind derzeit keine kommerziellen Programme auf Basis des Verfahrens bekannt.

²Die Auswirkungen dieses Versatzes auf die Ergebnisse werden unter anderem in Abschnitt 6.2 betrachtet.

³Alternativ kann ein Rautenfachwerk ohne Koppelstäbe verwendet werden (vgl. Naujoks u. Misiak 2015).

$$A_D = \frac{G_c \cdot b \cdot \sqrt{e^2 + a^2}^3}{2 E_D \cdot a \cdot t_c} \quad (6.7)$$

Hierin unterscheiden sich die Erläuterungen der Autoren zu dem Verfahren. Davies (1986) ermittelt den Querschnitt A_D wie hier angegeben mit der wahren Dicke der Kernschicht t_c im Nenner. Naujoks u. Misiak (2015) hingegen verwenden stattdessen den inneren Hebelarm e zwischen den Deckschichten. Dies ist darauf zurückzuführen, dass sie hauptsächlich Sandwichelemente mit dünnen Deckschichten betrachten. Es wird zwar auch ein einseitig biegesteifes Dachelement berechnet. Dessen Hochsickenabstand ist aber verhältnismäßig groß, sodass der Hebelarm e nur geringfügig größer wird als die Dicke t_c . Für die Berechnungen der vorliegenden Arbeit wird aufgrund der zu erwartenden Verhältnisse im Querschnitt des SPS die Form der Gleichung 6.7 nach Davies (1986) verwendet.

Als stärkste Abstrahierung bieten einige FE-Programme auch die Möglichkeit, den Aufbau einer ganzen Sandwichplatte oder eines Laminats mit nur einem Schalenelement abzubilden. Dies beherrschen z. B. die Elemente SHELL91 und SHELL99 von ANSYS, oder das Modul *RF-Laminate* im Softwarepaket RFEM des Herstellers Dlubal. Die Verwendung dieser Elemente ist jedoch nicht immer möglich, da sie zwangsläufig an die Verwendung eines dreidimensionalen Schalenmodells gekoppelt sind. Auch sind sie mechanisch weniger zugänglich wie bspw. das Fachwerkmodell und erfordern spezielle Kenntnisse beim Anwender.

6.1.3 In bisherigen Arbeiten angewendete Verfahren zur Berechnung von SPS-Elementen

In vielen der bisherigen Forschungsarbeiten zum SPS wurden unter anderem auch Berechnungen zu Bauteilen des Systems durchgeführt. Nachfolgend soll ein Überblick über die eingesetzten Verfahren in jenen Arbeiten gegeben werden, welche sich vorrangig mit der Biegung von SPS-Elementen beschäftigen. Für weitere Angaben zu den wichtigsten Arbeiten sei auf Abschnitt 1.2.2 verwiesen.

In einem Katalog provisorischer Entwurfs-Regeln schlagen Kennedy et al. (2005) zwei Möglichkeiten der Berechnung für SPS-Elemente vor. Deren Tragfähigkeit soll nach der Fließlinientheorie für ein- oder zweiachsig abtragende Platten bestimmt werden. Als Widerstandsgröße wird dafür die vollplastische Momententragfähigkeit des Deckblechpaares vorgeschlagen. Die Schubtragfähigkeit des Kerns bleibt jedoch unberücksichtigt. Für Berechnungen mit der FEM wird gefordert, dass diese geometrisch nichtlinear mit einem nichtlinearen Materialgesetz für die Deckbleche und ausreichend feiner Vernetzung erfolgen sollen. Hier gehen die Autoren vermutlich davon aus, dass die FEM hauptsächlich zur Ermittlung der Traglasten von SPS-Platten unter Membranspannungen genutzt wird.

Für seine Nachrechnungen von Versuchen an Fahrbahnelementen, als auch des Gesamtbauwerks der Shenley-Brücke verwendet Martin (2005) die FEM. Dabei bildet er die SPS-Deckplatte mit Volumenelementen ab und alle anderen Bauteile wie Quer- und Längsträger mit Stabelementen. Der Fokus seiner Betrachtungen liegt jedoch stets auf dem Vergleich des gesamten Bauteils oder der Brücke mit der FEM. Die Tragwirkung des SPS auf Biegung allein wird trotz seiner detaillierten Modellierung nicht betrachtet.

Harris (2007, S. 109 ff.) beschäftigt sich in seiner Arbeit ebenfalls mit der Fahrbahn der Shenley-Brücke. Er führt sowohl analytisch als auch mittels FEM Berechnungen zur zweiachsigen Biegetragwirkung einer SPS-Platte durch. In der FEM verwendet er dafür das bereits angesprochene Element SHELL91 in ANSYS. Analytisch berechnet er das SPS sowohl als schubstarres Laminat, als auch mit der räumlichen Sandwichtheorie dünner Deckschichten nach Zenkert (1997, S. 95 ff.). Ein Vergleich zwischen der FEM und der Laminat- bzw. Sandwichtheorie wird jedoch nicht gezeigt. Die Anwendung der Theorie mit biegeschlaffen Deckschichten erscheint angesichts einer Deckblechdicke von $t_f = 8$ mm bei einer Kerndicke von $t_c \approx 35$ mm fragwürdig, vor allem unter dem Gesichtspunkt, dass auf Basis der berechneten Deckblechspannungen Nachweise gegen Ermüdung geführt werden.

In den Richtlinien von Schiffs-Klassifizierungsgesellschaften finden sich ebenfalls Hinweise zur Berechnung von SPS-Elementen. In der DNVGL-CG-0154 werden auch die Gleichungen der zweiachsigen SMT nach Zenkert (1997, S. 95 ff.) zitiert, jedoch keinerlei Hinweis auf eine etwaige Notwendigkeit der Berechnung nach der SST gegeben. Die Mindestdicke der Deckbleche wird nach der Richtlinie zu $t_f \geq 3$ mm festgelegt. Je nach Kerndicke t_c erscheint auch hier für größere Blechdicken eine Anwendung der SMT fragwürdig. Bei Lloyd's Register wird eine Formel und Hilfstabellen zur Berechnung der Biegespannung in den Deckblechen gegeben, die jedoch weder hergeleitet noch referenziert wird. Weiter finden sich Anforderungen an die FE-Modellierung von SPS-Elementen. Dabei wird vorgegeben, dass der Kern aus Volumen- und die Deckbleche aus Schalenelementen modelliert werden sollten.

In ihren Untersuchungen zum Einsatz des SPS in Form von Hohlplatten (vgl. Abschnitt 1.2.2), diskutieren Feldmann et al. (2010) nicht nur die Möglichkeiten zur Berechnung des speziellen Verbundquerschnitts, sondern zeigen auch einige der im vorherigen Abschnitt vorgestellten Verfahren. Dabei stellen sie die Notwendigkeit zur Berücksichtigung der Biegesteifigkeit der Deckbleche fest. Dies ist in sofern bemerkenswert, da die untersuchten Deckbleche dünner ausfallen als bei anderen Arbeiten, in denen die SMT angewendet wird. Für die Berechnung der Hohlplatten zeigen sie eine Abwandlung des Ansatzes von Möhler (1956) zur Berechnung von Balken mit Schubelastischem Verbund, die dem bereits vorgestellten Verfahren von Wölfel (1987) ähnelt. Diese Berechnungen zum elastischen Verbund werden mit FEM-Simulationen verglichen. Dafür kommen in ANSYS Volumenelemente für das PUR zum Einsatz und Schalenelemente für die Bleche. Der Vergleich zeigt, dass das angewendete Verfahren geeignet ist um das Tragverhalten des elastischen Verbunds annähernd abzubilden. Es werden noch weitere Berechnungen zur Quertragwirkung der Hohlplatten angestellt, welche für die vorliegende Arbeit jedoch keine Relevanz haben.

Teixeira de Freitas et al. (2011) zeigt erstmals Biegeversuche an SPS-Balken unter verschiedenen Temperaturen. Die Versuche rechnet sie mithilfe von experimentell ermittelten Materialkennwerten (vgl. Abschnitt 2.2.2) sowohl mit der FSDT als auch der FEM nach. In Letzterer verwendet sie ein Volumenmodell mit feiner Vernetzung. Im Vergleich der Ergebnisse stimmt die FSDT nur in den Mittellinien der Deckbleche mit den Versuchen überein. Dies begründet sich dadurch, dass die FSDT als Unterart der *Equivalent Single Layer Theory* (ESL) (Reddy 2004, S. 112) die Eigenschaften des Sandwichs über dessen gesamte Höhe verschmiert. Die Nachrechnung mit der FSDT verhält sich demnach ähnlich einem Timoshenko-Balken mit dem E -Modul der Deckbleche und dem Schubmodul des Kerns. Dementgegen kann die FEM die Versuche in guter Näherung abbilden. Teilweise auftretende Unterschiede werden von Teixeira de Freitas et al. (2011) auf Effekte aus der Belastungsgeschwindigkeit auf den PUR-Kern zurückgeführt, welche in der Nachrechnung nicht berücksichtigt werden.

Belbute et al. (2012) entwickeln darauf aufbauend ein finites Stabelement für das SPS, welches die Darstellung eines Sandwichsbalkens als eindimensionalen Stabzug erlaubt. Die Elementsteifigkeit leiten sie aus einer Kombination von Ansätzen aus der bereits erwähnten Laminattheorie ab. Für die Deckschichten kommt die FSDT zum Einsatz während für den Kern die HSDT verwendet wird. Wie ein Vergleich mit den Experimenten von Teixeira de Freitas et al. (2011) zeigt, kann das neue finite Element die Bedingungen in Sandwichelementen größerer Spannweite abbilden. Für geringe Spannweiten jedoch, in denen die Schubdeformationen des Kerns dominieren, treten sowohl zum Experiment als auch zu dem volumetrischen Referenzmodell der FEM deutliche Abweichungen auf. Aufgrund dieser Tatsache und da das Element noch keine praktische Relevanz hat wird es nicht weiter betrachtet.

6.1.4 Die Berücksichtigung des Einflusses einer veränderlichen Kernsteifigkeit

Zuvor wurden die Verfahren zur Berechnung von Sandwichelementen allgemein vorgestellt, ohne dabei auf eine veränderliche Kernsteifigkeit einzugehen. Zu deren Berücksichtigung bestehen verschiedene Möglichkeiten, von denen die meisten nicht direkt an ein Berechnungsverfahren gekoppelt sind. Dieser Abschnitt betrachtet diese verschiedenen Möglichkeiten daher losgelöst.

Stamm u. Witte (1974, S. 70 ff.) berücksichtigen ein Kriechen der Kernschicht und deren zeitlich veränderliche Verzerrung direkt im Gleichgewicht, welches den DGLn zugrunde liegt. Dabei verwenden sie für die Beziehung zwischen Spannung und Verzerrung im Kern das Vier-Parameter-Modell von Burgers unter einer zeitlich bekannten Belastungsfunktion (vgl. Abschnitt 2.1.3). Daraus entsteht eine direkte Abhängigkeit von der Zeit für das Gleichgewicht am freigeschnittenen Element wodurch die DGLn 6.2 und 6.3 zu sogenannten Integro-differentialgleichungen werden. Deren Lösung gestaltet sich gerade für statisch unbestimmte Sandwichelemente schwierig, weshalb für diesen Fall die Berechnung nach dem Superpositionsprinzip des Kraftgrößenverfahrens vorgeschlagen wird. Unabhängig von der Handhabung der statischen Unbestimmtheit ergeben sich am Ende Funktionen für die Verformungen, Schnittgrößen und Spannungen in Abhängigkeit von der Zeit.

Trotz ihres allgemeinen Charakters ist die Methode von Stamm u. Witte (1974) praktisch nur eingeschränkt anwendbar. Sie setzt voraus, dass der maßgebende Belastungsverlauf von vornherein bekannt ist und als Funktion der Zeit ausgedrückt werden kann. Bei einer Tragwerksberechnung müsste die Überlagerung aller Lastfälle in der maßgebenden Kombination also bereits vor der eigentlich Berechnung erfolgen. Angesichts der in der Praxis stark fragmentierten Lastfälle mit stellenweise unterschiedlichen Belastungszeitpunkten erscheint dies sehr umständlich. Jungbluth u. Berner (1986, S. 412 f.) schlagen vor, dass für abschnittsweise konstante Belastungen bei Gültigkeit der Beziehung¹ $J_c(t) \cdot G_c(t) \approx 1$ der zeitabhängige Schubmodul $G_c(t)$ direkt in die Berechnungsgleichungen für den Sandwichbalken eingesetzt wird. Die Ermittlung der maßgebenden Kombination erfolgt erst danach, durch Superposition der zeitlich veränderlichen Verformungen und Schnittgrößen aus den einzelnen Lastfällen. Ein ähnliches Vorgehen hat sich bspw. in der praktischen Berechnung von Verbundtragwerken unter Einfluss von Kriechen und Schwinden nach dem sogenannten Gesamtquerschnittsverfahren bewährt (vgl. Roik et al. 1993, S. 574 ff.).

¹Wie in Teil I gezeigt werden konnte, ist dies für das PUR im SPS der Fall (vgl. Abschnitt 5.2.3).

Voraussetzung für die Anwendung der Methode ist jedoch die Einhaltung der Grundsätze der linearen Viskoelastizität für den Kernwerkstoff (vgl. Jungbluth u. Berner 1986, S. 414 und Abschnitt 2.1.2). Nur mit Gültigkeit des Korrespondenzprinzips kann der Relaxationsmodul $G(t)$ des Kernwerkstoffs überhaupt in der Berechnung für den Schubmodul G_c nach der Elastizitätstheorie eingesetzt werden. Die korrekte Kombination der zeitabhängigen Zustandsfunktionen aus einzelnen Laststufen ist nur möglich, wenn außerdem das Boltzmann'sche Superpositionsprinzip Gültigkeit besitzt. Das ZTV-Prinzip ist als einziger Grundsatz nicht zwingend erforderlich. Es kann jedoch die Berechnungen erleichtern, da die Auswirkungen von Temperatur und Zeit dann unter Umständen durch einen vereinfachten Lastfall gemeinsam betrachtet werden können (vgl. auch Abschnitt 6.2.1).

Das beschriebene Vorgehen hat sich bspw. zur Berücksichtigung des Kriechens in der Berechnung von Sandwichelementen des Bauwesens etabliert (DIN EN 14509 2013, E.7.6). Dabei wird jedoch nicht der absolute Schubmodul des Kerns und seine Entwicklung über die Zeit verwendet, sondern ein Beiwert φ_t welcher das Kriechen des jeweiligen Kernmaterials unter verschiedenen Lastsituationen und Einwirkungsauern erfasst (DIN EN 14509 2013, A.6). Aus φ_t lässt sich über folgenden Zusammenhang die zeitabhängige Steifigkeit ermitteln.

$$G_c(t) \equiv G_{ct} = \frac{G_c}{1 + \varphi_t} \quad (6.8)$$

Bereits Wölfel (1987) verwendet diese Form zur Abminderung der Kernsteifigkeit, um die Effekte des Kriechens zu berücksichtigen. Zusätzlich diskutiert er die Möglichkeit, eine zeitlich veränderliche Kriechneigung des Kernwerkstoffs über einen Relaxationsbeiwert zu berücksichtigen, wie dies bspw. für Beton angewendet wird. Aufbauend darauf erweitert er sein bereits vorgestelltes Verfahren, um auch die Änderungen der Verformung und Schnittgrößen durch das Kriechen des Kerns berechnen zu können. Am Beispiel eines innerlich statisch unbestimmten Sandwichbalkens zeigt er außerdem, dass ein kriechender Kern sich nicht gleichermaßen auf die Zunahme der Verformung und der Spannungen auswirkt.¹

In der numerischen Berechnung von Sandwichelementen stellt eine lastfallweise direkte Abminderung der Kernsteifigkeit $G_c(t)$ die einfachste Art zur Berücksichtigung des Kriechens dar. Im Entwurf von Bauteilen werden meist nur diskrete, zu deren Bemessung erforderliche Zeitpunkte betrachtet. Neben der manuellen Erstellung entsprechender Lastfälle für die relevanten Zeitpunkte unter Modifizierung der Eigenschaften des Kernmaterials, bieten manche Programme eine gesonderte Berücksichtigung über Bauzustände. Detailliertere Betrachtungen in Abhängigkeit der Zeit lassen sich dagegen meist nur mit FE-Programmen durchführen, welche die Implementierung ganzer Werkstoffgesetze bzw. -kennlinien erlauben. So ermöglicht bspw. ANSYS die Definition des zeitabhängigen Verhaltens von Polymeren durch die direkte Eingabe von Prony-Parametern.

¹Dies wird sich auch im weiteren Verlauf der Untersuchungen noch zeigen (vgl. Abschnitt 7.2).

6.2 Voruntersuchung an ausgewählten Verfahren zur Berechnung von SPS-Elementen

Die vorherigen Abschnitte betrachteten verschiedene Verfahren zur Berechnung von Sandwichelementen und Möglichkeiten ein Kriechen des Kerns zu berücksichtigen. Um die Auswirkungen der veränderlichen Kernsteifigkeit auf das elastische Tragverhalten des SPS näher zu untersuchen, soll in Kapitel 7 eines der gezeigten Verfahren verwendet werden. Dieses muss jedoch in der Lage sein das Sandwich in den betrachteten Grenzen zuverlässig abzubilden. Um ein geeignetes Verfahren zu finden, wird in diesem Abschnitt eine Voruntersuchung durchgeführt. Mit einer Auswahl verschiedener Modelle werden exemplarische SPS-Einfeldbalken mit abnehmender Kernsteifigkeiten berechnet und die Ergebnisse miteinander verglichen. Dafür werden vor allem Berechnungsverfahren mit praktischer Relevanz und verschiedenen Abstraktionsgraden herangezogen. So wird zusätzlich überprüft, ob diese für den praktischen Entwurf von SPS-Elementen im relevanten Anwendungsbereich geeignet sind. In den folgenden Abschnitten werden zunächst die Grundlagen der Voruntersuchung dargelegt, bevor deren Ergebnisse gezeigt und analysiert werden.

6.2.1 Grundlagen und Randbedingungen der Voruntersuchung

Für den potentiellen Einsatz des SPS in Bahnbrücken ist zu erwarten, dass die Kriterien der Gebrauchstauglichkeit für dessen Dimensionierung maßgebend werden.¹ Überdies ist eine Berücksichtigung eines veränderlichen Kerns im SPS mit vertretbarem Aufwand nur über die lineare Viskoelastizität möglich. Voraussetzung dafür sind ebenfalls nur geringe Verzerrungen im Kern (vgl. Abschnitt 4.2.3). Für den Entwurf von SPS-Elementen sollte demnach deren Berechnung nach der linearen Theorie zweckdienlich sein, weshalb sich auch alle Untersuchungen dieser Arbeit darauf fokussieren. Entsprechend wird für alle Werkstoffe linear-(visko-)elastisches Verhalten angenommen und weitere notwendige Vereinfachungen für die Anwendung der verschiedenen Berechnungsverfahren getroffen (bspw. die Inkompressibilität des Kerns für die SST bzw. SMT).

Die Voruntersuchung vergleicht eine Auswahl der vorgestellten Berechnungsverfahren mit verschiedenen Detaillierungsgraden. Für alle untersuchten Verfahren werden Modelle² erstellt, die in Abbildung 6.3 schematisch dargestellt sind. Die Grundlage bildet ein dreidimensionales FE-Modell aus Volumenelementen (Modell 1). Wie Teixeira de Freitas et al. (2011) zeigt, kann diese Art der Berechnung die auftretenden Deformationen und Spannungen in Sandwichelementen abbilden (s. a. Abschnitt 1.2.2). Da die Modellierung jedoch aufwendig ist, spielt das Verfahren für einen praktischen Entwurf von SPS-Elementen nur eine untergeordnete Rolle. Modell 1 wird daher in der Untersuchung als Referenzmodell für den Vergleich genutzt. Alle weiteren Modelle und ihre Ergebnisse werden auf die dreidimensionale FEM-Referenzlösung bezogen und anhand dessen verglichen. Im Vorfeld wurde an dem Modell 1 außerdem eine Netzstudie durchgeführt und die Genauigkeit der Lösung gegen die benötigte Rechenzeit abgewogen. Als Kompromiss wurde die in Abbildung 6.3 dargestellte Elementierung gewählt, welche auch für alle weiteren FE-Modelle übernommen wurde.

¹DIN EN 1990, A2.4.4 stellt bspw. hohe Anforderungen an die Verformungen von Bahnbrücken.

²Die Termini *Verfahren* und *Modell* können in diesem Kontext als Synonym verstanden werden. Dennoch wird in diesem Kapitel vorrangig der Ausdruck *Modell* verwendet, da sich deren Ergebnisse nicht völlig zweifelsfrei auf das jeweilige Berechnungsverfahren allgemein zurückführen lassen.

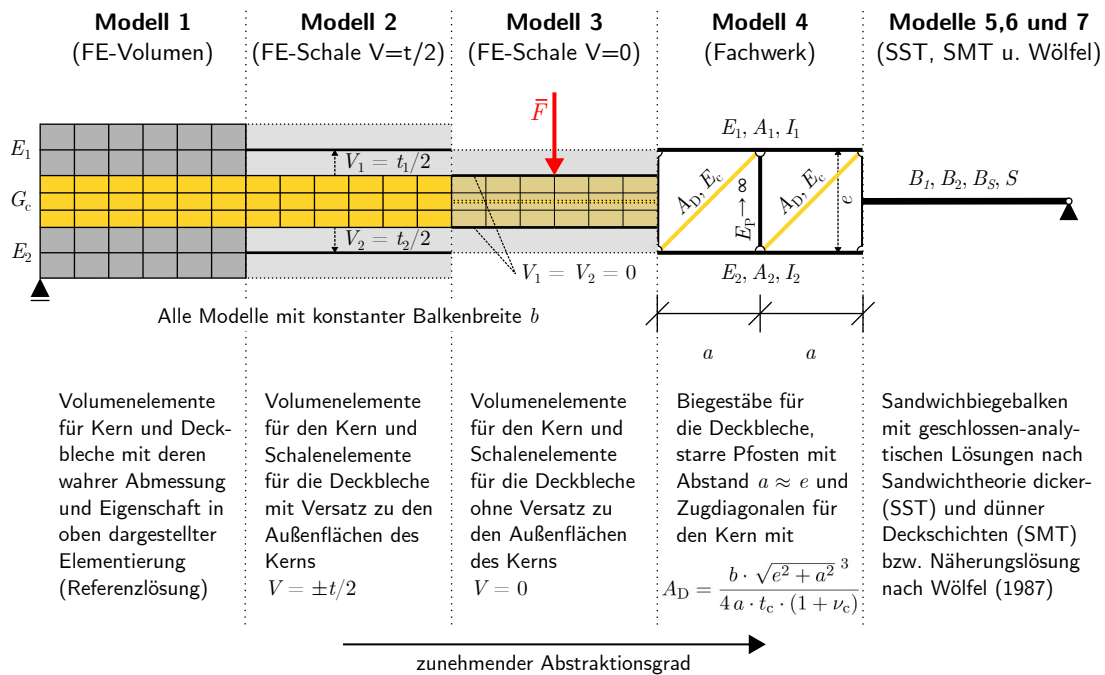


Abbildung 6.3: Schematische Darstellung der Modelle aller in der Voruntersuchung betrachteten Berechnungsverfahren mit wichtigen Angaben zur Modellierung

Die Modelle 2 und 3 sind ebenfalls dreidimensional und gegenüber dem Referenzmodell 1 nur geringfügig abstrahiert. Der Kern besteht weiterhin aus Volumenelementen, während die Deckbleche mit Schalenelementen abgebildet werden. Die Bezugsebene mit den FE-Knoten und die Mittelebene der Schalenelemente mit Dicke t_i sind in der Regel deckungsgleich. Wird die Mittelebene im Modell nicht angepasst, überlappen sich demnach die Deckbleche und der Kern. Daraus wird entweder die Dicke des Kerns t_c oder wie im vorliegenden Fall der Hebelarm e der Deckbleche zueinander um den Betrag der mittleren Deckblechdicke $t_f = t_1/2 + t_2/2$ verfälscht. Deren Auswirkungen auf die Berechnung soll mittels der zwei Varianten untersucht werden. In Modell 2 wird für jedes Deckblech ein innerer Versatz v_i vorgesehen, welcher die Mittelebene der Schalenelemente um $t_i/2$ nach außen verschiebt und somit die wahren Dickenverhältnisse herstellt. In Modell 3 wird die Mittelebene in der Randfläche des Kerns belassen und die Verfälschung des Hebelarms e in Kauf genommen.

Das Modell 4 ist stärker abstrahiert und bildet das Sandwichelement nicht mehr dreidimensional, sondern als flächiges Fachwerkmodell nach dem Ansatz von Davies (1986) ab. Die Gurte werden als durchgehende Biegestäbe mit dem Querschnitt des jeweiligen Deckblechs modelliert, welche über dehn- und biegestarke Pfosten mit Gelenken gekoppelt sind. Deren Abstand a im Fachwerk wird ähnlich der Größe des inneren Hebelarms e gewählt, sodass der Winkel der Diagonalen etwa 45° beträgt. Zur Berücksichtigung der Schubweichheit bekommen die Diagonalen das Material des Kerns (E_c , G_c und ν_c) zugewiesen. Dies hat den Vorteil, dass eine Änderung der Steifigkeit programmintern über eine Faktorisierung des E -Moduls erfasst werden kann, während die Fläche nach Gleichung 6.9 unverändert bleiben kann.¹

¹Dies gilt nur unter Voraussetzung einer annähernd gleichbleibenden Querdehnzahl $\nu_c(t, T) \approx \text{const.}$, was im vorliegenden Fall für das PUR angenommen werden kann (vgl. Abschnitt 2.2.1).

$$A_D = \frac{b \cdot \sqrt{e^2 + a^2}^3}{4 a \cdot t_c \cdot (1 + \nu_c)} \quad (6.9)$$

In den am stärksten abstrahierten Modellen wird das SPS-Element als linienförmiger Balken betrachtet. Hier kommen drei Berechnungsverfahren zum Einsatz: Die Sandwichtheorien mit biegesteifen (SST, Modell 5) und biegeweichen (SMT, Modell 6) Deckblechen, sowie das Verfahren von Wölfel (Modell 7). Auch innerhalb dieser Gruppe steigt mit der Nummerierung der Grad der Abstraktion und der Aufwand für die Berechnung sinkt.

Als theoretisches Beispielsystem wird in allen Modelle, wie ebenfalls in Abbildung 6.3 angedeutet, ein beidseitig gelenkig gelagerter Einfeld-SPS-Balken mit symmetrischen stählernen Deckschichten ($t_1 = t_2 = t_f$) und einer Breite von $b = 100$ mm betrachtet. Für die Spannweite l und die Dicken im Querschnitt t_f bzw. t_c werden verschiedene Konstellationen gewählt, welche in etwa die Grenzen des Anwendungsbereichs von SPS in Bahnbrücken markieren. Sie sind in Tabelle 6.1 zusammengestellt und basieren auf verschiedenen Richtlinien und Annahmen.

Tabelle 6.1: Gewählte Geometrie für die betrachteten Sandwichbalken der Voruntersuchung (Für eine Darstellung des Querschnitt siehe Abbildung 6.2)

Bezeichnung	t_f	t_c	b	l
	alle Maße in mm			
S101010-700	10	10	100	700
S101010-5000	10	10	100	5000
S109010-700	10	90	100	700
S109010-5000	10	90	100	5000

Die kleine Spannweite wurde zu $l = 700$ mm gewählt, da für etwaige längsorientierte SPS-Fahrbahnen keine geringeren Querträgerabstände zu erwarten sind. Das Maß stellt in der Regel den größten Abstand der Querträger einer orthotropen Fahrbahnplatte ohne Längsrippen dar (Geißler 2014, S. 625). Für kleinere Spannweiten können demnach ohne weiteres monolithische Bleche verwendet werden und es besteht keine Notwendigkeit zum Einsatz von SPS. Die große Spannweite wurde in Anlehnung an die von der VDEI-INFO KIB Nr. 15 vorgeschlagene maximale Breite einer Dickblech-Fahrbahn zu $l = 5000$ mm aufgerundet. Ein Elementkatalog von SPS Technology (2017) gibt zwar größere mögliche Spannweiten an, diese weisen jedoch nur geringe Nutzlasten für die Elemente aus. Angesichts des auftretenden Kriechens und der hohen Verkehrslasten des Bahnbrückenbaus wird für das SPS maximal die Verwendung als Quersystem in eingleisigen Bahnbrücken anvisiert. Die verwendete Deckblechdicke $t_f = 10$ mm orientiert sich an der Mindestdicke für stählerne Bauteile von Bahnbrücken gemäß DIN EN 1993-2, Tabelle C.2¹. Die Abmessungen des PUR-Kerns wurden bewusst kleiner bzw. größer gewählt, als die bisher typischerweise angewendeten Abmessungen des Kerns von $15 \text{ mm} \leq t_c \leq 75 \text{ mm}$, da diese laut SPS Technology (2002, S. 13) noch ausgedehnt werden können.²

¹Die Mindestdicke für schotterberührte Bauteile wurde bewusst nicht verwendet, da diese für einzelne Bleche gilt und das SPS in seiner Gesamthöhe d die erforderlichen 14 mm in jedem Fall übersteigt.

²In persönlichen Gesprächen mit dem Hersteller wurde eine maximale Kerndicke von $t_{c,\max} \approx 80$ mm genannt.

Für das Material der Deckbleche wird Baustahl angenommen mit den bekannten Eigenschaften (s. bspw. DIN EN 1993-1-1, 3.2). Für den PUR-Kern werden vereinfacht drei bezogene Stufen der Steifigkeit betrachtet: 100 %, 50 % und 10 %. Dabei wird für den vollen Schubmodul der Wert $G_c(t_0, RT) = 270 \text{ MPa}$ angenommen. Er kann einer Belastungszeit von $t_0 \approx 160 \text{ s}$ und $RT = 23 \text{ °C}$ zugeordnet werden, was in etwa den Bedingungen eines quasi-statischen Zugversuchs mit 5 mm/min Belastungsgeschwindigkeit entspricht. Dies zeigt auch ein Vergleich mit den gemessenen Steifigkeiten der Zugversuche bei Raumtemperatur in Abschnitt 3.2.2 und den Versuchen von Teixeira de Freitas et al. (2011).

Wie bereits in Abschnitt 2.1 allgemein gezeigt und für das PUR nachgewiesen, haben eine Erwärmung und die zunehmende Zeit unter Dauerlast ähnliche Auswirkungen auf die Steifigkeit des Polymers. Da für das PUR außerdem die Gültigkeit des Prinzips der ZTV erfüllt ist, können die beiden Effekte vereinfacht gemeinsam für signifikante Zeitpunkte oder Temperaturen betrachtet werden. Den abgeminderten Steifigkeiten lassen sich jeweils äquivalente Belastungszeiten bei RT oder äquivalente Temperaturen bei kurzzeitiger Belastung (t_0) zuordnen (vgl. Abb. 5.15). Diese sind in der folgenden Tabelle 6.2 aufgeführt. So ist bspw. aus einer Dauerlast auf einen PUR Körper nach 10 d bei RT die gleiche Verformung zu erwarten, wie aus einer kurzzeitigen Belastung gleicher Größe bei einer Temperatur von ca. 60 °C .

Tabelle 6.2: Äquivalente Randbedingungen (Temperatur T und Belastungszeit t), welche gemäß Gleichung 5.24 zu den drei Steifigkeitsstufen $G_c(t, T)$ der Voruntersuchung führen

Bezogene Steifigkeit	$G_c(t, T)$	t (RT)	T (t_0)
$G_c(t_0, RT) \equiv G_c$	270 MPa	160 s	23 °C
$0,5 \cdot G_c$	135 MPa	10 d	61 °C
$0,1 \cdot G_c$	27 MPa	100 a	97 °C

Jeder der in Tabelle 6.1 aufgeführten Sandwichbalken wird mit den drei in Tabelle 6.2 gezeigten Steifigkeitsstufen für den PUR-Kern zu Systemen diskreter Eigenschaften kombiniert und mit jedem der zuvor beschriebenen Modelle berechnet. In allen Kombinationen wird die Durchsenkung unter einer Einzellast mit $\bar{F} \hat{=} 1$ in Feldmitte berechnet und über deren Kehrwert eine Ersatzsteifigkeit k_S für das jeweilige System bestimmt (vgl. Abb. 6.3). Die Ergebnisse der Berechnungen sind in konsolidierter Form in Anhang AII-1 zu finden.

6.2.2 Vergleich der Berechnungsverfahren

Aus den Erkenntnissen von Teixeira de Freitas et al. (2011) und aufgrund seines hohen Detaillierungsgrads wird angenommen, dass Modell 1 (FE-Volumen) die genauesten Ergebnisse liefert. Um die anderen Verfahren hinsichtlich ihrer Anwendbarkeit und Genauigkeit zu vergleichen, werden daher die Ergebnisse aller Modelle für eine Kombination von System und Steifigkeit auf die zugehörige Referenzlösung von Modell 1 bezogen. Die Abweichung ergibt sich dabei nach Gleichung 6.10. Abbildung 6.4 zeigt die Ergebnisse in Form eines Netzdiagramms. Darin werden die betrachteten Sandwichbalken als Datenreihen in drei Abschnitten dargestellt. Jeder Abschnitt zeigt eine Stufe der abnehmenden Steifigkeit des PUR-Kerns (G_c , $0,5 \cdot G_c$ und $0,1 \cdot G_c$). Obwohl dies streng genommen nicht korrekt ist, da zwischen den Modellen kein Zusammenhang besteht, werden zur besseren Anschaulichkeit die Datenpunkte einer Reihe über die Modelle hinweg mit Linien verbunden.

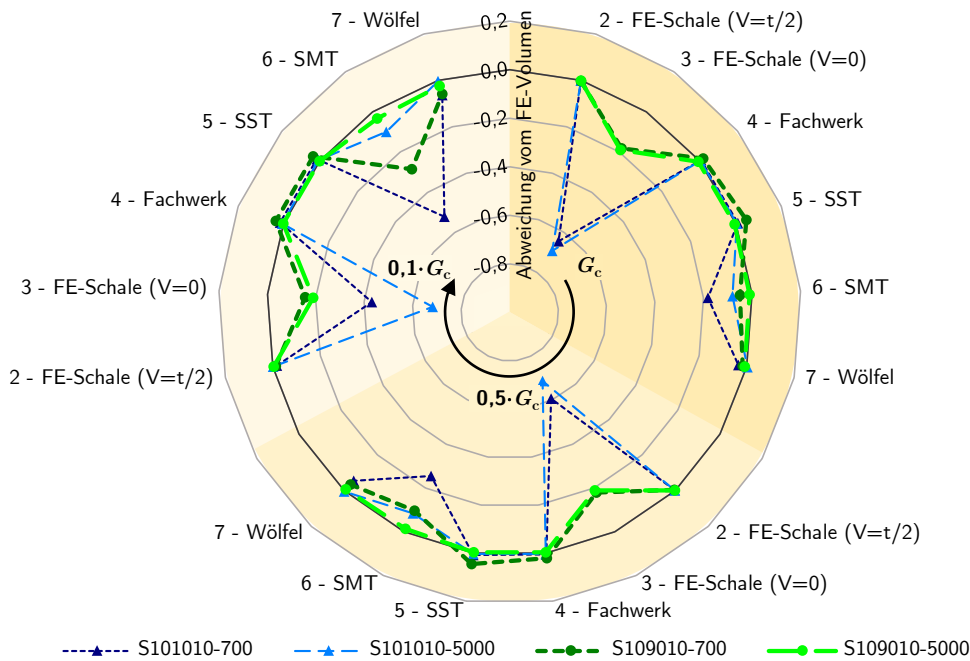


Abbildung 6.4: Abweichung der Ergebnisse für die Ersatzsteifigkeit k_S nach den Modellen 2 bis 7 für die Sandwichbalken und Kernsteifigkeiten bezogen auf die jeweilige Referenzlösung des FE-Volumen-Modells 1

$$\text{Abweichung}(\text{Modell } i) = \frac{k_S(\text{Modell } i)}{k_S(\text{Modell } 1)} - 1 \quad (6.10)$$

Es ist zu erkennen, dass die FE-Berechnung mit Schalenelementen ohne Versatz (Modell 3) zu deutlich abweichenden Steifigkeiten gegenüber der Referenzlösung führt. Dass die Ergebnisse stets geringer ausfallen liegt an der Modellierung, in welcher der fehlende Versatz zu einer Verkleinerung des inneren Hebelarms e der Deckbleche führt. Vor allem die Querschnitte in denen der Kern und die Deckbleche gleich dick sind, werden dadurch sehr stark verfälscht (vgl. Abb. 6.3) und es treten Abweichungen von bis zu 70 % auf. Aber auch mit einem dickeren Kern ergeben sich noch Unterschiede von rund 20 %, da die Deckbleche im Vergleich zum Kern noch dick genug sind, um eine Verfälschung der Kerndicke von knapp 10 % zu erzeugen. Alle Abweichungen reduzieren sich mit sinkender Kernsteifigkeit leicht. Dies ist vor allem bei den Systemen mit kurzen Spannweiten zu erkennen, bei denen die Schubsteifigkeit des Kerns G_c mehr Einfluss hat. Dem gegenüber stimmen die Ergebnisse des Modells 2 (mit Schalenelementen und einem Versatz) für alle Systeme annähernd mit der Referenzlösung überein (vgl. auch Tab. AII-24).

Auch die Ergebnisse der SMT (Modell 6) weichen je nach System unterschiedlich stark von der Referenzlösung ab. Hier zeigt sich, dass nicht nur die Dickenverhältnisse im Querschnitt Einfluss darauf haben, wie stark sich die Deckschichten an der Biegetragwirkung beteiligen. In der Literatur findet sich mancherorts ein auf den Querschnittsabmessungen basierendes Abgrenzungskriterium (Gl. 6.11), ab dem die Biegesteifigkeit der Deckschichten als vernachlässigbar eingestuft wird (s. bspw. Allen 1969, S. 10 oder Zenkert 1997, S. 52).

$$\frac{t_c}{t_f} < 5,77 \quad (6.11)$$

Bereits eine frühere Veröffentlichung des Autors betrachtet einen Vergleich der SST zur SMT (Händler u. Lange 2018). Dort wird gezeigt, dass auch die Steifigkeit des Kerns G_c und die Spannweite des Systems l Einfluss darauf haben, wie stark die Deckschichten mit ihrer Eigenbiegesteifigkeit an der Biegetragwirkung im Sandwich beteiligt sind. So ist das in der Literatur gegebene Kriterium bspw. für das System S109010-700 zwar erfüllt. Dennoch zeigt das Ergebnis nach der SMT einen deutlichen Unterschied zur Referenzlösung, der mit sinkendem Schubmodul des Kerns noch zunimmt. Gleiches ist für die Systeme mit dünnem Kern zu beobachten, wobei die Zunahme der Abweichung für S101010-700 am größten ausfällt.

Bemerkenswert ist in diesem Zusammenhang auch die Änderung der Abweichungen bei sinkender Steifigkeit aus beiden zuvor beschriebenen Modellen im Vergleich. Die Tatsache, dass die Abweichung der 3-D Schale (Modell 3) ohne Versatz zurückgeht, während die der SMT (Modell 6) steigt, spricht ebenfalls dafür, dass der Anteil der Deckblech-Biegetragwirkung steigt und die über den Kern erzielte Sandwich-Tragwirkung schwindet. Ein reduzierter Schubmodul zeigt demnach ähnliche Auswirkungen wie die Wahl dickerer Deckbleche.

Alle weiteren Modelle kommen bis auf kleinere Abweichungen von maximal 5% auf vergleichbare Ergebnisse wie die Referenzlösung. Die Ursachen für die Ungenauigkeiten können in den Modellen bzw. im Fall der Analytik in den Verfahren vermutet werden. So nimmt bspw. die Streuung der Ergebnisse nach Wölfel (1987) mit sinkender Kernsteifigkeit zu, was vermutlich im Ansatz des Verfahrens begründet liegt. Zur Herleitung seiner Beiwerte k_W (s. Gl. 6.4) setzt Wölfel (1987) stets eine annähernd gleiche Durchsenkungslinie aus Sandwichtragwirkung und Deckblechbiegung mit entsprechenden Schnittgrößenverteilungen voraus. Mit sinkendem Schubmodul des Kerns unterscheiden sich diese jedoch zunehmend und die Berechnung des Steifigkeitsbeiwerts über den gezeigten Ansatz des PdvK wird ungenau. Infolge dessen nimmt auch die Abweichung der Ergebnisse des Verfahrens mit sinkendem Schubmodul zu.

Die stets leicht höhere Steifigkeit der SST (Modell 5) liegt darin zu vermuten, dass für die Biegesteifigkeit der Deckbleche rechnerisch ein modifizierter E -Modul $E_{f,mod} = E_f / (1 - \nu_f^2)$ verwendet wird. Dies empfehlen Stamm u. Witte (1974, S. 83 f.), um die Querdehnungsbehinderung in flächigen Deckschichten durch deren Plattentragwirkung zu berücksichtigen.¹ Da in allen Modellen der Voruntersuchung nur eine Breite von $b = 100$ mm vorliegt, ist anzunehmen, dass sich die angesprochene Plattentragwirkung im Referenzmodell 1 der FEM nicht ausbilden kann. Dafür spricht auch die Nähe der Referenzlösung zum Fachwerkmodell 4, bei dem die Plattentragwirkung ebenfalls nicht berücksichtigt ist. Im Vergleich dazu wird die Biegesteifigkeit der Deckbleche in der SST über den modifizierten E -Modul demnach zu hoch angesetzt. Die Aussagekraft der SST schmälert dieser Fakt jedoch nicht, da die beobachteten Unterschiede nicht auf ein Charakteristikum des Verfahrens, sondern eine für diesen Fall fehlerhafte Modellannahme zurückzuführen sind.

¹Biegesteife Deckschichten in Sandwichbalken großer Breite verhalten sich wie Platten. So wird ihre Biegesteifigkeit durch den inneren biaxialen Spannungszustand aufgrund ihrer räumlich ausgedehnten Abmessungen erhöht (vgl. bspw. Altenbach et al. 1998, S. 148 ff.). Um dem Rechnung zu tragen, ist „bei der Berechnung der Eigenbiegesteifigkeiten [...] der modifizierte Elastizitätsmodul [...] einzusetzen, da die durch die Eigenbiegespannungen verursachten Querdehnungen der Deckschichten in sich meist stark behindert werden.“ Dagegen ist „bei der Berechnung der Dehnsteifigkeiten der Deckschichten [...] der tatsächliche Elastizitätsmodul E zu verwenden, da die durch die Membranspannung verursachten Querdehnungen der Deckschichten [...] kaum behindert werden.“ (Stamm u. Witte 1974, S. 83 f.)

6.2.3 Schlussfolgerungen und Empfehlungen für die Berechnung von SPS-Elementen

Die Voruntersuchung zeigt, dass nicht alle der betrachteten Verfahren für eine Anwendung auf SPS-Elemente mit veränderlicher Kernsteifigkeit geeignet sind. Diese kommen demnach auch nicht für die weiteren Studien in Frage. Mehrere der Verfahren in unterschiedlichen Detaillierungsgraden zeigen jedoch Ergebnisse mit hoher Übereinstimmung zur Referenzlösung und können auch für eine Anwendung in der Praxis empfohlen werden. Sie ermöglichen den Planenden einen Entwurf in einer für die jeweilige Leistungsphase eines Projekts angemessenen Detailtiefe.

Bei einer räumlichen Modellierung von SPS-Elementen mit Volumen- und Schalenelementen sollte darauf geachtet werden, die geometrischen Verhältnisse im Sandwich originalgetreu abzubilden. Überlappungen können gerade bei dünnen Kernen die Ergebnisse sonst stark verfälschen. Unter Berücksichtigung dieses notwendigen Details sind aber auch abstrahierte Modelle von Sandwichelementen mit Schalenelementen für die dicken Deckbleche in der Lage deren Tragverhalten abzubilden.

Die Berechnung mithilfe der SMT ist für SPS-Elemente dagegen in Frage zu stellen. Dies hat insofern besondere Brisanz, da das Verfahren in manchen Richtlinien des Schiffbaus explizit empfohlen wird (bspw. in DNVGL-CG-0154 und Lloyd's Register). Weiterführende Untersuchungen weisen darauf hin, dass die SMT ähnlich dem Vorschlag von Kennedy et al. (2005) für die Berechnung im Grenzzustand der Tragfähigkeit (Abkürzung: *ULS* für engl.: *Ultimate Limit State*) herangezogen werden könnte¹. Für eine Ermittlung der Spannungen und Verformungen im Gebrauchszustand und deren Änderung in Abhängigkeit von einer veränderlichen Kernsteifigkeit, ist das Verfahren jedoch nicht geeignet. Dies gilt vor allem unter dem Gesichtspunkt, dass eine sinkende Steifigkeit des Kerns auch in solchen Sandwichelementen die Biegetragwirkung der Deckbleche aktiviert, welche das Abgrenzungskriterium 6.11 erfüllen und nach der Literatur eigentlich mit der SMT berechenbar sein sollten.

Sowohl die SST als auch das Verfahren nach Wölfel (1987) erzielen ähnliche Ergebnisse wie die FEM-Referenz. In einfachen, bereits gelösten Fällen bieten beide eine effiziente Alternative der Berechnung. Für komplizierterer Systeme oder Lastfälle ist das Verfahren von Wölfel (1987) jedoch nicht geeignet. Es sollte daher abseits der tabellierten Lösungen nur zur überschlägigen Kontrollrechnung herangezogen werden (Lange u. Berner 2020, S. 944). Die SST erlaubt hingegen auch eine allgemeine Betrachtung von komplizierteren Systemen bspw. mit äußerlich statischer Unbestimmtheit oder starren Stirnplatten. Hierfür müssen jedoch die DGLn 6.2 spezifisch gelöst, oder das Verfahren von Schwarze (1984) angewendet werden. Beides ist mit erhöhtem mathematischem Aufwand verbunden, somit für eine Berechnung von SPS-Elementen in der Praxis vergleichsweise unwirtschaftlich und daher weniger relevant.

¹In Traglastsimulationen an SPS-Elementen mit bilinearem Materialmodell konnte beobachtet werden, dass die Spannungsverteilung im höchst belasteten Querschnitt mit vollständig plastifizierten Deckblechen, der in der SMT vorausgesetzten Spannungsverteilung entspricht. Eine Berechnung mit der SMT im ULS könnte also ähnlich dem Verfahren Elastisch-Plastisch des Stahlbaus betrachtet werden (vgl. DIN EN 1993-1-1). Dies bedingt jedoch eine ausreichend hohe Rotationskapazität, das Wissen um die Verteilung der Schnittgrößen im Element und ausreichende Sicherheit gegen das Knittern der gedrückten Deckschicht. Hierzu wurden keine weiteren Untersuchungen durchgeführt. Entsprechend wird in dieser Arbeit nicht weiter darauf eingegangen.

Für eine zweidimensionale Betrachtung von SPS-Elementen hat die Fachwerkmethode praktisch die höchste Relevanz. Sie ermöglicht eine vergleichsweise einfache Modellierung mithilfe gängiger Stabwerksprogramme, die in jedem Planungsbüro vorhanden sind. Kompliziertere Randbedingungen und statisch unbestimmte SPS-Balken wurden im Rahmen der Voruntersuchung zwar nicht betrachtet. Nach den Untersuchungen von Naujoks u. Misiek (2015) erscheint die Fachwerkmethode aber auch für deren Berechnung vielversprechend. Dies sollte unter dem Gesichtspunkt einer veränderlichen Kernsteifigkeit dennoch genauer untersucht werden. Generell sollte in der Modellierung von Sandwichelementen mit dicken Deckschichten mit der Fachwerkmethode darauf geachtet werden, dass für die Berechnung der Ersatzfläche der Diagonalen der gezeigte Ansatz von Davies (1986) verwendet wird (Gl. 6.7). Im Rahmen der Voruntersuchung erzielte diese Art der Berechnung stets eine gute Übereinstimmung mit der Referenzlösung.

Für die weiteren Untersuchungen der vorliegenden Arbeit wird aus den betrachteten Verfahren die SST für die Berechnungen gewählt. Neben hinreichend genauen Ergebnissen im Vergleich zur FE-Lösung bietet sie vor allem die Möglichkeit der analytischen Betrachtung von Sandwichbalken. So können Zusammenhänge direkt über mathematisch geschlossene Lösungen betrachtet werden ohne die Notwendigkeit umfangreicher numerischer Parameterstudien. Da es sich bei SPS-Elementen in der Regel um plattenförmige Bauteile handelt, wird für deren Tragwirkung der versteifende Effekt der ebenfalls plattenförmigen Deckbleche berücksichtigt. Dafür wird der von Stamm u. Witte (1974, S. 93 f.) gezeigte Ansatz über die Modifikation des E -Moduls der Deckschichten angewendet (siehe auch Fußnote 1 auf Seite 166).

Abseits des Vergleichs der Berechnungsverfahren resultiert aus der Voruntersuchung eine zusätzliche Erkenntnis bezüglich der Berücksichtigung der veränderlichen Kernsteifigkeit im SPS. Aufgrund des beschriebenen simultanen Einflusses von Zeit und Temperatur auf die Steifigkeit des PUR ist es allgemein zu empfehlen deren Veränderlichkeit direkt über eine lastfallweise Anpassung des Schub oder bzw. des E -Moduls abzubilden, wie es bspw. Jungbluth u. Berner (1986, S. 412 f.) vorschlagen. Die anderen in Abschnitt 6.1.4 gezeigten Ansätze eignen sich lediglich, um den alleinigen Einfluss der Zeit zu erfassen. Eine unmittelbare Anpassung der Steifigkeit kann dagegen zusätzlich deren Änderung infolge erhöhter Temperatur berücksichtigen. Zudem lässt sich dieses Vorgehen verhältnismäßig einfach in den allgemeinen Ablauf einer statischen Berechnung integrieren. Einzig die Zahl der erforderlichen Lastfälle erhöht sich deutlich, da bspw. für jeden Lastfall der Verkehrslast mindestens ein weiterer unter erhöhter Temperatur hinzu kommt.

Damit die veränderliche Kernsteifigkeit auf diese Weise berücksichtigt werden kann, muss jedoch die Gültigkeit der Grundprinzipien der linearen Viskoelastizität (vgl. Abschnitt 2.1.2) sowie der Gleichung 5.16 gewährleistet sein. Diese wurden im Rahmen des ersten Teils nur für das spezielle PUR im SPS innerhalb des LVE-Bereichs betrachtet und nachgewiesen. Entsprechend muss im Rahmen einer statischen Berechnung von SPS unter Berücksichtigung der veränderlichen Kernsteifigkeit auch stets die Anwendbarkeit der linearen Viskoelastizität überprüft werden.

7 Eine analytische Studie zum Tragverhalten von SPS-Elementen und den Auswirkungen einer veränderlichen Kernsteifigkeit

Im vorherigen Kapitel wurden die Grundlagen zu Sandwichbalken gezeigt und welche Verfahren zur Berechnung von SPS-Elementen geeignet sind. In diesem Kapitel werden nun die Auswirkungen einer veränderlichen Kernsteifigkeit auf deren Tragverhalten in einer analytischen Studie betrachtet. Da SPS-Elemente der hier betrachteten Geometrien in der Regel biegesteife Deckschichten haben, erfolgt dies anhand der Sandwichtheorie dicker Deckschichten (SST). Die Verwendung des analytischen Verfahrens ermöglicht es, die Bauteilgeometrie durch Verhältnisparameter bezogen darzustellen und so allgemeine Erkenntnisse hinsichtlich ihrer optimierten Gestaltung zu gewinnen. Im ersten Abschnitt werden zunächst die Grundlagen der Studie erläutert. Anschließend wird das Tragverhalten von Sandwichelementen mit biegesteifen Deckschichten unter verschiedenen Randbedingungen hinsichtlich der Steifigkeit und der Deckschichtspannungen im Allgemeinen beleuchtet. Aus den gewonnenen Erkenntnissen werden dann Empfehlungen für den Entwurf von SPS-Elementen abgeleitet und ein Verfahren zu deren überschlägiger Vordimensionierung vorgeschlagen.

7.1 Grundlagen der Studie

In der analytischen Studie wird die Tragwirkung von Sandwichelementen mit biegesteifen Deckschichten unter dem Einfluss einer veränderlicher Kernsteifigkeit $G_c(t, T)$ beleuchtet. Dafür kommt eine Methode zur Anwendung, die es ermöglicht Sandwichelemente dimensionsbefreit in Abhängigkeit von Verhältnisparametern zu betrachten. Aufbauend auf den in Abschnitt 6.1 erläuterten Grundlagen zur Tragwirkung von Sandwichelementen und deren Berechnung, wird in diesem Abschnitt zunächst die Systematik der Studie und das Vorgehen erläutert. Danach werden Grenzfallfunktionen gezeigt, welche die Ränder der analytischen Betrachtung bilden und einer zusätzlichen Kontrolle der untersuchten Faktoren dienen. Als weiterer Grenzfall wird das Stabilitätsversagen der gedrückten Deckschicht (Knittern) im SPS betrachtet und die Studie auf stark vereinfachte Weise dagegen abgegrenzt.

7.1.1 Systematik, Randbedingungen und betrachtete Systeme

Wie bereits in Abschnitt 6.1.1 erläutert, ist für ein Sandwichelement mit biegesteifen Deckschichten eine veränderliche Steifigkeit seines Kerns in mehrfacher Hinsicht von Bedeutung. So führt deren Abnahme unter Dauerlast primär zum Kriechen des Kerns und damit zu einer Vergrößerung der Verformung des Elements. Durch seine innerliche statische Unbestimmtheit kommt es sekundär zur Umlagerung der Schnittgrößen innerhalb des Sandwichs und zu einer Zunahme der Beanspruchung für die Deckschichten. Um die Auswirkungen der veränderlichen Kernsteifigkeit auf die Tragwirkung zu untersuchen, werden daher sowohl die Steifigkeit

eines gesamten Sandwichelements, als auch die Spannung betrachtet. Stellvertretend für die Beanspruchung der Deckschichten wird dabei die maximale positive Normalspannung σ_x am unteren Rand des Elements ($\max z$) unter einer Gleichlast q herangezogen. Die Gesamtsteifigkeit k des Sandwichelements wird über das Reziprok seiner Verformung $\max w$ unter einer mittigen Einzellast F ermittelt:

$$k = \frac{F}{\max w} \quad (7.1)$$

Eine absolute Betrachtung der genannten Größen ist jedoch nur bedingt aussagekräftig und aufgrund des großen Wertebereichs der Ergebnisse nur schwer darstellbar. Daher werden beide Größen stets bezogen auf das Ergebnis eines baugleichen Elements betrachtet, dessen Deckschichten aus nachfolgenden Gründen starr miteinander gekoppelt werden.

Die Normierung auf den starren Verbund

Die Verbundtragwirkung bewegt sich in Abhängigkeit von den Eigenschaften des Kerns allgemein zwischen zwei Grenzfällen, die in Abbildung 7.1 exemplarisch für einen gelenkig gelagerten Einfeld-Sandwichbalken dargestellt sind. Geht die Schubsteifigkeit des Kerns $G_c \rightarrow 0$, kann dieser keine Kräfte übertragen und der Balken verhält sich, als würden seine Deckschichten ohne Verbindung aufeinander liegen. In diesem Zustand *ohne Verbund* verhalten sich die Deckschichten wie getrennte Biegebalken, aus deren Summe sich die Gesamttragwirkung ergibt. Dies lässt sich auch an der Verteilung der Normalspannung σ_f in Abbildung 7.1 unten rechts erkennen, welche sich proportional zur Dehnung ε_f verhält. Alle dem Zustand ohne Verbund zugeordneten Größen werden mit einem Index f versehen (für engl.: *free* bzw. *faces*¹). Strebt die Steifigkeit des Kerns $G_c \rightarrow \infty$, koppelt dieser die Deckschichten vollflächig starr miteinander und aktiviert vollständig deren Membrantragwirkung über die Steiner-Anteile. In diesem Zustand des *starren Verbunds* wirken die Deckschichten gemeinsam im Gesamtquerschnitt, dessen Steifigkeit und Tragfähigkeit die Summe der Einzelteile übersteigt. Dabei bleibt der Gesamtquerschnitt eben, was sich in der gleichermaßen durchgehend linearen Verteilung der Normalspannung σ_r zeigt (vgl. Abb. 7.1 o.r.). Alle dem starren Verbund zugeordneten Größen werden mit einem Index r versehen (für engl.: *rigid*). Alle in 6.1.2 gezeigten Verfahren bilden das zu berechnende Sandwichelement stets mit *elastischem Verbund* zwischen den beschriebenen Grenzfällen ab. Die zugeordneten Größen werden in besonderen Fällen zur Unterscheidung mit einem Index e versehen (für engl.: *elastic*).

Während sie im klassischen Sandwich-Fassadenbau nicht betrachtet werden, kommt den beschriebenen Grenzfällen in anderen Disziplinen eine wichtige Bedeutung zu. So werden bspw. Träger im Verbundbau in der Regel für *volle Verdübelung* ausgelegt,² wodurch die Annahme von starrem Verbund für ihrer Berechnung gerechtfertigt ist (vgl. Roik et al. 1993, S. 570 f.). Auch im Entwurf von Verbundgläsern (VG oder VSG) im Glasbau spielen die Grenzfälle eine wichtige Rolle. So muss für die Sandwichbauteile, welche aus zwei Glasplatten und einer dünnen polymeren Zwischenschicht bestehen, für eine sichere Dimensionierung gemäß

¹Der Index f wird nach DIN EN 14509 für die Eigenschaften der Deckschichten verwendet, was auch in dieser Arbeit übernommen wird. Der Index kann simultan für den Grenzfall *ohne Verbund* verwendet werden, da sich in diesem Zustand die Tragwirkung des Sandwichs rein aus dem Anteil der Deckschichten ergibt.

²Dabei wird die Zahl und Anordnung der Kopfbolzendübel so festgelegt, dass der vollplastische Momentenwiderstand des Querschnitts von der Verbundfuge übertragen werden kann.

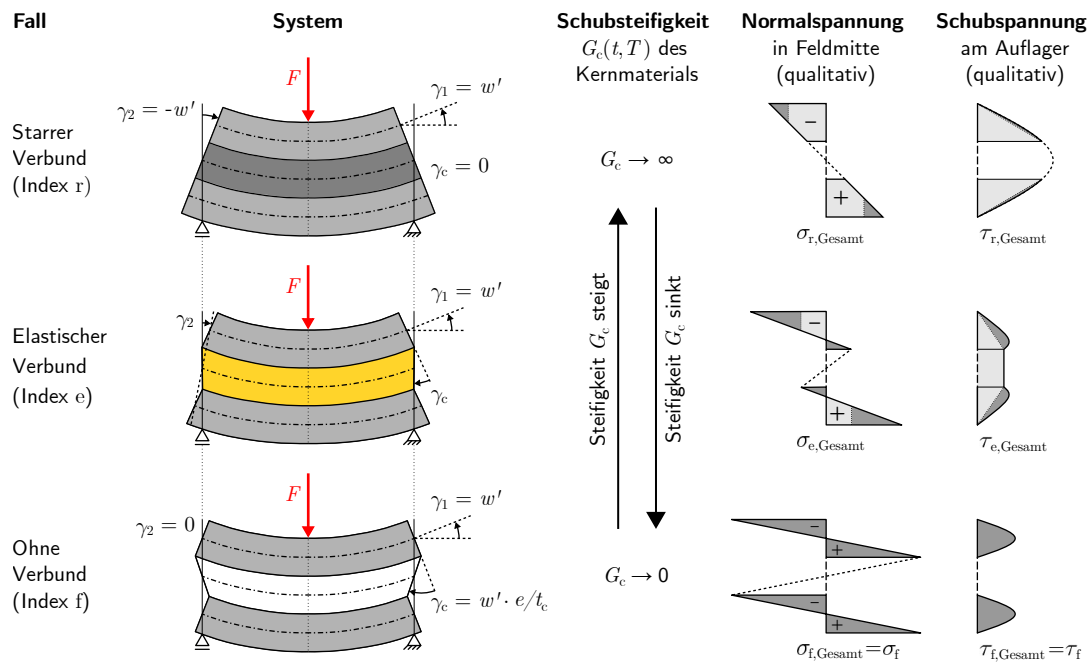


Abbildung 7.1: Die Tragwirkung des elastischen Verbunds im Sandwich und deren Grenzfälle in Anlehnung an Stamm u. Witte (1974)¹

DIN 18008-1, 7.2 die Standsicherheit auch stets im Zustand ohne Verbund nachgewiesen werden. Betrachtet man die in Abbildung 7.1 gezeigte Spanne der Verbundsteifigkeit in einem Sandwich als Skala zwischen den Grenzfällen, so kann diese normiert werden indem man die zu untersuchende Eigenschaft des Elements im elastischen Verbund auf selbige mit starrem Verbund bezieht.² Ähnlich dem Verdübelungsgrad im Verbundbau ergibt sich aus dem Verhältnis der Gesamtsteifigkeiten k der Zustände eines Elements der sogenannte *Steifigkeitsfaktor*:

$$f_k = \frac{k_e}{k_r} = \frac{w_r}{w_e} \quad (7.2)$$

Dieser bewegt sich stets zwischen $0 < f_k \leq 1$ und beschreibt, wie viel Prozent der maximal möglichen Gesamtsteifigkeit k_r in dem betrachteten Sandwichelement in Abhängigkeit von seiner veränderlichen Kernsteifigkeit gerade vorliegt. Analog dazu kann auch für die zu betrachtende Belastung in den Deckschichten der sogenannte *Spannungsfaktor* definiert werden:

$$f_\sigma = \frac{\sigma_e}{\sigma_r} \quad (7.3)$$

Anders als die Steifigkeit wird die Spannung bei Erhöhung der Verbundsteifigkeit unter konstanter Belastung kleiner, sodass für den Spannungsfaktor stets $f_\sigma > 1$ gilt (vgl. Abb. 7.1).

¹Die dargestellte Lagerung bezieht sich auf die Schwerlinie des Gesamtquerschnitts.

²Dieses Vorgehen wählte bspw. auch Kutterer (2005) in seiner Untersuchung zum Tragverhalten von vertikalen Verbundglasplatten unter elastischem Schubverbund.

Da die Abmessungen eines betrachteten Elements in den drei Zuständen identisch sind und sich nur die Eigenschaften des Kerns unterscheiden, lassen sich dessen Auswirkungen auf die Tragwirkung isoliert betrachten. Dies wird in vorliegender Studie genutzt, um Sandwichelemente in Abhängigkeit von der Geometrie gezielt auf ihre Empfindlichkeit gegenüber einer veränderlichen Kernsteifigkeit zu untersuchen. Dafür werden Sandwichelemente mit verschiedenen Randbedingungen in drei statischen Systemen betrachtet.

Die betrachteten statischen Systeme

In der Einleitung in Abschnitt 1.1.2 wurden zwei mögliche Bauformen mit SPS als Alternative zu den konventionellen Fahrbahnen in Bahnbrücken aufgezeigt (vgl. Abb. 1.4). Darin kann das SPS als Sandwich in drei möglichen statischen Systemen vorliegen, welche aus eben diesem Grund in der analytischen Studie betrachtet werden. Abbildung 7.2 zeigt diese drei Systeme unter Ausnutzung der Symmetrie, sowie die in der Studie untersuchten Zustandsfunktionen der Durchsenkung w unter einer zentrischen Einzellast F und der Normalspannung σ_x am unteren Rand unter einer Gleichlast q . Die Systeme sind nach dem Grad ihrer Redundanz aufsteigend sortiert und mit römischen Ziffern nummeriert.

In der querorientierten Variante (vgl. Abb. 1.4 r.) bieten die offenen Hauptträger der Trogbrücke nicht genug Torsionssteifigkeit, als dass sich die SPS-Fahrbahn in sie einspannen könnte. Deren statisches System entspricht daher einer allseits gelenkig gelagerten Platte, welche durch das Verhältnis ihrer Abmessungen meist in Querrichtung abträgt. So kann aus der Brückenmitte ein Plattenstreifen der Breite b herausgelöst betrachtet werden, der einachsig zwischen den Hauptträgern spannt (System I).

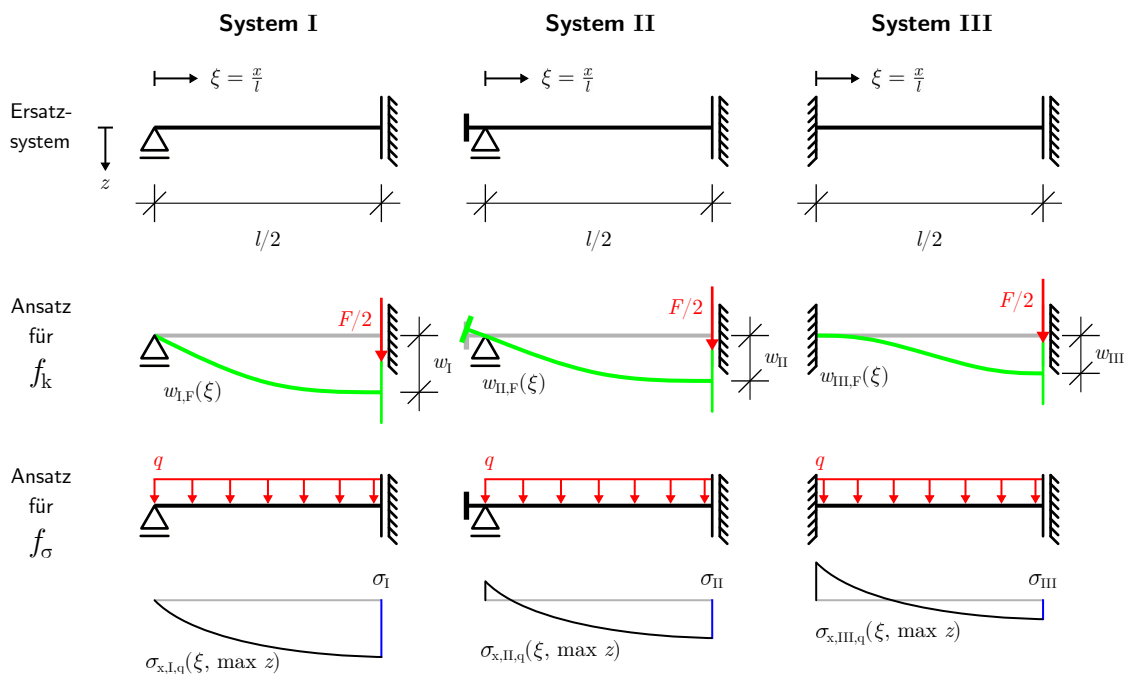


Abbildung 7.2: Die in der Studie untersuchten statischen Systeme unter Ausnutzung der Symmetrie und die für den jeweiligen Faktor betrachtete Zustandsgröße und ihre auslösende Belastung

In Abhängigkeit von ihrer Ausbildung, können die Anschlüsse der Deckbleche an die Hauptträger wie Stirnplatten für das SPS wirken. Um den Berechnungsaufwand auf ein vertretbares Maß zu beschränken, werden diese Kopplungen an den Enden des Sandwichs in der analytischen Berechnung nach der SST als starre Stirnplatten abgebildet (System II). Unter welchen Bedingungen die Annahme von starren Kopplungen der Deckschichten für die Berechnung eines Sandwichs mit elastischen Stirnplatten gerechtfertigt ist, wird im späteren Abschnitt 7.2.4 anhand einer zusätzlichen rechnerischen Untersuchung auf Basis des *Weggrößenverfahrens* (Abkürzung: *WGV*) diskutiert.

In der längsorientierten Variante (vgl. Abb. 1.4 l.) wirkt das SPS wie eine durchlaufende, an den Haupt- und auf den Querträgern aufliegende Platte. An der ungünstigsten Stelle in der Brückenachse fällt der Einfluss der Randauflagerung an den Hauptträgern jedoch nur gering aus und kann auf der sicheren Seite vernachlässigt werden. Hier kann das Sandwich bei gleichmäßiger Belastung und äquidistanten Querträgern wie ein beidseitig eingespannter Plattenstreifen betrachtet werden (System III).

Die Verhältnisparameter

Neben der im Fokus stehenden veränderlichen Kernschubsteifigkeit $G_c(t, T)$, hängt die Tragwirkung von Sandwichelementen mit biegesteifen Deckschichten von vielen weiteren Parameter ab. Dazu zählen die zuvor schon in Abbildung 7.2 gezeigten Randbedingungen der statischen Systeme, deren Belastung q bzw. F , die Spannweite l sowie die bereits in Abbildung 6.2 erstmals dargestellten Abmessungen und Querschnittseigenschaften des Sandwichs. Die folgende Abbildung 7.3 konsolidiert abermals alle zuvor genannten relevanten Parameter für die weiteren Erläuterungen.

Während die Studie die möglichen Randbedingungen der drei Systeme getrennt beleuchtet, würde dieses Vorgehen bei der Geometrie eine Variation jeder einzelnen Abmessung sowie die Betrachtung von deren Kombinationen erfordern und so zu einer aufwendigen Parameterstudie führen. Um dies zu vermeiden und trotzdem eine möglichst große Zahl von Querschnitten zu erfassen, werden ausschließlich Verhältnisse im Sandwichelement betrachtet und so die Zahl der Unbekannten reduziert. Dabei werden alle Abmessungen auf die mittlere Deckschichtdicke $t_f = (t_1 + t_2)/2$ bezogen. Dafür wird vorausgesetzt, dass beide Deckschichten aus dem gleichen Material bestehen ($E_1 = E_2 = E_f$). Sie unterscheiden sich nur in ihren Dicken t_1 und t_2 . Dieser Unterschied wird über den *Deckschichtparameter* δ erfasst:

$$\delta = \frac{\Delta t_i}{\sum t_i} = \frac{t_2 - t_1}{2 t_f} \quad (7.4)$$

Dieser zeigt die bezogene Verschiebung der Gesamtschwerlinie der Deckschichten aus der Mitte des durch sie aufgespannten inneren Hebelarms e (vgl. Abb. 7.3 o.). Der Parameter ist in die lokale z -Richtung des Elements positiv definiert und sein Wertebereich erstreckt sich von $-1 \leq \delta \leq 1$. Für Deckschichten gleicher Dicke $t_1 = t_2$ fällt deren gemeinsame Schwerlinie genau auf die Mitte des inneren Hebelarms e , womit $\delta = 0$ wird. Je dicker bspw. die obere Deckschicht im Vergleich zur unteren ist, desto mehr verschiebt sich die Gesamtschwerlinie in Richtung der oberen Deckschicht und δ wird kleiner. Im Grenzfall $t \rightarrow 0$ für die untere Deckschicht, fällt die Gesamtschwerlinie in die Schwerlinie der verbleibenden oberen Deckschicht ($\delta \rightarrow -1$). Analog verhält es sich für die obere Deckschicht, wobei das Vorzeichen von δ positiv ist.

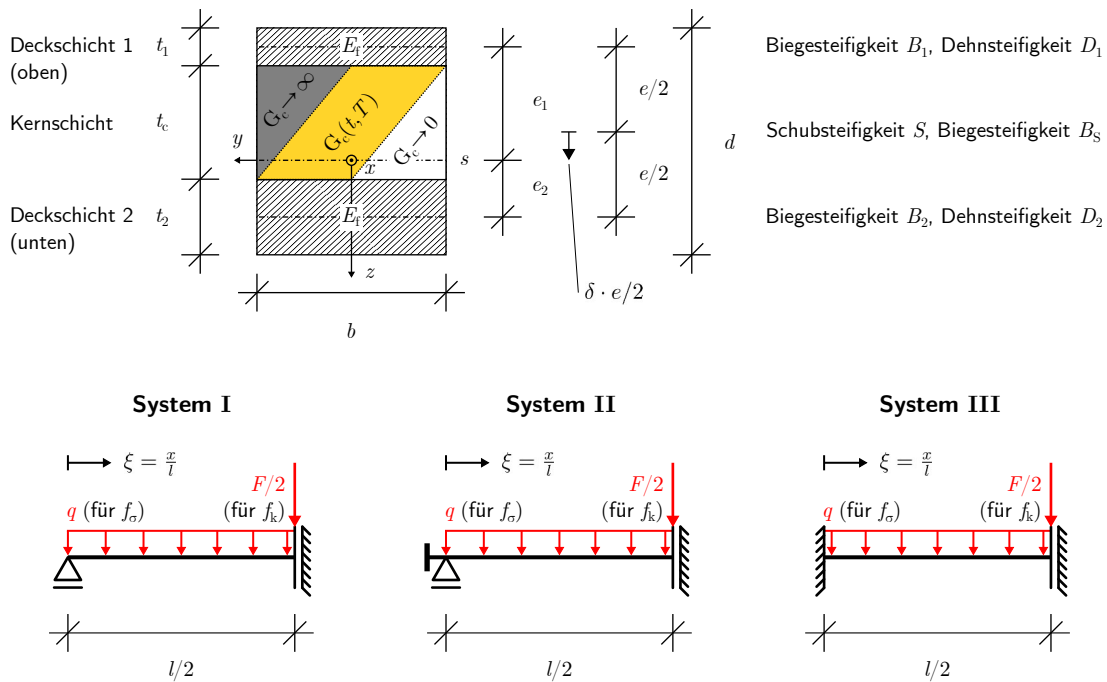


Abbildung 7.3: Allgemeiner Querschnitt des in der analytischen Studie betrachteten Sandwich-Plattenstreifens mit veränderlicher Kernsteifigkeit ($G_c(t, T)$) sowie angedeutet die Grenzfälle $G_c \rightarrow \infty$ und $G_c \rightarrow 0$ mit seinen Abmessungen in der verwendeten Nomenklatur und den Querschnittswerten seiner Bestandteile (o.). Außerdem dargestellt sind die untersuchten Systeme von Einfeldbalken mit den beiden betrachteten Belastungsszenarien (u.).

Das Verhältnis im Aufbau des Querschnitts gibt der sogenannte *Sandwichparameter* ρ_S wieder. Er bezieht den inneren Hebelarm der Deckschichten e , welcher wiederum die Kerndicke t_c enthält, auf die mittlere Deckschichtdicke t_f :

$$\rho_S = \frac{e}{t_f} = \frac{t_c}{t_f} + 1 \quad (7.5)$$

Der Sandwich- und der Deckschichtparameter enthalten gemeinsam alle notwendigen Informationen um das Verhältnis der Eigenbiegesteifigkeit der Deckschichten zur Sandwichbiegesteifigkeit aus deren Steiner-Anteilen zu bestimmen.¹ Dieses Verhältnis wird von Stamm u. Witte (1974, S. 93) als Hilfwert α in den DGLn der SST und deren Lösungen verwendet. α lässt sich für einen Plattenstreifen durch die Verhältnisparameter wie folgt ausdrücken:

$$\alpha = \frac{B_1 + B_2}{B_S} = \frac{2 B_f}{B_S} \quad (7.6)$$

$$= \frac{1}{3 \rho_S^2 \cdot (1 - \nu_f^2)} \cdot \frac{(1 + 3 \delta^2)}{(1 - \delta^2)} \quad (7.7)$$

¹Eine genauere Herleitung der Steifigkeiten B_1 , B_2 , B_f und B_S des Sandwichquerschnitts in Abhängigkeit von den Verhältnisparametern wird in Anhang AII-2 gezeigt.

Der Einfluss der Spannweite l des Sandwichelements auf dessen Schubtragwirkung wird über die *Schlankheit* λ_f der mittleren Deckschicht berücksichtigt:

$$\lambda_f = \frac{l}{t_f} \quad (7.8)$$

Sie findet sich in dem zweiten, von Stamm u. Witte (1974) in der SST verwendeten, Hilfswert β wieder, welcher die Sandwichbiegesteifigkeit B_S zur Schubsteifigkeit S und der Spannweite l ins Verhältnis setzt:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{B_S}{S \cdot l^2} \\ &= \frac{E_f}{2 G_c(t, T)} \cdot \frac{t_f^2}{l^2} \cdot (\rho_S - 1) \cdot (1 - \delta^2) \end{aligned} \quad (7.9)$$

Neben den bereits zuvor eingeführten Verhältnisparametern und der Schlankheit enthält der Hilfswert β ebenso das Verhältnis der zu untersuchenden Schubsteifigkeit des Kerns $G_c(t, T)$ zum E -Modul der Deckschichten E_f . Dieses Verhältnis wird mit der Schlankheit λ_f zur sogenannten *Bezugsschlankheit* $\bar{\lambda}_f$ zusammengefasst:

$$\bar{\lambda}_f = \lambda_f \cdot \sqrt{\frac{2 G_c(t, T)}{E_f}} = \frac{l}{t_f} \cdot \sqrt{\frac{2 G_c(t, T)}{E_f}} \quad (7.10)$$

Damit lässt sich der Hilfswert β wie folgt ausdrücken:

$$\beta = \frac{(\rho_S - 1)}{\bar{\lambda}_f^2} \cdot (1 - \delta^2) \quad (7.11)$$

Als dritten und letzten Hilfswert verwenden Stamm u. Witte (1974, S. 93) in ihren Lösungen der SST den Hilfswert λ ,¹ welcher in quadrierter Form definiert wird und ebenfalls durch die Verhältnisparameter ausgedrückt werden kann:

$$\lambda^2 = \frac{1 + \alpha}{\alpha \cdot \beta} = \frac{B \cdot S \cdot l^2}{2 B_f \cdot B_S} \quad (7.12)$$

$$= \bar{\lambda}_f^2 \cdot \frac{(1 + 3 \delta^2) + 3 \rho_S^2 \cdot (1 - \nu_f^2) \cdot (1 - \delta^2)}{(1 + 3 \delta^2) \cdot (1 - \delta^2) \cdot (\rho_S - 1)} \quad (7.13)$$

¹Um den Bezug zu den Lösungen von Stamm u. Witte (1974) zu behalten, wird diese Benennung trotz ihrer Ähnlichkeit zur Schlankheit λ_f weiterverwendet. Zur Unterscheidung dienen der Querstrich für die Bezugsschlankheit und der Index f (für engl.: *faces*), mit welchem der Bezug zur mittleren Deckschichtdicke t_f hergestellt wird.

Über die Hilfswerte α , β und λ werden die DGLn 6.2 der SST für Sandwichbalken nach Stamm u. Witte (1974, S. 87) für die Systeme I, II und III zunächst konventionell gelöst. Daraus werden die Lösungen der Verformungsfunktionen w_e und der Normalspannungen σ_e am unteren Rand ermittelt und in Abhängigkeit von den Verhältnisparameter δ , ρ_S und $\bar{\lambda}_f$ ausgedrückt. Dabei werden alle noch verbleibenden absoluten Größen (F , q , B , b , t_f und l) ausgeklammert. Für alle Systeme werden ebenso die Verformungsfunktionen w_r und die Normalspannungen σ_r eines einachsigt abtragenden Plattenstreifens mit starrem Verbund nach der konventionellen Biegetheorie ermittelt. Der Steifigkeits- bzw. Spannungsfaktor eines Systems wird dann über das Verhältnis der jeweils zugehörigen Verformungs- bzw. Spannungsfunktionen gemäß den Gleichungen 7.2 und 7.3 ermittelt. Dabei kürzen sich die verbliebenen absoluten Größen heraus, sodass der jeweilige Faktor dimensionsbefreit und lediglich von den Verhältnisparametern abhängig ist. Alle Lösungen der DGLn, sowie der Zustandfunktionen, Steifigkeits- und Spannungsfaktoren werden detailliert in Anhang AII-4 gezeigt.

7.1.2 Die Grenzfallfunktionen der Steifigkeits- und Spannungsfaktoren

Wie bereits beschrieben, bewegen sich die Zustandfunktionen von Sandwichelementen nach der SST stets zwischen den beiden in Abbildung 7.1 gezeigten Grenzfällen. Für $G_c \rightarrow 0$ und $G_c \rightarrow \infty$ streben auch die betrachteten Faktoren gegen Grenzfallfunktionen, welche losgelöst von der Kernsteifigkeit $G_c(t, T)$ ermittelbar sind. Im Rahmen der Studie werden diese Grenzfallfunktionen genutzt, um die Steifigkeits- und Spannungsfaktoren der drei Systeme und deren Herleitung zu kontrollieren. Dabei werden die Funktionen mit dem Index versehen, deren Grenzfall sie betrachten. So zeigt bspw. für den Steifigkeitsfaktor des Systems I die Funktion $f_{k,I,f}$ den Grenzfall ohne Verbund und $f_{k,I,r}$ den starren Verbund nach der SST¹. Der eigentliche Steifigkeitsfaktor $f_{k,I}$ nach der SST bewegt sich in Abhängigkeit von den Verhältnisparametern dazwischen.

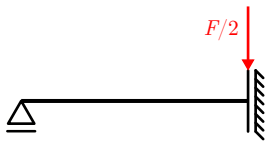
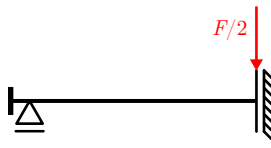
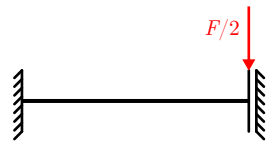
Für die Kontrolle der Steifigkeits- und Spannungsfaktoren werden die zugehörigen Grenzfallfunktionen auf separatem Wege ermittelt und die Funktionen in ein gemeinsames dreidimensionales Diagramm geplottet (s. z. B. Abb. 7.9). Da die Bestimmung der Grenzfallfunktionen in einzelnen Fällen aufwendig ausfällt, werden diese separat in Anhang AII-3 gezeigt. Die folgenden Tabellen 7.1 und 7.2 zeigen Zusammenstellungen aller betrachteten Steifigkeits- und Spannungsfaktoren der verschiedenen Systeme sowie deren Grenzfallfunktionen mit Verweisen auf die jeweilige Herleitung. Für die Funktionen $f_{k,r}$ und $f_{k,I,f} = f_{k,III,f}$ als Grenzfälle der Steifigkeitsfaktoren erfolgen die Herleitungen exemplarisch in diesem Abschnitt.

Die Grenzfallfunktion $f_{k,r}$ für alle Systeme mit starrem Verbund ($\rho_S = 1$)

Der Grenzfall des starren Verbunds kann in einem Sandwichbalken nach der SST auf verschiedene Arten zustande kommen. So kann die Steifigkeit des Kerns $G_c \rightarrow \infty$ streben ($\bar{\lambda}_f \rightarrow \infty$) oder seine Dicke $t_c \rightarrow 0$ laufen, sodass der Kern „verschwindet“ und der Sandwichparameter zu $\rho_S = 1$ wird. Beides führt dazu, dass der Hilfswert $\beta = 0$ wird (vgl. Gl. 7.11). Für die Kontrolle der Faktoren f_k und f_σ eignet sich der letzte Zusammenhang mehr, da dieser grafisch überprüfbar ist (s. bspw. Abb. 7.9). Zur Herleitung der Grenzfallfunktionen des starren Verbunds wird daher der Sandwichparameter $\rho_S = 1$ gesetzt.

¹Wie im Folgenden gezeigt wird, entspricht der starre Verbund nach der SST nicht vollends dem nach der Biegetheorie eines Plattenstreifens.

Tabelle 7.1: Zusammenstellung der ermittelten Steifigkeitsfaktoren f_k und deren Grenzfallfunktionen

	System I	System II	System III
f_k			
Grenzfall Starrer Verbund ($\rho_S = 1$) siehe:	$f_{k,r} = f_{k,I,r} = f_{k,II,r} = f_{k,III,r} = \frac{B}{B_r}$ Gleichung 7.14 in diesem Abschnitt		
elastischer Verbund siehe:	$f_{k,I}(\rho_S, \bar{\lambda}_f)$ Anhang All-4.1.3	$f_{k,II}(\rho_S, \bar{\lambda}_f)$ Anhang All-4.2.3	$f_{k,III}(\rho_S, \bar{\lambda}_f)$ Anhang All-4.3.4
Grenzfall Kein Verbund ($\bar{\lambda}_f = 0$) siehe:	$f_{k,I,f} = \frac{2 B_f}{B_r}$ Gleichung 7.18	$f_{k,II,f} = \frac{k_{II,f}}{k_{II,r}} = \frac{w_{II,r}}{w_{II,f}}$ Anhang All-3.3.1	$f_{k,III,f} = \frac{2 B_f}{B_r}$ Gleichung 7.18

Auch die Grenzfallfunktionen des Steifigkeitsfaktors werden stets auf die Zustandsfunktion eines Plattenstreifens mit starrem Verbund bezogen dargestellt, indem sie durch die jeweilige Funktion nach der Biegetheorie geteilt werden (s. bspw. $f_{k,II,f}$ in Tab. 7.1). Für den Grenzfall des starren Verbunds geht die Schubsteifigkeit $S \rightarrow \infty$, wodurch die Länge l des statischen Systems, sowie dessen Randbedingungen den gleichen Einfluss auf Nenner und Zähler des Faktors nehmen. Somit ist es hinreichend für alle Systeme die Biegesteifigkeiten des Sandwichelements B nach der SST (Gl. AII-15) und des einachsig spannenden Plattenstreifens B_r nach der Biegetheorie (Gl. AII-21) direkt ins Verhältnis zu setzen (s. $f_{k,r}$ in Tab. 7.1 o.). Für den Fall des starren Verbunds durch einen verschwindenden Kern ($\rho_S = 1$) ergibt sich eine konstante Grenzfallfunktion:

$$f_{k,r} = \frac{B}{B_r} = \frac{4 + 3 \cdot (\rho_S^2 \cdot (1 - \nu_f^2) - 1) \cdot (1 - \delta^2)}{4 + 3 \cdot (\rho_S^2 - 1) \cdot (1 - \delta^2)} \quad (7.14)$$

$$f_{k,r}(\rho_S = 1) = 1 - 0,75 \cdot \nu_f^2 \cdot (1 - \delta^2) \quad (7.15)$$

$$= 0,9325 \quad \text{für } \delta = 0 \text{ und } \nu_f = 0,3$$

Es liegt nahe zu vermuten, dass die Grenzfallfunktion des starren Verbunds durch den Bezug auf selbigen für alle Systeme zu $f_{k,r} = 1$ werden müsste. Wie Gleichung 7.14 zeigt, ist dies jedoch nicht der Fall, da in der SST die Steifigkeitsanteile der Deckschichten unterschiedlich behandelt werden (vgl. auch Fußnote 1 auf S. 166). Während für deren Eigenbiegesteifigkeit eine Plattentragwirkung über $E_{f,mod}$ berücksichtigt wird, gehen die Steiner-Anteile nur über

den einfachen E -Modul ein. In der Biegesteifigkeit des starren Verbunds nach der Biegetheorie wird die Plattentragwirkung dagegen ähnlich einem monolithischen Plattenstreifen für alle Anteile angesetzt (vgl. auch Anhang AII-2). In Gleichung 7.14 zeigt sich dieser Fehler in der Abminderung der Steiner-Anteile der Deckschichten in B mit dem Faktor $(1 - \nu_f^2)$, als einzigem Unterschied zwischen Nenner und Zähler. Auch für den Grenzwert $\rho_S \rightarrow \infty$ der Grenzfallfunktion $f_{k,r}$ mit $G_c \rightarrow \infty$ ergibt sich der Fehler zu:¹

$$\begin{aligned} \lim_{\rho_S \rightarrow \infty} f_{k,r} &= 1 - \nu_f^2 & (7.16) \\ &= 0,91 \quad \text{für } \nu_f = 0,3 \end{aligned}$$

Der Grenzfall des starren Verbunds kann in einem Sandwich-Plattenstreifen nach der eindimensionalen SST demnach nie vollends erreicht werden.² Streng mechanisch ist dies nicht korrekt, da eine starre Schubkopplung der Deckschichten durch einen isotropen Kern mit $G_c \rightarrow \infty$ auch deren Querdehnung miteinander koppeln würde. So müsste am Übergang der Deckschichten Verträglichkeit herrschen und die versteifende Plattenwirkung auch für die Steiner-Anteile gelten. Dies lässt sich mit der hier verwendeten eindimensionalen SST für Sandwichbalken unter Berücksichtigung der Plattentragwirkung gemäß Stamm u. Witte (1974, S. 83 f.) jedoch nicht abbilden. Unabhängig davon ist die Grenzfallfunktion $f_{k,r}$ trotzdem geeignet, um die räumlichen Funktionen der Steifigkeitsfaktoren nach der SST zu überprüfen. Praktisch hat der Grenzfall ohnehin nur eine geringe Relevanz, da der Kern eines Sandwichelements stets eine diskrete Dicke und Steifigkeit aufweisen wird.

Die Grenzfallfunktion $f_{k,f}$ der Systeme ohne Verbund ($\bar{\lambda}_f = 0$)

Ähnlich wie zuvor, liegen im Grenzfall ohne Verbund in den statischen Systemen I und III die gleichen äußeren Randbedingungen vor wie im starren Verbund. Deren Auswirkungen kürzen sich ebenso aus der jeweiligen Gleichung zur Bestimmung der Grenzfallfunktion heraus. Für die Systeme I und III ist es demnach hinreichend die Summe aus den Biegesteifigkeiten der beiden Deckschichten $2B_f$ auf den starren Verbund B_r zu beziehen. Dabei werden die Gleichungen AII-10 und AII-21 eingesetzt und vereinfacht.

$$f_{k,I,f} = f_{k,III,f} = \frac{B_1 + B_2}{B_r} = \frac{2B_f}{B_r} \quad (7.17)$$

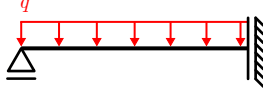
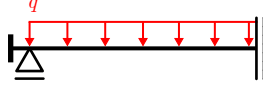
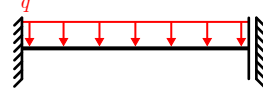
$$= \frac{1 + 3\delta^2}{4 + 3 \cdot (\rho_S^2 - 1) \cdot (1 - \delta^2)} \quad (7.18)$$

Im Gegensatz dazu liegen im System II für den Grenzfall ohne Verbund andere Randbedingungen vor als für den Plattenstreifen mit starrem Verbund. So erzeugen die starren Stirnplatten mit den Deckschichten auch ohne Verbund einen geschlossenen Rahmen, dessen Verhalten maßgeblich von seiner statischen Höhe e abhängt. Die Herleitung der Grenzfallfunktion des Steifigkeitsfaktors $f_{k,II,f}$ ist daher ungleich komplizierter. Sie wird in Anhang AII-3.3 und AII-3.3.1 mithilfe des WGV vollzogen.

¹Diese Grenzfallfunktion wird für die Kontrolle der Faktoren nicht herangezogen, da sie mit $G_c \rightarrow \infty$ in den Graphen nicht darstellbar ist (vgl. Abb. 7.9), sie wird aber in Abschnitt 7.2.1 nochmals aufgegriffen.

²Einzig für den Sonderfall $\nu_f = 0$ geht die Platten- in eine Balkentragwirkung über und die Grenzfallfunktion des Steifigkeitsfaktors für den starren Verbund wird zu $f_{k,r} = 1$.

Tabelle 7.2: Zusammenstellung der ermittelten Spannungsfaktoren f_σ und deren Grenzfallfunktionen

		System I	System II	System III
f_σ				
Grenzfall	Starrer Verbund ($\rho_S = 1$) siehe:	$f_{\sigma,r} = f_{\sigma,I,r} = f_{\sigma,II,r} = f_{\sigma,III,r} = \frac{W_{y,r}}{W_y}$ Anhang All-3.1		
	elastischer Verbund siehe:	$f_{\sigma,I}(\rho_S, \bar{\lambda}_f)$ Anhang All-4.1.4	$f_{\sigma,II}(\rho_S, \bar{\lambda}_f)$ Anhang All-4.2.4	$f_{\sigma,III}(\rho_S, \bar{\lambda}_f)$ Anhang All-4.3.5
Grenzfall	Kein Verbund ($\bar{\lambda}_f = 0$) siehe:	$f_{\sigma,I,f} = \frac{W_{y,r}}{W_{y,f}}$ Anhang All-3.2	$f_{\sigma,II,f} = \frac{\sigma_{II,f}}{\sigma_{II,r}}$ Anhang All-3.3.2	$f_{\sigma,III,f} = \frac{W_{y,r}}{W_{y,f}}$ Anhang All-3.2

Die Grenzfallfunktion $f_{\sigma,r}$ für alle Systeme mit starrem Verbund ($\rho_S = 1$)

Die Spannungen im Sandwichelement verhalten sich für den Grenzfall des starren Verbunds ähnlich wie die zuvor beschriebene Steifigkeit. Durch die geänderten Anteile an der Gesamtsteifigkeit übernehmen die Deckschichten mit ihrer erhöhten Eigenbiegesteifigkeit einen geringfügig größeren Teil des Gesamtmoments, während das durch die Steiner-Anteile übernommene Biegemoment leicht verringert wird. Die Spannung am Rand des Sandwichelements fällt entsprechend leicht größer aus, als in einem Plattenstreifen mit starrem Verbund in dem auch den Steiner-Anteilen eine Plattenwirkung zugeschrieben wird. Zur Herleitung der Grenzfallfunktion $f_{\sigma,r}$ des Spannungsfaktors wird daher über die gewichtete Spannungsverteilung ein Widerstandsmoment W_y für das Sandwich mit $\rho_S = 1$ bestimmt, welches zu dem $W_{y,r}$ eines Plattenstreifens mit starrem Verbund ins Verhältnis gesetzt wird (s. Tab. 7.2 o.). Dabei steht der Bruch im Kehrwert, da die Widerstandsmomente in der jeweiligen Gleichung zur Ermittlung der Spannung im Nenner stehen. Für $\delta = 0$ und $\nu_f = 0,3$ ergibt sich $f_{\sigma,r} = 1,024$. Die detaillierte Herleitungen der Grenzfallfunktion ist in Anhang AII-3.1 zu finden.

Die Grenzfallfunktionen $f_{\sigma,f}$ der Systeme ohne Verbund ($\bar{\lambda}_f = 0$)

Mit den Funktionen des Spannungsfaktors $f_{\sigma,f}$ für den Grenzfall ohne Verbund verhält es sich ähnlich wie mit der zuvor gezeigten Grenzfallfunktion $f_{k,f}$. Für die Systeme I und III können die Funktionen $f_{\sigma,I,f}$ und $f_{\sigma,III,f}$ ebenfalls unabhängig von den äußeren statischen Randbedingungen über die Widerstandsmomente hergeleitet werden (s. Tab. 7.2 u.). Dabei wird lediglich die Summe der Widerstandsmomente aus den beiden Deckschichten als Gesamtwiderstand angesetzt. Die Herleitung hierfür ist in Anhang AII-3.2 zu finden.

Für das System II gestaltet sich die Herleitung der Grenzfallfunktion der Spannung aufgrund der starren Kopplungen ähnlich aufwendig wie bereits für die Steifigkeit. Die starren Stirnplatten bilden zusammen mit den Deckschichten ohne Verbund einen geschlossenen Rahmen und übertragen einen Teil der Deckschichtbiegemomente M_i sowie ein Sandwichmoment M_S . Dies führt zu einer Veränderung der Schnittgrößen in den Deckschichten und damit auch der Spannung am unteren Rand des Elements in Feldmitte. Im Gegensatz dazu verhält sich der Plattenstreifen mit starrem Verbund wie ein regulärer Biegebalken. Die Grenzfallfunktion wird daher direkt auf Basis des Verhältnisses der Spannungen nach Gleichung 7.3 hergeleitet. Sie ist in den Anhängen AII-3.3 und AII-3.3.2 gezeigt.

7.1.3 Abgrenzung gegenüber dem Knittern der gedrückten Deckschicht

Die im Rahmen der Studie angewendete SST ist geeignet, das elastische Tragverhalten von Sandwichelementen im Gesamten unter den in Abschnitt 6.1.1 genannten Voraussetzungen zu berechnen. Das ebenfalls dort erwähnte Knittern der gedrückten Deckschicht als lokale Instabilität kann mit dem Verfahren dagegen nicht erfasst werden. Dafür bedarf es einer losgelösten Eigenwertanalyse der gedrückten, durch den Kern gebetteten, Deckschicht oder einer numerischen Traglastanalyse nach höherer Ordnung unter Ansatz von Imperfektionen (vgl. Nelke 2018). Der Fokus dieser Arbeit liegt nicht auf dieser Art des Versagens, da sie gegenüber anderen Versagensformen im Grenzzustand der Tragfähigkeit (ULS) mit hoher Wahrscheinlichkeit nicht maßgebend wird (s. bspw. Teixeira de Freitas et al. 2011, S. 66 ff.). In der Literatur wird ein lokales Stabilitätsversagen der Deckbleche im SPS stellenweise sogar a priori ausgeschlossen (Kennedy 2004).¹ Diese Einschätzung spiegelt sich auch in den bis dato existierenden Normen zur Verwendung des SPS im Schiffsbau wider (Lloyd's Register 2015). Trotzdem wird in diesem Abschnitt das Stabilitätsversagen des gedrückten Deckblechs im SPS zumindest oberflächlich betrachtet. Damit soll die These der Unempfindlichkeit des SPS gegenüber Knitterversagen untermauert werden, um die analytische Studie und ihre späteren Schlussfolgerungen für die Anwendung dem Knittern gegenüber abzugrenzen.

Die Betrachtung erfolgt anhand des vereinfachten Modells einer gedrückten Deckschicht gebettet durch einen isotropen Kern unendlicher Dicke. Die Herleitung der Knitterspannung aus dem Modell anhand der Differentialgleichung des gebetteten Stabes wird in dieser Arbeit nicht gezeigt. Sie kann bspw. bei Stamm u. Witte (1974, S. 198 ff.) nachvollzogen werden. Unter Annahme einer gleichwelligen sinusförmigen Knickeigenform der Deckschicht, ergibt sich die ideelle Knitterspannung σ_w (Index w für engl.: *wrinkling*) in Abhängigkeit von den Werkstoffeigenschaften des Deckschicht- und des Kernmaterials zu:

$$\sigma_w = \varkappa \cdot \sqrt[3]{E_c \cdot G_c \cdot E_f} \quad (7.19)$$

mit

$$\varkappa = \sqrt[3]{\frac{9 \cdot (1 - \nu_c)^2}{2 \cdot (1 + \nu_c) \cdot (3 - 4 \nu_c)^2 \cdot (1 - \nu_f^2)}} \quad (7.20)$$

¹In der bisher einzigen umfangreichen Arbeit zur Stabilität von SPS-Elementen beschäftigte sich Zhou (2008) mit dem globalen Beulversagen von Elementen unter Scheibenbeanspruchung.

Unter der Annahme stählerner Deckschichten ($\nu_f = 0,3$) und einer von Zeit und Temperatur unabhängigen Querdehnzahl des PUR mit $\nu_c(t, T) \approx \text{const.} = 0,36$ (vgl. Abschnitt 2.2.1), kann die Knitterspannung in Abhängigkeit von der veränderliche Kernsteifigkeit $G_c(t, T)$ mit $\varkappa \approx 0,849$ wie folgt geschrieben werden:

$$\sigma_w(t, T) = 0,849 \cdot \sqrt[3]{2,72 \cdot (G_c(t, T))^2 \cdot E_f} \quad (7.21)$$

Um die Notwendigkeit zur Betrachtung des Stabilitätsversagens ohne expliziten Nachweis beurteilen zu können, wird stark vereinfachend das Kriterium nach DIN EN 1993-1-1, 5.2.1(3) herangezogen. Diesem zufolge kann „[...] die durch Verformungen hervorgerufene Erhöhung der maßgebenden Schnittgrößen oder andere Änderungen des Tragverhaltens vernachlässigt werden [...]“ wenn für elastische Berechnungen die folgende Bedingung erfüllt ist:¹

$$\alpha_{\text{cr}} = \frac{F_{\text{cr}}}{F_{\text{Ed}}} \geq 10 \quad (7.22)$$

Ist dies gegeben, muss im Umkehrschluss zu DIN EN 1993-1-1, 5.2.2(1) für die betreffenden Bauteile keine Stabilitätsbetrachtung durchgeführt werden. Wendet man die Bedingung 7.22 auf die Knitterspannung σ_w in SPS-Elementen an, kann diese zur Membranspannung $\sigma_{\text{S},1}$ aus Sandwichtragwirkung in der Schwerlinie der gedrückten oberen Deckschicht ins Verhältnis gesetzt werden (vgl. Abb. 6.2 u.):²

$$\alpha_{\text{cr}} = \frac{\sigma_w(t, T)}{\sigma_{\text{S},1}} \geq 10 \quad (7.23)$$

Wird weiter eine elastische Ausnutzung von $|\min \sigma_{\text{Ed}}| = f_y$ in der oberen Randfaser des Querschnitts vorausgesetzt, kann über die Geometrie daraus die Membranspannung $\sigma_{\text{S},1}$ zurückgerechnet werden. Dabei wird der Grenzfall des starren Verbunds vorausgesetzt, da dies die vereinfachte Berechnung über eine stetige Dehnungsebene erlaubt und für die Membranspannung auf der sicheren Seite liegt. So fällt $\sigma_{\text{S},1}$ im elastischen Verbund mit einer diskreten Kernsteifigkeit stets kleiner aus, als im Grenzfall des starren Verbunds (vgl. Abb. 7.1). Unter Anwendung der in Abschnitt 7.1.1 gezeigten geometrischen Zusammenhänge ergibt sich die Membranspannung in der oberen Deckschicht zu:³

$$\sigma_{\text{S},1} = \min \sigma_{\text{Ed}} \cdot \frac{e_1}{(e_1 + \frac{t_1}{2})} = \min \sigma_{\text{Ed}} \cdot \frac{\rho_{\text{S}} \cdot (1 + \delta)}{\rho_{\text{S}} \cdot (1 + \delta) + 1 - \delta} \quad (7.24)$$

Bei unterschiedlicher Ausbildung der Deckschichten ($\delta \neq 0$) und damit einer Verschiebung der Schwerlinie des gesamten Sandwichelements, verändert sich auch das Verhältnis von Membran- zu Randspannung in der gedrückten Deckschicht. So nähern sich für eine sehr dünne obere Deckschicht ($\delta \rightarrow 1$) die Spannungen $\sigma_{\text{S},1} \rightarrow \min \sigma_{\text{Ed}}$ an, während bei sehr viel dünnerer unterer Deckschicht ($\delta \rightarrow -1$) der Unterschied zwischen beiden Spannungen weiter anwächst

¹DIN EN 1993-2, 5.2.1(4) erlaubt die Anwendung des Passus auch für Stahlbrücken. In DIN EN 14509 existiert dagegen kein vergleichbares Kriterium, welches die Vernachlässigung einer Stabilitätsbetrachtung regelt.

²Hier wird eine positives Biegemoment im Sandwich vorausgesetzt.

³Für detailliertere Herleitungen der geometrischen Zusammenhänge siehe auch Anhang AII-2.

und $\sigma_{S,1} \rightarrow 0$ strebt. Dies begründet sich daraus, dass in einem Element mit sehr viel dickerer oberer Deckschicht das Sandwichmoment M_S in dieser nur sehr geringe Membranspannungen induziert, bis sie für $\delta = -1$ zusammen mit der unteren Deckschicht völlig verschwinden. Die vorliegende Betrachtung wird an Sandwichelementen mit gleich dicken Deckschichten durchgeführt ($\delta = 0$).¹ Einsetzen von Gleichung 7.24 in 7.23 unter Verwendung der Fließspannung $f_y = |\min \sigma_{Ed}|$ als betragsmäßig größte Spannung am äußeren Rand und $\delta = 0$ ergibt:

$$\alpha_{cr,y} = \frac{\sigma_w(t, T) \cdot (\rho_S + 1)}{f_y \cdot \rho_S} \quad (7.25)$$

Unter Einsetzen der Knitterspannung nach Gleichung 7.21 kann der kritische Lastfaktor rein über das Verhältnis im Querschnitt und die Werkstoffeigenschaften bestimmt werden.

$$\alpha_{cr,y} = 0,849 \cdot \sqrt[3]{2,72 \cdot (G_c(t, T))^2 \cdot E_f \cdot \frac{(\rho_S + 1)}{f_y \cdot \rho_S}} \quad (7.26)$$

Abbildung 7.4 zeigt den kritischen Lastfaktor $\alpha_{cr,y}$ für verschiedene Kernsteifigkeiten $G_c(t, T)$ aufgetragen über dem Sandwichparameter ρ_S . Wie schon in der Voruntersuchung in Abschnitt 6.2 sind die Kernsteifigkeiten dabei bezogen auf den Ausgangswert von $G_c(t_0, RT) = 270$ MPa dargestellt. Wie sich anhand der Kurven erkennen lässt, sinkt mit der Kernsteifigkeit die daraus resultierende Bettungssteifigkeit für das Deckblech und damit die Knitterspannung.

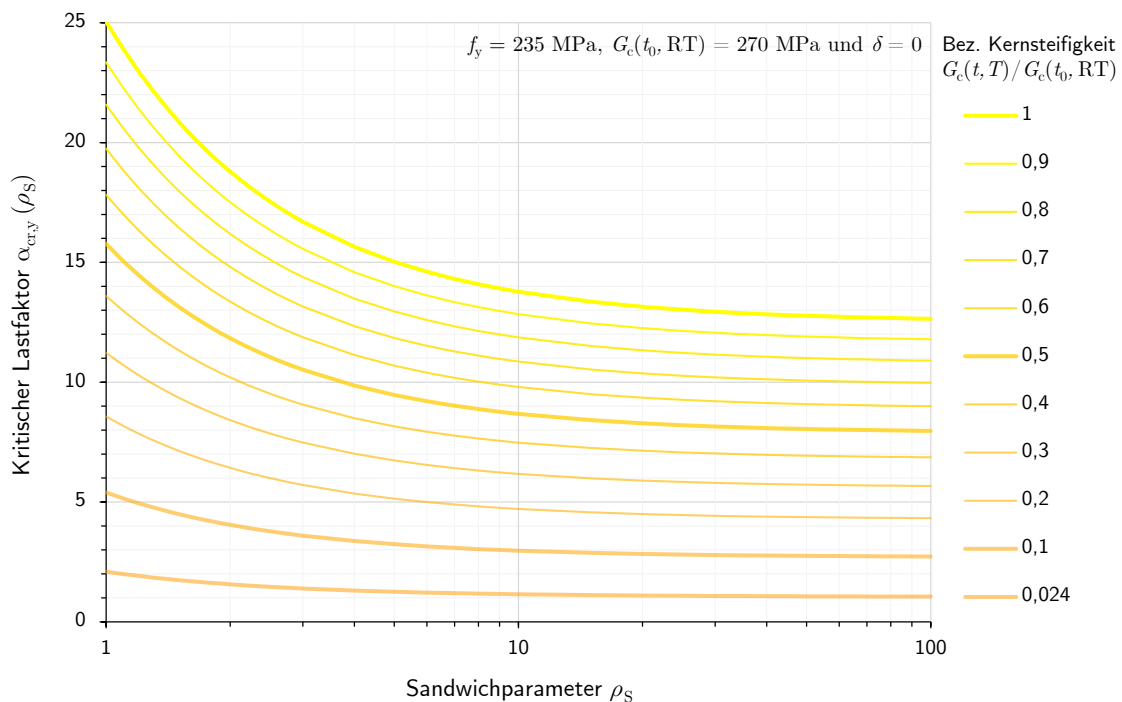


Abbildung 7.4: Funktionen des kritischen Lastfaktors $\alpha_{cr,y}$ nach Gleichung 7.26 für verschiedene Stufen der Kernsteifigkeit G_c (Die in der Voruntersuchung bereits betrachteten Stufen von 100, 50 und 10 % sowie die Gleichgewichtssteifigkeit $G_e = 6,5$ MPa $\cong 2,4$ % sind hervorgehoben)

¹Auch die weiteren Untersuchungen konzentrieren sich auf diesen Fall, was in Abschnitt 7.2.1 begründet wird.

Somit sinkt ebenso der kritische Lastfaktor mit der Kernsteifigkeit $G_c(t, T)$. Ein geringer Sandwichparameter ρ_S sorgt hingegen dafür, dass die Membranspannung merklich kleiner ausfällt als die Randspannung, was zu einer rechnerisch höheren Knitterspannung führt. Dies resultiert aus der bereits in den Grundlagen in Abschnitt 6.1.1 beschriebenen Tatsache, dass für dickere Deckschichten im Vergleich zum Kern der auf die Sandwichwirkung entfallende Traganteil geringer ausfällt.

Für die Beurteilung der Vernachlässigbarkeit des Knitterns des gedrückten Deckblechs im SPS wird das Kriterium $\alpha_{cr,y} \geq 10$ anhand der Kurvenverläufe in Abbildung 7.4 überprüft. Es ist zu erkennen, dass die Bedingung für Kernsteifigkeiten von über 70% des Ausgangswerts im gesamten betrachteten Bereich erfüllt ist. Für den Nachweis im ULS unter kurzzeitiger Belastung bei Raumtemperatur mit $G_c \equiv G_c(t_0, RT)$ bedarf es demnach keiner Stabilitätsbetrachtung. Beim Einsatz von SPS-Elementen in Bahnbrücken muss jedoch auch deren Tragfähigkeit unter erhöhter Temperatur berücksichtigt werden. Dafür wurde bereits in der Voruntersuchung der Fall einer Temperaturerhöhung auf 60 °C betrachtet, welcher zu einer Reduktion der Kernsteifigkeit um 50% führt (vgl. Abschnitt 6.2.1). Wie die Kurve dieses Falls erkennen lässt, erfüllt der kritische Lastfaktor für $\rho_S > 4$ die Bedingung nicht mehr und sinkt bis auf $\alpha_{cr,y} \approx 8$ ab. Für niedrigere Stufen der Kernsteifigkeit ist die Bedingung entsprechend ebenfalls nicht erfüllt.

Trotz der beschriebenen Unterschreitung des Kriteriums, werden SPS-Elemente im relevanten Anwendungsbereich ($1 < \rho_S \leq 10$) für die folgenden Untersuchungen der Studie als unempfindlich gegenüber einem Knittern des gedrückten Deckblechs eingestuft. Diese Einschätzung basiert auf der Tatsache, dass für die zuvor gezeigten Berechnungen mehrere konservative Annahmen getroffen wurden, welche den kritischen Lastfaktor verringern und die Betrachtung auf die sichere Seite ziehen. Zum einen wurde zur Berechnung der Knitterspannung das einfachste Modell einer gedrückten Deckschicht auf einem isotropen Kern unendlicher Dicke gewählt. Dieser Ansatz liegt für niedrige Sandwichparameter auf der sicheren Seite, da die gezogene Deckschicht gerade bei dünnen Kernen eine stabilisierende Wirkung hat (vgl. Nelke 2018, S. 26 ff.). Zum anderen wurde für die Umrechnung der Rand- auf die Membranspannung stark vereinfacht der Grenzfall des starren Verbunds angenommen, da dieser eine stetige Dehnungsebene aufweist. Dies liegt für die Membranspannung auf der sicheren Seite, da diese im elastischen Verbund deutlich geringer ausfällt. Dieser Effekt wird durch eine sinkende Kernsteifigkeit noch weiter verstärkt und die Membranspannung durch die Umlagerung vom Sandwich- auf die Deckschichtbiegemomente reduziert (vgl. Abb. 7.1). In den weiteren Betrachtungen der vorliegenden Arbeit, welche sich rein mit dem (visko-) elastischen Tragverhalten von Sandwichelementen unter veränderlicher Kernsteifigkeit befassen, wird die Stabilität nach der zuvor geführten Abgrenzung daher nicht weiter betrachtet.

7.2 Das Tragverhalten von Sandwichelementen mit veränderlicher Kernsteifigkeit und verschiedenen Deckschichtgeometrien

Nachdem die Grundlagen und die Methodik der Studie erläutert wurden, erfolgt in diesem Abschnitt die Auswertung und Diskussion der Ergebnisse anhand von Sandwichelementen im Allgemeinen. Es werden die Auswirkungen einer veränderlichen Kernsteifigkeit $G_c(t, T)$ auf die Gesamtsteifigkeit von einachsig abtragenden Sandwichelementen mit gleich dicken stählernen Deckschichten ($t_1 = t_2 = t_f$ und $\delta = 0$ mit $\nu_f = 0,3$) in den drei Systemen anhand der Steifigkeitsfaktoren f_k beleuchtet. Anschließend erfolgt analog die Auswertung der Auswirkungen auf die Beanspruchung in den Deckschichten anhand der Spannungsfaktoren f_σ .

Zur besseren Veranschaulichung werden die bereits in der Voruntersuchung in Abschnitt 6.2 definierten Aufbauten von Sandwichelementen mit dicken Deckschichten und einem Kern aus dem speziellen PUR exemplarisch berechnet und in den Graphen dieses Abschnitts zusätzlich mit angegeben. Wie bereits erwähnt, markieren sie in etwa die Grenzen von realistisch anwendbaren SPS-Elementen für Fahrbahnen von Bahnbrücken (vgl. Abschnitt 6.2.1). Wie schon in der Voruntersuchung, werden dabei für jedes Element die drei Stufen der Kernsteifigkeit des PUR ($G_c, 0,5 \cdot G_c$ und $0,1 \cdot G_c$) betrachtet (vgl. Tab. 6.2) und darüber die jeweiligen Bezugsschlankheiten $\bar{\lambda}_f$ bestimmt (vgl. Gl. 7.10). Tabelle 7.3 zeigt eine Zusammenstellung dieser exemplarisch betrachteten Sandwichaufbauten mit ihren Verhältnisparametern δ , ρ_S , λ_f sowie $\bar{\lambda}_f$ in Abhängigkeit von den betrachteten Stufen der Kernsteifigkeit.

Tabelle 7.3: Dimensionen und Steifigkeiten der betrachteten Sandwichbalken aus der Voruntersuchung und ihre Verhältnisparameter für stählerne Deckschichten mit $E_f = 210$ GPa

Bezeichnung	Geometrie, Parameter							Bezugsschlankheiten		
	und Gesamtsteifigkeit im starren Verbund ¹							G_c	$0,5 \cdot G_c$	$0,1 \cdot G_c$
	t_f	δ	t_c	ρ_S	l	λ_f	$k_{I,r}$	$\bar{\lambda}_f(G_c(t, T))$		
mm	—	mm	—	mm	—	N/mm	270 MPa	135 MPa	27 MPa	
S101010-700	10	0	10	2	700	70	6997	3,55	2,51	1,12
S101010-5000	10	0	10	2	5000	500	19	25,35	17,93	8,02
S109010-700	10	0	90	10	700	70	162009	3,55	2,51	1,12
S109010-5000	10	0	90	10	5000	500	445	25,35	17,93	8,02

Zunächst wird lokal an den Grenzfallfunktionen des Steifigkeitsfaktors das Szenario verschieden dicker Deckschichten betrachtet ($t_1 \neq t_2$ und $\delta \neq 0$). Die Auswirkungen auf die globale Tragwirkung werden so vereinfacht abgeschätzt, um eine Variation des Deckschichtparameters δ in den darauf folgenden Auswertung nicht explizit betrachten zu müssen. An der Funktion des Grenzfalls ohne Verbund wird in Abschnitt 7.2.4 außerdem der Einfluss der Stirnplattensteifigkeit auf die Gesamtsteifigkeit des Systems II untersucht.

¹Die absolute Gesamtsteifigkeit $k_{I,r} = 1/w_{I,F,r}(\xi = 0,5)$ des starren Verbunds nach Gleichung AII-117 mit $b = 100$ mm wird hier zusätzlich angegeben, um die folgende Auswertung der Steifigkeitsfaktoren $f_{k,I}$ zu unterstützen, die absoluten Steifigkeiten $k_{I,e}$ der exemplarischen Sandwichbalken berechnen und die Ergebnisse mit denen der Voruntersuchung k_S vergleichen zu können (s. Anhang AII-1).

7.2.1 Die Gesamtsteifigkeit bei unterschiedlichen Deckschichtdicken

Um die Auswirkungen unterschiedlich dicker Deckschichten auf die Tragwirkung von Sandwichelementen zu untersuchen, werden die im vorherigen Abschnitt 7.1.2 definierten Grenzfallfunktionen des Steifigkeitsfaktors f_k herangezogen. Dabei werden diese für stufenweise variierende Deckschichtparameter δ über dem Sandwichparameter ρ_S aufgetragen ($-1 \leq \delta \leq 1$). Für das Material der Deckschichten wird, wie in allen anderen Betrachtungen, Stahl angenommen ($\nu_f = 0,3$). Abbildung 7.5 zeigt die Grenzfallfunktion des starren Verbunds $f_{k,r}$ durch einen unendlich steifen Kern ($\bar{\lambda}_f \rightarrow \infty$) nach Gleichung 7.14 für verschiedene Deckschichtparameter δ . Die dargestellten Funktionen bilden jeweils die Verbindung zwischen der konstanten Grenzfallfunktion $f_{k,r}(\rho_S = 1)$ und dem unteren Grenzwert $1 - \nu_f^2$ für $\rho_S \rightarrow \infty$, welche beide bereits in Abschnitt 7.1.2 hergeleitet wurden.

Wie zu erkennen ist, haben unterschiedliche Deckschichten nur einen gering Einfluss auf die Größe der Grenzfallfunktion $f_{k,r}$ des starren Verbunds. Dieser resultiert aus dem bereits diskutierten Fehler in der Berücksichtigung der versteifenden Plattentragwirkung der Deckschichten (vgl. Abschnitt 7.1.2). Je größer der Unterschied zwischen den Deckschichten wird ($|\delta| \rightarrow 1$), desto mehr Gesamtsteifigkeit resultiert aus deren Eigenbiegesteifigkeit, während die Steiner-Anteile an Einfluss verlieren. Entsprechend nimmt auch der besagte Fehler in der Biegesteifigkeit B im Vergleich zu der des Plattenstreifens B_r ab. Für $\delta = \pm 1$ verschwindet eine der Deckschichten, sodass die Gesamtsteifigkeit zu 100 % aus der Eigenbiegesteifigkeit der verbleibenden Deckschicht besteht und der Unterschied zum Plattenstreifen verschwindet ($f_{k,r}(\rho_S) = 1$). Sind die Deckschichten hingegen identisch ausgebildet, ergibt sich das andere Extrem: der Fehler durch die Vernachlässigung der Querdehnungsbehinderung in den Steiner-Anteilen wird maximal und der Steifigkeitsfaktor $f_{k,r}$ damit minimal.

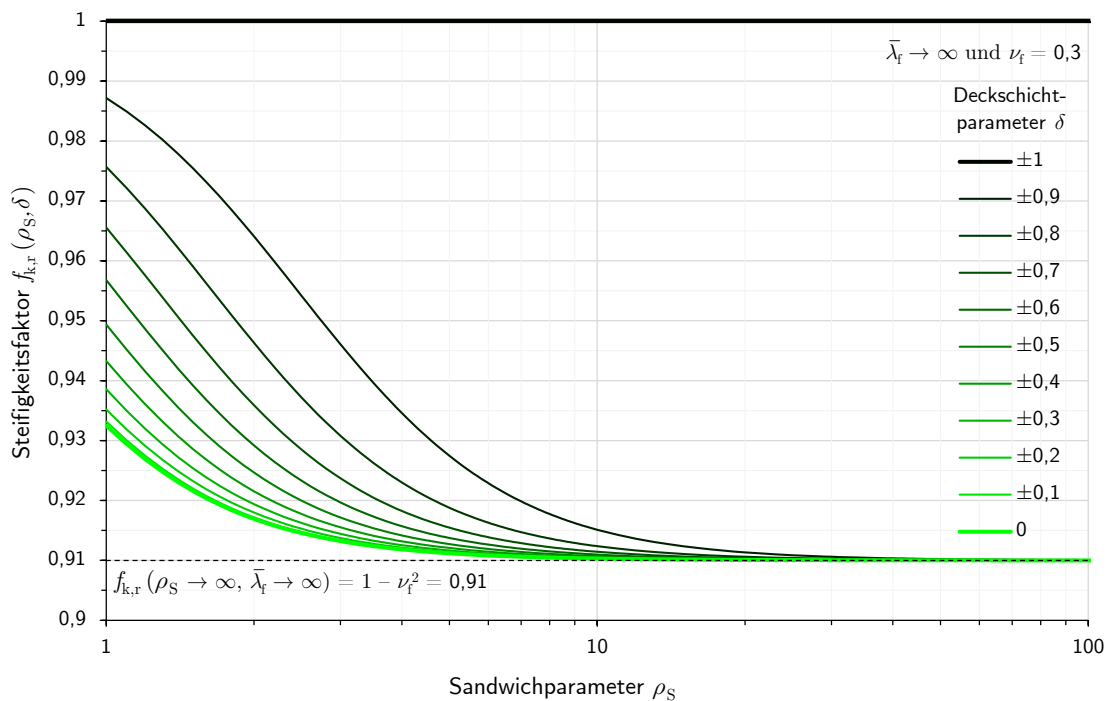


Abbildung 7.5: Die Grenzfallfunktion $f_{k,r}$ nach Gleichung 7.14 für $\bar{\lambda}_f \rightarrow \infty$ (In den Abbildungen 7.9 bis 7.11 ist die Funktion aufgrund der genannten Grenzbetrachtung nicht darstellbar)

Mit größer werdendem Hebelarm der Deckschichten (ρ_S), verlieren dagegen die Anteile aus Eigenbiegesteifigkeit an der Gesamtsteifigkeit zunehmend ihren Einfluss. So streben alle Funktionen gegen den Grenzwert $1 - \nu_f^2$, welcher sich aus dem Verhältnis der Steiner-Anteile des Sandwichs mit starrem Verbund zu denen des Plattenstreifens ergibt (s. Gl. 7.16). Für die Tragwirkung von Sandwichelementen unter veränderlicher Kernsteifigkeit spielt die Grenzfallfunktion $f_{k,r}$ nur eine untergeordnete Rolle. Sie bildet zum einen das als Grenzfall unrealistische Szenario eines starren Kerns ab und schwankt darüber hinaus nur geringfügig in Abhängigkeit von der Ausbildung der Deckschichten. Ihr Einfluss auf die untersuchten Faktoren wird daher nicht weiter betrachtet.

Die Grenzfallfunktionen $f_{k,I,f} = f_{k,III,f}$ und $f_{k,II,f}$ für den Zustand der Systeme ohne Verbund spielen in der Studie dagegen eine weit wichtigere Rolle. In den folgenden Abbildungen 7.6 und 7.7 sind die, gemäß den Gleichungen in Tabelle 7.1 berechneten, Funktionen für verschiedene Deckschichtparameter δ dargestellt. Sie stellen jeweils die untere Grenze der bezogenen Gesamtsteifigkeit der Sandwichelemente für $\bar{\lambda}_f = 0$ dar, der sich die zu untersuchenden Steifigkeitsfaktoren $f_k(\rho_S, \bar{\lambda}_f)$ mit sinkender Kernsteifigkeit annähern (vgl. Abb. 7.1 und bspw. Abb. 7.9 für System I). Es zeigen sich ähnliche Phänomene wie zuvor an der Funktion $f_{k,r}$ beobachtet, wobei sich die Grenzfallfunktionen hier über den gesamten Wertebereich $W =]0; 1]$ des Steifigkeitsfaktors erstrecken. So führt auch in diesen Funktionen der unrealistische Fall $\delta = \pm 1$ dazu, dass eine der Deckschichten verschwindet und die Gesamtsteifigkeit des jeweiligen Sandwichelements rein aus der Eigenbiegesteifigkeit der verbliebenen Deckschicht resultiert. Bezogen auf einen Plattenstreifen gleicher Dimensionen mit starrem Verbund ergibt sich demnach stets $f_{k,r} = 1$

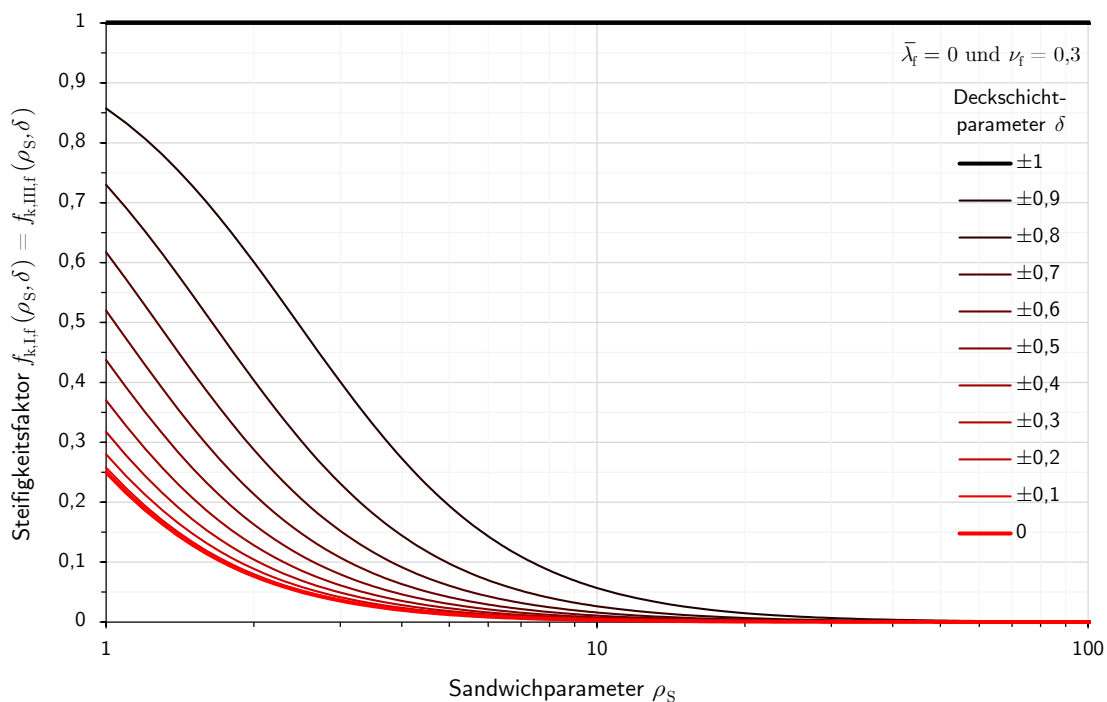


Abbildung 7.6: Die Grenzfallfunktion $f_{k,I,f} = f_{k,III,f}$ nach Gleichung 7.18 mit unterschiedlich dicken Deckschichten anhand des Parameters δ (Die Grenzfallfunktion $f_{k,I,f}(\delta = 0)$ ist ebenfalls in den Abbildungen 7.9 und 7.11 für $\bar{\lambda}_f = 0$ dargestellt)

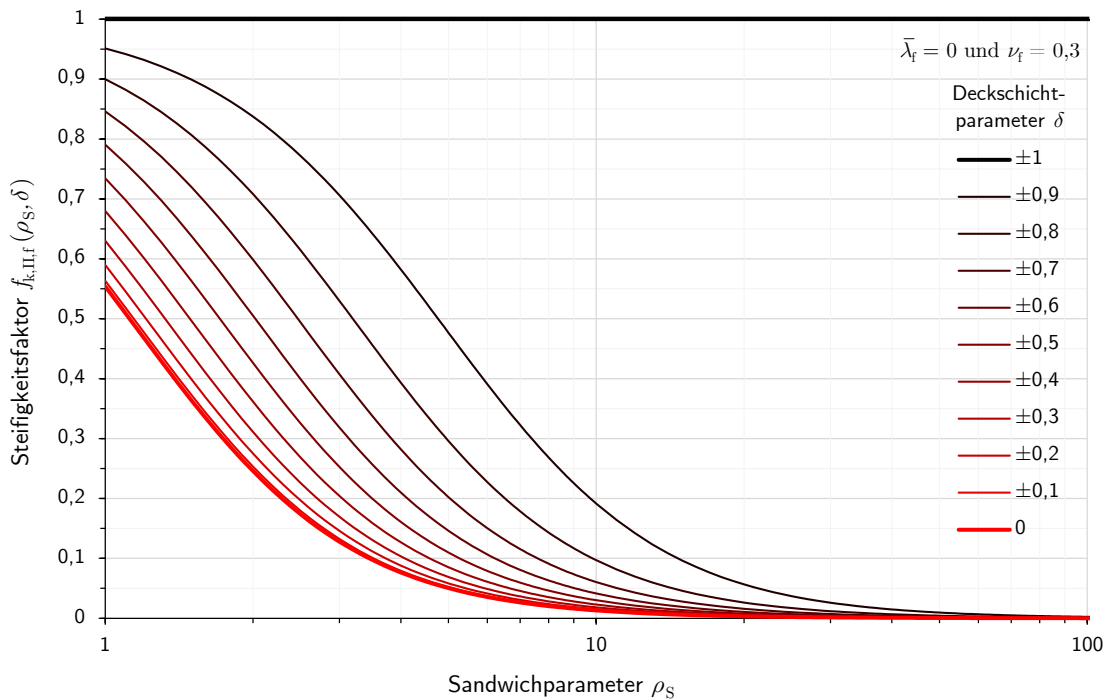


Abbildung 7.7: Die Grenzfallfunktion $f_{k,II,f}$ nach Gleichung AII-71 mit unterschiedlich dicken Deckschichten anhand des Parameters δ (Die Grenzfallfunktion $f_{k,II,f}(\delta = 0)$ ist ebenfalls in Abbildung 7.10 für $\lambda_f = 0$ dargestellt)

Mit sinkendem $|\delta|$ nimmt bei konstantem Sandwichparameter ρ_S (Hebelarm e) die Eigenbiegesteifigkeit der Deckschichten ab, während die Steiner-Anteile anwachsen. Letztere besitzen im Grenzfall ohne Verbund durch die fehlende Kopplung des Kerns jedoch keine Wirksamkeit, sodass mit fallender Eigenbiegesteifigkeit der Deckschichten ebenso die Gesamtsteifigkeit des Elements fällt. Bezogen auf einen baugleichen Plattenstreifen mit starrem Verbund, dessen Steiner-Anteile und Gesamtsteifigkeit sehr wohl ansteigen, verlaufen die Grenzfallfunktionen mit kleinerem δ entsprechend niedriger und erreichen für $\delta = 0$ einen Minimalfall. Ein ähnliches Verhalten zeigt sich bei zunehmendem Abstand der Deckschichten. Hier steigen mit ρ_S die Steiner-Anteile und damit die Gesamtsteifigkeit im starren Verbund. Die Eigenbiegesteifigkeit der Deckschichten bleibt dagegen konstant, sodass ihr Anteil an der Gesamtsteifigkeit mit steigendem ρ_S rasch sinkt und die Grenzfallfunktionen entsprechend $f_{k,f} \rightarrow 0$ streben.

Ein Vergleich der Funktionen für jeweils gleiche δ -Werte in den Abbildungen 7.6 und 7.7 zeigt, dass sich das System II im Grenzfall ohne Verbund steifer verhält als das System I.¹ Dies resultiert aus den Schubkopplungen der Deckschichten durch die starren Stirnplatten an den Enden von System II, welche auch für eine Kernsteifigkeit $G_c \rightarrow 0$ noch eine Membrantragwirkung der Deckschichten ermöglichen. Das Sandwichelement verhält sich vom Prinzip wie ein aus den Deckschichten und Stirnplatten bestehender Rahmen unter Querbelastung (vgl. die Herleitung der Grenzfallfunktion $f_{k,II,f}$ in Anhang AII-3.3). Gerade für niedrige Sandwichparameter ρ_S mit geringer Stirnplattenlänge im Verhältnis zur Deckschichtdicke und damit Eigenbiegesteifigkeit, ist der versteifende Effekt ausgeprägt. Mit steigendem Abstand der Deckschichten verlieren die Stirnplatten jedoch an Einfluss und die Kurven nähern sich denen von System I wieder an. Der Grund hierfür liegt geometrisch in der Starrkörperverdrehung der Stirnplatten,

¹Der Vergleich ist möglich, da für System I und II die Bezugfunktion B_r des starren Verbunds gleich ist.

welche durch die gegenseitige Verschiebung der Deckschichten aus Schub entsteht. Diese fällt umso geringer aus, je höher das Element ist und verringert so das Maß in dem die biegesteif angeschlossenen Deckschichten aktiviert werden (vgl. Abb. AII-82).

Betrachtet man die gezeigten Grenzfallfunktionen der drei Systeme unter dem Gesichtspunkt der absoluten Gesamtsteifigkeit, besteht die Gefahr eines falschen Rückschlusses. Die Kurven suggerieren, dass es günstig für die Steifigkeit sein könnte die Deckschichten möglichst ungleich auszubilden. Dabei darf jedoch nicht außer Acht gelassen werden, dass sich mit δ der Aufbau im Querschnitt grundlegend verändert und damit jeder Kurve auch eine andere Steifigkeit B_r im Zustand des starren Verbunds zugrunde liegt. Um dies zu veranschaulichen wird ein weiterer Faktor zu Hilfe genommen: $f_{r,\delta}$ bezieht die Steifigkeit eines Elements mit starrem Verbund und unterschiedlich ausgebildeten Deckschichten nach Gleichung AII-21 auf ein Element mit sonst gleichen Bedingungen aber identischen Deckschichten ($\delta = 0$).

$$f_{r,\delta} = \frac{B_r}{B_r(\delta = 0)} = \frac{4 + 3 \cdot (\rho_S^2 - 1) \cdot (1 - \delta^2)}{1 + 3 \rho_S^2} \quad (7.27)$$

Abbildung 7.8 zeigt die Entwicklung von $f_{r,\delta}$ über ρ_S für verschiedene Deckschichtparameter δ . Es wird deutlich, dass in einem Element mit gleichbleibender mittlerer Deckschichtdicke ($t_1 + t_2 = 2 \cdot t_f = \text{const.}$) die größtmögliche Steifigkeit erreicht wird, wenn die Deckschichten identisch ($t_1 = t_2$ bzw. $\delta = 0$) und die Steiner-Anteile, sowie die Biegesteifigkeit B_r damit maximal sind. Für größere Deckschichtparameter δ sinken die Steiner-Anteile während die Eigenbiegesteifigkeit der Deckschichten jedoch nicht im gleichen Maße steigt. Letztere sind zudem unabhängig vom inneren Hebelarm e , sodass die Biegesteifigkeit bezogen auf den Zustand mit gleich dicken Deckschichten mit zunehmendem ρ_S immer weiter sinkt.

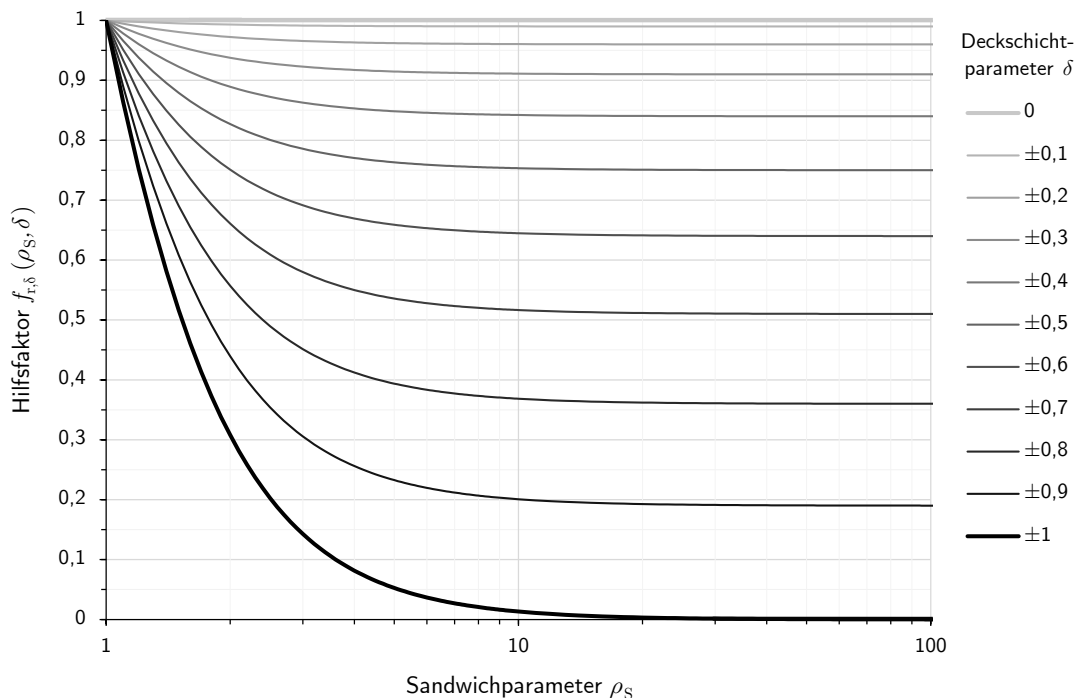


Abbildung 7.8: Verläufe des Hilfsfaktors $f_{r,\delta}$ über ρ_S nach oben stehender Gleichung 7.27 für unterschiedlich dicken Deckschichten ($-1 \leq \delta \leq 1$)

Im strengen Sinne der absoluten Biegesteifigkeit lohnt es sich folglich nicht die Deckschichten unterschiedlich auszugestalten. Die Kurven der vorigen Abbildungen zeigen jedoch auch, dass es möglich ist Sandwichelemente unempfindlicher gegen eine schwindende Kernsteifigkeit auszulegen, wenn dafür im Entwurf eine geringere Ausgangssteifigkeit in Kauf genommen wird. Da die gezeigten Grenzfallfunktionen stets die untere Grenze der Gesamtsteifigkeit eines Sandwichelements für $\bar{\lambda}_f = 0$ darstellen (vgl. Abb. 7.1), ist anzunehmen, dass dessen Tragverhalten sich auch für höhere Kernsteifigkeiten ($\bar{\lambda}_f > 0$) ebenso weniger empfindlich zeigen wird.¹ Dies lässt sich bspw. für eine Auslegung von Sandwichelementen in einem Entwurf unter überwiegenden Dauerlasten nutzen.

Für kurzzeitige Belastungen wie z. B. aus Verkehr ist jedoch stets die Höhe der absoluten Gesamtsteifigkeit ausschlaggebend, für welche sich symmetrische Querschnittsaufbauten als wirkungsvoller zeigen. Gerade in der verhältnismäßig leichten Sandwichbauweise machen diese Einwirkungen in der Regel den größten Anteil an der Gesamtbelastung aus. Auch wirken herstellungsbedingt meist alle Belastungen auf den Gesamtquerschnitt (Eigengewichtsverbund).² Eine unterschiedliche Ausbildung der Deckschichten erscheint unter diesen Voraussetzungen demnach nicht sinnvoll. Auf eine Variation des Deckschichtparameters δ wird in der weiteren Studie daher verzichtet und alle Untersuchungen mit $\delta = 0$ durchgeführt. Eine Berücksichtigung dieses ungünstigsten Falls liegt für die Dimensionierung eines Bauteils zudem auf der sicheren Seite.

7.2.2 Die Gesamtsteifigkeit unter sinkender Kernsteifigkeit

Um den Einfluss der Kernsteifigkeit $G_c(t, T)$ auf die Gesamtsteifigkeit von Sandwichelementen in den drei Systemen zu untersuchen, werden deren Steifigkeitsfaktoren f_k für symmetrisch ausgeführte Deckschichten über den Verhältnisparametern ρ_S und $\bar{\lambda}_f$ in dreidimensionalen Diagrammen aufgetragen. Die Abbildungen 7.9, 7.10 und 7.11 zeigen diese *Faktorflächen* der Gesamtsteifigkeit für die Systeme I, II und III.³ Außerdem sind die zuvor diskutierten zugehörigen Grenzfallfunktionen des jeweiligen Steifigkeitsfaktors für $\delta = 0$ in den Diagrammen dargestellt (vgl. auch Tab. 7.1). Die angestrebte optische Kontrolle mit Hilfe der Grenzfallfunktionen bestätigt die Faktorflächen der Gesamtsteifigkeit auf den betrachteten Intervallen. Auch die Tatsache, dass die Grenzfälle die obere bzw. untere Grenze des Wertebereichs für die Gesamtsteifigkeit darstellen, werden durch die Faktorflächen bestätigt.

Wie bereits durch die Abhängigkeiten in den Gleichungen 7.10 und 7.11 zu erkennen ist, beeinflusst die Kernsteifigkeit $G_c(t, T)$ direkt die Bezugsschlankheit $\bar{\lambda}_f$ und dadurch den Steifigkeitsfaktor eines diskreten Sandwichelements. Schwindet die Kernsteifigkeit, tut dies ebenso die Bezugsschlankheit und die Gesamtsteifigkeit des betrachteten Elements „rutscht“ auf der jeweiligen Faktorfläche in Richtung der ρ_S -Achse. Dies ist auch an den exemplarisch berechneten Sandwichelementen der Voruntersuchung zu erkennen. Die Entwicklung von deren Steifigkeitsfaktoren über die drei Stufen sind in den Abbildungen mithilfe von Datenpunkten und einem zusätzlichen schwarzen Pfeil als Legende angedeutet. Generell lässt sich an den Faktorflächen beobachten, dass die Gesamtsteifigkeit eines Sandwichelements bezogen auf seinen starren Verbund umso geringer ausfällt, je kleiner die Bezugsschlankheit $\bar{\lambda}_f$ wird bzw. je höher das Element und damit der Sandwichparameter ρ_S ist.

¹Diese Vermutung wird sich in der späteren Auswertung der Gesamtsteifigkeit in Abschnitt 7.2.2 erhärten.

²Eine Zuweisung verschiedener Einwirkungen auf Teilquerschnitte ist technisch zwar denkbar, jedoch mit erhöhtem Aufwand in der Herstellung verbunden.

³Alle Faktorflächen sind zusätzlich konsolidiert als Höhenliniendarstellungen in Anhang AII-6 zu finden.

Dies resultiert aus dem Effekt, dass die Verformung aus der Schubtragwirkung im Sandwich bei Elementen mit kurzer Spannweite bzw. hohem Kern gegenüber der Biegeverformung zunimmt. Ein weiterer Einflussfaktor ist das veränderliche Verhältnis der Steifigkeiten von Kern zu Deckschichtwerkstoff (vgl. Gl. 7.10). Dabei ist bemerkenswert, dass bspw. eine veränderte Wahl der Deckschichtdicke t_f bei konstant bleibendem ρ_S , ähnliche Auswirkungen auf die Gesamtsteifigkeit eines Elements hat, wie die Veränderung der Kernsteifigkeit $G_c(t, T)$: Sie verschiebt den Steifigkeitsfaktor auf der Faktorfläche parallel zur $\bar{\lambda}_f$ -Achse. Mit dem Wissen über diesen Effekt und seine Auswirkungen, kann man einem zu großen Verlust an Gesamtsteifigkeit infolge Kriechen des Kerns also bereits im Entwurf, durch eine entsprechende Festlegung der geometrischen Parameter, entgegenwirken.

Wie stark die Gesamtsteifigkeit k_e eines Sandwichelements in Abhängigkeit von der sinkenden Kernsteifigkeit und seinen Dimensionsverhältnissen zurückgeht, lässt sich an den Faktorflächen erkennen. Je steiler die Flächen in Abhängigkeit von $G_c(t, T)$ abfallen, desto stärker verliert ein Element mit konstantem Querschnitt ($\rho_S = \text{const.}$) an Gesamtsteifigkeit, bis diese für $\bar{\lambda}_f = 0$ im Grenzfall ohne Verbund ihr Minimum findet.

Hieran lässt sich auch ohne direkte Berechnung erkennen, welche Auswirkungen unterschiedlich dicke Deckschichten auf die Entwicklung der relativen Gesamtsteifigkeit haben. Bereits im vorigen Abschnitt 7.2.1 wurde gezeigt, dass vor allem für niedrige ρ_S alle Grenzfallfunktionen größer ausfallen wenn $|\delta| > 0$ gewählt wird. Dabei nehmen mit steigendem δ die Funktionen für den Grenzfall ohne Verbund $f_{k,f}$ wesentlich stärker zu, als diejenige für den starrem Verbund $f_{k,r}$ (vgl. bspw. Abb. 7.6 und 7.5).

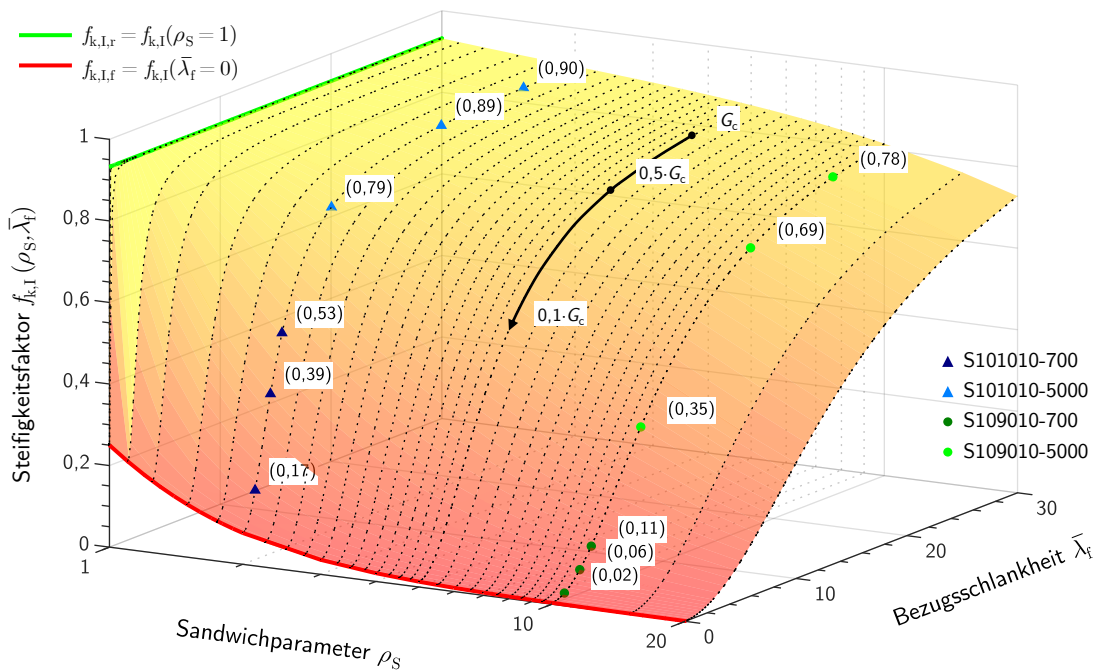


Abbildung 7.9: Räumliche Darstellung des Steifigkeitsfaktors $f_{k,I}$ für $\delta = 0$ in System I, der zur Kontrolle separat hergeleiteten Funktionen für die Grenzfälle ohne (rot) und mit vollem Verbund (grün) sowie der diskreten Steifigkeitsfaktoren der Sandwichbalken aus der Voruntersuchung für die verschiedenen Stufen der Kernsteifigkeit G_c (s. schwarzer Pfeil)

Dies führt dazu, dass die dazwischenliegenden Faktorflächen unter Annahme eines qualitativ ähnlichen Verlaufs im Bereich geringer Bezugsschlankheiten weniger steil ausfallen. Entsprechend nimmt die Gesamtsteifigkeit der Elemente mit ungleichmäßig dicken Deckschichten bezogen auf ihren Ausgangszustand weniger stark ab, als im symmetrisch ausgeführten Fall. Die Elemente werden mit zunehmend asymmetrischen Deckschichtdicken also unempfindlicher gegenüber einer veränderlichen Kernsteifigkeit. Dies resultiert aus der bereits erwähnten Umschichtung der Steifigkeit von den Steiner-Anteilen auf die Eigenbiegesteifigkeit der Deckschichten, die jedoch stets auch mit einer kleineren absoluten Gesamtsteifigkeit im Ausgangszustand einhergeht (vgl. Abb. 7.8 bzw. Abschnitt 7.2.1).

Neben der qualitativen Abschätzung der Gesamtsteifigkeit, lässt sich anhand der Faktorflächen auch der diskrete Steifigkeitsverlust eines Sandwichelements berechnen. Dafür werden die zu betrachtenden Funktionswerte des Steifigkeitsfaktors abermals in Relation gesetzt. So kann die Steifigkeit des starren Verbunds k_r herausgekürzt und die Gesamtsteifigkeit des Elements bezogen auf den Ausgangszustand berechnet werden. Die relative verbleibende Gesamtsteifigkeit eines Sandwichelements gibt der *Steifigkeitsquotient* κ wieder:

$$\kappa = \frac{f_k(G_c(t, T))}{f_k(G_c)} = \frac{k_e(G_c(t, T))}{k_r} \cdot \frac{k_r}{k_{e,init}(G_c)} = \frac{k_e(G_c(t, T))}{k_{e,init}(G_c)} \quad (7.28)$$

Dieser drückt aus welcher Anteil der initialen Gesamtsteifigkeit $k_{e,init}(G_c)$ in einem konkreten Sandwichelement nach Reduktion der Kernsteifigkeit $G_c(t, T)$ durch Kriechen oder Temperaturerhöhung noch vorhanden ist. Im System I reduziert sich bspw. durch das Erwärmen des Elements S109010-5000 auf ca. 60 °C ($0,5 \cdot G_c$) dessen Gesamtsteifigkeit auf 88 % des ursprünglichen Werts bei Raumtemperatur (G_c):

$$\kappa(\text{S109010-5000}, 0,5 \cdot G_c) = \frac{f_k(0,5 \cdot G_c)}{f_k(G_c)} = \frac{0,69}{0,78} = 0,88 \quad (7.29)$$

Eine Reduktion der Kernsteifigkeit um 50 % hat in diesem Fall also eine Reduktion der Gesamtsteifigkeit des Elements um lediglich 12 % zur Folge. Im Vergleich dazu verliert bspw. das Element S101010-700 unter sonst gleichen Bedingungen schon rund 26 % seiner Gesamtsteifigkeit. Um für Sandwichelemente ein möglichst unempfindliches Verhalten gegenüber einer sinkenden Kernsteifigkeit zu erzielen, ist es demnach sinnvoll, möglichst im horizontalen Bereich der jeweiligen Faktorfläche der Gesamtsteifigkeit zu bleiben (vgl. Abb. 7.9). Dies gelingt bspw. in System I für alle drei betrachteten Steifigkeitsstufen nur mit dem Element S101010-5000. Hier fällt selbst bei einer Reduktion der Kernsteifigkeit auf $0,1 \cdot G_c$ die Gesamtsteifigkeit des Elements nur um ca. 12 %. Am ungünstigsten verhält sich dagegen das Element S109010-700, bei dem sich die Änderung der Kernsteifigkeit nahezu proportional auf das Sandwichelement überträgt mit $\kappa(0,5 \cdot G_c) = 0,55$ und $\kappa(0,1 \cdot G_c) = 0,18$.

Auch hier muss jedoch beachtet werden, dass die Gesamtsteifigkeit der Sandwichelemente mit dem Faktor f_k nicht absolut erfasst werden kann. Ein Vergleich der absoluten Gesamtsteifigkeiten $k_{1,r}$ der betrachteten Elemente mit starrem Verbund in Tabelle 7.3 zeigt, dass diese sich stark unterscheiden können. Ein niedriger Sandwichparameter ρ_s (kleine Kerndicke) gepaart mit einer hohen Bezugsschlankheit $\bar{\lambda}_f$ (dünne Deckschichten im Vergleich zur Spannweite) führt stets zu einer geringen absoluten Steifigkeit.

Um in der konkreten Anwendung für SPS-Elemente eine geeignete Gesamtsteifigkeiten zu erzielen, ist daher ein höherer Sandwichparameter ρ_S oder eine geringere Schlankheit λ_f erforderlich, obwohl dies auch zu einem geringeren Steifigkeitsfaktor führt.¹ Auch kann ein stärkeres Abfallen der Gesamtsteifigkeit über die Zeit (für 100 a bis ca. $0,1 \cdot G_c$) dabei realistisch nicht verhindert werden. Jedoch sollte für die Gebrauchstauglichkeit eines SPS-Elements sichergestellt werden, dass zumindest die durch kurzfristige Temperaturänderungen ausgelösten Steifigkeitsschwankungen möglichst gering bleiben (indem bspw. anhand eines adäquat großen $\bar{\lambda}_f$ dimensioniert wird).

Auch für die Systeme II und III verhalten sich die Steifigkeitsfaktoren vom Prinzip ähnlich wie am System I erläutert. Die Gesamtsteifigkeit nimmt bezogen auf den starren Verbund mit sinkender Bezugsschlankheit (Kernsteifigkeit) und steigendem Sandwichparameter ab. Es zeigen sich jedoch Unterschiede in den Faktorflächen der Gesamtsteifigkeit, welche für die beiden Systeme jeweils in verschiedenen Phänomenen begründet liegen. Das System II (s. Abb. 7.10) entspricht von den äußeren Randbedingungen dem System I und wird deshalb auf den gleichen Zustand im starren Verbund bezogen (s. Abschnitt AII-4.2.3). Die starren Stirnplatten erhöhen jedoch die Gesamtsteifigkeit von System II im Bereich geringer Bezugsschlankheiten gegenüber dem System I. Dieses Phänomen wurde bereits im vorherigen Abschnitt am Vergleich der Funktionen $f_{k,II,f}$ und $f_{k,I,f}$ im Grenzfall ohne Verbund diskutiert und zeigt sich ebenso in den diskreten Steifigkeitsfaktoren der exemplarischen Sandwichbalken mit $l = 700$ mm. So verliert bspw. das Element S101010-700 mit starren Stirnplatten durch das Erwärmen auf 60°C nur ca. 19% seiner Gesamtsteifigkeit und nicht 26% wie im System I.

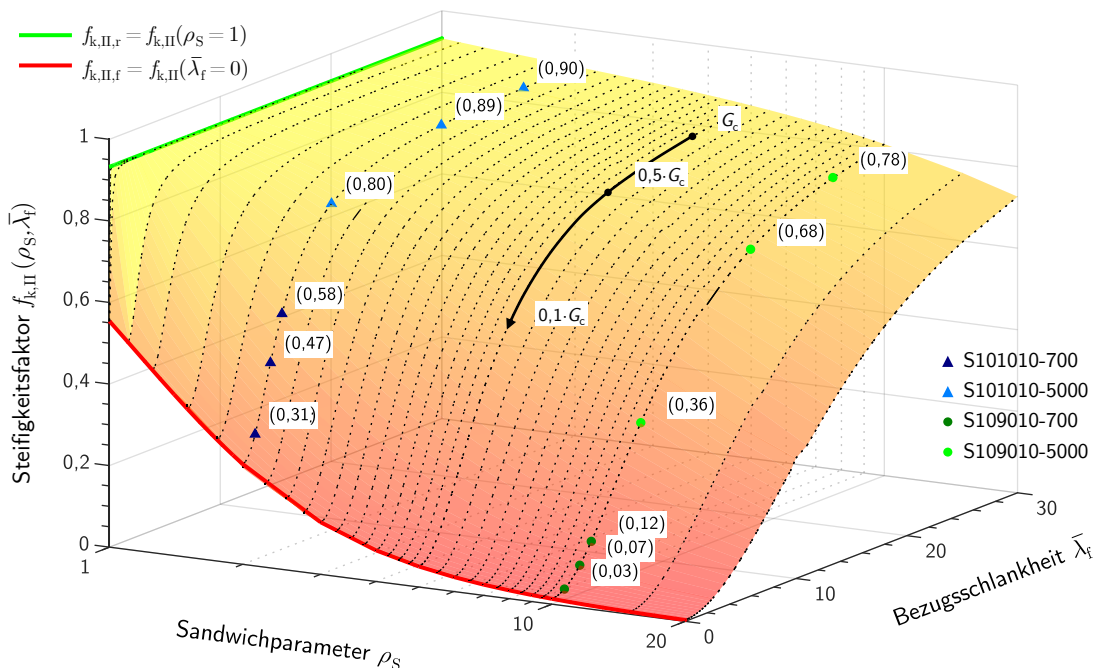


Abbildung 7.10: Räumliche Darstellung des Steifigkeitsfaktors $f_{k,II}$ für $\delta = 0$ in System II, der zur Kontrolle separat hergeleiteten Funktionen für die Grenzfälle ohne (rot) und mit vollem Verbund (grün) sowie der diskreten Steifigkeitsfaktoren der Sandwichbalken aus der Voruntersuchung für die verschiedenen Stufen der Kernsteifigkeit G_c (s. schwarzer Pfeil)

¹Ein Algorithmus zur optimierten Dimensionierung von SPS-Elementen wird in Abschnitt 7.3 vorgeschlagen.

Die Verwendung von starren Stirnplatten in Sandwichelementen mit biegesteifen Deckschichten ist für deren Gesamtsteifigkeit unter dem Gesichtspunkt einer abnehmenden Kernsteifigkeit also sinnvoll. Es stellt sich jedoch die Frage, welche Randbedingungen erfüllt sein müssen damit die Stirnplatten rechnerisch als starr angenommen werden können. Dieser Frage widmet sich der spätere Abschnitt 7.2.4 anhand einer vereinfachten Betrachtung des Grenzfalls ohne Verbund im System II.

Im beidseitig eingespannten System III (s. Abb. 7.11) wird das Sandwichelement auf ein ebenso gelagertes Element mit starrem Verbund bezogen. So ist bereits dessen absolute Gesamtsteifigkeit $k_{III,r}$ um den Faktor 4 größer als in den Systemen I und II (vgl. Gl. AII-117 und Gl. AII-176). Das beidseitig eingespannte Sandwichelement hat zwar die gleichen Grenzfallfunktionen wie im System I (s. Tab. 7.1), verliert jedoch mit steigendem Sandwichparameter oder sinkender Bezugsschlankheit deutlich stärker an Steifigkeit. Dies begründet sich durch den Verlust der Einspannung des Sandwichmoments M_S aus den Steiner-Anteilen der Deckschichten. Die statisch unbestimmte Tragwirkung des Sandwichs geht mit sinkender Kernsteifigkeit verloren, während diejenige der Deckschichten erhalten bleibt. Es kommt zu einer stärkeren Umlagerung in die Deckschichten als in den Systemen I und II, was ein stärkeres Absinken der Gesamtsteifigkeit erzeugt. Absolut betrachtet liegt diese jedoch immer noch höher als in den anderen beiden Systemen. Dies wird bspw. beim Vergleich der Gesamtsteifigkeit des Elements S109010-5000 nach 100a ersichtlich: System I hat hier eine Gesamtsteifigkeit von $k_{I,e}(0,1 \cdot G_c) = 0,35 \cdot 445 \text{ N/mm} = 156 \text{ N/mm}$, während die von System III noch $k_{III,e}(0,1 \cdot G_c) = 0,13 \cdot 1780 \text{ N/mm} = 231 \text{ N/mm}$ beträgt (vgl. Tab. 7.3).

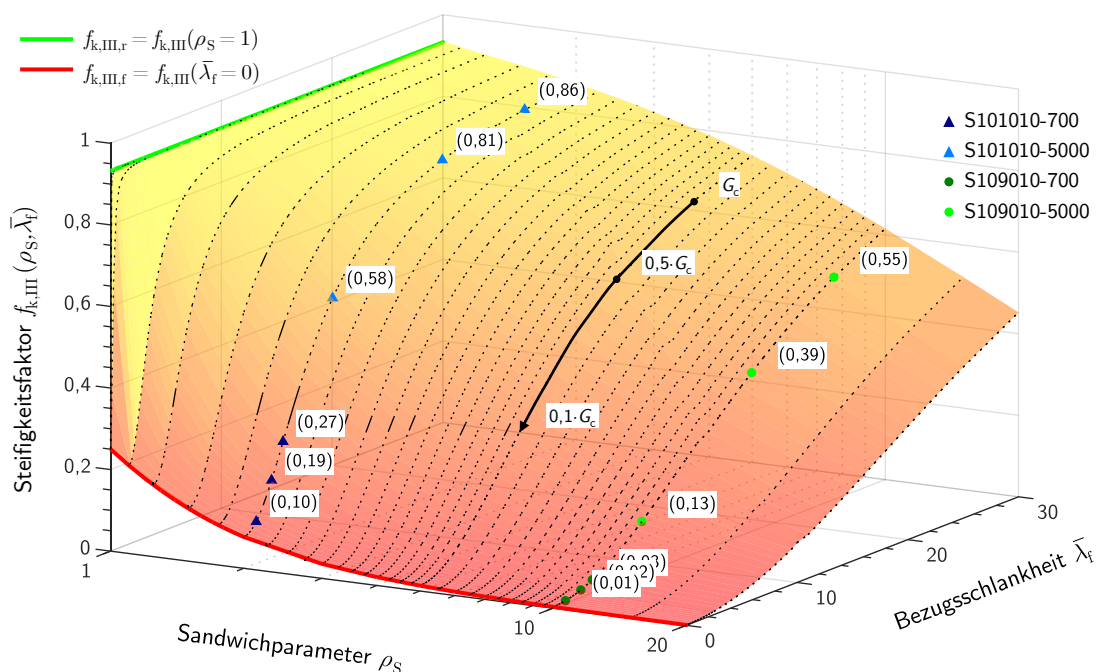


Abbildung 7.11: Räumliche Darstellung des Steifigkeitsfaktors $f_{k,III}$ für $\delta = 0$ in System III, der zur Kontrolle separat hergeleiteten Funktionen für die Grenzfälle ohne (rot) und mit vollem Verbund (grün) sowie der diskreten Steifigkeitsfaktoren der Sandwichbalken aus der Voruntersuchung für die verschiedenen Stufen der Kernsteifigkeit G_c (s. schwarzer Pfeil)

Der Abbau der Gesamtsteifigkeit über eine schwindende Kernsteifigkeit verläuft im System III für große Kerndicken dennoch ungünstiger als in den Systemen I und II. Die stärkere Neigung von dessen Faktorfläche $f_{k,III}$ zeigt, dass die Gesamtsteifigkeit bereits kurzfristig stärker abnimmt, als dies in den beiden anderen Systemen der Fall ist. So führt bspw. die Erwärmung des Elements S109010-5000 auf 60 °C im System III zu einem Verlust der Gesamtsteifigkeit von rund 29%. Wie zuvor bereits angeführt beträgt der Verlust in den anderen Systemen unter sonst gleichen Bedingungen lediglich zwischen 12 und 13 %.

7.2.3 Die Deckschichtspannung unter sinkender Kernsteifigkeit

Der Einfluss der Kernsteifigkeit $G_c(t, T)$ auf die Beanspruchung der Deckschichten in den drei Systemen wird nach dem gleichen Prinzip untersucht wie zuvor bei der Steifigkeit. In dreidimensionalen Diagrammen werden auch die Spannungsfaktoren f_σ für identische Deckschichtdicken ($\delta = 0$) über den Verhältnisparametern ρ_S und $\bar{\lambda}_f$ aufgetragen. Die Abbildungen 7.12, 7.13 und 7.14 zeigen diese *Faktorflächen* für die maximale Deckschichtspannung in Feldmitte der Systeme I, II und III. Zur besseren Anschauung sind darin die horizontalen Achsen invertiert. Ebenfalls dargestellt sind die zugehörigen Grenzfallfunktionen der Spannungsfaktoren (vgl. Tab. 7.2). Die optische Kontrolle mithilfe der Grenzfallfunktionen bestätigt auch hier die Faktorflächen auf den betrachteten Intervallen. Die diskreten Werte des Spannungsfaktors der exemplarisch berechneten Sandwichelemente und deren Entwicklung über die drei Stufen der Kernsteifigkeit sind ebenfalls dargestellt (schwarzer Pfeil mit Beschriftung). Analog zur Gesamtsteifigkeit besteht auch für die Spannungsfaktoren die gleiche Abhängigkeit von der Kernsteifigkeit $G_c(t, T)$ über die Bezugsschlankheit $\bar{\lambda}_f$ (vgl. Gl. 7.10).

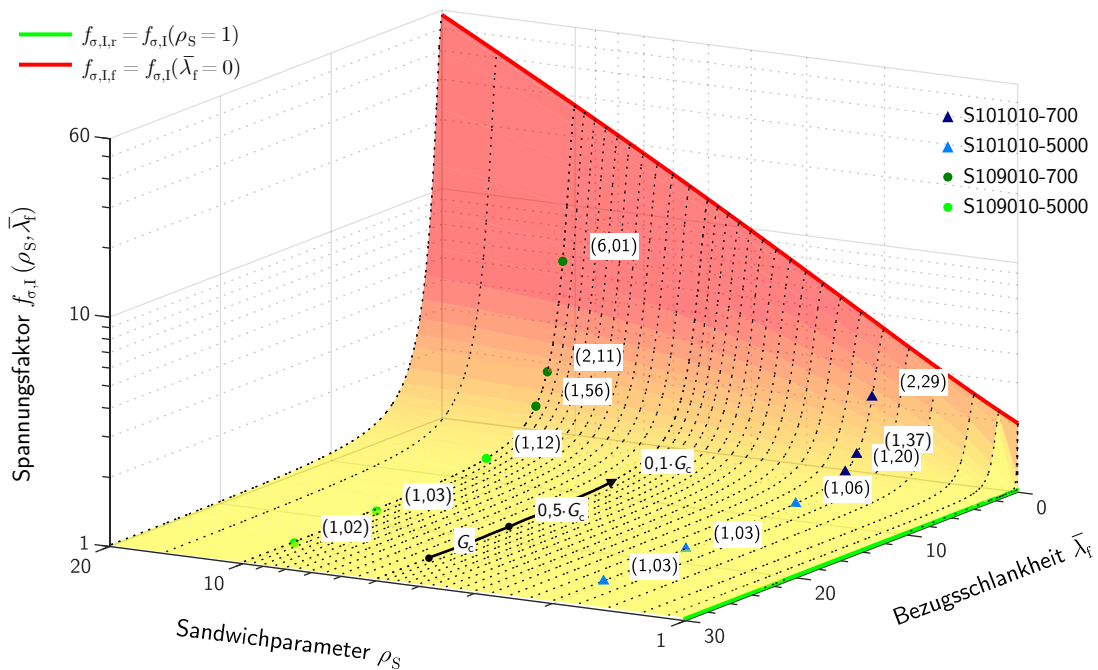


Abbildung 7.12: Räumliche Darstellung des Spannungsfaktors $f_{\sigma,I}$ für $\delta = 0$ in System I, der zur Kontrolle separat hergeleiteten Funktionen für die Grenzfälle ohne (rot) und mit vollem Verbund (grün) sowie der diskreten Spannungsfaktoren der Sandwichbalken aus der Voruntersuchung für die verschiedenen Stufen der Kernsteifigkeit G_c (s. schwarzer Pfeil)

Wie bereits in den Grundlagen zu der Studie beschrieben, ist stets $f_k > 1$, da die Normalspannung σ_r im Grenzfall des starren Verbunds minimal wird und diese in der Bestimmungsgleichung 7.3 des Spannungsfaktors im Nenner steht. Entsprechend strebt der Spannungsfaktor f_σ für kleine Bezugsschlankheiten $\bar{\lambda}_f$ gegen die Grenzfallfunktion $f_{\sigma,f}$, welche selbst wiederum streng monoton steigt ($\lim_{\rho_S \rightarrow \infty} f_{\sigma,f} \rightarrow \infty$). Bemerkenswert ist dabei, dass für alle Systeme der Spannungsfaktor erst für geringe Bezugsschlankheiten $\bar{\lambda}_f < 10$ sichtbar ansteigt¹.

Ähnlich wie bereits bei der Steifigkeit, lässt sich die Zunahme der Randspannung in der Deckschicht unter einer schwindenden Kernsteifigkeit optisch über die Steigung der Faktorflächen abschätzen. Ebenso lässt sich die relative Zunahme über das Verhältnis von Spannungsfaktoren f_σ auf diskreten Stufen der Kernsteifigkeit berechnen. Analog zu Gleichung 7.28 ergibt sich der *Spannungsquotient* ζ aus dem Spannungsfaktor einer betrachteten Kernsteifigkeit $G_c(t, T)$ bezogen auf den Spannungsfaktor der initialen Kernsteifigkeit G_c . Dabei kürzt sich die Spannung σ_r des Grenzfalls des starren Verbunds heraus und es ergibt sich das Verhältnis der Spannungen σ_e auf den betrachteten Stufen der Kernsteifigkeit:

$$\zeta = \frac{f_\sigma(G_c(t, T))}{f_\sigma(G_c)} = \frac{\sigma_e(G_c(t, T))}{\sigma_r} \cdot \frac{\sigma_r}{\sigma_{e,init}(G_c)} = \frac{\sigma_e(G_c(t, T))}{\sigma_{e,init}(G_c)} \quad (7.30)$$

Der Spannungsquotient gibt wieder, um welchen Faktor die Randspannung in einem Sandwichelement zunimmt, wenn dessen Kernsteifigkeit fällt. So nimmt bspw. im Element S101010-5000 mit System I die Randspannung in der unteren Deckschicht aus einer kriecherzeugenden Dauerlast in 100 a ($0,1 \cdot G_c$) nur rund 3% zu. Im Gegensatz dazu führt das Kriechen der Kernschicht im Element S109010-700 bei sonst gleichen Bedingungen fast zu einer Steigerung der Randspannung um den Faktor 4. In der konkreten Anwendung gilt demnach für den Spannungsfaktor das gleiche wie zuvor für den Steifigkeitsfaktor: Um ein möglichst unempfindliches Verhalten gegenüber einer sinkenden Kernsteifigkeit zu erzielen, sollten Sandwichelemente mit biegesteifen Deckschichten so entworfen werden, dass ihre Spannungsfaktoren für alle relevanten Kernsteifigkeiten möglichst gering ausfallen. Ein geeignetes Kriterium hierfür wäre bspw. der zuvor erwähnte Wert von $\bar{\lambda}_f \geq 10$ als untere Grenze der Bezugsschlankheit, bis zu welcher in allen Systemen $f_\sigma \leq 1,1$ ist.

Für die konkrete Anwendung von SPS-Elementen im Bahnbrückenbau stellt diese Grenze jedoch eine zu hohe Anforderung dar. Gerade für Elemente unter Dauerlast fällt die Kernsteifigkeit und damit auch die Bezugsschlankheit über 100 a stark ab. Zudem wurde bereits anhand des Steifigkeitsfaktors aufgezeigt, dass eine geringere Bezugsschlankheit erforderlich werden kann, um eine hinreichend hohe absolute Gesamtsteifigkeit zu erzielen. Daher muss eine Zunahme der Spannungen aus kriecherzeugenden Dauerlasten (hier bis $0,1 \cdot G_c$) sehr wahrscheinlich in Kauf genommen werden. Da deren Anteil an der Gesamtbelastung in der Regel jedoch gering ausfällt, gilt dies entsprechend auch für die Zunahme der resultierenden Gesamtspannungen.

Zumindest für temperaturinduzierte Verluste der Kernsteifigkeit (hier bis $0,5 \cdot G_c$) sollte jedoch eine gewisse Grenze der Bezugsschlankheit eingehalten werden. Die Schwankungen der Kernsteifigkeit aus Temperatur sind für alle Einwirkungen auf ein Element wirksam und somit auch für die anteilig großen kurzzeitigen Nutzlasten. Entsprechend muss der Nachweis

¹Genauer ist dieser Zusammenhang noch einmal in den Höhenliniendarstellungen von f_σ in den Abbildungen AII-85, AII-91 und AII-97 zu erkennen.

der Deckschichten im Grenzzustand der Tragfähigkeit stets unter extremalen Temperaturen geführt werden. Je stärker die Deckschichtspannungen dabei von der Temperatur abhängen, desto überdimensionierter fällt das Element im Vergleich zum Gebrauchszustand aus. Auch in den charakteristischen Spannungen könnten starke temperaturabhängige Schwankungen bspw. zu einer Veränderung des Spannungskollektivs über die Nutzungsdauer führen. Solch ein Szenario mit Abhängigkeit von der Bauteiltemperatur kann im aktuellen Nachweiskonzept nach DIN EN 1993-1-9 jedoch nicht erfasst werden. Für eine praktikable und wirtschaftliche Bemessung ist es demnach erstrebenswert, dass die Spannungen in den Deckschichten unter Temperatureinfluss nicht zu stark schwanken. Um deren Zuwachs auf ca. 30 % zu beschränken wird für die Bezugsschlankheit unter erhöhter Temperatur ein allgemeiner Richtwert von $\bar{\lambda}_f \geq 5$ vorgeschlagen.¹ Dieser kann in den Systemen I und II aufgrund der Flächenverläufe unterhalb von $\rho_S \leq 5$ aber noch bis $\bar{\lambda}_f \geq 3$ unterschritten werden.² In jedem Fall sollte die Spannungszunahme aus Temperatur im Entwurf eines Elements überprüft werden.

Auch bei der Spannung verhalten sich die Systeme II und III vom Prinzip ähnlich wie das System I. Der Spannungsfaktor der Systeme nimmt mit sinkender Bezugsschlankheit zunächst langsam, dann immer stärker zu und erreicht für $\bar{\lambda}_f = 0$ die Funktion $f_{\sigma,f}$ des Grenzfalles ohne Verbund. Der Einfluss des Sandwichparameters ist ebenfalls über einen weiten Bereich gering und wird erst bei kleinen Bezugsschlankheiten ausgeprägter. In System II (s. Abb. 7.13) entsteht durch die starren Stirnplatten eine Rahmenwirkung mit den Deckschichten, wodurch sich die Spannungen anders verteilen als im System I. Infolge dessen fällt die betrachtete Deckschichtspannung in Feldmitte geringer aus, was sich in der tiefer verlaufenden Grenzfallefunktion $f_{\sigma,II,f} < f_{\sigma,I,f}$ zeigt. Aber auch für Bezugsschlankheiten $10 > \bar{\lambda}_f > 0$ sind die Spannungsfaktoren $f_{\sigma,II}$ durch den Einfluss der Stirnplatten kleiner als im System I. So steigt bspw. die Randspannung des Elements S101010-700 in System I über 100 a ($0,1 \cdot G_c$) um fast 90 %. Werden starre Stirnplatten an den Enden des Elements verbaut (System II), nimmt die Spannung unter sonst gleichen Bedingungen lediglich um ca. 48 % zu.

Für höhere Sandwichelemente und damit -parameter ρ_S , fällt der positive Effekt der Stirnplatten weniger deutlich aus, wie ein Vergleich der Spannungsquotienten des Elements S109010-700 für die Systeme I und II zeigt: $\zeta_I(0,1 \cdot G_c) = 3,85$ während $\zeta_{II}(0,1 \cdot G_c) = 3,18$. Im Bereich von $\bar{\lambda}_f \geq 10$ ist der Einfluss der Stirnplatten so gering, dass er im Vergleich der Faktorflächen beider Systeme nicht erkennbar ist (vgl. Abb. 7.12 u. 7.13). Starre Stirnplatten sind demnach vor allem für gedrungene Sandwichelemente ein sinnvolles Mittel, um die Spannungszunahme in den Deckschichten infolge einer sinkenden Kernsteifigkeit zu vermindern. Wie bereits im Kontext der Steifigkeit erwähnt, bleibt jedoch zu klären unter welchen Bedingungen eine Stirnplatte rechnerisch als starr angenommen werden kann. Dies erfolgt in Abschnitt 7.2.4 anhand einer vereinfachten Betrachtung des Grenzfalles ohne Verbund im System II.

Beim Spannungsfaktor des Systems III (s. Abb. 7.14) zeigen sich ebenso die an der Steifigkeit zu beobachtenden Phänomene. Wie zuvor erläutert verliert die Einspannung des Elements für das Sandwichbiegemoment M_S mit sinkender Kernsteifigkeit an Wirkung und die Schnittgröße lagert sich auf die Deckschichten um. Bezogen auf den eingespannten Plattenstreifen nimmt deren Beanspruchung und damit auch die Randspannung in Feldmitte entsprechend stärker zu. Dies zeigt sich in der Zunahme des Spannungsfaktors im Bereich $10 > \bar{\lambda}_f > 0$, wo dieser mit abnehmender Bezugsschlankheit schneller ansteigt, als in den Systemen I und II. Auch an den diskreten Faktoren und Quotienten wird der stärkere Zuwachs der Spannung in System III ersicht-

¹So steigt bspw. die Spannung in Element S109010-700 im System I bei einem Schritt von $\bar{\lambda}_f(23^\circ\text{C}) = 3,55$ auf $\bar{\lambda}_f(60^\circ\text{C}) = 2,51$ um den Faktor $\zeta_I(\text{S109010-700}, 0,5 \cdot G_c) = 1,35$.

²Für das Element S101010-700 steigt die Spannung nur um den Faktor $\zeta_I(\text{S101010-700}, 0,5 \cdot G_c) = 1,14$.

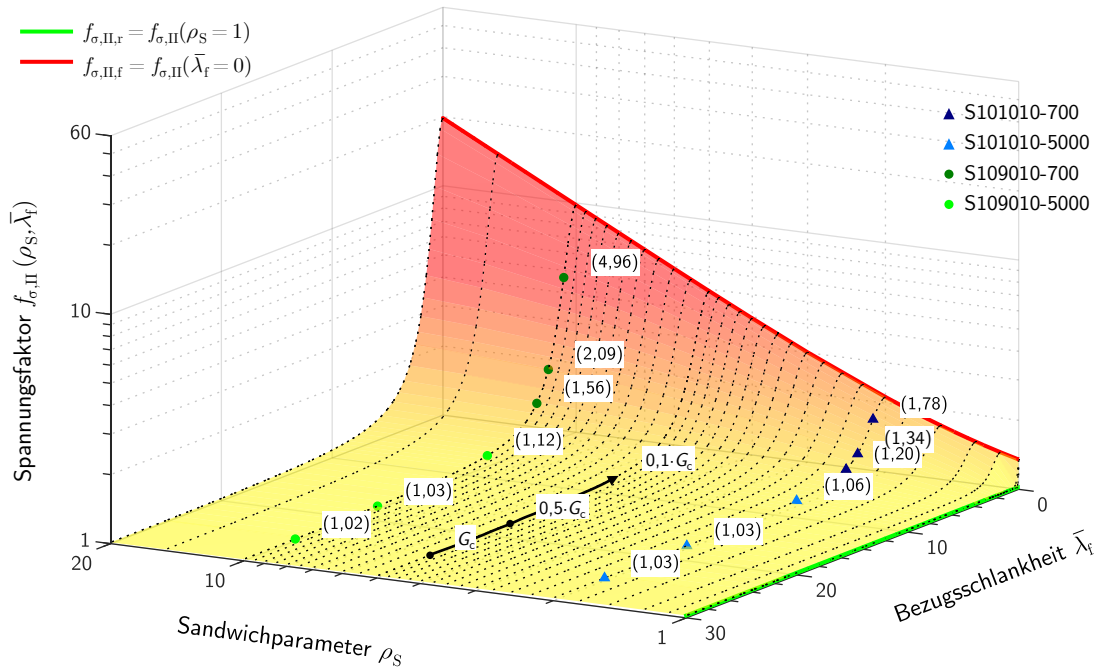


Abbildung 7.13: Räumliche Darstellung des Spannungsfaktors $f_{\sigma,II}$ für $\delta = 0$ in System II, der zur Kontrolle separat hergeleiteten Funktionen für die Grenzfälle ohne (rot) und mit vollem Verbund (grün) sowie der diskreten Spannungsfaktoren der Sandwichbalken aus der Voruntersuchung für die verschiedenen Stufen der Kernsteifigkeit G_c (s. schwarzer Pfeil)

lich. So wird die Randspannung des bereits zuvor betrachteten Elements S101010-700 in 100 a mehr als verdoppelt ($\zeta_{III}(S101010-700, 0,1 \cdot G_c) = 2,08$) und die des Elements S109010-700 steigt im selben Zeitraum um den Faktor $\zeta_{III}(S109010-700, 0,1 \cdot G_c) = 4,84$.

Die Randspannung in Feldmitte entwickelt sich ähnlich wie die Steifigkeit in System III bezogen auf die ursprüngliche Situation ungünstiger als in den anderen Systemen. Durch den zusätzlichen Verlust der äußeren statisch unbestimmten Wirkung für das Sandwichmoment müssen die Schnittgrößen entsprechend auf die Deckschichten und in Richtung Feldmitte umgelagert werden, wodurch dort die Randspannung stärker ansteigt. Diese Entwicklung sollte jedoch ebenfalls absolut betrachtet werden, da dem System III auch eine andere Gleichung zur Bestimmung der Spannung im starren Verbund zugrunde liegt. So liegt die absolute Randspannung in Feldmitte des beidseitig eingespannten Plattenstreifens mit vollem Verbund um den Faktor 3 niedriger, als im gelenkigen Einfeldträger der Systeme I und II (vgl. Gl. AII-183 und AII-123). Für das exemplarische Element S109010-700 liegt bspw. in System I nach 100 a die Randspannung bei:

$$\sigma_{I,e}(0,1 \cdot G_c) = 6,01 \cdot \frac{33}{2408} \cdot \frac{q \cdot l^2}{b \cdot t_f^2} = 0,0824 \cdot \frac{q \cdot l^2}{b \cdot t_f^2} \quad (7.31)$$

In System III liegt sie für sonst gleichen Bedingungen unterdessen bei nur:

$$\sigma_{III,e}(0,1 \cdot G_c) = 12,87 \cdot \frac{11}{2408} \cdot \frac{q \cdot l^2}{b \cdot t_f^2} = 0,0588 \cdot \frac{q \cdot l^2}{b \cdot t_f^2} \quad (7.32)$$

Die Randspannung liegt in diesem Beispiel also trotz ihrer verhältnismäßig ungünstigeren Entwicklung in System III nach 100 a noch ca. 29% niedriger als im System I. Ein Einsatz des SPS in äußerlich statisch unbestimmten Systemen kann sich demnach trotz sinkender Kernsteifigkeit lohnen. Es sollte jedoch im Entwurf bedacht werden, dass der Unterschied zwischen der initialen Spannung (bzw. Steifigkeit) und derjenigen unter verminderter Kernsteifigkeit größer ist, als in den Systemen I und II mit mehr Freiheitsgraden.

Die Auswirkungen unterschiedlich ausgeführter Deckschichten ($\delta \neq 0$) auf den Spannungsfaktor f_σ wird im Rahmen dieser Arbeit nicht untersucht. Das gewählte Vorgehen, die Beanspruchung der Deckschichten repräsentativ durch einen Spannungspunkt am unteren Rand des Querschnitts in Feldmitte zu betrachten, reicht hierfür nicht aus. So würde eine Änderung des Deckschichtparameters auf $\delta > 0$ bspw. dazu führen, dass der maximale Betrag der Spannung in der unteren Deckschicht sinkt, während er in der oberen ansteigt. Es ließe sich also keine allgemeine Aussage mehr über die maximale Beanspruchung der Deckschichten in einem Querschnitt treffen. Dies ist nur für symmetrische Querschnitte möglich, in denen sich aus reiner Momentenbelastung eine zur Schwerlinie punktsymmetrische Spannungsverteilung ergibt (vgl. Abb. 7.1).

Die Entwicklung der absoluten Gesamtsteifigkeit in Abhängigkeit von δ lässt jedoch darauf schließen, dass sich auch die Spannung für symmetrisch ausgeführte Deckschichten am günstigsten verhält und minimal wird. Die Tatsache, dass für $\delta = 0$ die Steiner-Anteile im Vergleich zu denen aus Eigenbiegung maximal werden, minimiert die Krümmung und führt so auch zu einer Minimierung der daraus entstehenden Randspannungen.

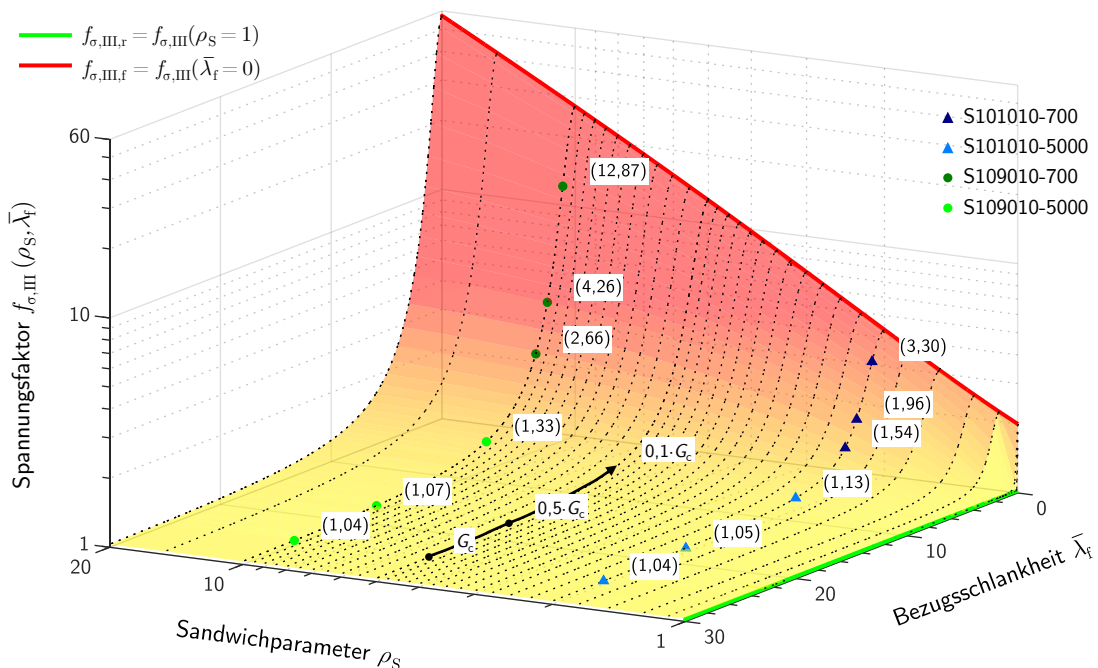


Abbildung 7.14: Räumliche Darstellung des Spannungsfaktors $f_{\sigma,III}$ für $\delta = 0$ in System III, der zur Kontrolle separat hergeleiteten Funktionen für die Grenzfälle ohne (rot) und mit vollem Verbund (grün) sowie der diskreten Spannungsfaktoren der Sandwichbalken aus der Voruntersuchung für die verschiedenen Stufen der Kernsteifigkeit G_c (s. schwarzer Pfeil)

7.2.4 Der Einfluss der Stirnplattensteifigkeit im System II

In den Untersuchungen der vorliegenden Studie wird stets auch das System II eines einfeldrigen Sandwichelements mit starren Stirnplatten betrachtet (vgl. Abb. 7.3). Dieses zeigt sich sowohl hinsichtlich der Steifigkeit als auch der Deckschichtspannung in seiner Entwicklung unter abnehmender Kernsteifigkeit als das unempfindlichste der drei Systeme (vgl. Abb. 7.10 bzw. 7.13). Es bietet demnach großes Potential für einen wirtschaftlichen Einsatz von SPS in Fahrbahnen von Bahnbrücken. So könnten in einer querorientierten SPS-Fahrbahnplatte die Stegbleche der Hauptträger statisch als Stirnplatten mit angesetzt werden (vgl. Abb. 1.4 r.). Auch generell könnte die Wirkung von Randleisten in SPS-Elementen, welche zu deren Herstellung konstruktiv ohnehin erforderlich sind (vgl. Kennedy u. Martino 2015), für eine wirtschaftliche Dimensionierung der Elemente erfasst werden.

Eine Berücksichtigung von elastischen Stirnplatten ist unter vertretbarem Aufwand praktisch jedoch nur mit einem der in Abschnitt 6.1.2 gezeigten numerischen Verfahren zu bewerkstelligen (bspw. in einem Fachwerkmodell). Die in der vorliegenden Studie angewendete Lösung nach der SST (Stamm u. Witte 1974) betrachtet die Stirnplatten dagegen idealisiert als *starr*.¹ Um die Erkenntnisse und Diagramme aus der Studie dennoch anwenden zu können, muss geklärt werden, welche mechanischen Bedingungen reale Stirnplatten erfüllen müssen, um in der Analytik hinreichend genau durch ein ideal starres Pendant abgebildet werden zu können. Von Interesse sind hier vor allem die Einflüsse aus der Spannweite (über λ_f) und dem inneren Hebelarm der Deckschichten (über ρ_S), welche beide die Deformation der Stirnplatten beeinflussen (vgl. auch Abschnitt 7.2.1), sowie die Biegesteifigkeit der Stirnplatten selbst, welche maßgeblich von ihrer Dicke t_{ep} abhängt (Index ep für engl.: *elastic plates*).

Zur Untersuchung des Sachverhalts wird die gleiche, auf der Gesamtsteifigkeit k basierende Methode angewendet, wie bereits mehrfach im Rahmen der Studie geschehen (vgl. Gl. 7.2). Die Gesamtsteifigkeit eines Sandwichelements unter einer Einzellast in Feldmitte mit elastischen Stirnplatten $k_{ep,f}$, wird auf die Gesamtsteifigkeit eines ansonsten identisch ausgebildete Elements mit starren Stirnplatten $k_{rp,f}$ bezogen (Index rp für engl.: *rigid plates*). Dabei werden ausschließlich Deckschichten gleicher Dicke betrachtet, da nach den Erkenntnissen der vorherigen Abschnitte die Wechselwirkung zwischen den Deckschichten für $\delta = 0$ maximal wird (vgl. Abschnitt 7.2.1). Im Unterschied zu der bisherigen Vorgehensweise wird für beide Elemente der Grenzfall ohne Verbund vorausgesetzt (Index f), um zunächst nur die Stirnplatten zu untersuchen und Einflüsse aus dem Kern auf die Ergebnisse vorerst auszuschließen.²

Anders als bisher ist in dieser Betrachtung die Bestimmung des Steifigkeitsfaktors $f_{k,ep,f}$ nicht das einzige Ziel. Zunächst soll mit seiner Hilfe die erforderliche Stirnplattendicke t_{ep} ermittelt werden, für welche die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$f_{k,ep,f} = \frac{k_{ep,f}}{k_{rp,f}} = \frac{w_{rp,f}}{w_{ep,f}} \stackrel{!}{\geq} 0,99 \quad (7.33)$$

¹Eine analytische Berücksichtigung von elastischen Stirnplatten über eine nachgiebige Kopplung der Freiheitsgrade der Ränder beider Deckschichten ist zwar möglich, würde den Aufwand zur Lösung der DGLn 6.2 und die resultierende Verformungsfunktion aber ungleich komplizierter machen.

²Bei der Gesamtsteifigkeit mit starren Stirnplatten $k_{rp,f}$ handelt es sich streng genommen um eine Teilmenge derjenigen, die zuvor für das System II im Grenzfall ohne Verbund definiert wurde: $k_{rp,f} = k_{II,f}(\delta = 0)$ (s. Anhang AII-3.3.1). Im vorliegenden Fall wird zur einfacheren mathematischen Handhabung der Steifigkeitsfaktor $f_{k,ep,f}$ und darin die Gesamtsteifigkeit $k_{rp,f}$ neu aufgestellt (s. Anhang AII-5.2 ff.). Um Verwechslungen mit Fällen von $\delta \neq 0$ vorzubeugen, bekommt sie daher eine eigenständige Bezeichnung.

Mit zunehmender Stirnplattendicke t_{ep} strebt die Gesamtsteifigkeit $k_{ep,f}$ des Systems mit elastischen Stirnplatten gegen jene des Systems mit starren Stirnplatten $k_{rp,f}$ und damit der Steifigkeitsfaktor $f_{k,ep,f} \rightarrow 1$. Da ein Gleichsetzen der Steifigkeiten ($f_{k,ep,f} = 1$) dazu führen würde, dass die Dicke $t_{ep} \rightarrow \infty$ läuft, wird ein Verlust in der Gesamtsteifigkeit von 1% toleriert und im Umkehrschluss nur eine Übereinstimmung der Steifigkeiten von 99% gefordert. Ähnlich wie zuvor die Grenzfallfunktionen des Systems II (s. Anhang AII-3.3) werden auch in diesem Fall die Steifigkeiten bzw. Deformationen mithilfe des WGV hergeleitet. Der detaillierte Lösungsweg ist in Anhang AII-5 zu finden und wird an dieser Stelle nicht vertieft. Um auch diese Untersuchung dimensionsbefreit durchführen zu können, wird dabei die Stirnplattendicke t_{ep} auf die Deckschichtdicke $t_1 = t_2 = t_f$ bezogen:

$$\rho_{ep} = \frac{t_{ep}}{t_f} \tag{7.34}$$

Die sich aus Bedingung 7.33 ergebende Lösung für den *Stirnplattenfaktor* ρ_{ep} unter der Prämisse von nur 1% Abweichung zwischen den Gesamtsteifigkeiten ergibt sich zu:

$$\rho_{ep,1\%} \geq \sqrt[3]{\frac{\rho_S \cdot [888 \rho_S^4 \cdot (1 - \nu_f^2)^2 - 4 \rho_S^2 \cdot (1 - \nu_f^2)]}{\lambda_f \cdot [9 \rho_S^4 \cdot (1 - \nu_f^2)^2 + 15 \rho_S^2 \cdot (1 - \nu_f^2) + 4]}} \tag{AII-217}$$

Abbildung 7.15 zeigt eine Höhenliniendarstellung des Stirnplattenfaktors $\rho_{ep,1\%}$ in Abhängigkeit vom Sandwichparameter ρ_S und der Schlankheit λ_f . Sie zeigt, um welchen Faktor die elastischen Stirnplatten mindestens dicker sein müssen als die Deckschichten, damit eine Berechnung des Sandwichs mit starren Stirnplatten im Grenzfall ohne Verbund gerechtfertigt ist. Für alle t_{ep}/t_f größer den Funktionswerten ist die Bedingung 7.33 erfüllt und die Abweichung der Gesamtsteifigkeit mit elastischen zu jener mit starren Stirnplatten liegt unter 1%.

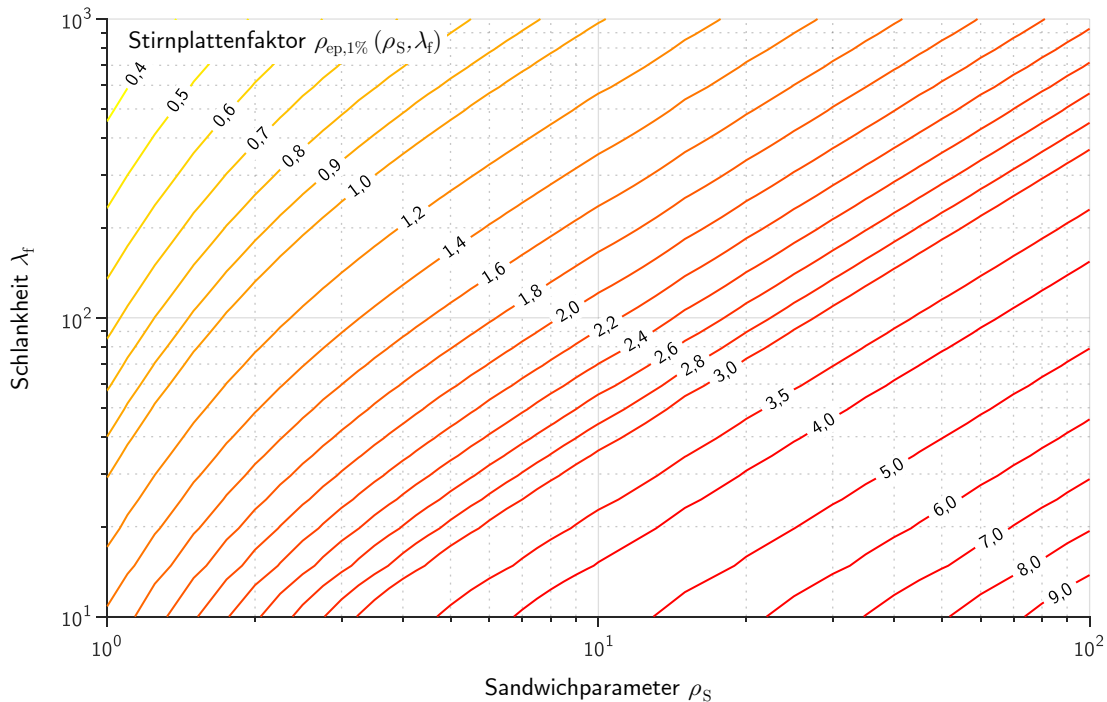


Abbildung 7.15: Höhenliniendarstellung des Stirnplattenfaktors $\rho_{ep,1\%}$ für $f_{k,ep,f} \geq 0,99$

Anders als in den bisherigen Graphen der Studie, ist der Stirnplattenfaktor direkt über der Schlankheit des Sandwichbalkens $\lambda_f = l/t_f$ aufgetragen, welche über die Biegesteifigkeit der Stirnplatten in die Lösung findet (s. Gl. AII-187). Die sonst verwendete Bezugsschlankheit $\bar{\lambda}_f$ besitzt aufgrund des betrachteten Grenzfalles ohne Verbund ($G_c = 0$) keine Aussagekraft.¹ Es kann jedoch vermutet werden, dass die Stirnplatten infolge einer zusätzlichen Schubkopplung der Deckschichten durch den Kern weniger verformt werden und damit der biegestarren Annahme noch näher kommen. So zeigen die Faktorflächen des Abschnitts 7.2.2, dass der Grenzfall ohne Verbund stets die untere Grenze der Gesamtsteifigkeit eines Systems bildet, welche entsprechend mit den größten Verformungen aller Bauteile einher geht. Daraus lässt sich zurückschließen, dass es möglich ist die gezeigten Höhenlinien auch für die Berechnung von Sandwichelementen mit Kernsteifigkeiten $G_c > 0$ heranzuziehen. Sie können als Grenzfläche von Mindestwerten für ρ_{ep} verstanden werden, die einzuhalten sind, um die Stirnplatten an den Enden eines Sandwichelements als starr ansetzen zu dürfen.

Es ist zu erkennen, dass oberhalb einer Schlankheit von $\lambda_f \geq 100$ auch für einen Sandwichparameter $\rho_S = 10$ bereits Stirnplatten mit doppelter Dicke der Deckschichten genügen, um eine nahezu starre Stirnplatte auszubilden. So können bspw. für Sandwichelemente mit Spannweiten $l \geq 1$ m, Deckschichtdicken von 10 mm und Kerndicken $t_c \leq 90$ mm Stirnplatten mit $t_{ep} \geq 20$ mm mit hoher Genauigkeit als starr abgebildet werden. Für geringere Sandwichparameter kann die erforderliche Stirnplattendicke sogar noch weiter reduziert werden. So können in Elementen mit $\rho_S = 2$ und sonst gleichen Bedingungen schon Stirnplatten mit einer Dicke von 10 mm als starr angesehen werden.

Für SPS-Elemente ist aufgrund der hohen Belastung davon auszugehen, dass deren Deckschichten ähnlich gedrunken ausfallen werden und mit einem Sandwichparameter $\rho_S \leq 10$ einhergehen. Entsprechend können Stirnplatten mit einer Dicke von $t_{ep} \geq 2 \cdot t_f$ in der Berechnung von SPS-Elementen stets hinreichend genau als starr angesehen werden. Im Fall besonders dicker Deckschichten und niedriger Sandwichparameter ρ_S , kann sogar bereits ein Stirnplattenfaktor von $\rho_{ep} = 1$ dafür ausreichen. Gerade vor dem Hintergrund, dass im Regelfall eines mitwirkenden Kerns die erforderliche Stirnplattendicke noch einmal reduziert wird, können für das SPS Stirnplatten in der Stärke der Deckschichten bereits ausreichend sein, um diese mechanisch vereinfacht als starr abbilden zu können.

Um die Abweichungen der Gesamtsteifigkeit für die Fälle $\rho_{ep} = 2$ und $\rho_{ep} = 1$ nochmals zu prüfen, werden für beide Fälle die Steifigkeitsfaktoren $f_{k,ep,f}$ nach Gleichung 7.33 berechnet und in den Abbildungen 7.16 und 7.17 dargestellt. Beide Graphen zeigen, dass die Bereiche für die Anwendung der jeweiligen Mindestabmessung der Stirnplatten noch ausgedehnt werden können, sofern eine leicht vergrößerte Abweichung zu starren Stirnplatten in Kauf genommen wird. Dies lässt sich aufgrund der hier nicht darstellbaren regulären Mitwirkung des Kerns rechtfertigen. So können bspw. für $\rho_S = 10$ auch noch in Sandwichelementen mit einer Schlankheit von bis zu $\lambda_f \geq 40$ Stirnplatten mit der doppelten Deckschichtdicke verwendet werden. Wie Abbildung 7.16 zeigt, erzeugt dies lediglich eine Abweichung von 3 % in der Gesamtsteifigkeit gegenüber rechnerisch starren Stirnplatten. Selbst bis zu einer Schlankheit von $\lambda_f \geq 10$ fällt die Gesamtsteifigkeit des vollends elastischen Systems nur um 10 % geringer aus, als jene mit starren Stirnplatten.

¹Um die Kernsteifigkeit berücksichtigen zu können, bräuchte es in dem zur Lösung verwendeten Stabwerk, wie in der Fachwerkanalogie, zusätzliche dehnweiche Diagonalen (vgl. Abschnitt 6.1.2). Die analytische Herleitung von ρ_{ep} , wie in Anhang AII-5 beschrieben, wäre damit aber nur noch schwer handhabbar.

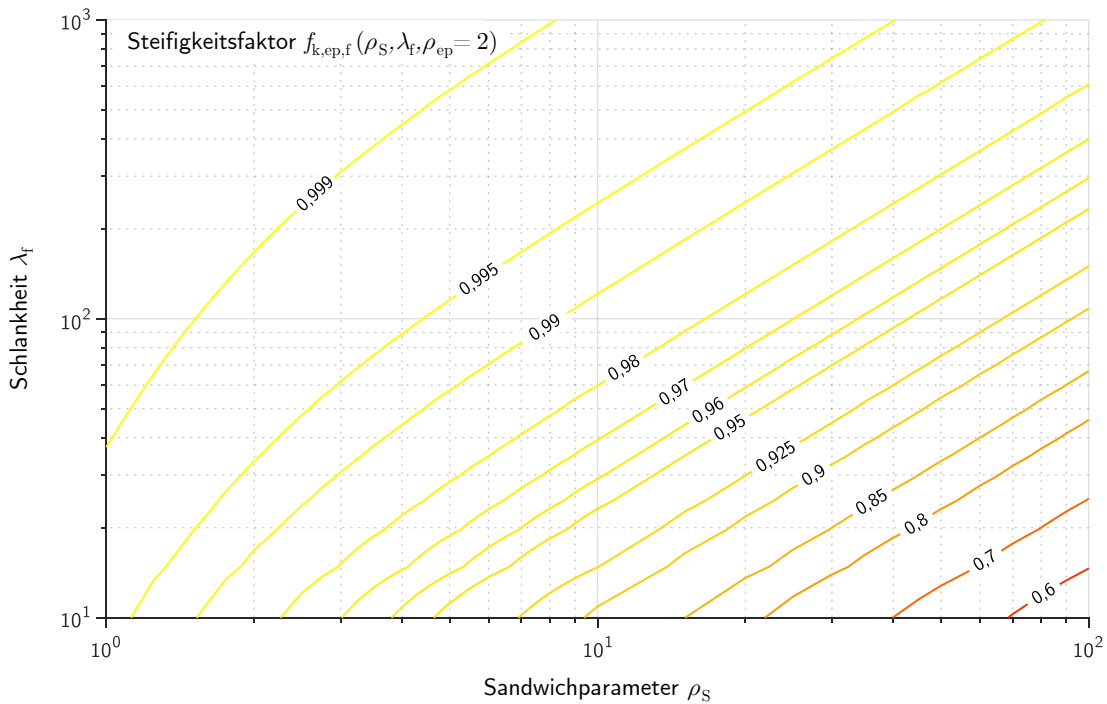


Abbildung 7.16: Höhenliniendarstellung des Steifigkeitsfaktors $f_{k,ep,f}$ für Stirnplatten der doppelten Deckschichtdicke ($\rho_{ep} = 2$)

Ähnliches zeigt sich in Abbildung 7.17 für Sandwichelemente, deren Stirnplatten mit der gleichen Dicke ausgebildet werden wie ihre Deckschichten. So unterscheiden sich die Gesamtsteifigkeiten zwischen elastischen und starren Stirnplatten in einem Systems mit $\rho_S = 2$ bei einer Schlankheit von $\lambda_f \geq 10$ ebenfalls nur um ca. 10%. Bei gleichem Aufbau im Querschnitt ergibt sich ab einer Schlankheit von $\lambda_f \geq 45$ bereits nur noch eine Abweichung in der Gesamtsteifigkeit von etwa 3%. Für die Anwendung auf SPS ist zu erwarten, dass auch gedrungene Elemente mit geringem Sandwichparameter ρ_S noch eine Schlankheit von $\lambda_f \geq 50$ aufweisen. Entsprechend kann davon ausgegangen werden, dass in diesen Fällen sogar eine Dicke der Stirnplatten von $t_{ep} = t_f$ ausreichend sein wird, um diese näherungsweise als starr zu behandeln.

Eine weitere wichtige Voraussetzung für die rechnerische Abbildung der Stirnplatten als starr ist grundsätzlich, dass sich auch die anderen Annahmen des analytischen Modells in der Realität widerspiegeln. Als essentieller Punkt sind hier die Anschlüsse zwischen den Deckschichten und den Stirnplatten zu nennen. Diese müssen auch im fertigen Bauteil zwingend die erforderliche Steifigkeit aufweisen, um die Deckschichtbiegemomente vollständig übertragen zu können. Sie sollten dementsprechend stets als geschweißte Vollstöße über die gesamte Dicke der jeweiligen Bauteile ausgeführt werden. Anderenfalls können die Stirnplatten ihre versteifende Wirkung für das Sandwichelement nicht entfalten und koppeln ähnlich zu Pendelstäben lediglich die Verformung der Deckschichten in Dickenrichtung des Elements. So werden bspw. in den bisher existierenden Richtlinien des Schiffsbaus zu SPS von Lloyd's Register und Det Norske Veritas konstruktive Schweißdetails zur Ausbildung von Stößen in SPS-Platten gegeben, von denen die überwiegende Mehrheit durchgeschweißt ist.

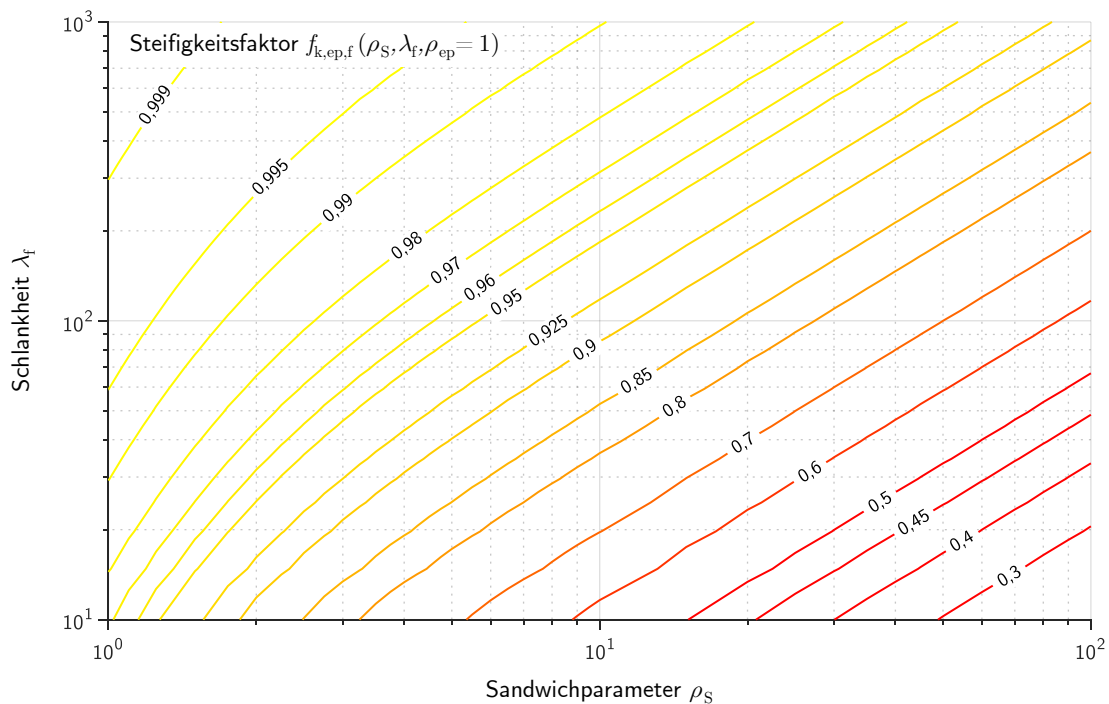


Abbildung 7.17: Höhenliniendarstellung des Steifigkeitsfaktors $f_{k,ep,f}$ für Stirnplatten der gleichen Dicke wie die Deckschichten ($\rho_{ep} = 1$)

7.2.5 Schlussfolgerungen für die Anwendung von SPS in Fahrbahnen von Bahnbrücken

Die vorangegangene Studie beleuchtete das Verhalten von Sandwichelementen unter veränderlicher Kernsteifigkeit allgemein und anhand der exemplarischen SPS-Aufbauten. Dabei wurden bereits erste Erkenntnisse für eine möglichst robuste Auslegung von SPS-Elementen in Fahrbahnen von Bahnbrücken gewonnen. Diese werden im Folgenden konsolidiert und daraus Schlussfolgerungen für den nächsten Abschnitt gezogen.

Sandwichelemente mit unterschiedlich dicken Deckschichten reagieren weniger empfindlich auf eine sinkende Kernsteifigkeit, da die Steiner-Anteile gemessen an der Gesamtsteifigkeit geringer ausfallen und weniger Kraft durch den Kern übertragen werden muss. Dies führt jedoch bereits bei kleinem δ ebenso zu einer deutlich geringeren absoluten Gesamtsteifigkeit. Sandwichelemente mit unsymmetrischem Querschnitt werden im Vergleich zur symmetrischen Ausführung gleicher Gesamtsteifigkeit daher schwerer und damit tendenziell unwirtschaftlicher. Dennoch kann es in manchen Konstellationen angebracht sein, die Deckschichten unterschiedlich auszuführen, um bspw. einer der beiden das Eigengewicht allein zuzuweisen. Die Herstellung von SPS-Elemente auf diese Weise ist zwar prinzipiell denkbar, jedoch mit erhöhtem Aufwand verbunden, da ein Wirken der Deckbleche im Eigengewichtsverbund dabei streng genommen verhindert werden muss. Dies ist im herkömmlichen Neubau von SPS-Elementen jedoch die Regel (s. bspw. SPS Technology 2002, S. 9). Dabei sind initial beide Deckbleche an der Tragwirkung beteiligt und Dauerlasten lagern sich nur allmählich durch Kriechen des Kerns und unter Zunahme der Spannungen auf das steifere Deckblech um. Für einen möglichst ausgeprägten Sandwicheffekt und die damit einhergehenden Vorteile, sollten die Deckbleche im SPS daher mit gleicher Dicke ausgeführt werden ($\delta = 0$).

Während die Auswirkungen verschiedener Deckschichten in einem Sandwich nicht immer eindeutig positiv ausfallen, hat die Berücksichtigung von vorhandenen Randleisten oder Stirnplatten in der Tragwirkung in der Regel einen positiven Effekt. Diese erhöhen den Grad der inneren statischen Unbestimmtheit und damit die Gesamtsteifigkeit, wodurch gerade gedrungene Elemente unempfindlicher für ein Absinken der Kernsteifigkeit werden. Infolge der erhöhten inneren Redundanz kommt es zu einer Umverteilung der Schnittgrößen in den Deckschichten, was global zu einer Reduktion der maximalen Spannung und deren verlangsamer Zunahme bei sinkender Kernsteifigkeit führt. Für SPS-Elemente empfiehlt es sich, diese positiven Effekte auszunutzen und dafür die ohnehin vorhandenen Randbauteile entsprechend auszulegen. Um eine optimale Wirkung der Randleisten bzw. Stirnplatten auf das SPS zu erzielen, sollten diese im Vergleich zu den Deckblechen so dick wie nötig aber dennoch so dünn wie möglich ausgebildet und stets vollständig angeschlossen werden. Dabei sollte die Dicke der Randbauteile in Abhängigkeit vom Querschnitt des Sandwichelements und seiner Spannweite im folgenden Bereich gewählt werden (vgl. Abb. 7.16 bzw. 7.17):

$$t_f \leq t_{ep} \leq 2 t_f \quad (7.35)$$

Trotz der beschriebenen Möglichkeit, die Tragwirkung mithilfe von Stirnplatten positiv zu beeinflussen, lässt sich ein Verlust der Gesamtsteifigkeit infolge sinkender Kernsteifigkeit nicht verhindern. Über einen Betrachtungszeitraum von 100 a kann dies jedoch in gewissem Maße hinnehmbar sein. So könnte das Kriechen der Fahrbahn einer Bahnbrücken bspw. ausgeglichen werden, indem bei regelmäßiger Wartung des Gleises das Schotterbett gestopft und damit die Gleisachse wieder in die Soll-Lage gebracht wird. Entscheidender ist die Gewährleistung der Gebrauchstauglichkeit von Fahrbahn und Gleis unter einer kurzfristig erhöhten Temperatur. Die Schwankung der Gesamtsteifigkeit des SPS infolge Temperatureinwirkung sollte im Entwurf bestmöglich minimiert werden, indem die Bezugsschlankheit eines Elements über den Parameter der mittleren Deckblechdicke t_f möglichst hoch ausgelegt wird (s. bspw. Abb. 7.9). Dabei muss jedoch stets auch die absolute Gesamtsteifigkeit des Elements beachtet werden. Diese nimmt mit steigender Schlankheit ab, was über die bezogenen Darstellungen in den bisher gezeigten Graphen nicht erkenntlich wird.¹

Ein noch strengeres Kriterium für die Auslegung von SPS-Elementen ergibt sich aus der Zunahme der Spannungen in den Deckblechen. Diese nehmen mit sinkender Kernsteifigkeit zu, sodass für den Nachweis im Grenzzustand der Tragfähigkeit mit hoher Wahrscheinlichkeit ein Zustand unter erhöhter Temperatur maßgebend wird. Für Bezugsschlankheiten von $\bar{\lambda}_f < 5$ werden die Verhältnisse in der Regel so ungünstig, dass sich unter konstanter Last und Erwärmung auf 60 °C ein Spannungszuwachs von mehr als 30 % ergibt. Lediglich in den Systemen I und II mit einem Sandwichparameter $\rho_S \leq 5$ ergeben sich solch ungünstige Zuwächse erst für Bezugsschlankheiten $\bar{\lambda}_f < 3$. Diese großen Spannungsunterschiede zwischen Gebrauchs- und Bemessungszustand führen tendenziell zur unwirtschaftlichen Auslastung der Elemente. Auch könnte sich eine zu starke Temperaturabhängigkeit der Spannungen auf die Ermüdung in den SPS-Bauteilen auswirken. Dies kann mit den gängigen vereinfachten Nachweisverfahren des Brückenbaus bislang nicht berücksichtigt werden.

¹Um die erforderliche absolute Gesamtsteifigkeit für eine bekannte Spannweite im Entwurf zu berücksichtigen, wird daher im folgenden Kapitel der Höhenfaktor eingeführt.

Der Entwurf einer SPS-Fahrbahn sollte sicherstellen, dass die Spannungen im Element unter Temperatureinwirkung nicht zu stark schwanken. Unter maximaler Temperatur empfiehlt es sich hierfür die Bezugsschlankheit allgemein auf $\bar{\lambda}_f \geq 5$ zu begrenzen und nur in Ausnahmefällen wie z. B. für $\rho_S \leq 5$ in den Systemen I und II davon abzuweichen. Hier sollte jedoch stets ein unterer Grenzwert von $\bar{\lambda}_f \geq 3$ eingehalten werden, um die Spannungsschwankungen zu begrenzen.

In allen Fällen empfiehlt es sich entsprechend der zuvor genannten Anforderungen die Deckblechdicken möglichst zu minimieren und bei bekannter Spannweite damit die Bezugsschlankheiten $\bar{\lambda}_f$ für alle Zustände des Kerns zu maximieren. Für die Deckbleche gilt im Entwurf daher ein ähnlicher Grundsatz wie für die Stirnplatten: „So dünn wie möglich aber so dick wie nötig.“ Die erforderliche absolute Gesamtsteifigkeit eines Elements kann dabei über die Dicke des Kerns t_c justiert werden. Dessen Abmessungen sind jedoch aus fertigungstechnischer Sicht begrenzt (SPS Technology 2002, S. 10 ff.). So beträgt die maximale Kerndicke ca. 80 mm und das Volumen einer in einem *Schuss* zu füllenden Kavität (*One-Shot-Prozess*) ist auf 1200l beschränkt (vgl. Abschnitt 1.2.1). Zwar bestehen Möglichkeiten diese technischen Grenzen auszudehnen. Für eine möglichst geregelte Herstellung mit reproduzierbaren Ergebnissen sollte der Entwurf die erprobten Grenzabmessungen jedoch berücksichtigen. Bei einer großen erforderlichen Gesamtsteifigkeit kann es entsprechend notwendig werden, die Deckbleche dicker auszubilden und damit ungünstiger im Hinblick auf ihr relatives Tragverhalten (größerer Steifigkeitsverlust und Spannungsanstieg).

Die Ergebnisse und Graphen dieses Abschnitts und seiner Anhänge können über die gezeigten Analysen hinaus auch für einen überschlägigen Entwurf von SPS-Elementen mit den untersuchten statischen Systemen I, II und III genutzt werden. Zu diesem Zweck sind alle in dieser Arbeit betrachteten Faktorflächen für gleich dicke Deckbleche ($\nu_f = 0,3$ und $\delta = 0$) in logarithmierter Höhenliniendarstellungen zusätzlich in Anhang AII-6 konsolidiert. Bei deren Anwendung muss jedoch stets beachtet werden, dass jeder Graph an eine spezifische Belastungsart und an einen Ort im Element gebunden ist. So wurde für den Steifigkeitsfaktor die Verformung eines Elements unter einer mittigen Einzellast betrachtet, was für eine Untersuchung der Gesamtsteifigkeit und ihrer Entwicklung auf der sicheren Seite liegt. Sandwichelemente werden unter realistischen Bedingungen jedoch in der Regel durch Flächenlasten auf einem diskreten Areal beansprucht. Dabei verteilen sich die Schnittgrößen anders im Element, was gerade hinsichtlich der Querkraftverformung eines Sandwichelements positive Auswirkungen hat. Der Steifigkeitsfaktor eignet sich daher nur für eine grobe Vordimensionierung, der im Entwurf stets eine genauere Berechnung mithilfe eines der in Abschnitt 6.1.2 gezeigten Verfahren folgen muss (bspw. mit der Fachwerkmethode). Zum einen kann so weiteres Optimierungspotential ausgeschöpft werden und zum anderen sind im Zuge eines detaillierten Entwurfs weitere sicherheitsrelevante Nachweise zu führen. So müssen bspw. die Schubtragungsfähigkeiten des Kerns und der Verbundfuge im Grenzzustand der Tragfähigkeit nachgewiesen werden und es ist zu überprüfen ob in der ungünstigsten Bemessungssituation die maximal zulässige Deformation des PUR-Kerns eingehalten ist (vgl. a. Abschnitt 4.2.3).¹

¹Auf die notwendige Überprüfung der Deformation des PUR-Kerns im SPS wird in Abschnitt 7.3.2 näher eingegangen.

7.3 Der überschlägige Entwurf von SPS-Elementen unter Berücksichtigung einer veränderlichen Kernsteifigkeit

Im vorangegangenen allgemeinen Teil der Studie wurden bereits Erkenntnisse und Randbedingungen für einen Entwurf von SPS-Elementen gewonnen. Darauf aufbauend wird in diesem Abschnitt die Studie weiter konkretisiert, auf das SPS spezifiziert und ein Algorithmus zu dessen überschlägiger Vordimensionierung gezeigt. Dafür werden zunächst drei zusätzliche *Vergleichsfaktoren* eingeführt, aus denen sich weitere Randbedingungen für den Entwurf ergeben. Ihre Herleitung erfolgt erst in diesem Abschnitt, da alle Faktoren direkt aus dem Steifigkeitsfaktor hervorgehen aber ansonsten unabhängig vom statischen System sind.¹ Danach wird ein weiteres für SPS-Elemente spezifisches Kriterium behandelt, welches für deren Entwurf von hoher Bedeutung ist: Die Anwendbarkeit linearer Viskoelastizität als Materialverhalten für das PUR. Zu dessen überschlägiger Überprüfung im Entwurf wird ein weiterer Hilfsfaktor eingeführt. Anhand der neuen und bereits bekannten Faktoren, wird schlussendlich ein Vorgehen zur vereinfachten Vordimensionierung beschrieben, wie es zum Entwurf von SPS-Elementen unter Berücksichtigung einer veränderlichen Kernsteifigkeit Anwendung finden könnte. Abschließend werden letzte Schlussfolgerungen für den Entwurf von SPS-Elementen mit veränderliche Kerneigenschaften gezogen.

7.3.1 Faktoren zum Vergleich von SPS-Elementen mit monolithischen Blechen

Die im Rahmen der Studie in Abschnitt 7.2 präsentierten Faktorflächen zeigen, wie stark ein SPS-Element in Abhängigkeit von seinen Dimensionsverhältnissen auf eine sinkende Steifigkeit seines Kerns reagiert. Anhand der Graphen lässt sich jedoch nicht erkennen, wie hoch bspw. die absolute Gesamtsteifigkeit eines Elements diskret ist, da sich auch diejenige des Bezugselements mit starrem Verbund in Abhängigkeit von den Verhältnisparametern ändert. Wie die Interpretationen der Abschnitte 7.2.2 und 7.2.3 zeigen, können aus den bisherigen Faktoren lediglich Grenzwerte und qualitative Tendenzen als Hilfestellung für den Entwurf von SPS-Elementen gewonnen werden.

Für eine konkreten Entwurf bedarf es daher anderer Instrumente, die vor allem einen greifbareren Bezug zur absoluten Gesamtsteifigkeit des SPS-Elements herstellen, eine überschlägige Dimensionierung ermöglichen und mit denen sich die Sinnhaftigkeit eines Einsatzes von SPS überprüfen lässt. Hierfür werden weitere Hilfsfaktoren eingeführt, welche die Eigenschaft eines SPS-Elements mit der jeweiligen Größe eines äquivalenten monolithischen Stahlblechs (Index sub für engl: *substitute*) vergleichen: Der *Blechedickenfaktor* f_t , der *Höhenfaktor* f_h und der *Massenfaktor* f_m . Als Grundlage des Vergleichs wird für alle Faktoren vorausgesetzt, dass das jeweils betrachtete Element und sein äquivalentes Blech die gleiche Gesamtsteifigkeit aufweisen. Da alle Vergleichsfaktoren wie bereits erwähnt direkt vom Steifigkeitsfaktor f_k des jeweiligen Systems abhängen, setzen sich die zuvor erörterten systemabhängigen Phänomene in ihnen fort. Dies gilt vor allem auch für den im vorherigen Abschnitt bereits erwähnten Bezug der Funktionen zu der Belastung durch eine mittige Einzellast, welche nach wie vor auf der sicheren Seite liegt. Ähnlich dem Vorgehen in den Erläuterungen der Abschnitte 7.2.2 und 7.2.3 werden hier exemplarisch nur die Faktoren für System I gezeigt. Die Höhenliniendarstellung der Faktorflächen aller Systeme sind in allgemeiner Form in Anhang AII-6 zu finden.

¹Des Weiteren ist der Massenfaktor direkt von der Dichte des Kernmaterials abhängig und die präsentierten Graphen damit nur auf das SPS mit seinem massiven PUR-Kernwerkstoff anwendbar.

Der Blechdickenfaktor

Der Blechdickenfaktor vergleicht die Deckblechdicke eines Sandwichelements mit der Dicke seines äquivalenten monolithischen Stahlblechs gleicher Gesamtsteifigkeit. Er drückt aus, um welchen Faktor die mittlere Deckblechdicke t_f des Sandwichelements geringer sein kann, als die *Dicke des monolithischen Stahlblechs* t_{sub} , um die gleiche Gesamtsteifigkeit zu erzielen. Dabei werden für beide Bauteile die gleichen äußeren statischen Randbedingungen und Spannweiten vorausgesetzt, sodass ein direkter Vergleich der Biegesteifigkeit B_{sub} des monolithischen Stahlblechs und der Gesamtsteifigkeit des Sandwichelements erfolgen kann:

$$B_{\text{sub}} = f_k(\rho_S, \bar{\lambda}_f) \cdot B_r \quad (7.36)$$

Dabei dient der Steifigkeitsfaktor zur Umrechnung der Biegesteifigkeit des starren Verbunds B_r auf die eigentliche Gesamtsteifigkeit des Sandwichelements, da diese über die Verhältnisparameter ρ_S und $\bar{\lambda}_f$ indirekt auch von der Systemlänge l und über die Kernsteifigkeit $G_c(t, T)$ von der Zeit und der Temperatur abhängt. Die beiden Biegesteifigkeiten sind reine Querschnittsgrößen und können mithilfe der Verhältnisparameter nach den Blechdicken t_f und t_{sub} umgeformt werden¹ (s. a. Gl. AII-21):

$$B_{\text{sub}} = E_{f, \text{mod}} \cdot \frac{b \cdot t_{\text{sub}}^3}{12} = f_k \cdot B_r \quad (7.37)$$

$$= f_k \cdot E_{f, \text{mod}} \cdot \frac{b \cdot t_f^3}{6} \cdot \left(4 + 3 \cdot (\rho_S^2 - 1) \cdot (1 - \delta^2)\right) \quad (7.38)$$

$$t_{\text{sub}}^3 = f_k \cdot t_f^3 \cdot \left(8 + 6 \cdot (\rho_S^2 - 1) \cdot (1 - \delta^2)\right) \quad (7.39)$$

$$f_t = \frac{t_f}{t_{\text{sub}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{f_k \cdot (8 + 6 \cdot (\rho_S^2 - 1) \cdot (1 - \delta^2))}} \quad (7.40)$$

Abbildung 7.18 zeigt beispielhaft den *Blechdickenfaktor* f_t für das System I unter einer mittigen Einzellast² in Abhängigkeit von den Verhältnisparametern. Der Faktor bietet eine direkte Möglichkeit zur Dimensionierung von Sandwichelementen mit biegesteifen Deckblechen. So kann bei bekannter Spannweite l bspw. aus einer Anforderung an die Verformung zunächst die dafür erforderliche Dicke t_{sub} eines monolithischen Blechs berechnet werden. Wählt man nun bei bekannter Kernsteifigkeit $G_c(t, T)$ eine Deckblechdicke t_f , kann daraus sowohl die Bezugsschlankheit $\bar{\lambda}_f$ als auch der Blechdickenfaktor f_t einfach ermittelt werden. Den beiden Kennzahlen lässt sich dann anhand der Höhenlinien des Blechdickenfaktors ein spezifischer Sandwichparameter ρ_S zuordnen, der mindestens benötigt wird, um die angestrebte Gesamtsteifigkeit B_{sub} mit dem Sandwichelement unter der gegebenen Kernsteifigkeit zu erreichen (s. die exemplarische Ablesung in Abb. 7.18).

¹Auf ein genaueres Auflösen durch Einsetzen von f_k wird verzichtet, da der Faktor ohnehin grafisch aufbereitet zur Vordimensionierung durch Ablesung dienen soll.

²Der Bezug zur Belastung wird in diesem Zusammenhang abermals betont, da die Funktion des Steifigkeitsfaktors und damit der Hilfsfaktoren unter einer Gleichstreckenlast eine andere Form hätte.

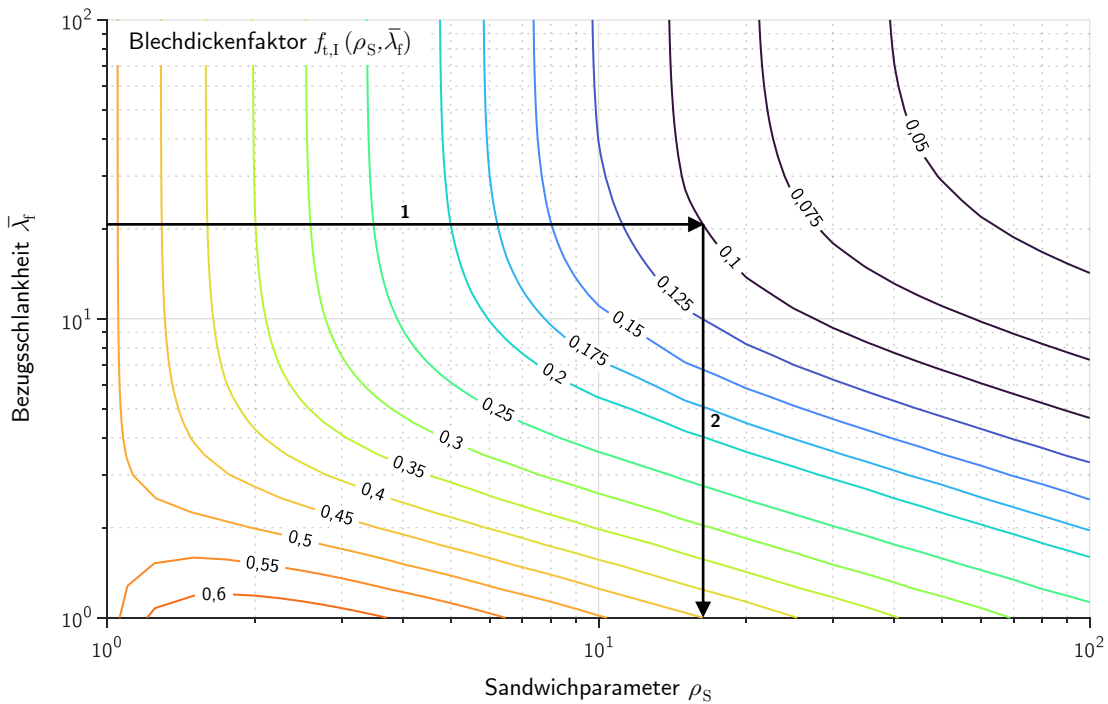


Abbildung 7.18: Höhenliniendarstellung des Blechdickenfaktors $f_{t,I}$ für System I und mit Pfeilen angeordnete Ableseverfahren für die Vordimensionierung eines Sandwichelements bei bekannter Dicke t_{sub} eines äquivalenten monolithischen Blechs

Aus dem Sandwichparameter kann anschließend die erforderliche Kerndicke für das Sandwichelement berechnet werden:

$$t_c = t_f \cdot (\rho_S - 1) \quad (7.41)$$

Mithilfe des Blechdickenfaktors lässt sich demnach über einfache mechanische Zusammenhänge der für eine diskrete Gesamtsteifigkeit erforderliche Aufbau eines Sandwichelements bestimmen. Über die Bezugsschlankheit kann dabei auch eine veränderliche Kernsteifigkeit auf einfach Weise berücksichtigt werden.

Der Höhenfaktor

Neben der Kerndicke, lässt sich aus dem Blechdickenfaktor in Abhängigkeit vom Sandwichparameter ρ_S auch direkt die Gesamthöhe d des Sandwichelements berechnen. Diese kann im Entwurf relevant werden, wenn von Seiten der Objektplanung geometrische Restriktionen bestehen. So ist die Bauhöhe¹ von Bahnbrücken oftmals durch den freizuhaltenden Lichtraum des zu überbrückenden Verkehrswegs begrenzt. Zur direkten Anschauung wird daher der Höhenfaktor f_h in Abhängigkeit von den Verhältnisparametern eingeführt. Er stellt einen Bezug zwischen der Gesamthöhe d eines Sandwichelements und der Dicke t_{sub} des monolithischen Stahlblechs mit gleicher Gesamtsteifigkeit her und ist für System I in Abbildung 7.19 aufgetragen. Die anderen Faktorflächen sind in Anhang AII-6 zu finden.

¹Ril 804, M1101 5.1(5) definiert die Bauhöhe als den „lotrechte[n] Abstand zwischen der planmäßigen Schienenoberkante (Sollwert) [...] und der Unterkante des Tragwerks“.

$$d = f_h \cdot t_{\text{sub}} \quad (7.42)$$

$$f_h = \frac{d}{t_{\text{sub}}} = \frac{t_f \cdot (\rho_S + 1)}{t_{\text{sub}}} = f_t \cdot (\rho_S + 1) \quad (7.43)$$

$$= \frac{(\rho_S + 1)}{\sqrt[3]{f_k \cdot (8 + 6 \cdot (\rho_S^2 - 1) \cdot (1 - \delta^2))}} \quad (7.44)$$

Die Funktionsfläche des Höhenfaktors lässt erkennen, dass für gedrungene Geometrien und geringe Sandwichparameter die Gesamthöhe bereits schnell den 1,5-fachen Wert des äquivalenten monolithischen Blechs erreicht. Dies resultiert aus dem aufgelösten Querschnitt und den geringeren Steiner-Anteilen verglichen mit dem starren Verbund durch die elastische Kopplung der Deckbleche im Sandwich. Erst für höhere Bezugsschlankheiten (größere Kernsteifigkeiten) wird anteilig mehr Schubkraft durch den Kern übertragen und der Unterschied zum monolithischen Blech verringert sich. Wie bereits die Funktionswerte der exemplarischen Sandwichbalken¹ aus Tabelle 7.3 zeigen, ist für SPS-Elemente vor allem der Bereich $1 < \rho_S \leq 10$ und $\bar{\lambda}_f \geq 1$ relevant. Für ihre Anwendung in Fahrbahnen ist demnach damit zu rechnen, dass die erforderlichen Aufbauhöhen von SPS-Elementen deutlich größer ausfallen werden, als die der äquivalenten konventionellen Bleche gleicher Gesamtsteifigkeit. Sofern keine oder nur geringe objektplanerische Einschränkungen diesbezüglich bestehen, kann eine Erhöhung der Fahrbahn im Vergleich zur monolithischen Ausführungen zugunsten der Tragwirkung und der Massensparnis in Kauf genommen werden.

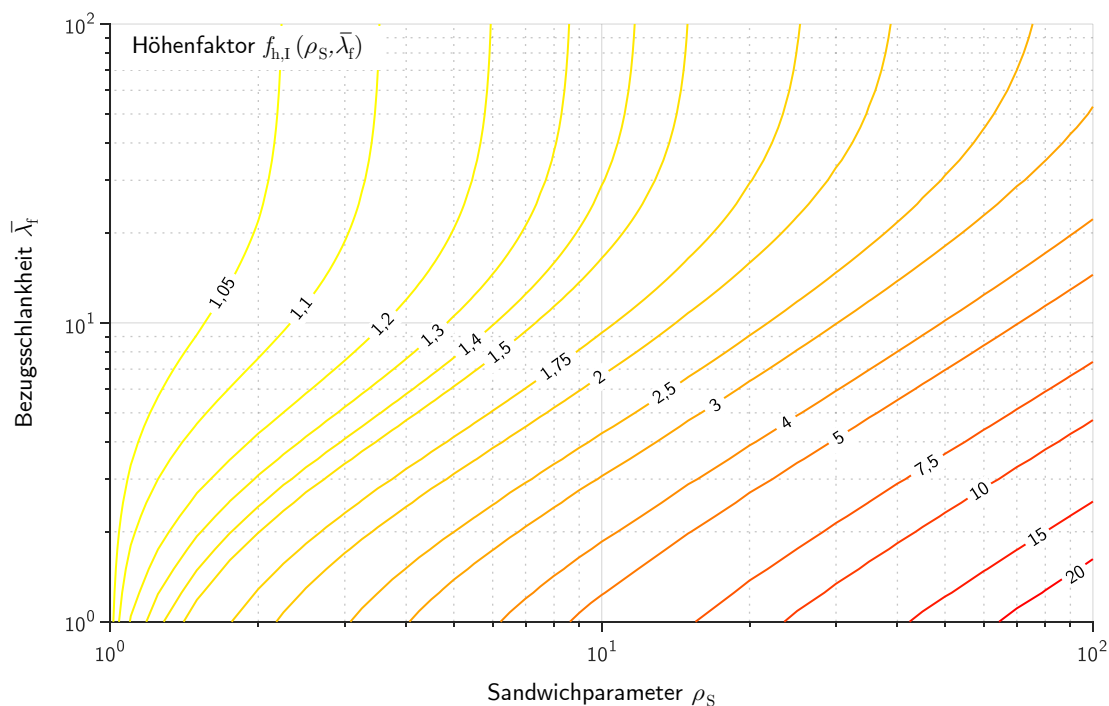


Abbildung 7.19: Höhenliniendarstellung des Höhenfaktors $f_{h,I}$ für System I für die Vordimensionierung eines Sandwichelements bei bekannter Dicke t_{sub} eines äquivalenten monolithischen Blechs

¹Diese orientieren sich in ihren Abmessungen an den Anwendungsgrenzen für SPS-Elemente in Bahnbrücken (vgl. Abschnitt 6.2.1).

Der Massenfaktor

An den Höhenlinien des Blechdickenfaktors in Abbildung 7.18 lässt sich bereits erkennen, dass für Sandwichparameter $\rho_S \leq 10$ und Bezugsschlankheiten $\bar{\lambda}_f < 1$ die erforderliche Gesamtdicke der Deckbleche eines Sandwichelements größer ausfällt, als die Dicke des äquivalenten monolithischen Blechs $2t_f > t_{\text{sub}}$.¹ Folglich resultiert allein aus den erforderlichen Deckblechen bereits eine größere Masse des Sandwichelements. Das hinzukommende Kernmaterial verschiebt die Grenze, ab welcher das Sandwichelement schwerer ist, zusätzlich zu höheren Verhältnisparametern. Um diese Grenze und daraus die Eignung von SPS-Elementen zum Ersatz von monolithischen Blechen gleicher Gesamtsteifigkeit genauer zu überprüfen wird der *Massenfaktor* f_m eingeführt. Er leitet sich ebenfalls aus dem Blechdickenfaktor ab und bezieht die Masse eines SPS-Elements auf diejenige des äquivalenten monolithischen Blechs:

$$f_m = \frac{m_S}{m_{\text{sub}}} \quad (7.45)$$

mit²

$$m_S = 2t_f \cdot \rho_f + t_c \cdot \rho_c \quad (7.46)$$

$$= t_f \cdot (2\rho_f + (\rho_S - 1) \cdot \rho_c) \quad (7.47)$$

und

$$m_{\text{sub}} = t_{\text{sub}} \cdot \rho_f = \frac{t_f \cdot \rho_f}{f_t} \quad (7.48)$$

$$= t_f \cdot \rho_f \cdot \sqrt[3]{f_k \cdot (8 + 6 \cdot (\rho_S^2 - 1) \cdot (1 - \delta^2))} \quad (7.49)$$

$$f_m = \frac{2 + (\rho_S - 1) \cdot (\rho_c / \rho_f)}{\sqrt[3]{f_k \cdot (8 + 6 \cdot (\rho_S^2 - 1) \cdot (1 - \delta^2))}} \quad (7.50)$$

Abbildung 7.20 zeigt exemplarisch die Höhenlinien des Massenfaktors für System I. Im angesprochenen Bereich niedriger Verhältnisparameter zeigt sich, dass unter Berücksichtigung des Kerns sogar eine Bezugsschlankheit $\bar{\lambda}_f \geq 3$ erforderlich wird, damit die Gesamtmasse eines SPS geringer ausfällt als die des jeweils äquivalenten Blechs $m_{\text{SPS}} < m_{\text{sub}}$. Ein Blick auf den Massenfaktor des Systems III in Abbildung AII-100 zeigt, dass dessen Grenze für eine geringe Gesamtmasse mit $\bar{\lambda}_f \geq 5$ noch höher liegt. Für kleinere als die genannten Werte für $\bar{\lambda}_f$ lohnt sich der Einsatz von SPS hinsichtlich einer Massensparnis gegenüber einem monolithischen Blech nicht. Die Grenzwerte liegen ähnlich zu jenen, die zuvor anhand des Spannungsfaktors in Abschnitt 7.2.3 aufgestellt wurden. Lediglich im System II herrschen günstigere Bedingungen für die Gesamtmasse, wie in Abbildung AII-94 zu erkennen ist. So können SPS-Elemente mit starren Stirnplatten im Vergleich zu den anderen Systemen dickere äquivalente Bleche ersetzen und damit mehr Masse einsparen. Die anhand des Spannungsfaktors auch für System II aufgestellte Begrenzung von $\bar{\lambda}_f \geq 5$ bzw. $\bar{\lambda}_f \geq 3$ für $\rho_S \leq 5$ bleibt davon unberührt.

¹In System III erstreckt sich dieser Bereich sogar bis $\bar{\lambda}_f < 2$ (vgl. Abb. AII-98).

²Hier ist zu beachten, dass ρ_S der Sandwichparameter ist, während es sich bei $\rho_f = 7,85 \text{ t/m}^3$ und $\rho_c = 1,15 \text{ t/m}^3$ um die Dichten der im Sandwich eingesetzten Materialien handelt (vgl. Anhang AI-1.1).

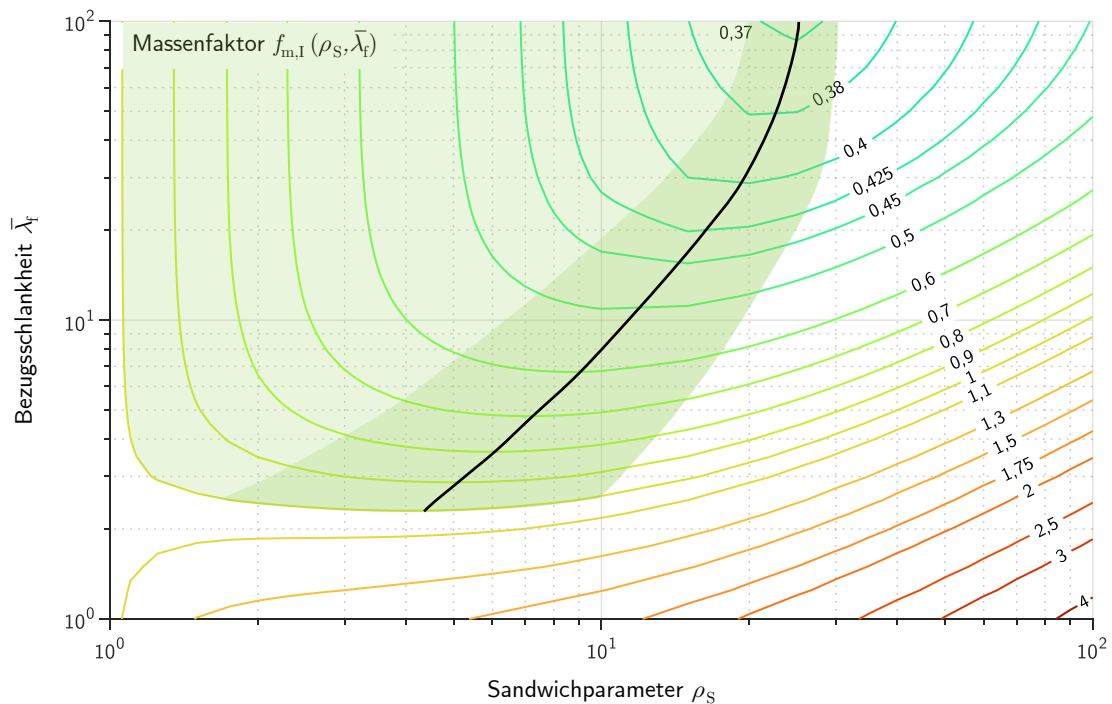


Abbildung 7.20: Höhenliniendarstellung des Massenfaktors $f_{m,I}$ für System I zur Vordimensionierung eines SPS-Elements bei bekannter Dicke t_{sub} des äquivalenten monolithischen Blechs mit Darstellung des optimalen Bereichs hinsichtlich der Bauteilmassen (dunkel- bzw. hellgrün)

Obwohl die Kerndicke t_c im Entwurf von SPS-Elementen über den Blechdickenfaktor gewählt werden sollte, ist der Massenfaktor in deren Abhängigkeit ebenfalls von Interesse. Exemplarisch wird der Verlauf des Massenfaktors $f_m(\rho_S)$ in einem Schnitt der in Abbildung 7.20 gezeigten Faktorfläche parallel zur ρ_S -Achse mit konstanter Bezugsschlankheit ($\bar{\lambda}_f = \text{const.} \geq 2$) betrachtet. Mit steigender Kerndicke bzw. innerem Hebelarm ρ_S nimmt f_m zunächst wie zu erwarten ab, erreicht dann jedoch ein Minimum und steigt wieder an. Dies ist auf die hohe Dichte des PUR im SPS bei gleichzeitig geringer Steifigkeit zurückzuführen. Mit zunehmender Kerndicke wächst zwar die Gesamtsteifigkeit eines SPS-Elements, deren Steigerung geht jedoch zurück. Die hinzugewonnene Biegesteifigkeit aus den Steiner-Anteilen der Deckbleche muss stets die zeitgleich anwachsende Schubweichheit des Kerns kompensieren.¹ Entsprechend nimmt mit steigender Kerndicke t_c die Dicke des äquivalenten Blechs t_{sub} und damit auch dessen Masse m_{sub} immer langsamer zu. Die Masse des Sandwichelements nimmt dagegen stetig linear zu, sodass irgendwann ein Punkt erreicht wird, ab dem die Masse des äquivalenten Blechs weniger stark anwächst als die des Sandwichelements ($\partial f_m / \partial \rho_S = 0$). An dieser Stelle ist das Optimum für die bezogene Masse erreicht (in Abb. 7.20 exemplarisch durch eine schwarze Linie angedeutet). Dieser Effekt stellt sich umso schneller ein, je gedrungenere die Geometrie und damit schubweicher ein Sandwichelement ist (geringe Bezugsschlankheit $\bar{\lambda}_f$). Trotzdem ist die absolute Masse im bezogenen Optimum größer als für kleinere Kerndicken t_c (kleinere ρ_S). Nach der Vordimensionierung anhand des Blechdickenfaktors sollte daher geprüft werden, ob der Massenfaktor der gewählten Parameterkonstellation idealerweise in dem farblich in Abbildung 7.20 angedeuteten Bereich des Optimums (dunkelgrün) liegt oder im Bereich geringerer Kerndicken (hellgrün).

¹Dies zeigt sich bspw. auch in der mit steigendem ρ_S flacher werdenden Funktion des Blechdickenfaktors f_t bei konstanter Bezugsschlankheit in Abbildung 7.18.

Generell zeigt sich auch für SPS-Elemente im Vergleich zu einem äquivalenten Blech anhand der Vergleichsfaktoren die gleiche Tendenz, welche bereits in Abschnitt 7.2.5 für Sandwichelemente allgemein beobachtet wurde: Je dünner die Deckbleche ausgebildet werden, desto günstiger ist die Änderung der Tragwirkung eines Elements unter veränderlicher Kernsteifigkeit. Je höher bspw. die Bezugsschlankheit λ_f ausfällt, umso weniger muss der Gesamtaufbau eines Elements erhöht werden, um die gleiche Steifigkeit zu erzielen und umso mehr Masse kann gegenüber einem monolithischen Blech eingespart werden. Dies resultiert aus der Tatsache, dass mit steigender Schlankheit λ_f der globale Anteil des Schubs an der Gesamttragwirkung sinkt und damit der Kern und seine veränderliche Steifigkeit $G_c(t, T)$ an Einfluss verlieren. Eine Erhöhung des Kerns und damit des Sandwichparameters ρ_S , führt dagegen zur Zunahme von dessen Traganteil und damit der resultierenden Schubweichheit. Sein Einfluss fällt jedoch weniger deutlich aus, da die Wahl eines dickeren Kerns auch gleichzeitig den inneren Hebelarm (ρ_S) und damit die Gesamtsteifigkeit vergrößert.

7.3.2 Die Anwendbarkeit der linearen Viskoelastizität

Um SPS-Elemente zu entwerfen und geometrisch hinsichtlich ihres Tragverhaltens zu optimieren, müssen diese über ihre gesamte Nutzungsdauer verlässlich berechenbar sein. Zu diesem Zweck wurde im ersten Teil dieser Arbeit ein experimentell gestütztes, linear-viskoelastisches Modell für das PUR im SPS entwickelt (vgl. Abschnitt 5.3). Sowohl die Anwendung des Materialmodells selbst, als auch dessen Einsatz bei der Berechnung von SPS-Elementen ist jedoch nur möglich, wenn sich das PUR jederzeit linear-viskoelastisch verhält. So gilt der entwickelte Ansatz 5.23 für die veränderliche Kernsteifigkeit $G_c(t, T)$ nur im LVE-Bereich des speziellen PUR, da er aus ebendiesem hergeleitet wurde. Auch müssen für dessen rechnerische Berücksichtigung (bspw. in der SST) sowohl das Korrespondenzprinzip als auch das Superpositionsprinzip uneingeschränkte Gültigkeit besitzen (vgl. Abschnitte 2.1.2 und 6.1.4).

Um dies zu gewährleisten, darf die maximale Deformation im Kern eines SPS-Elements in keiner Situation den für das PUR charakteristischen LVE-Bereich verlassen. Dessen Grenze wurde für das spezifische PUR ebenfalls im ersten Teil betrachtet und anhand von Experimenten bei ca. 8‰ verortet, wobei auch die für 1‰ auftretenden Abweichungen noch als annehmbar angesehen werden (vgl. Abschnitt 4.2.3 und Anhang AI-6.2). Dieser experimentell ermittelte Grenzwert stimmt annähernd mit den allgemeinen Anhaltswerten für die Grenze des LVE-Bereichs überein, welche die Literatur für die Dehnung von Polymeren unterhalb der Glasübergangstemperatur angibt (vgl. Schwarzl 1990, S. 140 oder Menges 1984, S. 111).

Im Entwurf von SPS-Elementen muss zur Sicherstellung der Zuverlässigkeit aller Ergebnisse, die uneingeschränkte Anwendbarkeit der linearen Viskoelastizität überprüft und nachgewiesen werden. Dafür wird die zuvor angegebenen Grenze des LVE-Bereichs als Bedingung für die *Linearität* herangezogen. Alle der zuvor genannten Grenzwerte beziehen sich dabei auf die Dehnung unter uniaxialem Zug, welche in diesem Fall der ersten Hauptdehnung ε_1 entspricht (Gross et al. 2007, S. 75). Demnach muss die maximale erste Hauptdehnung im Kern eines SPS-Elements stets die nachfolgende Bedingung erfüllen.¹

$$\max \varepsilon_{1,c} \stackrel{!}{<} 8 \text{‰} \quad (7.51)$$

¹In kurzzeitigen(!) Ausnahmefällen können auch Überschreitungen bis $\max \varepsilon_{c,1} < 1 \text{‰}$ toleriert werden.

Wie in Abschnitt 6.1.1 erläutert, sind die Normalspannungen im Kern von Sandwichelementen aufgrund des großen Steifigkeitsunterschieds zu den Deckschichten in der Regel vernachlässigbar. Die Spannungen und Deformationen entstehen im Kern fast ausschließlich aus dem Schub der Sandwichtragwirkung. Dies veranschaulicht qualitativ sowohl die Schubverzerrung des in Abbildung 6.1 rechts dargestellten Elements, als auch die Schubspannungsverteilung im Kern nahe dem Auflager in Abbildung 6.2. Für den Entwurf von SPS-Elementen kann daher die zuvor definierte Grenzbedingung der ersten Hauptdehnung im Kern vereinfacht unter Annahme einer alleinig wirkende Schubgleitung γ_c überprüft werden (Gross et al. 2007, S. 75):

$$\varepsilon_{1,c} \approx \frac{\gamma_c}{2} \quad (7.52)$$

$$\Rightarrow \max \gamma_c < 1,6\% \quad (7.53)$$

Bei der Berechnung von $\max \gamma_c$ müssen alle möglichen Belastungen zusammen mit den jeweils herrschenden Temperaturen sowie ihrer Wirkungsdauer lastfallweise erfasst und aus deren charakteristischer Kombination die maximale Schubgleitung $\max \gamma_c$ ermittelt werden. Dabei sind je nach Wirkungsdauer und Temperatur für die einzelnen Lastfälle unterschiedliche Kernsteifigkeiten $G_c(t, T)$ zu berücksichtigen:

$$\max \gamma_c = \sum_i \gamma_{c,i}(G_{k,i}, t_i, T_i) + \sum_j \gamma_{c,j}(P_{k,j}, t_j, T_j) \quad (7.54)$$

Für die Überprüfung der Linearität in der Vordimensionierung von SPS-Elementen zum Einsatz in Bahnbrücken wird überschlägig angenommen, dass sich die maßgebende maximale Schubgleitung im Kern $\max \gamma_c$ aus dem Szenario kurzzeitiger Verkehrsbelastungen P_k und den ständigen Lasten G_k unter kurzzeitiger maximaler Temperatur (hier $\max T = 60^\circ\text{C}$) am Ende der Nutzungsdauer der Brücke (hier $t = 100\text{ a}$) ergibt:¹

$$\max \gamma_c = \gamma_c(G_k, 100\text{ a}, RT) + \gamma_c((G_k + P_k), t_0, \max T) - \gamma_c(G_k, t_0, RT) \quad (7.55)$$

Um die Grenzbedingung 7.53 in der Vordimensionierung ähnlich vereinfacht betrachten zu können, wie die anderen relevanten Größen (bspw. die Gesamtsteifigkeit k_e), wird ein weiterer Hilfsfaktor eingeführt. Der *Gleitungsfaktor* f_γ ermöglicht die überschlägige Berechnung der maximalen Schubgleitung γ_c im Kern eines Sandwichelements unter zentrischer Einzellast. Anders als bei den bisherigen Faktoren, ist für f_γ eine bezogene Betrachtung nicht sinnvoll, da stets die diskrete Geometrie und Belastung zur Überprüfung der daraus resultierenden absoluten Schubgleitung benötigt wird und diese sich wie beschrieben aus einer Kombination verschiedener Zustände und Steifigkeiten ergibt. Daher wird der Gleitungsfaktor für das jeweilige System direkt aus der Lösungsfunktion der DGLn 6.2 der SST für den Schubwinkel γ berechnet.² Die Herleitung erfolgt für das jeweilige System in Anhang AII-4.1.5, AII-4.2.5 bzw. AII-4.3.2.

¹Da in den beiden ersten Termen der Anteil der kurzzeitigen Schubgleitung unter ständiger Last bei Raumtemperatur $\gamma_c(G_k, t_0, RT)$ enthalten ist, muss diese zum Ausgleich einmal von der Summe abgezogen werden.

²Zur besseren Unterscheidung werden die unterschiedlichen Winkel γ und γ_c als Schub- bzw. Gleitungswinkel bezeichnet. Auf ihre Abhängigkeit wird in der jeweiligen Herleitung eingegangen.

Als Belastung wird dabei eine zentrische Einzellast gewählt, da diese auf der sicheren Seite zu einer größeren Deformation führt, als eine Gleichlast mit äquivalenter Lastsumme. Des Weiteren kann so der Faktor f_γ für den Maximalwert der Gleitung unabhängig von der Laufkoordinate ξ formuliert werden, da sich dessen Ort in einem Sandwich unter einer Einzellast nicht ändert.¹ So liegt das Maximum für System I stets bei $\xi = 0$ und für die Systeme II und III bei $\xi = 0,25$. Anders als bei den bisherigen Hilfsfaktoren, erfolgt keine detaillierte Diskussion der Funktionsflächen der Gleitungsfaktoren, da diese keine neuen Erkenntnisse liefern. Sie dienen lediglich dazu, mithilfe der Verhältnisparameter den Aufwand zur Berechnung der Schubgleitung in Abhängigkeit von Temperatur und Zeit zu reduzieren.

Stattdessen zeigt Abbildung 7.21 qualitative Verläufe der nach den Gleichungen AII-105, AII-134 und AII-161 berechneten Schubgleitung γ_c für verschiedene Kernsteifigkeiten G_c in den drei Systemen.² Exemplarisch werden dafür zwei der bereits mehrfach betrachteten SPS-Aufbauten aus der Voruntersuchung herangezogen, die sich in ihrer (Bezugs-) Schlankheit stark unterscheiden (vgl. Tabelle 7.3). Die in blau gestrichelten Graphen zeigen die Schubgleitungen des Systems I und die orange durchgezogenen diejenigen der Systeme II und III. In Letzteren verhält sich die Schubgleitung unter gleichen Voraussetzungen, wie Belastung und Querschnitt, identisch (vgl. Anhang AII-4.3.2). Die durch Dreiecke hervorgehobenen Maxima der Funktionen bestätigen die oben formulierte Erkenntnis zu deren Lage. Innerhalb eines Systems bleibt der Ort der maximalen Schubgleitung unverändert, auch wenn sich die Kernsteifigkeit oder Systemschlankheit ändern.

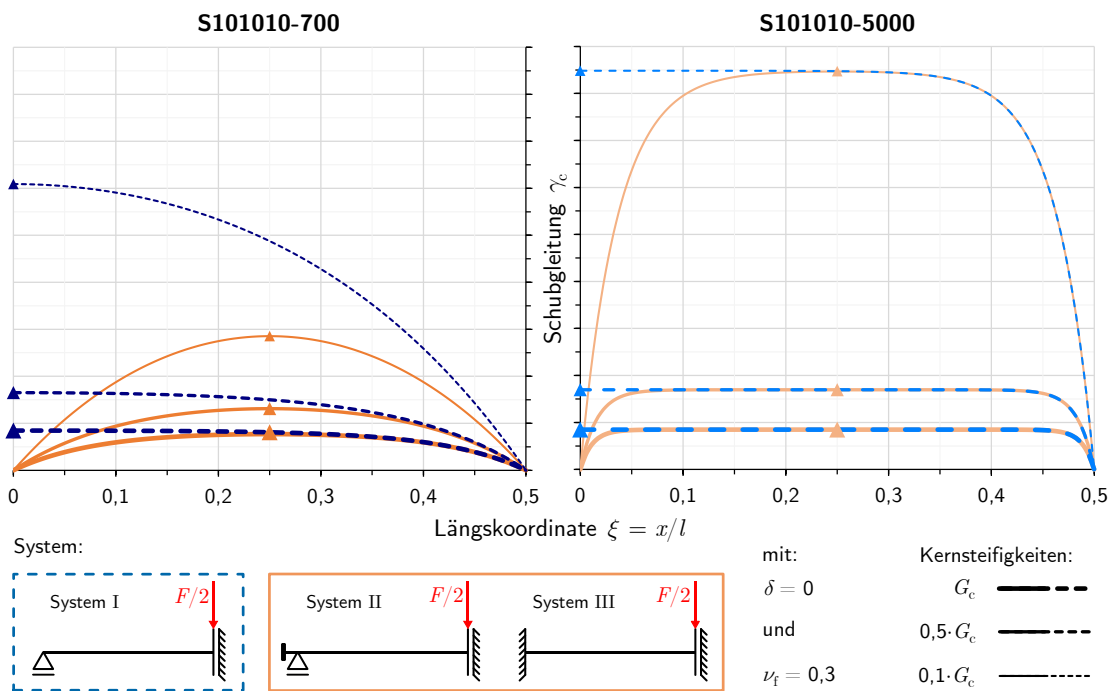


Abbildung 7.21: Qualitativer Vergleich der Verläufe der Schubgleitung γ_c für Kerne verschiedener Steifigkeiten G_c in den drei Systemen anhand von zwei der Beispiэлеlemente aus Tabelle 7.3

¹Für Sandwichelemente unter Gleichlast wandert der Ort des maximalen Schubwinkels, da die Laufkoordinate ξ in der Lösungsfunktion auch außerhalb der hyperbolischen Terme vorkommt (vgl. Gl. AII-107).

²Die absolute Größe wird nicht angezeigt, da der Fokus hier nicht auf der (linearen) Abhängigkeit von der Belastung liegt. Die Skalen und Graphen haben jedoch alle einen einheitlichen Maßstab.

Ein allgemeiner Vergleich der Graphen in Abbildung 7.21 zeigt, dass je höher die Kernsteifigkeiten G_c bzw. die Bezugsschlankheit $\bar{\lambda}_f$ eines Elements ausfällt, desto größer ist auch der Anteil der Querkraft, welcher durch den Kern abgetragen wird und desto mehr gleicht die Funktion der Gleitung dem Verlauf der Gesamtquerkraft. Mit sinkender Kernsteifigkeit G_c nimmt die Schubgleitung γ_c zu und ihr Verlauf entfremdet sich von dem der Gesamtquerkraft. Im Umkehrschluss steigt der Querkraftanteil, welcher von den Deckschichten abgetragen wird.

Aus der beschriebenen Zunahme der Schubgleitung begründet sich die an Gleichung 7.54 aufgezeigte Notwendigkeit, dass deren Extremwerte zum Nachweis der Linearitätsbedingung für ein SPS-Element getrennt nach Belastungsart, Dauer und Temperatur ermittelt und zu $\max \gamma_c$ überlagert werden müssen. Die Größe der Schubgleitung $\gamma_{c,i}$ bzw. $\gamma_{c,j}$ der einzelnen Lastfälle kann dabei mithilfe des Gleitungsfaktors f_γ überschlägig berechnet werden:

$$\gamma_c = \frac{F_k \cdot l^2}{E_f \cdot b \cdot t_f^3} \cdot f_\gamma \quad (7.56)$$

An den Verläufen der Schubgleitung in Abbildung 7.21 lässt sich außerdem der versteifende Einfluss durch starre Schubkopplungen beobachten (System II bzw. III). Diese verlagern zusätzlich Querkraft in die Deckschichten und reduzieren so in gedrungenen Elementen die maximale Schubgleitung deutlich. So fällt im Element S101010-700 die maximal auftretende Schubgleitung mit starrer Schubkopplung an den Enden deutlich geringer aus als ohne. Für hohe Bezugsschlankheiten fällt der Einfluss dagegen kaum ins Gewicht, wie am Element S101010-5000 zu erkennen ist.¹ Das Wissen um dieses Phänomen kann im Entwurf gedrungener Elemente genutzt werden, um deren maximale Schubgleitung gezielt zu verringern und die Bedingung der Linearität im kritischen Fall 7.53 zu erfüllen.

7.3.3 Ein Algorithmus zur Vordimensionierung von SPS-Elementen

Nun da die Hilfsfaktoren für den Entwurf hergeleitet sind, werden in diesem Abschnitt alle Erkenntnisse und Faktoren der Studie konsolidiert und daraus ein Algorithmus zur überschlägigen Vordimensionierung von SPS-Elementen zum Einsatz in kurzen geraden Bahnbrücken formuliert. Neben den Aspekten des Bahnbrückenbaus liegt dabei ein Hauptaugenmerk auf der Berücksichtigung der veränderlichen Steifigkeit des PUR-Kerns. Des Weiteren betrachtet der Algorithmus in der gezeigten Form nur SPS-Elemente mit symmetrischem Aufbau ($\delta = 0$). Diese sind unter dem Gesichtspunkt der absoluten Gesamtsteifigkeit im Entwurf zu favorisieren, wie anhand der Grenzfallfunktionen in Abschnitt 7.1.2 gezeigt wurde. Eine Anwendbarkeit des Vorgehens auf Elemente mit ungleichen Deckblechen wurde nicht untersucht. Im Folgenden wird der konzipierte Ablauf zur Vordimensionierung schrittweise beschrieben und die jeweilig notwendigen Informationen bzw. Begründungen zu den Berechnungen gegeben. Auf detaillierte Herleitungen bereits gezeigter oder bekannter Zusammenhänge wird dabei verzichtet. Sofern notwendig werden Verweise auf die zugehörigen Stellen in der Arbeit oder dem Anhang gegeben. Für alle allgemein bekannten Zusammenhänge, wie bspw. für die Durchbiegung eines Einfeld-Bernoulli-Balkens, sei an dieser Stelle auf Goris (2012) und die einschlägige Literatur verwiesen.

¹Dies zeigt sich bspw. auch im Unterschied zwischen den Steifigkeitsfaktoren $f_{k,I}$ und $f_{k,II}$ in diesen Bereichen.

1. **Ermitteln des geeigneten Ersatzsystems** für das SPS-Element (System I, II oder III). Bereits in der Einleitung in Abschnitt 1.1.2 wurden die zwei möglichen Varianten von SPS-Fahrbahnen in kurzen Bahnbrücken vorgestellt. In der querorientierten Variante spannt das SPS als gelenkiger Einfeldträger direkt zwischen den Hauptträgern. Dabei entscheidet die Ausbildung der Verbindung im Randbereich darüber, ob es sich um System I oder II handelt. In der Vordimensionierung werden die beiden Systeme zunächst gleichwertig behandelt. Erst im späteren Schritt 6 wird die konstruktive Ausbildung der Stirnplatte und deren Anschluss an das SPS-Element noch einmal aufgegriffen, um in der eigentlichen Vordimensionierung ab Schritt 8 eine Unterscheidung zwischen System I und II vornehmen zu können. Die längsorientierte Variante der SPS-Fahrbahn lagert als durchlaufende Platte auf den Querträgern als Zwischenunterstützung, welche wie auch die Platte selbst am Rand an die Hauptträger angeschlossen sind. Durch die Querträger verhält sich der Plattenstreifen des SPS in der Brückenachse ähnlich wie ein Durchlaufträger. Bei gleichen Querträgerabständen und annähernd gleichmäßiger Belastung, kann ein Feld des durchlaufenden Plattenstreifens durch das System III abgebildet werden. Ist eine der zuvor genannten Bedingungen nicht erfüllt, ist dessen Anwendung jedoch nicht gerechtfertigt und es sollte System II angenommen werden. Die durchlaufende SPS-Platte erzeugt für das Einzelfeld unter Umständen zwar keine globale Einspannung, von einer nahezu starren Schubkopplung durch die anschließenden Felder kann jedoch ausgegangen werden. Für die Breite des betrachteten Systems sollte in Abhängigkeit von der Richtung des Lastabtrags und der Belastung ein adäquater Wert auf der sicheren Seite angesetzt werden.¹

In den nachfolgenden Schritten der Vordimensionierung werden allgemeine Berechnungsformeln gezeigt, welche durch eine *Systemzahl* s auf das jeweilige System angepasst werden. Analog der zuvor beschriebenen Einteilung wird die Systemzahl wie folgt definiert:

$$s = \begin{cases} 1 & \text{für System I und II} \\ 0 & \text{für System III} \end{cases} \quad (7.57)$$

2. **Ermitteln der Belastung** aus den maßgeblichen Einwirkungen auf das Element. Bei der Vordimensionierung von SPS-Elementen zum Einsatz in Fahrbahnen von Bahnbrücken sollten in jedem Fall die Eigenlast des Elements, die Ausbaulast aus dem Oberbau² und die Vertikallasten aus Verkehr³ berücksichtigt werden. Wie im vorherigen Punkt bereits erwähnt hängt dabei die Belastung von den Dimensionen des Systems ab. Da allen auf der Gesamtsteifigkeit basierenden Faktorflächen, eine zentrische Einzellast zugrunde liegt, ist die Belastung auf der sicheren Seite ebenso anzusetzen. Lediglich im folgenden Schritt 3 der Vordimensionierung der Deckbleche im Zustand ohne Verbund werden über die Systemlänge verteilte Gleichlasten verwendet, da dies näher an der Realität liegt und bei ausreichender Duktilität im Grenzzustand der Tragfähigkeit eine gewisse Umverteilung der Lasten angenommen werden kann.

¹Unter Berücksichtigung einer Achslast auf einer Bahnschwelle bietet sich hierfür bspw. die Breite bzw. Länge der ausgebreiteten Lastfläche unter einer Schwelle an (vgl. DIN EN 1991-2, 6.3.6.2 bzw. 6.3.6.3).

²Für das Eigengewicht des Oberbaus gibt Ril 804, M2101 2.4 vereinfachte Lastansätze an.

³Hierbei ist zu beachten, dass die verschiedenen Vertikallasten aus Bahnverkehr gemäß DIN EN 1991-2, 6.3.2 teilweise mit α zu klassifizieren (LM71) und dem dynamischen Beiwert Φ zu multiplizieren sind.

3. **Berechnen der erforderlichen Deckblechdicken** aus dem Grenzfall ohne Verbund. Grundsätzlich ist es in einem Sandwichelement möglich mit verschiedenen Deckblech-Kern-Kombinationen die für seine Gebrauchstauglichkeit erforderliche Gesamtsteifigkeit zu erzielen.¹ Als Einstieg in die Vordimensionierung eines Elements dient daher nicht der spätere Gebrauchszustand, sondern der Grenzfall ohne Verbund.² Dabei werden die folgenden zwei Kriterien für die Berechnung der erforderlichen Deckblechdicke $t_{f,1}$ angewendet.

Um ein angemessenes Sicherheitsniveau zu gewährleisten, wird die Tragfähigkeit des Elements ohne Verbund in der außergewöhnlichen Bemessungssituation betrachtet, die bspw. durch Ausfall des Kerns infolge eines Brandes entstehen kann. Die erforderliche Deckblechdicke $t_{f,1}$ ergibt sich dabei aus der plastischen Momententragfähigkeit unter der Summe aller verteilten Lasten und mithilfe der Systemzahl s zu:

$$t_{f,1} = \sqrt{\frac{3^s}{24} \cdot \frac{\sum q_d \cdot l^2}{2} \cdot \frac{4}{b} \cdot \frac{1}{f_{y,d}}} \quad (7.58)$$

Um darüber hinaus zu gewährleisten, dass die Verformungen der Fahrbahn aus Kriechen unter Dauerlast nicht zu groß werden, sollten das Element auch ohne Verbund eine gewisse Mindeststeifigkeit aufweisen. Für die maximale Verformung in Feldmitte unter kriecherzeugenden Lasten wird daher ein Grenzwert von $w \leq l/100$ festgelegt. Dieser ist für Bahnbrücken verhältnismäßig hoch angesetzt, da ein Gebrauchszustand gänzlich ohne Verbund nicht auftreten wird und selbst für $t \rightarrow \infty$ die Kernsteifigkeit G_c gegen ihren Gleichgewichtswert $G_e \approx 6,5 \text{ MPa}$ strebt (vgl. Abschnitt 5.2.1). Demnach wird stets $\bar{\lambda}_f > 0$ gelten und die verbleibende Gesamtsteifigkeit $k_e(t \rightarrow \infty) > k_f$ sein.³ Die erforderliche Deckblechdicke $t_{f,2}$ ergibt sich aus der elastischen Durchbiegung unter den gleichmäßig verteilten charakteristischen Dauerlasten mithilfe der Systemzahl s (s. Gl. 7.57) und ohne Verbund zu:

$$t_{f,2} = \sqrt[3]{\frac{100}{l} \cdot \frac{5^s}{384} \cdot \frac{\sum g_k \cdot l^4}{2} \cdot \frac{12}{b} \cdot \frac{(1 - \nu_f^2)}{E_f}} \quad (7.59)$$

Im Rahmen des finalen Entwurfs müssen die Langzeitverformungen aus Kriechen und deren Auswirkungen auf die Gebrauchstauglichkeit genauer betrachtet werden.⁴

4. **Ermitteln der Steifigkeit des PUR im SPS** in den bemessungsrelevanten Zuständen. Im Brückenbau wird in der Regel nur die zeitabhängigen Entwicklung des Bauteilverhaltens unter konstanter Einwirkung betrachtet.⁵ Da die Steifigkeit des PUR jedoch auch eine Abhängigkeit von der Temperatur zeigt, kommt diese für die Bemessung von

¹Dies zeigt sich bspw. an den Höhenlinien der Blechdickenfaktoren (vgl. Abb. 7.18).

²Auf ähnliche Weise erfolgt z. B. auch der Nachweis von Verbundgläsern (vgl. DIN 18008-1, 7.2.1).

³Die genaue Größe hängt von der Geometrie ab. In den Beispielen in Anhang AII-7.1 und AII-7.2 wird exemplarisch überprüft welche Gesamtverformung im schlimmsten Fall für $t = 100 \text{ a}$ auftreten kann.

⁴Das Bauwerk und auch die Fahrbahn sind bspw. gemäß Ril 804, M1101 5.1(6) für die quasi-ständige Kombination aus 20 % der Verkehrslast und allen ständigen Lasten inklusive der Anteile aus Kriechen zu überhöhen.

⁵Dies begründet sich dadurch, dass für den Beton als bisher einzigen viskoelastischen Baustoff im Brückenbau keine Temperaturabhängigkeit der Steifigkeit berücksichtigt wird.

SPS-Elementen als zu betrachtende Variable hinzu.¹Im detaillierten Entwurf sind unter Berücksichtigung einer Interaktion der beiden Einflüsse mindestens vier maßgebliche Zustände (Abkürzung: Z) zu berücksichtigen, welche teilweise bereits in der Voruntersuchung zur Studie in Abschnitt 6.2.1 Anwendung fanden:

- Z1** Die Verformung eines Elements aus kurzzeitiger Belastung bei Raumtemperatur (bspw. unter der Verkehrslast)
- Z2** Die Verformung eines Elements aus kurzzeitiger Belastung bei erhöhter Bauteiltemperatur (bspw. unter der Verkehrslast bei ca. 60 °C)
- Z3** Die Verformung eines Elements aus dauerhafter Belastung über dessen rechnerische Nutzungsdauer bei Raumtemperatur (bspw. nach 100 a unter Eigengewicht)
- Z4** Die Verformung eines Elements aus dauerhafter Belastung, überlagert mit einer kurzzeitigen Belastung bei erhöhter Bauteiltemperatur am Ende der rechnerische Nutzungsdauer (bspw. unter Verkehr bei ca. 60 °C nach 100 a unter Eigengewicht)

Z4 wurde als einziges bisher nicht betrachtet und stellt einen überlagerten Zustand dar, dem nicht eine einzelne diskrete Steifigkeit des PUR zugeordnet werden kann. Entsprechend wird er für die eigentliche Vordimensionierung nicht herangezogen, sollte aber in den Berechnungen des Entwurfs und bei dessen Überprüfung berücksichtigt werden.²

Die anderen drei relevanten Zustände wurden bereits mehrfach im zweiten Teil dieser Arbeit verwendet und erstmals in Tabelle 6.2 definiert. Da die Fahrbahn in der Regel mindestens für die Verformung aus ständigen Lasten inkl. Kriechen überhöht werden muss, können die Verformungsanteile aus ständigen und veränderlichen Lasten getrennt betrachtet werden. Für die eigentliche Vordimensionierung ist es zunächst hinreichend die Fahrbahn unter Verkehr zu betrachten, um deren erforderliche Gesamtsteifigkeit zu ermitteln. Dafür wird die Kernsteifigkeit $G_c(t_0, \max T)$ unter kurzzeitiger Belastung bei erhöhter Temperatur maßgebend, da sie zu der größten Verformung aus Verkehr führt.³ Auf der sicheren Seite wird für diesen Zustand die bereits in Tabelle 6.2 gegebene und aus Gleichung 5.23 ermittelte Kernsteifigkeit angesetzt:

$$\text{Z2:} \quad G_c(t_0, \max T) = G_c(160 \text{ s}, 60^\circ \text{C}) = 0,5 \cdot G_c = 135 \text{ MPa} \quad (7.60)$$

Um nach der eigentlichen Vordimensionierung den Zuwachs der Verformungen im Element kontrollieren zu können, werden auch die Kernsteifigkeiten der anderen Zustände herangezogen. Diese können analog zu $G_c(t_0, \max T)$ aus Tabelle 6.2 entnommen oder nach Gleichung 5.23 berechnet werden:

$$\text{Z1:} \quad G_c(t_0, \text{RT}) = G_c(160 \text{ s}, 23^\circ \text{C}) = G_c = 270 \text{ MPa} \quad (7.61)$$

$$\text{Z3:} \quad G_c(t_{100}, \text{RT}) = G_c(100 \text{ a}, 23^\circ \text{C}) = 0,1 \cdot G_c = 27 \text{ MPa} \quad (7.62)$$

¹Aus diesem Grund wird hier der Terminus *Zustände* und nicht wie sonst üblich *Zeitpunkte* verwendet.

²Dieser Zustand wurde bereits in Abschnitt 7.3.2 als maßgebend für die Überprüfung der Annahme linearviskoelastischen Verhaltens für das PUR identifiziert (vgl. Gl. 7.54). Abhängig vom Nachweis können jedoch auch andere Zustände maßgebend werden, weshalb dies im Entwurf stets kritisch zu überprüfen ist.

³Dieser Zustand repräsentiert eine Überlagerung von Verkehrslast und gleichmäßiger Temperaturerhöhung, was in der detaillierten Kombinatorik gemäß DIN EN 1990, A2.2.4 entsprechend zu berücksichtigen ist.

5. **Berechnen der maximalen Deckblechdicke** aus dem Grenzkriterium der Spannung. Wie sich schon aus der erforderlichen Blechdicke $t_{f,1}$ für den ULS im Grenzfall ohne Verbund in Schritt 3 erschließen lässt, spielt die Tragfähigkeit der Deckbleche mit Verbund nur eine untergeordnete Rolle für den Entwurf. Die Spannungen werden daher nicht direkt für die Vordimensionierung herangezogen, sondern über das aus den Beobachtungen von Abschnitt 7.2.3 abgeleitete Grenzkriterium. Dort wurde gezeigt, dass abhängig vom System ein Minimum der Bezugsschlankheit $\bar{\lambda}_{f,\min}$ eingehalten werden sollte, um den Zuwachs der Deckblechspannungen infolge der schwankenden Kernsteifigkeit aus Temperatur zu begrenzen. Aus den definierten Grenzwerten der Bezugsschlankheit (vgl. Abschnitt 7.2.5) und der Kernsteifigkeit unter erhöhter Temperatur, wird daher eine maximal zulässige Deckblechdicke $\max t_f$ für das zu dimensionierende Element ermittelt:

$$\max t_f = \frac{l}{\bar{\lambda}_{f,\min}} \cdot \sqrt{\frac{2 G_c(t_0, \max T)}{E_f}} \quad (7.63)$$

Mit den systemabhängigen Grenzwerten der Bezugsschlankheit (vgl. Abschnitt 7.2.5):

$$\bar{\lambda}_{f,\min} = \begin{cases} 3 & \text{für System I bzw. II und } \rho_S \leq 5 \\ 5 & \text{für System III oder } \rho_S > 5 \end{cases} \quad (7.64)$$

6. **Identifizieren der erforderlichen Deckblechdicke** für die Vordimensionierung. Anhand der zuvor genannten Kriterien wird ein Bereich eingegrenzt in dem die Deckblechdicke des zu dimensionierenden Elements liegen muss. Die kleinstmögliche der ermittelten Deckblechdicken wird daraus als Startwert t_f für die iterative Vordimensionierung festgelegt:

$$\max(t_{f,1}, t_{f,2}) \leq \mathbf{t_f} \stackrel{!}{\leq} \max t_f \quad (7.65)$$

Für System II muss zusätzlich die erforderliche Stirnplattendicke t_{ep} geprüft bzw. festgelegt werden (bspw. anhand der Abbildungen 7.16 oder 7.17). Da in SPS-Elementen der Sandwichparameter nicht höher als $\rho_S \leq 10$ zu erwarten ist, kann davon ausgegangen werden, dass für eine rechnerisch annähernd starre Stirnplatte eine Dicke von $t_f \leq t_{ep} \leq 2 t_f$ ausreichend ist. Zusätzlich muss außerdem die Machbarkeit des zwingend erforderlichen Vollstoß der Deckbleche an die Stirnplatte geprüft werden. Nur wenn dieser konstruktiv umsetzbar ist, kann eine starre Kopplung angesetzt und System II angewendet werden.

7. **Berechnen der erforderlichen Ersatz-Blechdicke** aus der Verformung unter Verkehr. Die eigentlich Vordimensionierung des SPS-Elements erfolgt über den in Abschnitt 7.3.1 eingeführten Blechdickenfaktor, welcher in Abhängigkeit von den Verhältnisparametern einen Vergleich zwischen dem SPS-Element und einem monolithischen Blech gleicher Steifigkeit erlaubt. Die für das System und die Belastung erforderliche Gesamtsteifigkeit wird zunächst durch die Dicke t_{sub} des äquivalenten Blechs ausgedrückt, welche nur von den äußeren Randbedingungen des Systems und der Belastung abhängt. Dabei wird ein

Grenzwert von $w \leq l/300$ der lokalen Verformung im Teilsystem der Brückenfahrbahn unter der charakteristischen Einzellast P_k aus Verkehr vorausgesetzt:¹

$$t_{\text{sub}} = \sqrt[3]{\frac{300}{l} \cdot \frac{4^s}{192} \cdot P_k \cdot l^3 \cdot \frac{12}{b} \cdot \frac{(1 - \nu_f^2)}{E_f}} \quad (7.66)$$

8. **Berechnen des Blechdickenfaktors und der Bezugsschlankheiten** für alle Zustände. Aus der zuvor gewählten Dicke für die Deckbleche t_f und der des äquivalenten Blechs t_{sub} werden der erforderliche Blechdickenfaktor f_t und die Bezugsschlankheit $\bar{\lambda}_f(t_0, \max T)$ ermittelt. Um im Nachgang die Eigenschaften des SPS-Elements auch in den anderen Zuständen überprüfen zu können, empfiehlt es sich deren Bezugsschlankheiten $\bar{\lambda}_f(t_0, \text{RT})$ und $\bar{\lambda}_f(t_{100}, \text{RT})$ ebenfalls zu berechnen (vgl. Punkt 4).

$$f_t = \frac{t_f}{t_{\text{sub}}} \quad (7.40)$$

$$\bar{\lambda}_f = \frac{l}{t_f} \cdot \sqrt{\frac{2 G_c(t, T)}{E_f}} \quad (7.10)$$

9. **Ermitteln des erforderlichen Sandwichparameters** in Abhängigkeit von $\bar{\lambda}_f(t_0, \max T)$. Die eigentliche Vordimensionierung erfolgt grafisch anhand der Funktionsfläche des Blechdickenfaktors f_t für das jeweilige System I, II oder III (Abbildung AII-86, AII-92 oder AII-98). Über die zuvor berechneten Faktoren wird nach dem in Abbildung 7.18 gezeigten Prinzip der Sandwichparameter $\min \rho_S$ abgelesen. Dieser gibt das kleinste erforderliche Verhältnis im Querschnitt wieder, damit das SPS-Element mit der gewählten Deckblechdicke t_f unter erhöhter Temperatur die zuvor in Punkt 7 definierte Anforderung an die Verformung unter Verkehr erfüllt.
10. **Festlegen der Kerndicke im SPS-Element** aus dem erforderlichen Sandwichparameter. Über den zuvor abgelesenen Sandwichparameter $\min \rho_S$ wird die Kerndicke $\min t_c$ berechnet, welche mindestens benötigt wird, um die geforderte Gesamtsteifigkeit zu erzielen. Aus dieser wird, unter Beachtung der maximal herstellbaren Abmessungen, die letztendliche Kerndicke t_c für das SPS-Element festgelegt (vgl. auch Abschnitt 1.2.1 bzw. 6.2.1):

$$t_f \cdot (\min \rho_S - 1) = \min t_c \leq t_c \leq t_{c, \max} \approx 80 \text{ mm} \quad (7.67)$$

¹DIN EN 1990, A2.4.4 stellt strenge Anforderungen an die Verformung einer Brücke zur Sicherstellung der Betriebssicherheit und des Reisendenkomforts, welche sich jedoch stets auf deren Längsrichtung beziehen. Abgesehen von der Begrenzung der Verwindung, welche in kurzen geraden Brücken ebenfalls stark vom globalen System beeinflusst wird, existieren dagegen keine konkreten Anforderungen an das Teilsystem des Fahrbahns. Unter der Annahme gleichmäßiger Lastverteilung durch den Oberbau wird daher ein Grenzwert von $w \leq l/300$ angenommen. Wie der Beispielenwurf in Anhang AII-7.1 zeigt, kann ein übliches Dickblech mit $t = 110 \text{ mm}$ in der Regel-Querspannweite einer Trogbrücke von 4,40 m diese Anforderung knapp erfüllen.

In der Regel empfiehlt es sich zur Minimierung der absoluten Masse und Gesamthöhe des Elements die Kerndicke $t_c = \min t_c$ zu wählen. Übersteigt die mindestens erforderliche Kerndicke den angegebenen Grenzwert aus der Herstellbarkeit stark, muss die Deckblechdicke t_f unter Beachtung von Gleichung 7.65 erhöht und ab Punkt 8 des Algorithmus die Berechnungen wiederholt werden.¹

11. **Überprüfen der bezogenen Gesamthöhe und Masse** des entworfenen SPS-Elements. Aus der nun vollständig bestimmten Geometrie wird anhand des Höhenfaktors f_h (Abbildung AII-87, AII-93 oder AII-99) und des Massenfaktors f_m (Abbildung AII-88, AII-94 oder AII-100) die Ausführbarkeit und Effizienz des SPS-Elements geprüft. Wenn die Faktoren des Elements beide möglichst gering ausfallen und alle objektplanerischen Randbedingungen eingehalten sind, kann der Entwurf fortgeführt werden. Wenn nicht sollte t_f unter Beachtung von Gleichung 7.65 oder t_c unter Beachtung von Gleichung 7.67 im Rahmen der Möglichkeiten nachjustiert werden. So führt bei bekannter Dicke des äquivalenten Blechs t_{sub} eine Verringerung der Deckblechdicke t_f zur Erhöhung der erforderlichen Kerndicke t_c oder umgekehrt eine Erhöhung von t_f zur Verringerung von t_c (vgl. Abb. 7.18). Bei Änderung der Eingangswerte sind auch hier die Berechnungen des Algorithmus ab Punkt 8 zu wiederholen.

Ausstieg aus dem Algorithmus zu einer numerischen Berechnung des SPS-Elements. Sofern direkt im Anschluss eine numerische Berechnung des SPS-Elements vorgenommen wird (bspw. mittels FEM), kann an dieser Stelle die Vordimensionierung beendet und das Element in den gefundenen Abmessungen modelliert werden. Dabei sind weiterhin alle zuvor definierten Zustände der Kernsteifigkeit zu beachten.² Für das fertig dimensionierte Element muss in jedem Fall, wie in Abschnitt 7.3.2 beschrieben, die Gültigkeit der Grundannahme linear-viskoelastischen Verhaltens des Kerns über die gesamte Nutzungsdauer überprüft und gemäß Gleichung 7.54 nachgewiesen werden (vgl. auch folgender Punkt 15).

Soll das SPS-Element zunächst nur überschlägig berechnet werden (bspw. für eine vergleichende Voruntersuchung), kann dies mit den nachfolgend beschriebenen Schritten erfolgen. So können die maximal auftretenden Verformungen und Deckblechspannungen in Feldmitte ermittelt werden, sowie deren Entwicklung über die verschiedenen Zustände in Abhängigkeit von der Kernsteifigkeit $G_c(t, T)$.

12. **Ermitteln der Steifigkeits-, Spannungs- und Gleitungsfaktoren** für das SPS-Element. Mit den Verhältnisparametern, welche sich aus der Vordimensionierung ergeben haben, werden über die Faktorflächen des jeweiligen Systems (I, II oder III) die Steifigkeitsfaktoren f_k , die Spannungsfaktoren f_σ und die Gleitungsfaktoren f_γ für alle Steifigkeiten des Kerns $G_c(t, T)$ gemäß Punkt 4 bestimmt. Dafür werden die bereits in Punkt 8 in Abhängigkeit von den verschiedenen Kernsteifigkeiten berechneten Bezugsschlankheiten $\bar{\lambda}_f(t, T)$ verwendet.

¹Eine Erhöhung der Deckblechdicke t_f reduziert bei gleicher oder geringerer Kerndicke jedoch ρ_s und hat so nachteilige Auswirkungen auf die bezogene Gesamtmasse des Elements (vgl. Abb. 7.20).

²Hinsichtlich der Modellierung empfiehlt es sich die Kernsteifigkeiten lastfallweise durch Faktorisierung des Ausgangswerts wie in den Gleichungen 7.60 bis 7.62 zu berücksichtigen.

Für

$$f_k(\rho_S, \bar{\lambda}_f(t, T)) \text{ siehe Abbildung AII-84, AII-90 oder AII-96,}$$

für

$$f_\sigma(\rho_S, \bar{\lambda}_f(t, T)) \text{ siehe Abbildung AII-85, AII-91 oder AII-97}$$

und für

$$f_\gamma(\rho_S, \bar{\lambda}_f(t, T)) \text{ siehe Abbildung AII-89, AII-95 oder AII-101.}$$

Optional: Berechnung der Steifigkeits- und Spannungsquotienten zum Vergleich. Wird im Rahmen des Entwurfs eine Variantenstudie von SPS-Elementen durchgeführt, können zur Beurteilung der Empfindlichkeit verschiedener Ausführungen hinsichtlich einer veränderlichen Kernsteifigkeit der Steifigkeitsquotient $\kappa(t, T)$ und der Spannungsquotient $\zeta(t, T)$ herangezogen werden (vgl. Gl. 7.28 bzw. Gl. 7.30). Für die reguläre Vordimensionierung spielen die beiden Faktoren jedoch eine untergeordnete Rolle, da sie nur einen vergleichenden Charakter haben. Demnach kann ihre Ermittlung entfallen wenn im Rahmen einer überschlägigen oder numerischen Berechnung die Zustände eines einzelnen Elements ohnehin nach Punkt 14 berechnet werden. Die Quotienten können dann aus den Ergebnissen für $w_e(t, T)$ und $\sigma_e(t, T)$ direkt berechnet werden.

$$\kappa(t, T) = \frac{f_k(G_c(t, T))}{f_k(G_c)} = \frac{k_e(G_c(t, T))}{k_{e, \text{init}}(G_c)} = \frac{w_{e, \text{init}}(G_c)}{w_e(G_c(t, T))} \quad (7.28)$$

$$\zeta(t, T) = \frac{f_\sigma(G_c(t, T))}{f_\sigma(G_c)} = \frac{\sigma_e(G_c(t, T))}{\sigma_{e, \text{init}}(G_c)} \quad (7.30)$$

13. Berechnen der Referenzwerte von Durchbiegung w_r und Deckblechrandspannung σ_r .

Um die Verformung w_e und die Randspannung σ_e in Feldmitte des SPS-Elements mit viskoelastischem Kern und deren Veränderung mithilfe der jeweiligen Faktoren bestimmen zu können, müssen zunächst deren Referenzwerte für den Grenzfall des starren Verbunds berechnet werden. Hierbei ist zu beachten, dass der Spannungsfaktor den Fall einer verteilten Gleichlast betrachtet, während für den Steifigkeitsfaktor auf der sicheren Seite die Lastsumme als zentrische Einzellast angesetzt wird.

Die Referenzwerte im starren Verbund können unter Zuhilfenahme des Sandwichparameters und der Systemzahl s (Gl. 7.57) wie folgt berechnet werden:

$$w_{F,r}(\xi = 0,5) = \frac{4^s}{192} \cdot \frac{6 \cdot F_k \cdot l^3}{b \cdot t_f^3 \cdot (1 + 3\rho_S^2)} \cdot \frac{(1 - \nu_f^2)}{E_f} \quad (\text{AII-117 bzw. AII-176})$$

$$\sigma_{q,r}(\xi = 0,5) = \frac{3^s}{24} \cdot \frac{q_k \cdot l^2}{b \cdot t_f^2} \cdot \frac{3 \cdot (\rho_S + 1)}{(1 + 3\rho_S^2)} \quad (\text{AII-123 bzw. AII-183})$$

14. **Berechnen der Durchsenkung w_e und Spannungen σ_e** des betrachteten SPS-Elements. Mit den zuvor ermittelten Referenzwerten des starren Verbunds und den Steifigkeits- bzw. Spannungsfaktoren werden entsprechend der initial definierten Zusammenhänge 7.2 und 7.3 die Durchsenkungen w_e und Spannungen σ_e des elastischen Verbunds für die verschiedenen Zustände bzw. Kernsteifigkeiten berechnet:

$$w_e(t, T) = \frac{w_r}{f_k(\rho_S, \bar{\lambda}_f(t, T))} \quad (7.68)$$

$$\sigma_e(t, T) = \sigma_r \cdot f_\sigma(\rho_S, \bar{\lambda}_f(t, T)) \quad (7.69)$$

Werden diese lastfallweise und für alle Zustände mit konstanter Kernsteifigkeit $G_c(t, T)$ ermittelt, lassen sich aus den Einzelergebnissen auch überschlägig die Zustandsgrößen überlagerter oder differentieller Zustände berechnen. So ergibt sich bspw. die wahrscheinlich größte Gesamtverformung $\max w$ unabhängig vom System aus dem Belastungsszenario des Zustands Z4, wie unter Punkt 4 beschrieben. Diese Kombination wurde bereits für die Berechnung der maximalen Schubgleitung $\max \gamma_c$ in Abschnitt 7.3.2 verwendet und besteht aus der Überlagerung der Verformungen unter den ständigen Lasten bis zum Ende der Nutzungsdauer $w_e(G_k, 100 \text{ a}, \text{RT})$ und der kurzzeitigen Verformung aus ständigen und veränderlichen Lasten unter erhöhter Temperatur $w_e((G_k + P_k), t_0, \max T)$. Unter Verwendung des Zusammenhangs 7.68 ergibt sich diese insgesamt zu:

$$\begin{aligned} \max w(\text{Z4}) &= w_e(G_k, \text{Z3}) + w_e((G_k + P_k), \text{Z2}) - w_e(G_k, \text{Z1}) \quad (7.70) \\ &= w_e(G_k, 100 \text{ a}, \text{RT}) + w_e((G_k + P_k), t_0, \max T) - w_e(G_k, t_0, \text{RT}) \\ &= \frac{w_r(G_k)}{f_k(\rho_S, \bar{\lambda}_f(100 \text{ a}, \text{RT}))} + \frac{w_r(G_k) + w_r(P_k)}{f_k(\rho_S, \bar{\lambda}_f(t_0, \max T))} - \frac{w_r(G_k)}{f_k(\rho_S, \bar{\lambda}_f(t_0, \text{RT}))} \quad (7.71) \end{aligned}$$

15. **Überprüfen der Linearitätsbedingung** für den PUR-Kern im kritischen Zustand. Wie in Abschnitt 7.3.2 erläutert, darf das PUR im Kern des SPS in keinem Zustand den Gültigkeitsbereich der linearen Viskoelastizität verlassen. Nur unter dieser Bedingung können Zustandsgrößen für das SPS mithilfe des Werkstoffgesetzes nach Gleichung 5.23 berechnet und lineare Überlagerungen wie die zuvor gezeigte über das Korrespondenzprinzip angewendet werden. Um linear-viskoelastisches Verhalten für das PUR zu gewährleisten, muss die folgende Bedingung 7.53 für dessen maximale Schubgleitung über die gesamte Nutzungsdauer erfüllt sein:

$$\max \gamma_c \stackrel{!}{<} 1,6 \% \quad (7.53)$$

Die Bedingung ist für den maßgebenden Zustand Z4 zu überprüfen, indem die Gleitungen der einzelnen Lastfälle, Temperaturen und Zeiten wie ebenfalls in Abschnitt 7.3.2 beschrieben kombiniert werden (s. Gl. 7.54 bzw. 7.55). Unter Anwendung des Hilfsfaktors f_γ und Einsetzen der Gleichung 7.56 für die Gleitung, ergibt sich die maßgebende Kombination für das jeweilige System (I, II oder III) zu:

$$\max \gamma_c(\text{Z4}) = \gamma_c(G_k, \text{Z3}) + \gamma_c((G_k + P_k), \text{Z2}) - \gamma_c(G_k, \text{Z1}) \quad (7.72)$$

$$= \frac{l^2}{E_f \cdot b \cdot t_f^3} \cdot \left[G_k \cdot f_\gamma(\rho_S, \bar{\lambda}_f(100 \text{ a}, \text{RT})) + (G_k + P_k) \cdot f_\gamma(\rho_S, \bar{\lambda}_f(t_0, \max T)) - G_k \cdot f_\gamma(\rho_S, \bar{\lambda}_f(t_0, \text{RT})) \right] \quad (7.73)$$

mit

$$f_\gamma(\rho_S, \bar{\lambda}_f(t, T)) \text{ nach Abbildung AII-89, AII-95 oder AII-101}$$

Sofern die Bedingung 7.53 im maßgebenden Zustand nicht erfüllt ist, sollte die Kerndicke t_c vergrößert und/oder die Deckblechdicke t_f im Rahmen der Möglichkeiten reduziert werden, um die Bezugsschlankheiten $\bar{\lambda}_f(t, T)$ für alle Kernsteifigkeiten zu erhöhen.

Zur Demonstration des Algorithmus werden in Anhang AII-7 exemplarisch zwei Entwürfe von SPS-Fahrbahnen nach dem gezeigten Schema durchgeführt. Dabei werden die bereits in der Einleitung angesprochenen Regelszenarien einer querorientierten und einer längsorientierten Fahrbahn betrachtet (vgl. Abschnitt 1.1.2). Auf die Berechnungen wird an dieser Stelle nicht im Einzelnen eingegangen. Folgend werden lediglich die Erkenntnisse aus den Entwürfen kurz zusammengefasst.

Im querorientierten Entwurf zeigt sich, dass das SPS bei einer Spannweite von $l = 4,40 \text{ m}$ unter den vorausgesetzten Randbedingungen des Algorithmus bereits an die Grenze der Machbarkeit stößt. So funktioniert der Entwurf nur unter dem Ansatz von Stirnplatten (System II), welche die maximale Schubgleitung im Kern $\max \gamma_c$ reduzieren. Mit dem System I kann die Linearitätsbedingung 7.53 trotz großer Kerndicke nicht erfüllt werden. Letztere müsste für die betrachteten Verhältnisse in System I deutlich größer ausgeführt werden, was technisch schwerer umzusetzen ist (vgl. Fußnote 2 auf S. 163). Für große Spannweiten müssen die Auswirkung der begrenzten Dicke des Kerns und seiner sinkenden Steifigkeit hinsichtlich der Gebrauchstauglichkeit zwangsläufig durch dickere Deckbleche kompensiert werden. Auf den Nachweis der Linearitätsbedingung wirkt sich dies jedoch negativ aus. Zur Reduzierung der Schubgleitung in weit gespannten Systemen ist daher die Verwendung von Stirnplatten zu empfehlen.

Der längsorientierte Entwurf erfüllt auf Antrieb alle Nachweise. Dennoch zeigt sich, dass in dem betrachteten Fall das System III unter sinkender Kernsteifigkeit bezüglich des Materialeinsatzes nur wenig Einsparpotential gegenüber einem monolithischen Blech bietet. So lassen sich in dem Beispiel nur 10% Masse einsparen und die notwendige Aufbauhöhe des SPS muss um einen Faktor von 2,30 dem gegenüber deutlich größer werden. Dieses Verhalten ist auf die unvorteilhaften Umlagerungen in System III (vgl. Abschnitt 7.2.2) und die strengen Anforderungen des Algorithmus zurückzuführen.

7.3.4 Schlussfolgerungen

Vorangegangen wurde die allgemeine Studie des Abschnitts 7.2 zum Tragverhalten von Sandwichelementen unter veränderlicher Kernsteifigkeit auf das SPS konkretisiert. Dafür wurden verschiedene Vergleichsfaktoren gezeigt aus denen zusätzliche Erkenntnisse für einen zielgerichteten Entwurf von SPS-Elementen gewonnen werden konnten. So bestätigt der Massenfaktor die anhand des Spannungsfaktors bereits formulierten Mindestwerte für die Bezugsschlankheit (vgl. Abschnitt 7.2.3). Damit sich die Anwendung von SPS hinsichtlich der Gesamtmasse lohnt, sollte die Bezugsschlankheit im bemessungsrelevanten Zustand (bei erhöhter Temperatur) über den gefundenen Grenzwerten liegen (s. Gl. 7.64). Ansonsten fiel die Masse des SPS-Elements größer aus, als die eines monolithischen Blechs gleicher Gesamtsteifigkeit.

Dementgegen können die Auswirkungen einer schwankenden Kernsteifigkeit auf die erforderliche Aufbauhöhe eines SPS-Elements nicht ohne konkreten objektplanerischen Zusammenhang bewertet werden. Anhand des Höhenfaktors lässt sich jedoch bereits erkennen, dass die Gesamthöhe eines SPS-Elements im relevanten Bereich ($\bar{\lambda}_f \leq 10$ und $\rho_s \leq 10$) bis zu viermal größer werden kann, als das jeweilig zu ersetzende monolithische Blech gleicher Gesamtsteifigkeit. Sofern keine objektplanerische Einschränkungen bestehen, kann diese Vergrößerung der Aufbauhöhe im Vergleich zur monolithischen Ausführungen zugunsten einer Optimierung der Gesamtmasse in Kauf genommen werden.

Die maximal herstellbare Kerndicke des SPS stellt diesbezüglich jedoch eine Begrenzung dar (s. Gl. 7.67). Es ist anzunehmen, dass dieses Kriterium im Entwurf von SPS-Elementen größerer Spannweite mit hoher Wahrscheinlichkeit maßgebend für die Dimensionierung und die Aufbauhöhe wird. So führt eine begrenzte Kernhöhe bei einer großen erforderlichen Gesamtsteifigkeit zwangsläufig zu dickeren Deckblechen. Dies kann sich wiederum negativ auf die Gesamtmasse des Elements und deren Relation zur Masse des äquivalenten Blechs sowie die maximal auftretende Schubgleitung im Kern auswirken.¹

Die Vergleichsfaktoren bekräftigen die These, dass SPS-Elemente mit Stirnplatten hinsichtlich des Tragverhaltens unter veränderlicher Kernsteifigkeit allgemein zu bevorzugen sind. Diese bieten gerade auch im Bereich gedrungener Elemente mit niedriger Bezugsschlankheit einen merklichen Zugewinn an Gesamtsteifigkeit und Redundanz. Bei den Vergleichsfaktoren des Systems II spiegelt sich dies in einer geringeren Aufbauhöhe und Masse im Vergleich zum äquivalenten Blech wider. Wie in Abschnitt 7.3.2 gezeigt wurde, können Stirnplatten außerdem die Schubgleitung im Kern gedrungener Elemente reduzieren, um bspw. die Linearitätsbedingung 7.53 zu erfüllen. Auch in Systemen größerer Spannweite mit entsprechend dicken Deckblechen können zusätzliche Stirnplatten helfen die Schubgleitung zumindest zu reduzieren.¹ Um diese Wirkung der Stirnplatten zu erzielen, ist jedoch in der Herstellung des SPS dringend sicherzustellen, dass die Deckbleche voll mit den Stirnplatten gestoßen werden.

Die gewonnen Erkenntnisse über die Tragwirkung wurden konsolidiert und auf Basis aller gezeigten Faktoren ein Algorithmus zur Vordimensionierung formuliert. Mit seiner Hilfe kann im Vorentwurf, mit verhältnismäßig geringem Aufwand und unter Berücksichtigung der veränderlichen Kernsteifigkeit, eine geeignete Geometrie für eine SPS-Fahrbahn gefunden werden. Außerdem ermöglicht das grafische Verfahren über die Hilfsfaktoren eine verhältnismäßig schnelle Einschätzung dazu, in welcher Form und Größe sich Änderungen der Entwurfsparameter oder auch der Kernsteifigkeit auf die Tragwirkung eines Sandwichelements auswirken.

¹Dies zeigt sich bspw. im exemplarischen Entwurf der querorientierten SPS-Fahrbahnen in Anhang AII-7.1.

Dennoch sollte auf die Vordimensionierung eines SPS-Elements mithilfe des Algorithmus im detaillierten Entwurf stets eine numerische Berechnung desselben folgen. Neben der Plausibilisierung der Ergebnisse kann diese helfen die ermittelte Geometrie weiter zu optimieren. So basieren fast alle über die Hilfsfaktoren berechneten Zustandsgrößen auf dem Ansatz einer zentrischen Einzellast als Belastung. Dies liegt zwar auf der sicheren Seite, führt aber bspw. auch zu einer Überschätzung der Durchsenkung und der Schubgleitung aus einer eigentlich gleichmäßig verteilten Belastung. So sollte bspw. die Überhöhung der Fahrbahn im finalen Entwurf stets auf Basis der numerisch ermittelten Verformungen festgelegt werden, da mit ihr die Einflüsse aus den kriecherzeugenden Lasten wie dem gleichmäßig verteilten Eigengewicht realistischer erfasst werden können. Auch die Verkehrslasten, welche durch die Schwellen und das Schotterbett verteilt werden, führen realistisch zu geringeren Verformungen in einem SPS-Element. Entsprechend ist damit zu rechnen, dass bspw. die maximale Schubgleitung im Kern infolge derselben linearen Kombination wie in der Vordimensionierung (Zustand Z4), geringer ausfallen wird. Ungeachtet der beschriebenen positiven Auswirkungen einer detaillierteren numerischen Berechnung von SPS-Elementen, sind im Entwurf stets alle Änderungen von kritischen Zustandsgrößen wie bspw. der Spannung infolge der veränderlichen Kernsteifigkeit zu überprüfen.

Schluss

8 Zusammenfassung und Ausblick

Nachdem alle Untersuchungen der Arbeit detailliert geschildert und bereits Abschnittsweise zu Schlussfolgerungen konsolidiert wurden, ruft das vorliegende letzte Kapitel in den ersten beiden Abschnitten die Inhalte des jeweiligen Teils noch einmal kurz in Erinnerung und fasst deren wichtigste Erkenntnisse zusammen. Anschließend wird bezugnehmend auf die initiale Zielsetzung des Abschnitts 1.3 ein Fazit gezogen und ein Ausblick gegeben.

8.1 Zusammenfassung zu Teil I

Aus einer Analyse der bisherigen Forschungsarbeiten zu dem PUR im SPS wurde zu Beginn des ersten Teils herausgearbeitet, dass dessen Verhalten in Abhängigkeit von der Zeit bislang nicht tiefergehend untersucht wurde und zudem kein Modell zur Beschreibung der Abhängigkeit von der Temperatur existiert. Zur Untersuchung dieser Themen wurden daher Versuche nach einem mehrstufigen Programm durchgeführt.

Zunächst wurde durch grundlegende Zug-, Druck- und D-TS-Versuche im Vergleich mit den bisherigen Forschungsarbeiten gezeigt, dass der untersuchte Stoff mit dem PUR im SPS grundsätzlich vergleichbar ist. Im Zuge der Vergleichsversuche wurde außerdem festgestellt, dass eine Erhitzung des PUR auch lange Zeit nach seiner Herstellung nicht nur Einfluss auf dessen unmittelbar gemessenen Eigenschaften hat, sondern den Stoff auch nachhaltig strukturell verändert. In erweiterten, zyklischen Temperatur-Sweeps wurde dieses Phänomen daher näher untersucht. Es zeigte sich, dass ein Erhitzen des Polymers neben einem initialen Tempern auch ein Nachvernetzen induziert, welches sich in einer Versteifung des PUR in höheren Temperaturen zeigt. Diese Veränderung der Steifigkeit im Verlauf von Versuchen unter erhöhter Temperatur ist insofern als problematisch zu bewerten, da sie die Messung der Eigenschaften verfälschen kann. Die Ergebnisse können die ursprüngliche Beschaffenheit des Stoffs demnach nicht wiedergeben. Dies wurde vor allem auch im späteren Vergleich der durchgeführten D-TFS-Versuche ersichtlich.

Auf Basis dieser Erkenntnisse wurde ein abgewandeltes Temperaturprogramm für die Untersuchungen des PUR in den Temperatur-Frequenz-Sweeps der DMTA verwendet. Mithilfe eines zusätzlichen, vorgeschalteten Temperatur-Sweeps konnte in den D-TFS-Versuchen die Veränderung des jeweiligen PUR-Probekörpers gemessen und über einen weiteren Verschiebungsfaktor $c(T)$ dargestellt werden. Aufbauend darauf wurden für die Ermittlung der viskoelastischen Eigenschaften des PUR zwei Methoden angewendet und verglichen. In der konventionellen Methode 1 wurden sowohl zur Ermittlung der inkrementellen Verschiebungsfaktoren, als auch zur Erstellung der Masterkurven die Einzelkurven der Frequenz-Sweeps rein horizontal verschoben. Dagegen erfolgte die Verschiebung der Einzelkurven in Methode 2 zuerst vertikal über den Verschiebungsfaktor $c(T)$ und anschließend horizontal. Damit sollte die im Laufe der TF-Sweeps stattfindende Nachvernetzung berücksichtigt werden. Ein erster

Vergleich der Masterkurven für die Steifigkeit und deren Entwicklung über die Zeit zeigte jedoch, dass die Methode 2 zu günstigeren Ergebnissen führt, während diese nach Methode 1 konservativ ausfallen und damit auf der sicheren Seite liegen. Dies bestätigte sich im späteren Vergleich mit den statischen Versuchen.

Um die Ergebnisse der D-TFS-Versuche und die Auswertungs-Methoden zu überprüfen, wurden mehrere statische Lang- und Kurzzeit-Versuche unter Zug bzw. Schub unabhängig voneinander durchgeführt. Ihre Ergebnisse wurden jeweils den nach beiden Methoden ermittelten Masterkurven gegenübergestellt und diskutiert. Trotz Verfälschung der Messungen in den Relaxationsversuchen unter Zug und Schub durch die Nachgiebigkeit der Versuchsaapparaturen, konnten die Masterkurven der D-TFS-Versuche allgemein bestätigt werden. Lediglich in der Frage zur Methode der Auswertung lieferten die meisten Versuche keine zusätzlichen Erkenntnisse. Ihre Ergebniskurven ließen sich aufgrund der Temperatur und Streubreite nicht zweifelsfrei einer Methode zuordnen. Einzig die Ergebnisse der SR-Versuchsreihen bei 50 °C konnten durch ihre hohe Temperatur und trotz leichter Verfälschungen die Methode 1 zur Auswertung der D-TFS-Versuche bestätigen. Basierend auf diesen Erkenntnissen und der Tatsache, dass die Methode 1 zu konservativeren Ergebnissen führt, wurden die weiteren Untersuchungen und die Charakterisierung des PUR im SPS basierend auf den rein horizontal erstellten Masterkurven der DMTA fortgeführt.

Die aus den Versuchen gewonnenen Erkenntnisse wurden sodann verwendet, um basierend auf den D-TFS-Versuchen ein analytisches Materialmodell für das PUR im SPS zu formulieren. Im ersten Schritt wurden dafür verschiedene Ansätze zur Formulierung eines ZTV-Gesetzes verglichen. Neben den konventionellen Ansätzen nach Arrhenius sowie Williams-Landel und Ferry (WLF), wurde ein empirischer Exponentialansatz untersucht. Letzterer zeigte sich schlussendlich als am besten geeignet, um die Abhängigkeit des PUR von der Temperatur im praktisch relevanten Bereich zwischen den Glasübergängen zu modellieren. Daraus wurde für das PUR im Temperaturbereich von –30 bis 120 °C ein ZTV-Gesetz in folgender Form abgeleitet:

$$a_{R/S} = e^{\frac{(T_R - T_S)}{4,4}} \quad (5.2)$$

An den rein horizontal nach Methode 1 erstellten Masterkurven des Speichermoduls wurden mittels Funktionsanpassung die Prony-Parameter von diskreten Relaxationsspektren ermittelt. Mit ihrer Hilfe wurden die Prony-Reihen für alle D-TFS-Versuche im Zeitbereich formuliert und den zuvor vereinfacht transformierten Kurven des Speichermoduls gegenübergestellt. Der Vergleich ergab, dass deren Unterschied vernachlässigbar klein ist und der über den vereinfachten Zusammenhang umgewandelte Speichermodul nahezu dem Relaxationsmodul entspricht:

$$G(t) \approx G_D(t) = G' \left(\frac{1}{\omega} \right) \quad (2.23)$$

Diese Erkenntnis kann zukünftige Untersuchungen zu den viskoelastischen Eigenschaften des PUR vereinfachen. So kann die Überprüfung der Steifigkeit des PUR anhand des vereinfacht umgerechneten Speichermoduls $G_D(t)$ erfolgen und auf die genauere, aber aufwendige Transformation der Messdaten in den Zeitbereich verzichtet werden.

Durch den Vergleich mit den statischen Versuchen, konnten sowohl die Prony-Reihen als auch das gefundene ZTV-Gesetz bestätigt werden. Die auftretenden Abweichungen konnten dabei auf die Probekörper bzw. Verfälschungen durch die nachgiebigen Apparaturen der statischen Versuche zurückgeführt werden. Der Vergleich zu den Kriechversuchen unter Zug bestätigte außerdem die zuvor getroffene Annahme, dass sich für das PUR die Nachgiebigkeit und der Relaxationsmodul annähernd reziprok verhalten.

$$E \cdot C \approx G \cdot J \approx 1 \quad (5.16)$$

Legitimiert durch die Validierung anhand der verschiedenen Versuche, wurden die Prony-Reihen und ihre Parameter verwendet, um ein analytisches Modell für die Steifigkeit des PUR herzuleiten. Dabei wurden die Prony-Parameter durch eine Funktion angenähert und das diskrete durch ein semi-kontinuierliches Spektrum ersetzt. So konnte die Zahl der freien Parameter des Modells und damit auch der Aufwand zur Berechnung der Steifigkeit reduziert werden. Neben der Zeit wurde ebenfalls der Einfluss der Temperatur über das gefundene ZTV-Gesetz in den Ansatz eingebunden.

$$G(t, T) = 6,5 + 45 \cdot \sum_{k=-14}^{10} e^{-\left(\frac{k}{20} + \frac{t}{10^k} \cdot e^{(T-23)/4,4}\right)} \quad (5.23)$$

Für den praktischen Fall einer händischen Berechnung wurde zusätzlich eine alternative Schreibweise der Modell-Gleichung formuliert. Gerade für die Berechnung der Steifigkeit in langen Zeiten reduziert diese deutlich die Zahl der zu ermittelnden Summanden und damit den Aufwand.

$$G(t, T) = 6,5 + 45 \cdot \sum_{k=\lfloor \log t - 2 \rfloor}^{10} e^{-\left(\frac{k}{20} + \frac{t}{10^k} \cdot e^{(T-23)/4,4}\right)} \quad (5.24)$$

Zu dessen Diskussion wurde das Modell den bereits bestätigten Prony-Reihen im Zeitbereich für $T = 23^\circ\text{C}$ und verschiedenen Temperatur-Sweeps für $t \approx 0,16\text{ s}$ bzw. $f = 1\text{ Hz}$ gegenübergestellt. Das Modell konnte in den Temperaturgrenzen $-30^\circ\text{C} < T \leq 120^\circ\text{C}$ und für Zeiten $t \geq 1 \cdot 10^{-10}\text{ s}$ validiert werden. Abhängig von der Temperatur stellt das Modell in hohen Zeiten zwar stets eine Extrapolation dar, die Steifigkeit fällt hier jedoch schnell auf die Gleichgewichtssteifigkeit $G_e = 6,5\text{ MPa}$ ab, was als auf der sicheren Seite liegend angenommen werden kann. Mit dem gezeigten Modell lässt sich somit das linear-viskoelastische Verhalten des PUR in den angegebenen Grenzen prognostizieren.

Bei der Anwendung des Modells muss jedoch zwingend auf die Einhaltung einer Obergrenze für die Deformation geachtet werden. In den kraftgesteuerten Kriechversuchen wurde gezeigt, dass die Grenze des LVE-Bereichs für uniaxialen Zug bei ca. 8% liegt. Nach Überschreiten dieser Linearitätsgrenze hängt die Gesamtdehnung im PUR überproportional von der Größe der Belastung ab und nimmt über die Zeit entsprechend stärker zu. Ein solches nichtlinear-viskoelastische Verhalten kann mit dem in dieser Arbeit hergeleiteten Modell nicht abgebildet werden. Es muss demnach bereits im Entwurf von tragenden Bauteilen mit dem PUR sichergestellt werden, dass über deren Lebensdauer die Summe der zu erwartenden Dehnungen im Polymer den LVE-Bereich an keiner Stelle verlässt. Der Berücksichtigung dieser Bedingung im Entwurf widmete sich der zweite Teil der Arbeit.

8.2 Zusammenfassung zu Teil II

Zu Beginn des zweiten Teils wurde zunächst gezeigt, welche Verfahren zur Berechnung von Sandwichelementen allgemein existieren. Aus bereits vorgestellten Veröffentlichungen wurden die bis dato auf SPS angewendeten Verfahren herausgearbeitet und deren Eignung zunächst allgemein anhand der Modellannahmen und der Detaillierungsgrade diskutiert.

Für die Berücksichtigung der veränderlichen Kernsteifigkeit bei der Berechnung von SPS-Elementen wurden ebenfalls verschiedene Ansätze der Literatur gezeigt. Ohne die Notwendigkeit eines exemplarischen Vergleichs, wurde anhand der Berechnungsansätze begründet, dass die Veränderlichkeit der Steifigkeit im PUR über diskrete Stufen von dessen Schub- bzw. E -Modul berücksichtigt werden sollte. Auf diese Weise lassen sich die Auswirkungen von Zeit und Temperatur gleichermaßen abbilden, ohne dafür zwei verschiedene Ansätze innerhalb einer Berechnung verwenden und diese überlagern zu müssen. Um die diskrete Steifigkeit des SPS-Kerns in Abhängigkeit von der Zeit und der Temperatur zu berechnen, kann dabei das in Teil I hergeleitete Materialmodell für das PUR eingesetzt werden.

Weiterführend wurde an einer Auswahl der gezeigten Berechnungsverfahren eine Voruntersuchung durchgeführt, um deren Eignung und Genauigkeit im Bezug auf SPS-Elemente mit verschiedenen diskreten Kernsteifigkeiten G_c zu beurteilen. Dabei wurden vier exemplarische SPS-Elemente betrachtet, welche die geometrischen Grenzen des potentiellen Anwendungsbereichs für SPS-Fahrbahnen in Bahnbrücken abstecken. Die Voruntersuchung ergab, dass neben detaillierten FE-Modellen, auch die Fachwerkmethode, die Sandwichtheorie dicker Deckschichten (SST) und die Methode von Wölfel (1987) geeignet sind, um SPS-Elemente der genannten Art zu berechnen.

Dabei sollte jedoch auf eine möglichst originalgetreue Modellierung der geometrischen Verhältnisse im Querschnitt geachtet werden. So sollte in einer kombinierten Modellierung von SPS-Elementen mit Volumen- und Schalenelementen, für letztere stets eine Exzentrizität berücksichtigt werden, um den inneren Hebelarm der dicken Deckschichten realistisch zu erfassen. Bei einer Berechnung mit der Fachwerkmethode sollte für die Ermittlung des Diagonalquerschnitts der Ansatz von Davies (1986) verwendet werden.

Im Gegensatz zu den genannten Verfahren ist eine Verwendung der Sandwichtheorie dünner Deckschichten (SMT) für SPS-Elemente der untersuchten geometrischen Verhältnisse nicht zu empfehlen. Sie vermag nicht die Effekte, auf die Tragwirkung von SPS-Elementen, aus der Biegesteifigkeit gedrungener Deckbleche zu erfassen.

Basierend auf den Erkenntnissen aus der Voruntersuchung wurden die allgemeinen Auswirkungen der veränderlichen Kernsteifigkeit $G_c(t, T)$ in einer analytischen Studie näher beleuchtet. An drei symmetrischen Einfeld-Sandwich-Systemen mit verschiedenen Randbedingungen (System I: gelenkig gelagert, System II: mit starren Stirnplatten und System III: eingespannt), wurde mithilfe der SST in Feldmitte die maximale Verformung unter einer Einzellast, sowie die maximale Randspannung unter einer Gleichlast untersucht. Um die Auswirkungen der Kernsteifigkeit isoliert betrachten zu können, wurde die Geometrie dabei durch die dimensionslosen Verhältnisparameter ρ_S und λ_f ausgedrückt und die Ergebnisse normiert auf geometrisch baugleiche Elemente mit starrem Verbund berechnet. Daraus ergaben sich für alle untersuchten Systeme die allgemeinen Steifigkeitsfaktoren f_k und Spannungsfaktoren f_σ , deren Funktionsflächen im dreidimensionalen gezeigt und diskutiert wurden.

Um diese Herangehensweise der Studie zu überprüfen und neben den Ergebnissen aus der Voruntersuchungen eine zusätzliche Kontrolle zu haben, wurden die Grenzfallfunktionen der Faktorflächen genutzt, welche unabhängig von der Sandwichtheorie mechanisch hergeleitet wurden. Diese bestätigen nicht nur die Faktorflächen, sondern wurden in einem ersten Schritt der Studie auch herangezogen, um die Auswirkungen unterschiedlich ausgeführter Deckschichten ($t_1 \neq t_2$) auf die Tragwirkung zu diskutieren. Hier zeigte sich, dass Sandwichelemente mit einseitig dickeren Deckschichten auf eine schwankende Kernsteifigkeit zwar weniger empfindlich reagieren als mit gleich dicken Deckschichten derselben Gesamtdicke ($2t_f = t_1 + t_2$), deren absolute Gesamtsteifigkeit im Vergleich zu der symmetrischen Ausführung ($t_1 = t_2$) jedoch geringer ausfällt. Entsprechend ist für eine Gewichtsoptimierung von SPS-Elementen der Entwurf mit gleich dicken Deckblechen zu empfehlen. Der Fokus der weiteren Studie wurde daher auf diese symmetrische Art der Ausführung gelegt.

Die allgemeine Diskussion der Steifigkeitsentwicklung an den Faktorflächen von f_k der drei Systeme zeigte, dass ein Verlust von Gesamtsteifigkeit für SPS-Elemente realistisch nicht zu verhindern ist. Systeme mit dünnen Deckschichten t_f (bzw. initial hohen Bezugsschlankheiten $\bar{\lambda}_f$) reagieren zwar weniger empfindlich, besitzen gegenüber jenen mit gedrunenen Deckschichten aber eine zu kleine absolute Gesamtsteifigkeit. Für eine Anwendung in den hoch belasteten Fahrbahnen von Bahnbrücken kommen solch schlanke Deckbleche weniger in Frage. Um einen zu starken Abfall der Gesamtsteifigkeit aus Temperaturerhöhung zu vermeiden, empfiehlt es sich dennoch die Schlankheit der Deckschichten λ_f zu maximieren bzw. deren Dicke t_f zu minimieren. Dabei sollten jedoch stets auch etwaige Anforderungen des Entwurfs berücksichtigt werden, welche gegebenenfalls die Schlankheit der Deckbleche beschränken.

Das gleiche Phänomen zeigte sich in der Diskussion des Spannungsfaktors f_σ und seiner Funktionsflächen für die drei untersuchten Systeme. Im Gegensatz zur Steifigkeit war es hier möglich Grenzwerte für die Bezugsschlankheit $\bar{\lambda}_f$ von SPS-Elementen herauszuarbeiten. Diese sollten im Entwurf von SPS-Elementen für die Steifigkeit des Kerns unter erhöhter Temperatur $G_c(t_0, \max T)$ berücksichtigt werden, damit die Spannungen aus Verkehr im jeweiligen Element nicht zu stark schwanken. Abhängig vom System und den Verhältnissen im Querschnitt wurden die Grenzwerte wie folgt festgelegt:

$$\bar{\lambda}_f = \frac{l}{t_f} \cdot \sqrt{\frac{2 G_c(t_0, \max T)}{E_f}} \stackrel{!}{\geq} \begin{cases} 3 & \text{für System I bzw. II} & \text{und} & \rho_S \leq 5 \\ 5 & \text{für System III} & \text{oder} & \rho_S > 5 \end{cases} \quad (7.64)$$

Sowohl aus dem Steifigkeits- als auch dem Spannungsfaktor konnte außerdem für das System II herausgearbeitet werden, dass sich dessen starre Stirnplatten günstig auf die Tragwirkung unter sinkender Kernsteifigkeit auswirken. Anhand einer Betrachtung des Systems II im Grenzfall ohne Verbund wurde gezeigt, dass die Stirnplatten mit den Deckschichten einen Rahmen bilden und so neben der inneren Redundanz auch die Gesamtsteifigkeit des Systems erhöhen. Um diesen Vorteil im Entwurf ansetzen zu können, müssen die Randbauteile des SPS jedoch konstruktiv nahezu starr ausgebildet und entsprechend angeschlossen werden. Aus der Betrachtung ohne Verbund wurde für SPS-Elemente ein Wertebereich für die Dicke t_{ep} abgeleitet, die Stirnplatten in Abhängigkeit vom Sandwichquerschnitt aufweisen sollten, um für das System II rechnerisch als starr angenommen werden zu können:

$$t_f \leq t_{ep} \leq 2 t_f \quad (7.35)$$

Auf Basis der allgemeinen Erkenntnisse wurden die Instrumente der analytischen Studie weiter auf das SPS spezifiziert, um sie für dessen überschlägigen Entwurf unter veränderlicher Kernsteifigkeit nutzbar zu machen. Aus dem Steifigkeitsfaktor f_k wurden dafür der Blechdickenfaktor f_t , der Höhenfaktor f_h und der Massenfaktor f_m formuliert, welche einen direkten Vergleich zwischen einem Sandwichelement und einem monolithischen Ersatzblech äquivalenter Gesamtsteifigkeit ermöglichen. Dabei betrachtet der Blechdickenfaktor entsprechend seines Namens die mittlere Deckblechdicke t_f , während der Höhenfaktor einen Vergleich der Gesamthöhe d des Sandwichelements mit der Dicke des monolithischen Ersatzblechs t_{sub} erlaubt. Der Massenfaktor vergleicht spezifisch die Masse eines SPS-Elements mit derjenigen des äquivalenten Ersatzblechs. Ähnlich dem allgemeinen Teil der Studie erfolgte die Auswertung der Faktoren anhand von Höhenliniendarstellungen für den Fall gleich dicker Deckbleche.

Zusätzlich zu den Vergleichsfaktoren wurde für den überschlägigen Entwurf von SPS-Elementen der Gleitungsfaktor f_γ eingeführt. Er ermöglicht die vereinfachte Berechnung der Schubgleitung γ_c im Kern eines Sandwichelements für verschiedene Lastfälle, Zeiten und Temperaturen mit den zugehörigen Kernsteifigkeiten $G_c(t, T)$. Mit seiner Hilfe lässt sich überschlägig prüfen, ob die Schubgleitung im Kern eines SPS-Elements über dessen Nutzungsdauer innerhalb des LVE-Bereichs verbleibt. Nur bei Gültigkeit dieser (Linearitäts-)Bedingung ist die Annahme linear-viskoelastischen Materialverhaltens für den PUR-Kern gerechtfertigt und das Element lässt sich über die in dieser Arbeit gezeigten Methoden berechnen:

$$\max \gamma_c \stackrel{!}{<} 1,6\% \quad (7.53)$$

Alle aus der Studie gewonnenen Erkenntnisse wurden schlussendlich konsolidiert und daraus ein Vorschlag für einen Algorithmus zur Vordimensionierung von SPS-Elementen formuliert. Dieser kann eingesetzt werden, um im Vorentwurf oder im Vorfeld einer numerischen Berechnung die erforderlichen Dimensionen eines SPS-Elements unter Berücksichtigung der veränderlichen Kernsteifigkeit abzuschätzen. So hilft der Algorithmus iterative Bemessungsschritte einzusparen und SPS-Elemente zielgerichtet zu dimensionieren. Zudem ermöglicht er eine vereinfachte Prüfung der Linearitätsbedingung für das PUR, welche bei korrekter Annahme aller relevanten Zustände auf der sicheren Seite liegt.

8.3 Fazit und Ausblick

Die Zielsetzung der Arbeit, einen Beitrag zur möglichen Anwendung von SPS im Bahnbrückenbau zu leisten, wurde erfüllt. Bei der jeweiligen Betrachtung des SPS auf stofflicher und auf Bauteilebene ergaben sich neben den beschriebenen umfangreichen Erkenntnissen auch weiterführende Fragestellungen, welche zukünftig noch untersucht werden sollten.

So gelang es im ersten Teil mithilfe einer Vielzahl von Experimenten das spezielle PUR im SPS und seine viskoelastischen Eigenschaften zu charakterisieren. Aus den gewonnenen Erkenntnissen wurde ein linear-viskoelastisches Materialmodell entwickelt, welches die Steifigkeit des PUR in Abhängigkeit von der Zeit und der Temperatur näherungsweise beschreibt. Das Modell wurde so kalibriert, dass es im für die Anwendung relevanten Bereich die größtmögliche Genauigkeit erzielt. Mit ihm kann im Entwurf von SPS-Elementen die Steifigkeit des Kerns für diskrete Zustände berechnet werden, wie bspw. unter erhöhter Temperatur oder nach 100 a Dauerbelastung.

Im Hinblick auf dessen strukturelle Veränderung infolge einer initialen Erhitzung, sollte das PUR weiter untersucht werden. Die Effekte des Temperns und der Nachvernetzung wurden zwar identifiziert und deren Auswirkungen beschrieben. Die zu ihrer Berücksichtigung in der Masterung vorgeschlagene Methode einer Vertikalverschiebung über den Verhältnisswert $c(T)$, erwies sich jedoch im Vergleich mit den statischen Versuchen als ungeeignet. Infolge dessen wurde die Masterung schlussendlich konservativ nach der bewährten Methode durchgeführt. Die daraus resultierende Steifigkeitsentwicklung und das entwickelte Materialmodell liegen auf der sicheren Seite.

Es bleibt jedoch zu klären, ob die versteifenden Effekte der strukturellen Änderung des PUR nachträglich berücksichtigt werden sollten und auf welche Weise dies erfolgen kann. Unter Umständen könnte die beobachtete Streuung in den Ergebnissen reduziert und die Reproduzierbarkeit der Ergebnisse erhöht werden. Auch Abweichungen zu dem in dieser Arbeit gefundenen viskoelastischen Verhalten sind gerade für lange Zeiten nicht auszuschließen. Eine Anpassung des gezeigten Modells wäre dann entsprechend notwendig. Der semi-kontinuierliche Ansatz mit seiner geringen Zahl an freien Parametern bietet für diesen Fall eine gute Möglichkeit zur Rekalibrierung.

Aufgrund der Empfindlichkeit des PUR gegenüber erhöhten Temperaturen während der Vernetzungsreaktion und den Auswirkungen auf die Eigenschaften im Verbund, sollten bei der Ausführung von SPS-Elementen in jedem Fall Kontroll- und Rückstellproben des verwendeten Kernstoffs angefertigt und DMT Analysen unterzogen werden. Gleichzeitig muss in diesen Kontrollversuchen unbedingt auf die richtige Temperierung der Proben geachtet werden, um deren Gefüge nicht stärker als unvermeidlich zu verändern und damit die Messungen zu verfälschen. Um dies zu vermeiden, ist eine Temperierung in der DMTA von tiefen zu hohen Temperaturen dringend zu empfehlen. Ansonsten wird die tatsächliche Steifigkeit des Stoffs immer stärker verfälscht und aus den Ergebnissen gezogene Rückschlüsse auf dessen Verhalten liegen sehr wahrscheinlich auf der unsicheren Seite.

Die Grenze des LVE-Bereichs für das PUR ließ sich in den Kriechversuchen unter Zug nur näherungsweise verorten, weshalb ihre Lage konservativ interpretiert wurde. Diese sollte durch zusätzliche Versuche abermals geprüft werden, um den Anwendungsbereich der linearen Zusammenhänge für das PUR zu bestätigen oder genauer abzustecken. Die gefundene Grenze steht zwar im Einklang mit dem bisherigen Wissen über artverwandte Polymere, genauere Erkenntnisse über ihre Lage könnten jedoch helfen den Anwendungsbereich von SPS gegebenenfalls zu erweitern. Darüber hinaus könnte es für eine Bemessung von SPS-Elementen unter extremen Bedingungen von Interesse sein, inwieweit Lasten mit kurzfristiger Einwirkungsdauer die langfristigen Kriechdehnungen beeinflussen, wenn die aus ihnen resultierende Gesamtdehnung den LVE-Bereich verlässt. Für solche Szenarien wurden im Rahmen des in Teil II vorgestellten Algorithmus Annahmen auf der sicheren Seite getroffen, welche die Vordimensionierung hinsichtlich der verbauten Deckblechdicken auf die unwirtschaftliche Seite ziehen. Genauere Erkenntnissen über das nichtlinear-viskoelastische Verhalten des PUR könnten Potential für eine schlankere und damit leichtere Auslegung von SPS-Elementen bieten.

Anhand der analytischen Studien des zweiten Teils wurde gezeigt, dass ein Einsatz von SPS in Fahrbahnen von Bahnbrücken im Grunde möglich ist. Anders als in der Zielsetzung formuliert, lässt sich eine pauschale Aussage zur Eignung des SPS aufgrund der systemabhängig unterschiedlich starken Auswirkungen jedoch nicht treffen. Hinsichtlich der Konstruktion von einfeldrigen SPS-Elementen ist die gelenkig gelagerte Ausführung mit möglichst biegesteifen Randbauteilen bzw. Stirnplatten allerdings klar zu favorisieren. Diese Bauart reagiert auf-

grund ihrer inneren Redundanz sowohl hinsichtlich der Gesamtsteifigkeit als auch der Spannung unempfindlicher auf eine schwankende Kernsteifigkeit, als die anderen untersuchten Systeme. Dennoch sollte stets individuell geprüft werden, wie stark die Verformungen bzw. Spannungen in einem SPS-Element unter den jeweils vorherrschenden Verhältnissen über dessen Nutzungsdauer schwanken und welche Auswirkungen dies auf seine Gebrauchs- bzw. Tragfähigkeit hat. Mit den gezeigten Faktoren und -quotienten stehen dafür hilfreiche Instrumente zur Verfügung.

Für eine weitere Optimierung des Vorentwurfs hinsichtlich der Wirtschaftlichkeit, könnte der Algorithmus zur Vordimensionierung weiterentwickelt werden. So wäre es denkbar die Palette der auf der Gesamtsteifigkeit basierenden Faktoren zu erweitern und diese auch für eine Belastung durch eine Gleichlast herzuleiten. Die bisher vorausgesetzte Einzellast ist unrealistisch und zieht die Vordimensionierung auf die sichere, aber unwirtschaftliche Seite.

Auch stellen die im Algorithmus verwendeten Grenzwerte nur grobe Annahmen dar, welche zur Sicherstellung der Gebrauchsfähigkeit über die gesamte Nutzungsdauer der SPS-Fahrbahn dienen. Die normativen Anforderungen an die Verformungen von Eisenbahnbrücken beziehen sich in der Regel auf deren Haupttragrichtung, wie bspw. auf die Gleisachse oder deren Projektion auf das Fahrbahnblech. Die lokalen Verformungen aus dem Lastabtrag in Querrichtung wird über die Nachweise dagegen nur implizit überprüft. Konkrete normative Grenzwerte für die Fahrbahn selbst, wie sie im Algorithmus der Vordimensionierung formuliert wurden, existieren bis dato nicht. Um die Tragwirkung von SPS und die Auswirkungen seiner veränderlichen Kernsteifigkeit hinsichtlich der normativen Anforderungen an die Gebrauchstauglichkeit in einer Bahnbrücke genauer beurteilen zu können, sollte das SPS auch im Zusammenspiel mit dem Längssystem untersucht werden. Hierfür könnten z. B. im Rahmen einer numerischen Parameterstudie verschiedene Kombinationen von Längs- und Querspannweiten modelliert und hinsichtlich ihrer Verformung analysiert werden.

Parallel zu den experimentellen Untersuchungen der vorliegenden Arbeit entstanden unter Anleitung des Autors bereits verschiedene studentische Abschlussarbeiten, welche sich in numerischen Fallstudien mit der Tragwirkung von Trogbriicken in konventioneller Bauweise und mit SPS-Fahrbahn befassten. Allgemein zeigte sich, dass das Zusammenspiel aus Längs- und Quersystem großen Einfluss auf die Erfüllung der normativen Nachweise hat. Die Veränderlichkeit des Kerns im SPS wurde jedoch nur oberflächlich betrachtet, da bis zu diesem Zeitpunkt noch keine genauen Erkenntnisse zum viskoelastischen Verhalten des PUR vorlagen. Dennoch brachten die Arbeiten weitere Phänomene zu Tage, die zukünftig genauer untersucht werden sollten. So zeigte sich, dass die Steifigkeit des PUR-Kerns in querorientierten SPS-Fahrbahnen auch Einfluss auf die Drehbettung der Hauptträger in Trogbriicken und damit deren Widerstand gegen Biegedrillknicken hat. Sowohl der kritische Eigenwert als auch die Traglast für das Stabilitätsversagen der Hauptträger könnten somit indirekt von der Temperatur bzw. der Zeit abhängen. Zusätzliche Eigenwertanalysen offenbarten außerdem eine weitere mögliche Eigenform des Stabilitätsversagens von schlanken Trogbriicken, welche einem Drillknicken des Gesamtquerschnitts nahe kommt. Diese tritt für konventionelle Querschnitte von Dickblech-Trogbriicken erst ab einer Länge von 20 m vermehrt in Erscheinung. Ob und welchen Einfluss eine SPS-Fahrbahn mit ihrer veränderlichen Steifigkeit auf die maßgebende Eigenform des Stabilitätsversagens hat, bleibt zu klären.

Bis dahin sollten querorientierte SPS-Fahrbahnen auf der sicheren Seite nur in kurzen Trogbrücken mit Spannweiten $L \leq 20$ m eingesetzt werden. Außerdem sollte bei deren Entwurf für den Nachweis der Hauptträger gegen Biegedrillknicken das SPS nur im Grenzfall ohne Verbund angesetzt werden. Die vorgeschlagenen Grenzwerte für die lokale Verformung von SPS-Fahrbahnen sollten außerdem bei jedem konkreten Entwurf kritisch hinterfragt werden. So wurde für die Durchsenkung des SPS unter Verkehr ein Grenzwert von $l/300$ angenommen und die maximale Verformung aus Eigengewicht wurde im Grenzfall ohne Verbund auf $l/100$ beschränkt. Gerade letzterer Grenzwert basiert dabei auf der Annahme einer sorgfältigen Instandhaltung, bei der sich langsam einstellende Verformungen der Gleislage infolge einer kriechenden Fahrbahn durch regelmäßiges Stopfen des Schotterbetts ausgleichen lassen. Da diese Annahmen sowohl betriebliche Anforderungen an die Gebrauchstauglichkeit, als auch die Unterhaltung eines Bauwerks betreffen, sollten diese vor jedem Entwurf in Absprache mit dem Auftraggeber bzw. dem Anlagenverantwortlichen hinterfragt und unter Berücksichtigung der konkreten Randbedingungen festgelegt werden.

Wie bereits in der Einleitung allgemein angekündigt, beschränkte sich der zweite Teil darauf, die Auswirkungen einer schwankenden Kernsteifigkeit auf die Tragwirkung von Sandwich- bzw. SPS-Elementen theoretisch zu untersuchen. Die zugrunde liegende Sandwichtheorie dicker Deckschichten gehört zwar zum Stand der Technik und ist entsprechend erprobt, dennoch haben die Ergebnisse des zweiten Teils streng genommen rein postulierenden Charakter. Die Erkenntnisse zum Tragverhalten des SPS mit veränderlicher Kernsteifigkeit sind entsprechend noch durch Bauteilversuche zu überprüfen bzw. zu untermauern. Dabei sollten jeweils zwei verschiedene Spannweiten und Aufbauten von SPS-Elementen mindestens untersucht werden. Hierfür bieten sich die in Teil II mehrfach herangezogenen exemplarischen Elemente an, welche den Anwendungsbereich von SPS in Fahrbahnen von Bahnbrücken abgrenzen.

Sollte die gezeigte Art zur Abschätzung der Entwicklung von Gesamtsteifigkeit und Deckschichtspannung durch Versuche bestätigt werden, wäre für diese auch eine Anwendung über das SPS hinaus denkbar. Die Verhältnisparameter, Rand- und Faktorfunktionen wurden, abgesehen von der Isotropie, frei von spezifischen Werkstoffeigenschaften hergeleitet. Erst in den gezeigten Faktorflächen wurde für die Deckschichten eine symmetrische Ausbildung aus Stahl festgelegt. Die in den Anhängen hergeleiteten Funktionen geben rein die Sandwichtheorie dicker Deckschichten für die gewählten Systeme in bezogener Form wieder und können entsprechend auch zur Beschreibung des Tragverhaltens anderer Arten von Sandwichelementen dienen. So wäre es bspw. denkbar mit entsprechend angepassten Graphen auch das Tragverhalten von Verbundgläsern in Abhängigkeit von einem viskoelastischen Kernmaterial mit funktional bekannter Steifigkeitsentwicklung abzuschätzen.

Trotz der noch offenen Fragestellungen, die den weiteren Forschungsbedarf in dieser Thematik verdeutlichen, konnte diese Arbeit einen wichtigen Grundstein für die Anwendung von SPS im Bahnbrückenbau legen. Neben den praktischen Handreichungen für die Dimensionierung unter veränderlicher Kernsteifigkeit, kann sie als Grundlage für zukünftige Arbeiten zum Sandwich Plate System und seinem speziellen Polyurethans dienen.

Literaturverzeichnis

Aigner u. Brunner 2002

AIGNER, F. ; BRUNNER, H.: Eisenbahnbrücken für kurze Stützweiten. In: *Stahlbau* 71 (2002), Nr. 6, S. 452–459

Aigner et al. 2000

AIGNER, F. ; BRUNNER, H. ; PARADATSCHER, H.: Eisenbahnbrücken aus Stahlgrobblechen. In: *Österreichische Ingenieur- und Architekten-Zeitschrift* 145 (2000), Nr. 3, S. 108–113

Allen 1969

ALLEN, H.: *Analysis and Design of Structural Sandwich Panels*. Oxford u.a. : Elsevier, 1969. – ISBN 978-0-080-12870-2

Altenbach et al. 1998

ALTENBACH, H. ; ALTENBACH, J. ; NAUMENKO, K.: *Ebene Flächentragwerke: Grundlagen der Modellierung und Berechnung von Scheiben und Platten*. Berlin u.a. : Springer, 1998. – ISBN 3-540-63228-x

ANSYS INC. 1999

ANSYS INC.: *ANSYS: Theory Reference*. Canonsburg, PA, 1999

ASTM E1300 2016

Norm ASTM E1300 2016. *Standard Practice for Determining Load Resistance of Glass in Buildings*

Badia et al. 2013

BADIA, J.-D. ; SANTONJA-BLASCO, L. ; MARTÍNEZ-FELIPE, A. ; RIBES-GREUS, A.: Dynamic Mechanical Thermal Analysis of Polymer Blends. In: THOMAS, Sabu (Hrsg.) ; DURAND, Dominique (Hrsg.) ; CHASSENIEUX, Christophe (Hrsg.) ; JYOTISHKUMAR, P. (Hrsg.): *Handbook of biopolymer-based materials*. Weinheim, Ger : Wiley, 2013. – ISBN 978-3-527-32884-0, S. 365–392

Bae et al. 2011

BAE, J. ; CHO, K. S. ; SEO, K. H. ; KANG, D.-G.: Application of geometric algorithm of time-temperature superposition to linear viscoelasticity of rubber compounds. In: *Korea-Australia Rheology Journal* 23 (2011), Nr. 2, S. 81–87

Belbute et al. 2012

BELBUTE, P. M. ; ARAÚJO, A. L. ; TEIXEIRA DE FREITAS, S. ; FREITAS, M. de: A Finite Element for Bending Analysis of Sandwich Composite Beams. In: TOPPING, B.H.V. (Hrsg.): *Proceedings of the Eleventh International Conference on Computational Structures Technology*, Civil-Comp Press, 2012 (Civil-Comp Proceedings)

Berner 1998

BERNER, K.: Praxisgerechte Nachweise zur Trag- und Gebrauchsfähigkeit von Sandwichbauteilen. In: *Stahlbau* 67 (1998), Nr. 12, S. 910–925

BMVI 2020

BMVI ; BUNDESMINISTERIUM FÜR VERKEHR UND DIGITALE INFRASTRUKTUR (Hrsg.): *Verkehr in Zahlen 2020/2021*. Version: 49, 2020. https://bmdv.bund.de/SharedDocs/DE/Publikationen/G/verkehr-in-zahlen-2020-pdf.pdf?__blob=publicationFile (Verkehr in Zahlen)

Bonnet 2016

BONNET, M.: *Kunststofftechnik*. Wiesbaden : Springer, 2016. – ISBN 978-3-658-13827-1

Brinson u. Brinson 2008

BRINSON, H. F. ; BRINSON, L. C.: *Polymer engineering science and viscoelasticity: An introduction*. New York : Springer, 2008. – ISBN 978-0-387-73860-4

Brüller 1993

BRÜLLER, O. S.: Zur Charakterisierung des Langzeitverhaltens von Kunststoffen. In: *Archive of Applied Mechanics* 63 (1993), S. 363–376

Brüller et al. 1976

BRÜLLER, O. S. ; PÜTZ, D. ; KLEIN, V.: Numerischer Zusammenhang zwischen Kriechen und Relaxation linear-viskoelastischer Werkstoffe am Beispiel von Kunststoffen. In: *Rheologica Acta* 15 (1976), Nr. 10, S. 533–539

Cho 2009

CHO, K. S.: Geometric interpretation of time-temperature superposition. In: *Korea-Australia Rheology Journal* 21 (2009), Nr. 1, S. 13–16

Cole u. Cole 1941

COLE, K. S. ; COLE, R. H.: Dispersion and Absorption in Dielectrics I. Alternating Current Characteristics. In: *The Journal of Chemical Physics* 9 (1941), Nr. 4, S. 341–351

Correlated Solutions Inc. 2021

CORRELATED SOLUTIONS INC.: *Vic-2D 6*. Version: 2021. <https://www.correlatedsolutions.com/>

Davies 1986

DAVIES, M. J.: The Analysis of Sandwich Panels with Profiled Faces. In: YU, W.-W. (Hrsg.) ; SENNE, J. H. (Hrsg.): *Proceedings of International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures* Bd. 8. Rolla, Missouri : Missouri University of Science and Technology, 1986, S. 351–369

Davies 2001

DAVIES, M. J. (Hrsg.): *Lightweight sandwich construction*. Oxford : Blackwell Science, 2001. – ISBN 0-632-04027-0

DB Netz AG 2022

DB NETZ AG: *Deutschlands Eisenbahnbrücken*. Version: 2022. <https://bruecken.deutschebahn.com/>, Abruf: 2022-03-16

Dealy u. Plazek 2009

DEALY, J. ; PLAZEK, D.: Time-Temperature Superposition - A Users Guide. In: *Rheological Bulletin* 78 (2009), Nr. 2, S. 16–31

Dillinger Hüttenwerke 2018

DILLINGER HÜTTENWERKE: *Lieferprogramm - Stahlgrobblech*. Version: 2018. <https://www.dillinger.de/d/downloads/download/13432>, Abruf: 2022-03-21

DIN 18008-1 2020

Norm DIN 18008-1 Mai 2020. *Glas im Bauwesen – Bemessungs- und Konstruktionsregeln – Teil 1: Begriffe und allgemeine Grundlagen: Glass in Building - Design and construction rules - Part 1: Terms and general bases*

DIN 50035 2012

Norm DIN 50035 September 2012. *Begriffe auf dem Gebiet der Alterung von Materialien - Polymere Werkstoffe: Terms and Definitions used on ageing of materials - Polymeric Materials*

DIN 53441 1984

Norm DIN 53441 Januar 1984. *Prüfung von Kunststoffen; Spannungsrelaxationsversuch: Testing of plastics; stress relaxation test*

DIN 7724 1993

Norm DIN 7724 April 1993. *Polymere Werkstoffe - Gruppierung polymerer Werkstoffe aufgrund ihres mechanischen Verhaltens*

DIN EN 12090 2013

Norm DIN EN 12090 Juni 2013. *Wärmedämmstoffe für das Bauwesen - Bestimmung des Verhaltens bei Scherbeanspruchung: Thermal insulating products for building applications - Determination of shear behaviour*

DIN EN 14509 2013

Norm DIN EN 14509 Dezember 2013. *Selbsttragende Sandwich-Elemente mit beidseitigen Metalldeckschichten - Werkmäßig hergestellte Produkte - Spezifikationen*

DIN EN 1606 2013

Norm DIN EN 1606 Mai 2013. *Wärmedämmstoffe für das Bauwesen - Bestimmung des Langzeit-Kriechverhaltens bei Druckbeanspruchung: Thermal insulation products for building applications - Determination of compressive creep*

DIN EN 1990 2010

Norm DIN EN 1990 Dezember 2010. *Eurocode: Grundlagen der Tragwerksplanung: Eurocode: Basis of structural design*

DIN EN 1991-1-5 2010

Norm DIN EN 1991-1-5 Dezember 2010. *Eurocode 1: Einwirkung auf Tragwerke - Teil 1-5: Allgemeine Einwirkungen - Temperatureinwirkungen: Eurocode 1: Actions on structures - Part 1-5: General actions - Thermal actions*

DIN EN 1991-2 2010

Norm DIN EN 1991-2 Dezember 2010. *Eurocode 1: Einwirkungen auf Tragwerke - Teil 2: Verkehrslasten auf Brücken: Eurocode 1: Actions on structures - Part 2: Traffic loads on bridges*

DIN EN 1993-1-1 2010

Norm DIN EN 1993-1-1 Dezember 2010. *Eurocode 3: Bemessung und Konstruktion von Stahlbauten - Teil 1-1: Allgemeine Bemessungsregeln und Regeln für den Hochbau: Eurocode 3: Design of steel structure - Part 1-1: General rules for buildings*

DIN EN 1993-1-9 2010

Norm DIN EN 1993-1-9 Dezember 2010. *Eurocode 3: Bemessung und Konstruktion von Stahlbauten - Teil 1-9: Ermüdung: Eurocode 3: Design of steel structures - Part 1-9: Fatigue*

DIN EN 1993-2 2010

Norm DIN EN 1993-2 Dezember 2010. *Eurocode 3: Bemessung und Konstruktion von Stahlbauten - Teil 2: Stahlbrücken: Eurocode 3: Design of steel structures - Part 2: Steel Bridges*

DIN EN 1993-2/NA 2014

Norm DIN EN 1993-2/NA Oktober 2014. *Nationaler Anhang - Nationale Parameter - Eurocode 3: Bemessung und Konstruktion von Stahlbauten - Teil 2: Stahlbrücken: National Annex - Nationally determined parameters - Eurocode 3: Design of steel structures - Part 2: Steel bridges*

DIN EN ISO 12944-4 1998

Norm DIN EN ISO 12944-4 Juli 1998. *Korrosionsschutz von Stahlbauten durch Beschichtungssysteme - Teil 4: Arten von Oberflächen und Oberflächenvorbereitung: Paints and varnishes - Corrosion protection of steel structures by protective paint systems - Part 4: Types of surface and surface preparation*

DIN EN ISO 16012 2016

Norm DIN EN ISO 16012 Februar 2016. *Kunststoffe - Bestimmung der linearen Maße von Probekörpern (ISO 16012:2015): Plastics - Determination of linear dimensions of test specimens (ISO 16012:2015)*

DIN EN ISO 20753 2014

Norm DIN EN ISO 20753 Juli 2014. *Kunststoffe - Probekörper (ISO 20753:2008)*

DIN EN ISO 291 2008

Norm DIN EN ISO 291 August 2008. *Kunststoffe - Normalklimate für Konditionierung und Prüfung (ISO 291:2008): Plastics - Standard atmospheres for conditioning and testing (ISO 291:2008)*

DIN EN ISO 472 2013

Norm DIN EN ISO 472 Juni 2013. *Kunststoffe - Fachwörterverzeichnis (ISO 472:2013): Plastics - Vocabulary (ISO 472:2013)*

DIN EN ISO 527 1996

Norm DIN EN ISO 527-1 April 1996. *Kunststoffe - Bestimmung der Zugeigenschaften - Teil 1: Allgemeine Grundsätze (ISO 527-1:1993 einschließlich Korr. 1: 1994): Plastics - Determination of tensile properties - Part 1: General principles (ISO 527-1:1993 including Corr. 1: 1994)*

DIN EN ISO 527 2019

Norm DIN EN ISO 527-1 Dezember 2019. *Kunststoffe - Bestimmung der Zugeigenschaften. Teil 1, Allgemeine Grundsätze (ISO 527-1:2019): Plastics - determination of tensile properties. Part 1, General principles (ISO 527-1:2019)*

DIN EN ISO 604 1997

Norm DIN EN ISO 604 Februar 1997. *Kunststoffe - Bestimmung der Druckeigenschaften (ISO 604:1997): Plastics - Determination of compressive properties (ISO 604:1997)*

DIN EN ISO 6721-1 2011

Norm DIN EN ISO 6721-1 August 2011. *Kunststoffe - Bestimmung dynamisch-mechanischer Eigenschaften - Teil 1: Allgemeine Grundlagen (ISO 6721-1:2011): Plastics - Determination of dynamic mechanical properties - Part 1: General principles (ISO 6721-1:2011)*

DIN EN ISO 6721-2 2008

Norm DIN EN ISO 6721-2 September 2008. *Kunststoffe - Bestimmung dynamisch-mechanischer Eigenschaften - Teil 2: Torsionspendel-Verfahren (ISO 6721-2:2008): Plastics - Determination of dynamic mechanical properties - Part 2: Torsion-pendulum method (ISO 6721-2:2008)*

DIN EN ISO 6892-1 2020

Norm DIN EN ISO 6892-1 Juni 2020. *Metallische Werkstoffe - Zugversuch - Teil 1: Prüfverfahren bei Raumtemperatur (ISO 6892-1:2019): Metallic materials - Tensile testing - Part 1: Method of test at room temperature (ISO 6892-1:2019)*

DIN EN ISO 845 2009

Norm DIN EN ISO 845 Oktober 2009. *Schaumstoffe aus Kautschuk und Kunststoffen - Bestimmung der Rohdichte (ISO 845:2006): Cellular plastics and rubbers - Determination of apparent density (ISO 845:2006)*

DIN EN ISO 899-1 2015

Norm DIN EN ISO 899-1 Juni 2015. *Kunststoffe - Bestimmung des Kriechverhaltens - Teil 1: Zeitstand-Zugversuch (ISO 899-1:2003 + Erw. 1: 2015): Plastics - Determination of creep behaviour - Part 1: Tensile creep (ISO 899-1:2003 + Amd.1:2005)*

DIN FB 103 2009

Norm DIN FB 103 März 2009. *DIN Fachbericht 103: Stahlbrücken*

DIN ISO 23529 2012

Norm DIN ISO 23529 Oktober 2012. *Elastomere - Allgemeine Bedingungen für die Vorbereitung und Konditionierung von Prüfkörpern für physikalische Prüfverfahren (ISO 23529:2010): Rubber - General procedures for preparing and conditioning test pieces for physical test methods (ISO 23529:2010)*

DIN ISO 8013 1993

Norm DIN ISO 8013 Juli 1993. *Elastomere - Bestimmung des Kriechens bei Druck- oder Schubbeanspruchung: Rubber vulcanized - Determination of creep in compression or shear*

Dlubal GmbH 2020

DLUBAL GMBH: *RFEM 5: Räumliche Tragwerke nach der Finite-Elemente-Methode.* Version: 2020. <https://www.dlubal.com>

DNVGL-CG-0154 2016

Norm DNVGL-CG-0154 April 2016. *Steel sandwich panel construction: Class Guideline*

DNVGL-CP-0097 2016

Norm DNVGL-CP-0097 Februar 2016. *Core materials for use in sandwich plate system (SPS) or similar: Class Guideline*

Ehrenstein u. Pongratz 2007

EHRENSTEIN, G. W. ; PONGRATZ, S.: *Beständigkeit von Kunststoffen*. München : Hanser, 2007 (Edition Kunststoffe). – ISBN 978-3-446-21851-2

Eiffel 2020

EIFFEL: *Broschüre D-Brücken: Systembrücken für jeden Einsatz*. Version: 2020. http://www.eiffel.de/fileadmin/_migrated/content_uploads/Eiffel_Bereichsbroschuere_D_Bruecken_small_111020.pdf, Abruf: 2022-03-23

Eisenbahn-Bundesamt 2022

EISENBAHN-BUNDESAMT: *LuFV - Leistungs- und Finanzierungsvereinbarung*. Version: 2022. https://www.eba.bund.de/DE/Themen/Finanzierung/LuFV/lufv_node.html, Abruf: 2022-04-07

Elsner et al. 2008

ELSNER, P. ; EYERER, P. ; HIRTH, T.: *Polymer Engineering: Technologien und Praxis*. Berlin, Heidelberg : Springer, 2008. – ISBN 978-3-540-72402-5

Elsner et al. 2012

ELSNER, P. ; EYERER, P. ; HIRTH, T.: *Kunststoffe: Eigenschaften und Anwendung*. 8. Aufl. Berlin, Heidelberg : Springer, 2012 (Domininghaus). – ISBN 978-3-642-16172-8

EN ISO 604 2003

Norm EN ISO 604 Dezember 2003. *Kunststoffe - Bestimmung der Druckeigenschaften (ISO 604:2002): Plastics - Determination of compressive properties (ISO 604:2002)*

Feldmann et al. 2007

FELDMANN, M. ; SEDLACEK, G. ; GESSLER, A.: A system of steel-elastomer sandwich plates for strengthening orthotropic bridge decks. In: *Mechanics of Composite Materials* (2007)

Feldmann et al. 2010

FELDMANN, M. ; SEDLACEK, G. ; UNGERMANN, D. ; MÖLLER, S. ; GESSLER, A. ; KALAMEYA, J.: *Forschungsvorhaben P628 - Herstellung von Stahlfahrbahnen in Sandwichbauweise mit verringertem Schweißaufwand: New steel sandwich bridge decks with less welding*. Düsseldorf, 2010 (Forschung für die Praxis)

Fiedler 2009

FIEDLER, E.: Die Entwicklung der orthotropen Fahrbahnplatte in Deutschland. In: *Stahlbau* 78 (2009), Nr. 8, S. 562–576

Finck von Finckenstein et al. 2006

FINCK VON FINCKENSTEIN, K. ; LEHN, J. ; SCHELLHAA, H. ; WEGMANN, H.: *Arbeitsbuch Mathematik für Ingenieure: Band II: Differentialgleichungen, Funktionentheorie, Numerik und Statistik*. Bd. Bd. 2. 3. Aufl. Stuttgart : Teubner, 2006. – ISBN 3-835-10030-0

Fink et al. 2011

FINK, J. ; HERRMANN, P. ; JUEN, L.: Entwicklung einer neuartigen Verbundfahrbahnplatte für Eisenbahnbrücken. In: *Stahlbau* 80 (2011), Nr. 5, S. 309–316

Fladby 2010

FLADBY, J.: *Ultimate Strength of Steel-Elastomer Sandwich Panels Under Combined Loadings Including In-Plane Shear*. Oslo, Universitetet i Oslo, Msc.-Thesis, 2010

Frankfurter Allgemeine Zeitung 2021

FRANKFURTER ALLGEMEINE ZEITUNG: Salzachtalbrücke bleibt gesperrt: Verkehrschaos droht. (2021-06-19), Nr. Onlineausgabe. <https://www.faz.net/-gzig-acw5j>

Friemann 1990

FRIEMANN, H.: *Veröffentlichung des Instituts für Stahlbau und Werkstoffmechanik der Technischen Universität Darmstadt*. Bd. 48: *Das Weggrößenverfahren zur Berechnung ebener Stabtragwerke nach der Elastizitätstheorie II. Ordnung*. Darmstadt : Institut für Stahlbau und Werkstoffmechanik, 1990

Frostig et al. 1992

FROSTIG, Y. ; BARUCH, M. ; VILNAY, O. ; SHEINMAN, I.: High-Order Theory for Sandwich-Beam Behavior with Transversely Flexible Core. In: *Journal of Engineering Mechanics* 118 (1992), Nr. 5, S. 1026–1043

Frýba 1999

FRÝBA, L.: Statische, dynamische und Ermüdungseigenschaften orthotroper Platten mit Flachrippen. In: *Stahlbau* 68 (1999), Nr. 1, S. 15–23

Geißler 2014

GEISSLER, K.: *Handbuch Brückenbau: Entwurf, Konstruktion, Berechnung, Bewertung und Ertüchtigung*. Berlin : Ernst, 2014. – ISBN 978-3-433-60345-1

Gesella et al. 2016

GESELLA, H. ; SCHWARZ, W. ; DIDIER, G.: Planung und Ausschreibung der Ertüchtigung der Brücke Grande-Duchesse Charlotte in Luxemburg mit neuesten Technologien. In: *Stahlbau* 85 (2016), Nr. 4, S. 242–253

Goris 2012

GORIS, A. (Hrsg.): *Bautabellen für Ingenieure: Mit Berechnungshinweisen und Beispielen*. 20. Aufl. Neuwied : Werner, 2012. – ISBN 978-3-804-15251-9

Grellmann et al. 2015

GRELLMANN, W. (Hrsg.) ; SEIDLER, S. (Hrsg.) ; ALTSTÄDT, V. (Hrsg.): *Kunststoffprüfung*. 3. Aufl. München : Hanser, 2015. – ISBN 978-3-446-44350-1

Gross et al. 2009

GROSS, D. ; HAUGER, W. ; SCHNELL, W.: *Springer-Lehrbuch*. Bd. 4: *Technische Mechanik: Band 4: Hydromechanik, Elemente der höheren Mechanik, Numerische Methoden*. 7. Aufl. Berlin, Heidelberg : Springer, 2009. – ISBN 978-3-540-89390-5

Gross et al. 2007

GROSS, D. ; HAUGER, W. ; SCHRÖDER, J. ; WALL, W.: *Springer-Lehrbuch*. Bd. 2: *Technische Mechanik: Band 2: Elastostatik*. 9. Aufl. Berlin, Heidelberg : Springer, 2007. – ISBN 978-3-540-70762-2

Händler u. Lange 2018

HÄNDLER, P. ; LANGE, J.: Die Anwendung der SPS-Technologie im Bahnbrückenbau. In: *21. DAST-Kolloquium*, 2018

Händler u. Lange 2019

HÄNDLER, P. ; LANGE, J.: Application of the SPS-technology in short span railway bridges. In: ZINGONI, Alphose (Hrsg.): *Advances in engineering materials, structures and systems*. Boca Raton : CRC Press, 2019. – ISBN 978-1-138-38696-9, S. 671-672

Harris 2007

HARRIS, D. K.: *Lateral Load Distribution and Deck Design Recommendations for the Sandwich Plate System (SPS) in Bridge Applications*. Blacksburg, Virginia Polytechnic Institute and State University, Diss., 2007

Heiland et al. 2012

HEILAND, U. ; HENSCHKE, S. ; STIHL, T.: Grundinstandsetzung stählerner Hochbahntrassen: Erkenntnisse und Bewertung von Verfahren. In: *Brückenbau* (2012), Nr. 4, S. 14-21

Heiland u. Stihl 2012

HEILAND, U. ; STIHL, T.: *Produktpräsentation SPS: Zur Anwendung der Sandwich-Plate-System Bauweise in Deutschland*. Version:2012. <https://docplayer.org/27817330-Produktpraesentation-sps-sandwichplatesystem.html>, Abruf: 2022-03-27

Herrmann et al. 2011

HERRMANN, P. ; JUEN, L. ; FINK, J.: Neuartige Sandwichfahrbahnplatte für Eisenbahnbrücken. In: *Stahlbau* 80 (2011), Nr. 11, S. 859-865

Herwig et al. 2016

HERWIG, H. ; KAUTZ, C. ; MOSCHALLSKI, A.: *Technische Thermodynamik*. Wiesbaden : Springer, 2016. – ISBN 978-3-658-11887-7

Heyder et al. 2002

HEYDER, M. ; ÖCHSNER, A. ; STRÖHLA, S.: Bewertung von Spannungszuständen bei der experimentellen Bestimmung des Schubmoduls an zellularen Materialien. In: *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik* 33 (2002), Nr. 2, S. 85-89

ISO 6721-11 2012

Norm ISO 6721-11 April 2012. *Plastics - Determination of dynamic mechanical properties - Part 11: Glass transition temperature: Platiques - Détermination des propriétés mécaniques dynamiques - Partie 11: Température de transition vitreuse*

Jungbluth u. Berner 1986

JUNGBLUTH, O. ; BERNER, K.: *Verbund- und Sandwichtragwerke: Tragverhalten, Feuerwiderstand, Bauphysik*. Berlin u.a. : Springer, 1986. – ISBN 3-540-16372-7

Kaiser 2016

KAISER, W.: *Kunststoffchemie für Ingenieure: Von der Synthese bis zur Anwendung*. 4., neu bearbeitete und erweiterte Auflage. München : Carl Hanser, 2016 (Hanser eLibrary). – ISBN 978-3-446-44774-5

Kennedy et al. 2005

KENNEDY, D. J. L. ; FERRO, A. ; DORTON, R. A.: *Tentative Design Rules for Innovative Bridge Decks Comprising Sandwich Plate System Panels*. Calgary, Canada, 2005 (Annual Conference of the Transportation Association of Canada)

Kennedy 2007

KENNEDY, S.: Das Sandwich-Platten-System (SPS). In: *Stahlbau* 76 (2007), Nr. 7, S. 455–464

Kennedy 1987

KENNEDY, S. J.: *Behaviour of transversely loaded continuous steel-concrete composite plates*. Edmonton, Alberta, University of Alberta, Diss., 1987

Kennedy 2004

KENNEDY, S. J.: A True Innovation: Steel Plates with a Structural Elastomer Core. In: AMERICAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS (Hrsg.): *Composite Construction in Steel and Concrete V*, 2004, S. 114–126

Kennedy u. Martino 2015

KENNEDY, S. J. ; MARTINO, A. E.: SPS bridge decks for new bridges and strengthening of existing bridge decks. In: *Steel Construction* 8 (2015), Nr. 1, S. 21–27

Kilian 2017

KILIAN, K.: *Befestigung von Sandwichelementen unter kombinierter Zug- und Querkraftbeanspruchung*. Darmstadt, Technische Universität Darmstadt, Diss., 2017

Klein 2013

KLEIN, B.: *Leichtbau-Konstruktion*. Wiesbaden : Springer, 2013. – ISBN 978–3–658–02271–6

Klingner u. Schleicher 2006

KLINGNER, A. ; SCHLEICHER, W.: Dickere Bleche bei Eisenbahnbrücken. In: *Stahlbau* 75 (2006), Nr. 10, S. 858–860

Kuhlmann et al. 2018

KUHLMANN, U. ; BREUNIG, S. ; ZINKE, T.: Moderne Eisenbahnbrücken als Dickblech-Trogbrücken - Optimierung der Auslegung für Ermüdung und Lebenszyklusbetrachtung. In: *Stahlbau* 87 (2018), Nr. 6, S. 571–582

Kuhlmann u. Breuning 2019

KUHLMANN, U. ; BREUNIG, S.: *Ganzheitliche Bewertung von Stahl- und Verbundeisenbahnbrücken nach Kriterien der Nachhaltigkeit: Holistic assessment of steel and composite railway bridges according to criteria of sustainability*. Düsseldorf, 2019 (Forschung für die Praxis)

Kutterer 2005

KUTTERER, M.: Verbundglasplatten - Schubverbund und Membrantragwirkung - Teil I. In: *Stahlbau* 74 (2005), Nr. 1, S. 39–46

Lange u. Berner 2020

LANGE, J. ; BERNER, K.: Sandwichelemente im Hochbau. In: KUHLMANN, Ulrike (Hrsg.): *Neue Normung im Hochbau, Leichtbau*. Berlin : Ernst & Sohn, 2020 (Stahlbau-Kalender). – ISBN 978–3–433–03290–9, S. 905–970

Lloyd's Register 2015

Provisional Rules for the Application of Sandwich Panel Construction to Ship Structure.
London, Juli 2015

Mang u. Hofstetter 2013

MANG, H. A. ; HOFSTETTER, G.: *Festigkeitslehre.* Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2013. – ISBN 978-3-642-40751-2

Martin 2005

MARTIN, J. D.: *Sandwich Plate System Bridge Deck Tests.* Blacksburg, Virginia Polytechnic Institute, Master-Thesis, 2005

Menard 1999

MENARD, K. P.: *Dynamic mechanical analysis: A practical introduction.* Boca Raton, Fla. : CRC Press, 1999. – ISBN 0-849-38688-8

Menges 1984

MENGES, G.: *Werkstoffkunde der Kunststoffe: Mit 256 Abb. u. 30 Tab.* 2., überarb. Aufl. München : Hanser, 1984 (Studienbücher der technischen Wissenschaften). – ISBN 3-446-14083-2

Menius u. Matthews 2020

MENIUS, R. ; MATTHEWS, V.: *Bahnbau und Bahninfrastruktur.* Wiesbaden : Springer Fachmedien Wiesbaden, 2020. – ISBN 978-3-658-27732-1

Mezger 2016

MEZGER, T.: *Das Rheologie Handbuch: Für Anwender von Rotations- und Oszillations-Rheometern.* 5., vollständig überarbeitete Auflage. Hannover : Vincentz Network, 2016 (FARBE UND LACK / BIBLIOTHEK). – ISBN 978-3-748-60012-1

Minten et al. 2007

MINTEN, J. ; SEDLACEK, G. ; PASCHEN, M. ; FELDMANN, M. ; GESSLER, A.: SPS – ein neues Verfahren zur Instandsetzung und Ertüchtigung von stählernen orthotropen Fahrbahnplatten. In: *Stahlbau* 76 (2007), Nr. 7, S. 438–454

Möhler 1956

MÖHLER, K.: *Über das Tragverhalten von Biegeträgern und Druckstäben mit zusammengesetztem Querschnitt und nachgiebigen Verbindungsmitteln.* Karlsruhe, TH Karlsruhe, Habil., 1956

Mölter et al. 2017

MÖLTER, T. M. ; PFEIFER, R. H. ; FIEDLER, M.: *Handbuch Eisenbahnbrücken: Planung, Bau, Instandhaltung, Brückensysteme.* 2. Auflage. Bingen and Hamburg : PMC Media House GmbH, 2017 (Edition eurail press). – ISBN 978-3-96245-154-7

Moser 2013

MOSER, A.: *Zeit-Temperatur-Verschiebung von thermoplastischen polymeren Werkstoffen.* Leoben, Montanuniversität Leoben, Msc.-Thesis, 2013. – Unveröffentlicht

Naraniecki u. Marx 2019

NARANIECKI, H. ; MARX, S.: Zustandsentwicklung und -prognose von Eisenbahnbrücken. In: LOHAUS, Ludger (Hrsg.) ; HAIST, Michael (Hrsg.) ; MARX, Steffen (Hrsg.): *Beiträge zur 7. DAfStb-Jahrestagung mit 60. Forschungskolloquium.* Hannover : Institutionelles Repositorium der Leibniz Universität Hannover, 2019, S. 103–118

Naujoks u. Misiak 2015

NAUJOKS, B. ; MISIAK, T.: Praxisgerechte Nachweise zur Tragfähigkeit und Gebrauchstauglichkeit von Sandwichelementen mittels Fachwerkmodellen. In: *Stahlbau* 84 (2015), Nr. 11, S. 890–907

Nelke 2018

NELKE, H.: *Tragfähigkeit von Sandwichelementen unter Biegung und Querdruck*. Darmstadt, Technische Universität Darmstadt, Diss., 2018

Öchsner 2016

ÖCHSNER, A.: *Theorie der Balkenbiegung*. Wiesbaden : Springer Fachmedien Wiesbaden, 2016. – ISBN 978–3–658–14637–5

Odenwald 2017

ODENWALD, M.: "875 Brücken sollt ihr bauen": Der Weg zur Qualitätskennzahl Brücken in der LuFV II. In: DB NETZ AG (Hrsg.): *Eisenbahnbrücken*. Köln : TÜV Media GmbH, 2017. – ISBN 978–3–7406–0173–7, S. 14–19

Osswald u. Rudolph 2015

OSSWALD, T. A. ; RUDOLPH, N.: *Polymer Rheology: Fundamentals and Applications*. Munich and Cincinnati : Hanser, 2015. – ISBN 978–1–56990–523–4

Park u. Schapery 1999

PARK, S. W. ; SCHAPERY, R. A.: Methods of interconversion between linear viscoelastic material functions. Part I - A numerical method based on Prony series. In: *International Journal of Solids and Structures* 36 (1999), Nr. 11, S. 1653–1675

Petersen 2013

PETERSEN, C.: *Stahlbau*. Wiesbaden : Springer, 2013. – ISBN 978–3–528–38837–9

Phan et al. 2012

PHAN, C. N. ; FROSTIG, Y. ; KARDOMATEAS, G. A.: Analysis of Sandwich Beams With a Compliant Core and With In-Plane Rigidity—Extended High-Order Sandwich Panel Theory Versus Elasticity. In: *Journal of Applied Mechanics* 79 (2012), Nr. 4

Plantema 1966

PLANTEMA, F.: *Sandwich Construction: The Bending and Buckling of Sandwich Beams, Plates, and Shells*. 3. Aufl. New York u.a. : Wiley, 1966

Press et al. 2007

PRESS, W. H. ; TEUKOLSKY, S. A. ; VETTERLING, W. T. ; FLANNERY, B. P.: *Numerical recipes: The art of scientific computing*. 3rd ed. Cambridge, UK and New York : Cambridge University Press, 2007. – ISBN 978–0–511–33555–6

Reddy 2004

REDDY, J. N.: *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and analysis*. 2. Ed. Boca Raton u.a. : CRC Press, 2004 (Mechanical engineering). – ISBN 0–849–31592–1

Reisbeck u. Hentschel 2017

REISBECK, T. ; HENTSCHEL, V.: Eisenbahnbrücken in Deutschland: Alter, Bauarten, Stützweiten, Zustand. In: DB NETZ AG (Hrsg.): *Eisenbahnbrücken*. Köln : TÜV Media GmbH, 2017. – ISBN 978–3–7406–0173–7, S. 8–12

Ril 804 2013

Norm Ril 804 2013. *Richtlinie 804 - Eisenbahnbrücken (und sonstige Ingenieurbauwerke) planen, bauen und instand halten*

Roik et al. 1993

ROIK, K. ; BERGMANN, R. ; HAENSEL, J. ; HANSWILLE, G.: Verbundkonstruktionen: Bemessung auf der Grundlage des Eurocode 4 Teil 1. In: EIBL, Josef (Hrsg.): *Beton-Kalender 1993* Bd. 1. Berlin : Verl. für Architektur u. techn. Wiss, 1993. – ISBN 3-433-01183-4, S. 551-680

Schröder 2020

SCHRÖDER, T.: *Rheologie der Kunststoffe: Theorie und Praxis*. 2., aktualisierte und erweiterte Auflage. München : Hanser, 2020 (Hanser eLibrary). – ISBN 978-3-446-46550-3

Schwarze 1984

SCHWARZE, K.: Numerisch Berechnung von Sandwichelementen. In: *Stahlbau* 53 (1984), Nr. 12, S. 363-370

Schwarzl 1990

SCHWARZL, F. R.: *Polymermechanik: Struktur und mechanisches Verhalten von Polymeren*. Berlin, Heidelberg : Springer, 1990. – ISBN 978-3-642-61506-1

Sedlacek et al. 2011

SEDLACEK, G. ; PASCHEN, M. ; FELDMANN, M. ; GESSLER, A. ; MÖLLER, S. ; STEINAUER, B. ; SCHARNIGG, K. ; BUNDESANSTALT FÜR STRASSENWESEN (Hrsg.): *Instandsetzung und Verstärkung von Stahlbrücken unter Berücksichtigung des Belagssystems: Bericht zum Forschungsprojekt 15.405/2004/CRB*. Bergisch Gladbach, 2011 (Berichte der Bundesanstalt für Strassenwesen B, Brücken- und Ingenieurbau). ISBN 978-3-869-18079-3

SPS Technology 2002

SPS TECHNOLOGY: *Elastomer Material Characterization: Report for Classification Societies and Regulatory Authorities*. 2002. – Unveröffentlicht

SPS Technology 2011a

SPS TECHNOLOGY: *SPS Elastomer Characteristic Material Properties: Comparison of 2009 and 2002 Elastocore(R) 9010/100 Formulations*. 2011. – Unveröffentlicht

SPS Technology 2011b

SPS TECHNOLOGY: *Unified Bond Strength Criterion*. 2011. – Unveröffentlicht

SPS Technology 2012a

SPS TECHNOLOGY: *Curing Behaviour of Polyurethane Core: Technical Note 057*. 2012. – Unveröffentlicht

SPS Technology 2012b

SPS TECHNOLOGY: *Effect of Creep on SPS Plates: Technical Note 047*. 2012. – Unveröffentlicht

SPS Technology 2017

SPS TECHNOLOGY: *SPS Load Span Tables*. 2017. – Unveröffentlicht

SPS Technology 2022

SPS TECHNOLOGY: *Project Portfolio*. Version: 2022. <https://www.spstechnology.com/wp-content/uploads/2022/02/February-2022-Master-Project-Portfolio.pdf>, Abruf: 2022-03-24

Stamm u. Witte 1974

STAMM, K. ; WITTE, H.: *Ingenieurbauten, Theorie und Praxis*. Bd. 3: *Sandwichkonstruktionen: Berechnung, Fertigung, Ausführung*. Vienna : Springer, 1974. – ISBN 978-3-7091-8335-9

Stihl et al. 2016

STIHL, T. ; GESSLER, A. ; FELDMANN, M. ; KENNEDY, S. J.: Sanierung von Brückenfahrbahnen und Gehwegen mit Stahl-Kunststoff-Verbundbauteilen. In: *Stahlbau* 85 (2016), Nr. 10, S. 677–685

Stihl et al. 2014

STIHL, T. ; HEILAND, U. ; SEIDEL, M. ; HEINZEL, U.: Verstärkung und Instandsetzung der Hängebrücke über die Saar in Mettlach. In: *Stahlbau* 83 (2014), Nr. 5, S. 295–301

Stihl et al. 2013

STIHL, Th. ; CHASSARD, C. ; FELDMANN, M. ; BILD, S.: Neue Technologie für die Hängebrücke über die Saar in Mettlach - Brückenfahrbahn aus Sandwich Plate System (SPS). In: *Stahlbau* 82 (2013), Nr. 3, S. 179–187

Sutton et al. 2009

SUTTON, M. A. ; SCHREIER, H. ; ORTEU, J.-J.: *Image Correlation for Shape, Motion and Deformation Measurements*. Boston, MA : Springer, 2009. – ISBN 978-0-387-78746-6

Teixeira de Freitas 2012

TEIXEIRA DE FREITAS, S.: *Steel plate reinforcement of orthotropic bridge decks*. Delft, Technische Universiteit Delft, Diss., 2012

Teixeira de Freitas et al. 2011

TEIXEIRA DE FREITAS, S. ; KOLSTEIN, H. ; BIJLAARD, F.: Sandwich system for renovation of orthotropic steel bridge decks. In: *Journal of Sandwich Structures & Materials* 13 (2011), Nr. 3, S. 279–301

Tessler et al. 2009

TESSLER, A. ; DI SCIUVA, M. ; GHERLONE, M.: A Refined Zigzag Beam Theory for Composite and Sandwich Beams. In: *Journal of Composite Materials* 43 (2009), Nr. 9, S. 1051–1081

Thomas et al. 2013

THOMAS, S. (Hrsg.) ; DURAND, D. (Hrsg.) ; CHASSENIEUX, C. (Hrsg.) ; JYOTISHKUMAR, P. (Hrsg.): *Handbook of biopolymer-based materials: From blends and composites to gels and complex networks*. Weinheim, Ger : Wiley, 2013. – ISBN 978-3-527-32884-0

Uhlig 2006

UHLIG, K.: *Polyurethan-Taschenbuch: Mit 34 Tabellen*. 3. Aufl. München : Hanser, 2006. – ISBN 978-3-446-40307-9

van Gorp u. Palmén 1998

VAN GURP, M. ; PALMÉN, J.: Time-Temperature Superposition for Polymer Blends. In: *Rheology Bulletin* 67 (1998), Nr. 1, S. 5–8

van Straalen 1998

VAN STRAALLEN, I. J.: *Comprehensive overview of theories for sandwich panels*. Porto, TNO Building and Construction Research, Master-Thesis, 1998

VDEI 2019

VDEI ; FACHAUSSCHUSS BRÜCKEN UND KONSTRUKTIVER INGENIEURBAU (Hrsg.): *Dickblechbrücken (Trogbrücken mit dickem Fahrbahnblech): Hinweise zu Planung und Ausführung*. 2019 (VDEI-Info Konstruktiver Ingenieurbau Nr. 15)

Weißborn 2008

WEISSENBORN, C.: *Schriftenreihe Schiffbau*. Bd. 643: *Material and failure models for SPS sandwich plates subjected to extreme loads: Zugl.: Hamburg-Harburg, Techn. Univ., Institut für Konstruktion und Festigkeit von Schiffen, Diss., 2008*. Hamburg : TUHH Techn. Univ. Hamburg-Harburg, 2008. – ISBN 978-3-892-20643-9

Williams et al. 1955

WILLIAMS, M. L. ; LANDEL, R. F. ; FERRY, J. D.: The Temperature Dependence of Relaxation Mechanisms in Amorphous Polymers and Other Glass-forming Liquids. In: *Journal of the American Chemical Society* 77 (1955), Nr. 14, S. 3701–3707

Woycke et al. 2004

WOYCKE, N. ; KEUERLEBER, M. ; HEGEMANN, B. ; EYERER, P.: Three-dimensional thermorheological behavior of isotactic polypropylene across glass transition temperature. In: *Journal of Applied Polymer Science* 94 (2004), Nr. 3, S. 877–880

Wölfel 1987

WÖFEL, E.: Nachgiebiger Verbund - Eine Näherungslösung und deren Anwendungsmöglichkeiten. In: *Stahlbau* 56 (1987), Nr. 6, S. 173–180

World Economic Forum 2019

WORLD ECONOMIC FORUM: *Länder mit der besten allgemeinen Qualität der Infrastruktur laut dem Global Competitiveness Index 4.0 2019: zitiert nach de.Statista.com*. Version: 2019. <https://de.statista.com/statistik/daten/studie/37327/umfrage/ranking-der-laender-nach-allgemeiner-qualitaet-der-infrastruktur-in-2008/>, Abruf: 2022-03-16

Zenkert 1997

ZENKERT, D.: *The handbook of sandwich construction*. Cradley Heath, West Midlands : Engineering Materials Advisory Services Ltd. (EMAS), 1997 (North European engineering and science conference series). – ISBN 0-947-81796-4

Zhou 2008

ZHOU, F.: *Ultimate Strength of Clamped Steel-Elastomer Sandwich Panels under Combined In-plane Compression and Lateral Pressure*. Blacksburg, Virginia, Virginia Polytechnic Institute and State University, Diss., 2008

ZTV-ING-Teil 7 2021

Norm ZTV-ING-Teil 7 Oktober 2021. *Zusätzliche Technische Vertragsbedingungen und Richtlinien für Ingenieurbauten ZTV-ING: Teil 7 - Brückenbeläge*

Anhang

Anhangverzeichnis

Anhang I

AI-1	Eigenschaften des PUR im SPS	A-7
AI-1.1	Eigenschaften der ursprünglichen und aktuellen Rezeptur des PUR	A-7
AI-1.2	Eigenschaften der veränderten Rezeptur des PUR	A-8
AI-2	Ergebnisse der uniaxialen Druckversuche	A-9
AI-2.1	Uniaxiale Druckversuche bei verschiedenen Temperaturen	A-9
AI-2.2	Uniaxiale Druckversuche bei Raumtemperatur nach Temperierung	A-10
AI-3	Ergebnisse der uniaxialen Zugversuche	A-11
AI-4	Ergebnisse der DMTA Temperatur-Sweeps	A-13
AI-4.1	D-TS_05L	A-13
AI-4.2	D-TS_06L	A-14
AI-5	Ergebnisse der DMTA Temperatur-Frequenz-Sweeps	A-16
AI-5.1	Linearitäts-Prüfungen	A-16
AI-5.2	Die ersten Versuche D-TFS_01 und D-TFS_02	A-17
AI-5.2.1	Ergebnisse von D-TFS_01	A-18
AI-5.2.2	Ergebnisse von D-TFS_02	A-19
AI-5.3	Die Versuche D-TFS_03 bis D-TFS_06	A-21
AI-5.3.1	Ergebnisse von D-TFS_03	A-21
AI-5.3.2	Ergebnisse von D-TFS_04	A-24
AI-5.3.3	Ergebnisse von D-TFS_05	A-29
AI-5.3.4	Ergebnisse von D-TFS_06	A-34
AI-5.4	Das Verfahren der Superposition	A-39
AI-5.5	Die inkrementellen horizontalen Verschiebungsfaktoren	A-44
AI-5.5.1	Verschiebungsfaktoren von D-TFS_01 und D-TFS_02	A-44
AI-5.5.2	Verschiebungsfaktoren von D-TFS_03	A-47
AI-5.5.3	Verschiebungsfaktoren von D-TFS_04	A-50
AI-5.5.4	Verschiebungsfaktoren von D-TFS_05	A-53
AI-5.5.5	Verschiebungsfaktoren von D-TFS_06	A-56
AI-5.6	Masterkurven der D-TFS-Versuche im Frequenzbereich	A-59
AI-5.6.1	Masterkurven von D-TFS_01 und D-TFS_02	A-59
AI-5.6.2	Masterkurven von D-TFS_04	A-60
AI-5.6.3	Masterkurven von D-TFS_05	A-61
AI-5.6.4	Masterkurven von D-TFS_06	A-62

AI-6	Ergebnisse der Lang- und Kurzzeit-Versuche unter Zug	A-63
AI-6.1	Langzeit-Kriechen unter konstantem Zug bei Raumtemperatur (TC)	A-63
AI-6.2	Kurzzeit-Kriechversuche unter schrittweise erhöhter Zuglast (TCL) .	A-66
AI-6.3	Kurzzeit-Relaxation unter Zug bei versch. Temperaturen (TR-TTS)	A-69
AI-7	Ergebnisse der Lang- und Kurzzeitversuche unter Schub	A-73
AI-7.1	Steifigkeit unter Schubdeformation bei versch. Temperaturen (ST) .	A-73
AI-7.2	Langzeit-Relaxation unter Schub bei versch. Temperaturen (SR) . .	A-75
AI-7.3	Kurzzeit-Relaxation unter Schub bei versch. Temperaturen (SR-TTS)	A-79
AI-8	Die Interaktion zwischen Probekörper und Versuchsapparatur	A-82
AI-9	Vergleich der Verschiebungsfaktoren mit den untersuchten ZTV-Ansätzen . .	A-85
AI-9.1	Vergleiche mit dem Ansatz nach Arrhenius	A-85
AI-9.2	Vergleiche mit dem Ansatz nach Williams Landel und Ferry	A-87
AI-9.3	Vergleiche mit dem empirischen Exponential-Ansatz	A-88
AI-10	Die Prony-Parameter aus den D-TFS-Versuchen	A-90

Anhang II

AII-1	Ergebnisse der Voruntersuchung zum Vergleich der Berechnungsverfahren . .	A-93
AII-2	Die Querschnittswerte in Abhängigkeit von den Verhältnisparametern	A-94
AII-2.1	Die Deckschichten ohne Verbund	A-96
AII-2.2	Der Sandwichbalken mit elastischem Verbund	A-96
AII-2.3	Der Balken mit starrem Verbund	A-97
AII-3	Die Grenzfallfunktionen der betrachteten Systeme	A-99
AII-3.1	Die Grenzfallfunktion $f_{\sigma,r}$ aller Systeme mit starrem Verbund	A-100
AII-3.2	Die Grenzfallfunktion $f_{\sigma,f}$ der Systeme I und III ohne Verbund . . .	A-102
AII-3.3	Die Grenzfallfunktionen des Systems II ohne Verbund	A-103
AII-3.3.1	Die Grenzfallfunktion $f_{k,II,f}$ für $(\bar{\lambda}_f = 0)$	A-107
AII-3.3.2	Die Grenzfallfunktion $f_{\sigma,II,f}$ für $(\bar{\lambda}_f = 0)$	A-109
AII-4	Geschlossene Lösungen des elastischen Verbunds für Sandwichbalken mit dicken Deckschichten nach der SST	A-114
AII-4.1	Der gelenkig gelagerte Sandwichbalken (System I)	A-115
AII-4.1.1	Lösungen der Differentialgleichungen	A-115
AII-4.1.2	Ermittlung der Normalspannung $\sigma_{x,I}$ am unteren Rand . .	A-116
AII-4.1.3	Herleitung des Steifigkeitsfaktors $f_{k,I}$	A-117
AII-4.1.4	Herleitung des Spannungsfaktors $f_{\sigma,I}$	A-118
AII-4.1.5	Herleitung des Gleitungsfaktors $f_{\gamma,I}$	A-119
AII-4.2	Der gel. gelagerte Sandwichbalken mit starren Stirnplatten (System II)A-120	
AII-4.2.1	Lösungen der Differentialgleichungen	A-120
AII-4.2.2	Ermittlung der Normalspannung $\sigma_{x,II}$ am unteren Rand .	A-121
AII-4.2.3	Herleitung des Steifigkeitsfaktors $f_{k,II}$	A-122
AII-4.2.4	Herleitung des Spannungsfaktors $f_{\sigma,II}$	A-123
AII-4.2.5	Herleitung des Gleitungsfaktors $f_{\gamma,II}$	A-124

AII-4.3	Der beidseitig eingespannte Sandwichbalken (System III)	A-125
AII-4.3.1	Lösungen der Differentialgleichungen	A-125
AII-4.3.2	Herleitung des Gleitungsfaktors $f_{\gamma,III}$	A-125
AII-4.3.3	Ermittlung der Normalspannung $\sigma_{x,III}$ am unteren Rand .	A-126
AII-4.3.4	Herleitung des Steifigkeitsfaktors $f_{k,III}$	A-127
AII-4.3.5	Herleitung des Spannungsfaktors $f_{\sigma,III}$	A-128
AII-5	Der Grenzfall der starren Stirnplatten für System II	A-129
AII-5.1	Die elastischen Stirnplatten	A-130
AII-5.2	Die starren Stirnplatten	A-133
AII-5.3	Der Stirnplattenfaktor	A-134
AII-6	Die Faktorflächen aller Systeme in Höhenliniendarstellung	A-135
AII-6.1	Der gelenkig gelagerte Sandwichbalken (System I)	A-135
AII-6.2	Der gel. gelagerte Sandwichbalken mit starren Stirnplatten (System II)	A-139
AII-6.3	Der beidseitig eingespannte Sandwichbalken (System III)	A-142
AII-7	Exemplarische Entwürfe verschiedener Varianten von SPS-Fahrbahnen	A-145
AII-7.1	Entwurf einer querorientierten SPS-Fahrbahn	A-145
AII-7.1.1	Entwurf ohne Stirnplatten (System I)	A-148
AII-7.1.2	Entwurf mit Stirnplatten (System II)	A-153
AII-7.2	Entwurf einer längsorientierten SPS-Fahrbahn (System III)	A-159

Anhang I

AI-1 Eigenschaften des PUR im SPS

AI-1.1 Eigenschaften der ursprünglichen und aktuellen Rezeptur des PUR

Tabelle AI-1: Mechanische Eigenschaften des PUR in Abhängigkeit von der Temperatur nach (SPS Technology 2002) und auszugsweise aus (SPS Technology 2011a)¹

Eigenschaft	Temperatur							
	-80 °C	-60 °C	-40 °C	-20 °C	23 °C	60 °C	80 °C	
E_t in MPa	Mittelwert	3859	2924	1765	1164	874	436	248
	Stand.abw.	70	343	307	104	123	41	50
$\sigma_{t,p}$ in MPa	Mittelwert	38,9	29,5	28,4	23,0	16,1	8,1	6,2
	Stand.abw.	-	-	-	-	-	-	-
$\sigma_{t,u}$ in MPa	Mittelwert	89,3	76,0	59,2	43,4	33,9	20,4	12,1
	Stand.abw.	5,4	9,5	6,1	2,6	0,4	0,2	1,4
$\varepsilon_{t,u}$ in %	Mittelwert	7,2	11,1	13,2	15,1	32,1	43,1	47,4
	Stand.abw.	1,5	1,0	3,7	2,2	6,2	8,6	10,6
E_c in MPa	Mittelwert	3878	2813	1347	1166	765	501	336
	Stand.abw.	398	195	244	214	158	24	30
Druck $\sigma_{c,p}$ in MPa	Mittelwert	52,1	33,5	30,9	21,4	18,0	10,2	7,9
	Stand.abw.	-	-	-	-	-	-	-
$\sigma_{c,10}$ in MPa	Mittelwert	143,6	100,1	71,7	55,5	32,0	19,0	14,0
	Stand.abw.	-	-	-	-	-	-	-
Poissonzahl ν	Mittelwert	0,36	0,38	0,38	0,38	0,37	0,35	0,33
DMTA G in MPa	-	1386	955	559	429	285	180	135
	aus G	k.A.	k.A.	1526	1163	771	483	370
Rohdichte ρ in kg/m ³	Mittelwert	1150						
Härte	Mittelwert	70 Shore D						

¹Die Werte für den aus dem Schubmodul errechneten E -Modul wurden aus (SPS Technology 2011a) entnommen, wo sie erstmals zum Vergleich angegeben werden.

AI-1.2 Eigenschaften der veränderten Rezeptur des PUR

Tabelle AI-2: Eigenschaften der neuen Rezeptur des PUR in Abhängigkeit von der Temperatur nach (SPS Technology 2011a)

Eigenschaft	Temperatur												
	-40 °C	-20 °C	0 °C	23 °C	60 °C	80 °C	90 °C	100 °C	110 °C	120 °C			
E_t	in MPa	Mittelwert	1251	1016	899	686	448	346	305	213	148	82	
	Stand.abw.	166	67	100	10	9	18	11	18	3	22		
$\sigma_{t,p}$	in MPa	Mittelwert	48,1	40,6	33,4	21,9	15,3	11,4	10	8,3	4,6	3,7	
	Stand.abw.	5,3	1,9	2,1	0,5	0,3	1,2	0,7	0,1	0,1	0,3	0,7	
Zug	$\sigma_{t,u}$	in MPa	Mittelwert	55,6	45,3	36,2	26,7	18,7	15,9	13,9	11,6	9,1	7,3
		Stand.abw.	1,4	0,6	0,5	0,4	0,9	0,7	0,3	0,3	0,3	0,3	
$\epsilon_{t,u}$	in %	Mittelwert	11,9	16,9	28,2	26	29,5	44	37,4	28	40,7	52,2	
	Stand.abw.	1,8	3,4	1,3	3	3,7	8,8	6,6	1	2,3	7,6		
E_c	in MPa	Mittelwert	1040	868	763	640	422	315	160	129	-	139	
	Stand.abw.	19	61	24	12	10	32	26	9	-	25		
Druck	$\sigma_{c,p}$	in MPa	Mittelwert	68,3	50,6	38,2	27,8	15	6,5	5,7	5	-	5
		Stand.abw.	3,9	1,9	1,1	1,1	0,3	0,2	0,7	0,6	-	0,4	
$\sigma_{c,10}$	in MPa	Mittelwert	71,6	54,1	41,6	29,9	16,4	15,5	11,8	10,5	-	7,4	
	Stand.abw.	2,1	1,8	0,8	0,6	0,3	1	-0,6	0,3	-	1,8		
Poissonzahl	ν	Mittelwert	0,39	-	-	0,38	-	-	-	0,3	-	-	
		Stand.abw.	0,01	-	-	0	-	-	-	0	-	-	
DMTA	G	in MPa	518	397	326	263	188	148	126	101	74	45	
		aus G	1409	1079	886	714	511	403	342	274	200	121	
E	in MPa												
	aus G												

AI-2 Ergebnisse der uniaxialen Druckversuche

AI-2.1 Uniaxiale Druckversuche bei verschiedenen Temperaturen

Tabelle AI-3: Ergebnisse der Druckversuche bei -20°C

C_-20	E_c MPa	$\sigma_{c,p}$ MPa	$\sigma_{c,10}$ MPa
C_-20_06	1366,3	-51,58	-54,38
C_-20_07	1147,3	-46,92	-49,91
C_-20_08	1218,9	-47,90	-51,10
C_-20_09	1268,1	-46,35	-50,92
C_-20_10	1231,4	-45,43	-50,18
Mittelwert	1246	-47,63	-51,30
Stand.abw.	72	2,13	1,60

Tabelle AI-4: Ergebnisse der Druckversuche bei Raumtemperatur

C_RT	E_c MPa	$\sigma_{c,p}$ MPa	$\sigma_{c,10}$ MPa
C_RT_01	883,6	-28,36	-32,89
C_RT_02	861,1	-25,60	-31,63
C_RT_03	942,9	-28,33	-33,84
C_RT_04	855,5	-31,90	-34,66
C_RT_05	847,2	-30,41	-33,94
Mittelwert	878	-28,92	-33,39
Stand.abw.	35	2,14	1,05

Tabelle AI-5: Ergebnisse der Druckversuche bei 60°C

C_60	E_c MPa	$\sigma_{c,p}$ ¹ MPa	$\sigma_{c,10}$ MPa
C_60_11	74,7	n.a.	-6,76
C_60_12	171,9	n.a.	-16,82
C_60_13	128,2	n.a.	-13,55
C_60_14	99,6	n.a.	-10,07
C_60_15	111,8	n.a.	-11,20
Mittelwert	117	-	-11,68
Stand.abw.	32	-	3,38

¹Da es in keinem der 60°C -Versuche zu einem Abfall der Steifigkeit kam, sondern diese stetig anstieg (vgl. Abbildung 3.6), ist die 0,2%-Dehngrenze nicht auswertbar.

AI-2.2 Uniaxiale Druckversuche bei Raumtemperatur nach Temperierung

Tabelle AI-6: Ergebnisse der Druckversuche nach 1 h Temperierung

C_TRT1h	E_c MPa	$\sigma_{c,p}$ MPa	$\sigma_{c,10}$ MPa
C_TRT1h_17	666,9	-17,13	-26,72
C_TRT1h_18	698,8	-19,10	-26,79
C_TRT1h_19	685,4	-19,63	-27,14
Mittelwert	684	-18,62	-26,89
Stand.abw.	13	1,07	0,18

Tabelle AI-7: Ergebnisse der Druckversuche nach 24 h Temperierung

C_TRT24h	E_c MPa	$\sigma_{c,p}$ MPa	$\sigma_{c,10}$ MPa
C_TRT24h_20	787,2	-23,65	-33,31
C_TRT24h_21	745,8	-19,42	-28,23
C_TRT24h_22	684,0	-20,27	-28,31
C_TRT24h_23	703,0	-21,14	-28,90
Mittelwert	730	-21,12	-29,95
Stand.abw.	40	1,83	2,38

AI-3 Ergebnisse der uniaxialen Zugversuche

Tabelle AI-8: Ergebnisse der Zugversuche bei $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$

T_-20	E_t MPa	$\sigma_{t,p}$ MPa	$\sigma_{t,u}$ MPa	$\varepsilon_{t,u}$
T_-20_42	1167,7	22,27	44,19	0,221
T_-20_43	1059,3	26,88	43,87	0,144
T_-20_44	1177,2	21,03	43,52	0,184
Mittelwert	1135	23,39	43,86	0,183
Stand.abw.	53	2,52	0,27	0,031

Tabelle AI-9: Ergebnisse der Zugversuche bei Raumtemperatur

T_RT	E_t MPa	$\sigma_{t,p}$ MPa	$\sigma_{t,u}$ MPa	$\varepsilon_{t,u}$
T_RT_39	741,4	13,47	26,12	0,317
T_RT_40	757,8	13,24	25,36	0,271
T_RT_41	761,9	12,73	26,48	0,328
Mittelwert	754	13,15	25,99	0,31
Stand.abw.	9	0,31	0,47	0,025

Tabelle AI-10: Ergebnisse der Zugversuche bei $60\text{ }^{\circ}\text{C}$

T_60	E_t MPa	$\sigma_{t,p}$ MPa	$\sigma_{t,u}$ MPa	$\varepsilon_{t,u}$
T_60_39	307,4	6,55	17,36	0,370
T_60_40	377,4	6,84	15,27	0,249
T_60_41	378,3	6,81	16,27	0,304
Mittelwert	354	6,74	16,30	0,308
Stand.abw.	33	0,13	0,86	0,045

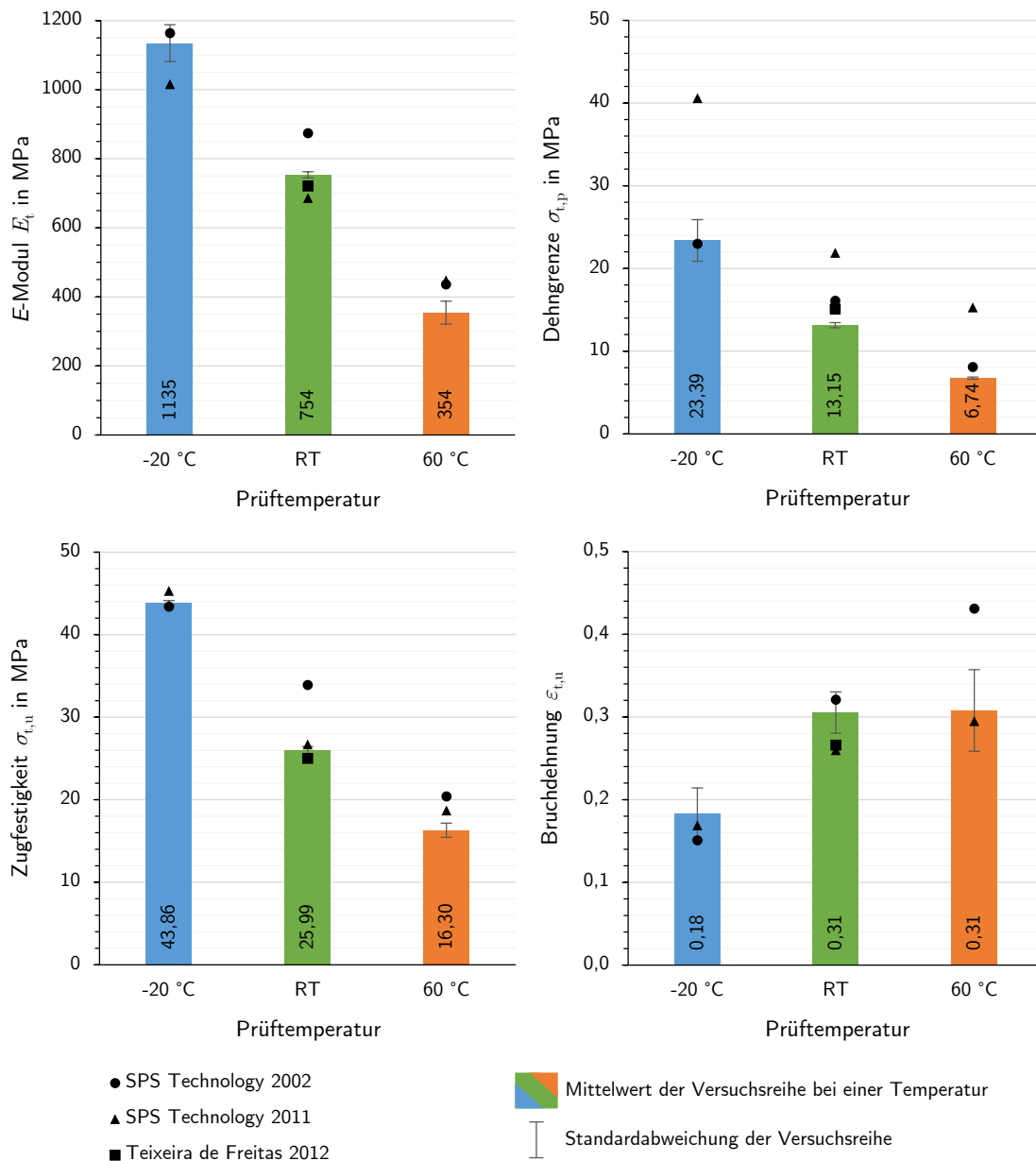


Abbildung AI-1: Auswertung der Zugversuche im Vergleich mit anderen Untersuchungen

AI-4 Ergebnisse der DMTA Temperatur-Sweeps

Zusätzlich zu dem in Abschnitt 4.1.1 gezeigten Versuch D-TS_04 wurden zwei weitere Versuche durchgeführt, um das Phänomen der strukturellen Veränderung des PUR durch eine Temperierung zu untersuchen. Da die Anzahl der verfügbaren DMTA-Probekörper aus der Produktion von SPS Technology begrenzt war, wurden für diese Versuche Laborprobekörper genutzt, die zuvor bei BASF Polyurethanes hergestellt worden waren. Entsprechend unterscheidet sich die generelle Größe von deren Steifigkeit. Die in Abschnitt 4.1.1 interpretierten Tendenzen sind aber auch in diesen Versuchen zu erkennen.

AI-4.1 D-TS_05L

Das Temperaturprogramm des Versuchs D-TS_05 entsprach im Wesentlichen dem des Versuchs D-TS_04 (vgl. Abbildung 4.2). Lediglich die minimale Temperatur wurde auf -80°C herab gesetzt. Dies führte im Versuch dazu, dass der Stickstoff der Kühlung frühzeitig zur Neige ging und der letzte Zyklus nicht mehr vollständig gefahren werden konnte. Entsprechend fehlen in der folgenden Abbildung AI-2 die Kurven des sechsten Heiz-Sweeps und das Verhältnis (6/5). Die prinzipiellen Auswirkungen der Temperung und Nachvernetzung, wie sie in Abschnitt 4.1.1 interpretiert werden, sind aber auch hier zu erkennen. Die Steigerung der Steifigkeit im Heiz-Sweep bei 125°C fällt sogar noch höher aus als im Versuch D-TS_04.

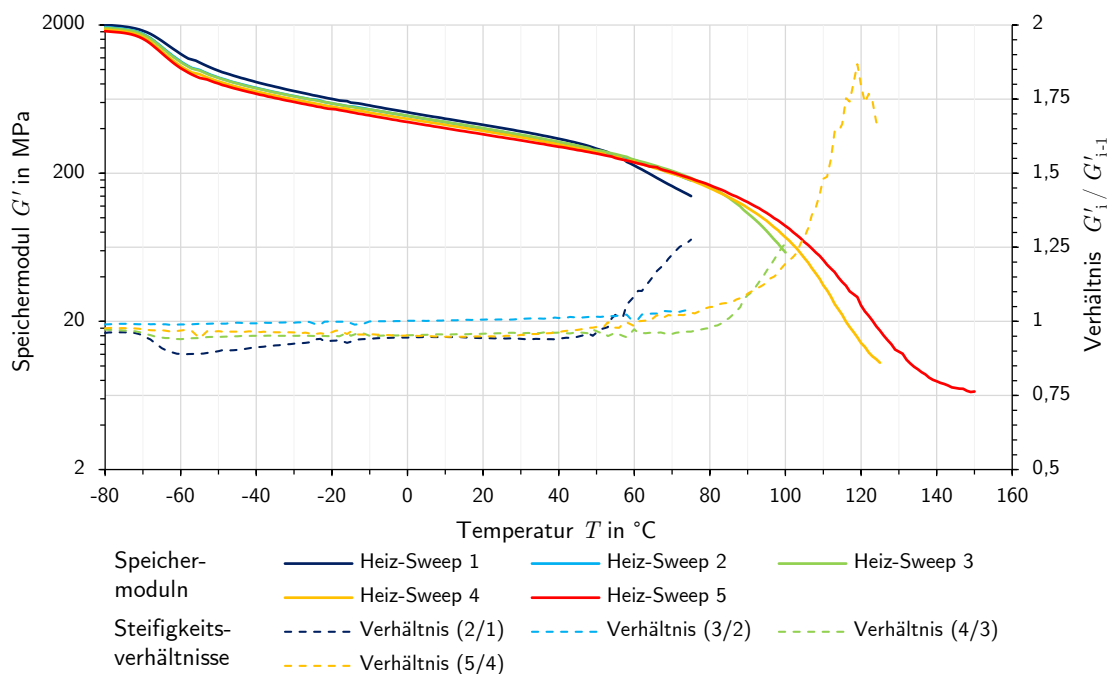


Abbildung AI-2: Speichermodulkurven der fünf Heiz-Sweeps des Versuchs D-TS_05 und Verhältnisse des jeweils in einem Heiz-Sweep gemessenen Speichermoduls bezogen auf den des vorherigen Zyklus

AI-4.2 D-TS_06L

Für den Versuch D-TS_06 wurde das Temperaturprogramm grundlegend angepasst (siehe Abbildung AI-3). Direkt im ersten Zyklus sollte mit einer hohen Temperatur von 100°C und einer langen Haltezeit von 6 h eine möglichst starke strukturellen Veränderungen herbeigeführt werden, ohne dabei die Glasübergangstemperatur der harten Phase des Copolymers zu überschreiten. Damit soll zusätzlich untersucht werden, ob eine längerfristige Wärmeeinwirkung auf das PUR unterhalb von dessen α -Übergang ähnlich starke Auswirkungen hat, wie ein kurzfristiges Überschreiten der Glasübergangstemperatur.

Im Anschluss an den ersten Zyklus folgten zwei weitere bei ebenfalls 100°C mit Haltezeiten von je nur 30 min. Mit ihnen soll untersucht werden, ob nach einer solch langen Haltezeit eine Temperierung der selben Größenordnung noch Auswirkungen zeigt. Dies soll Rückschlüsse darauf erlauben, ob eine nachträgliche Vernetzung durch erneutes Aufheizen erneut in Gang gesetzt werden kann.

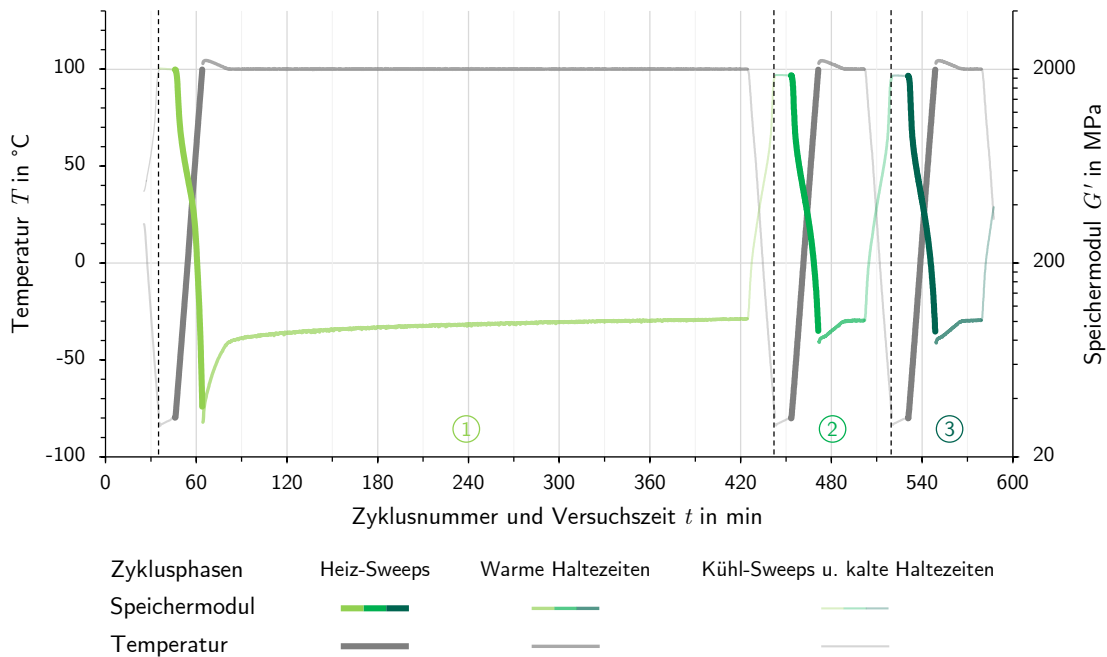


Abbildung AI-3: Modifiziertes Temperaturprogramm des Versuchs D-TS_06 und Verlauf des Speichermoduls über die drei Zyklen des Versuchs

Abbildung AI-4 zeigt die gemessenen Speichermodul-Kurven und die Kurven der errechneten Verhältnisse. Dabei wurde wie in den vorigen Versuchen auch der Speichermodul eines jeden Heiz-Sweeps auf den des vorangegangenen Zyklus bezogen. Deutlich ist zu erkennen, dass eine lange Haltezeit unterhalb des α -Übergangs zu einer Steigerung der Steifigkeit von bis zu 150 % führen kann. Die in den anderen Versuchen beobachteten Tendenzen zeichnen sich hier durch die lange Temperierung ebenfalls deutlich ab. So wurde die Steifigkeit in niedrigen Temperaturen auf etwa 85 % reduziert. Der Punkt ab dem es zu einer Steigerung der Steifigkeit kommt, liegt wie auch in den anderen Versuchen bei 60 °C.

Im Verhältnis der beiden Heiz-Sweeps (3/2) zeigt sich, dass die erneute Temperierung keine Auswirkungen mehr hat. Nach 6 h scheint der Stoff soweit nachvernetzt zu sein, dass es zu keiner Änderung der Eigenschaften mehr kommt. Wie die anderen Versuche aber gezeigt haben, kann eine Erhöhung der Temperatur über den Glasübergang zu neuer Bewegungsfähigkeit der Molekülketten und damit durchaus zu einem neuerlichen Nachvernetzen führen.

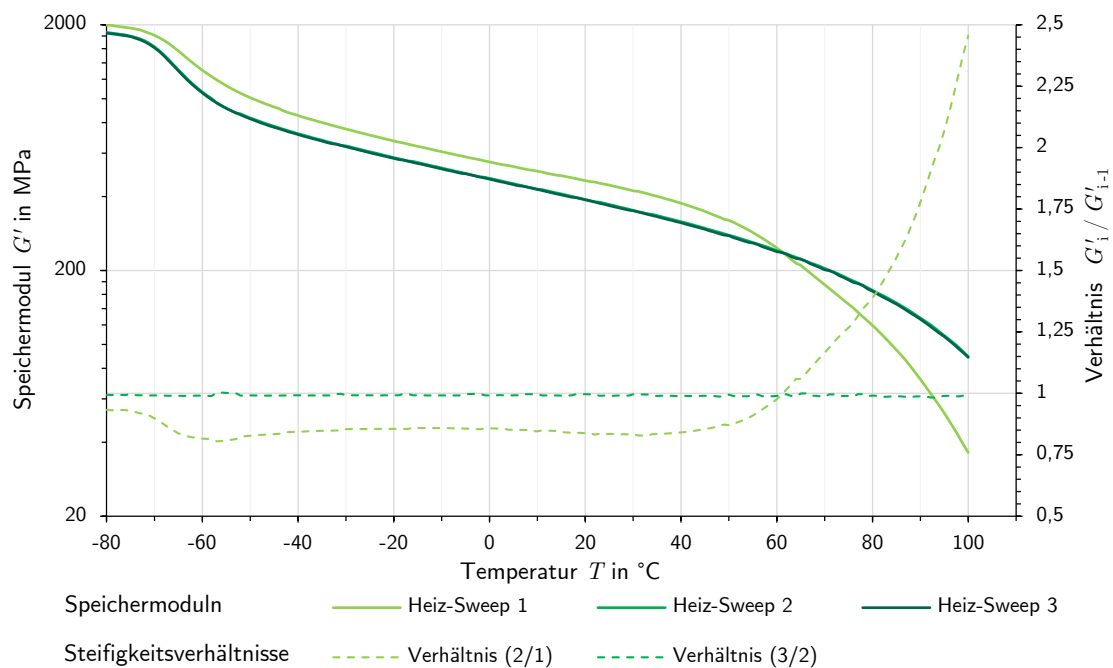


Abbildung AI-4: Speichermodulkurven der drei Heiz-Sweeps des Versuchs D-TS_06 und Verhältnisse des jeweils in einem Heiz-Sweep gemessenen Speichermoduls bezogen auf den des vorherigen Zyklus

AI-5 Ergebnisse der DMTA Temperatur-Frequenz-Sweeps

Folgend sind die aufbereiteten Ergebnisse der durchgeführten DMT Analysen zusammengestellt, die aus Platzgründen nicht direkt in der Arbeit gezeigt werden.

AI-5.1 Linearitäts-Prüfungen

Bei der niedrigsten und der höchsten Temperatur eines jeden D-TFS-Versuchs wurde jeweils ein Amplituden-Sweep durchgeführt. Bei einer konstanten Frequenz von 1 Hz wurde die Schubdeformation von 0,015 bis 0,15 % Schrittweise erhöht und der Absolutwert des dynamischen Moduls gemessen. Sollten die aufgebrachten Deformationen zu groß sein und das PUR den LVE-Bereich verlassen, würde sich dies in einer Änderung des Moduls zeigen. Wie in Abbildung AI-5 zu erkennen, verläuft der Absolutwert des dynamischen Moduls über den geprüften Deformationsbereich in fast allen Fällen konstant. Lediglich die Versuche D-TFS_01 und D-TFS_02 weichen hiervon im Anfangsbereich ab. Wie sich in der Auswertung zeigte, wurde das Temperaturprogramm der beiden Versuche falsch eingestellt, weshalb die Temperatur am Anfang der Amplituden-Sweeps bei max T von 150 auf 100 °C sank (vgl. Abbildung AI-6). Dies zeigt sich in der Änderung des Moduls am Beginn der zugehörigen Kurven, stellt jedoch keine viskoelastische Nichtlinearität verursacht durch die Deformation dar. Dies bestätigt das lineare Verhalten nach Einpendeln der Temperatur bei höheren Deformationsamplituden.

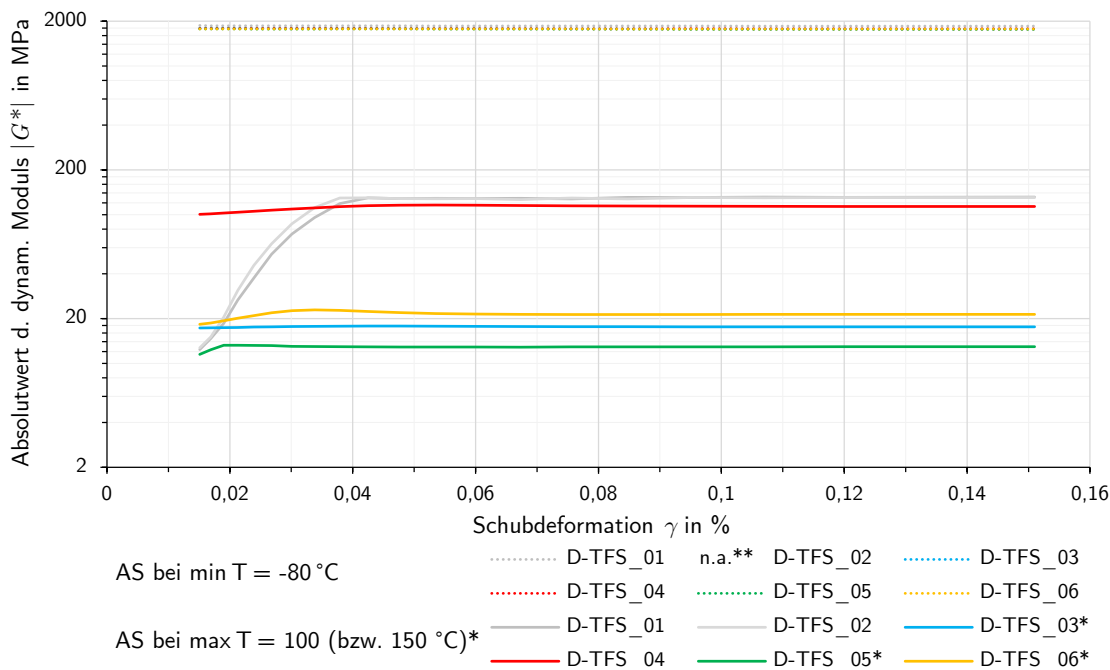


Abbildung AI-5: Ergebnisse aller im Rahmen von D-TFS-Versuchen durchgeführten Amplituden-Sweeps ** (Der Versuch D-TFS_02 konnte mangels ausreichenden Stickstoffs nicht beendet werden, weshalb kein Amplituden-Sweep bei min T durchgeführt wurde)

AI-5.2 Die ersten Versuche D-TFS_01 und D-TFS_02

In den ersten beiden D-TFS-Versuchen wurde fälschlicherweise ein Temperaturprogramm verwendet, das eigentlich zur Untersuchung von Polymeren mit kristallinen Strukturen gedacht ist (siehe Abbildung AI-6). Hierbei werden die Probekörper zunächst erhitzt um ihre Temperaturhistorie zu annullieren und sie von ihren Eigenschaften zu vereinheitlichen (Phase 0). Nach dem Amplituden-Sweep bei $\max T$ folgt der eigentliche TF-Sweep (Phase 3), der von heiß nach kalt gefahren wird. Am Ende folgt Amplituden-Sweep bei $\min T$. Im vorliegenden Fall führte diese Art der Temperierung dazu, dass das Gefüge des PUR schon vor Beginn der TF-Messungen nachhaltig verändert und die ursprünglichen Eigenschaften verfremdet wurden. Dies zeigt sich vor allem im Vergleich der gemasterten Kurven der verschiedenen D-TFS-Versuche am Ende von Abschnitt 4.1.2.

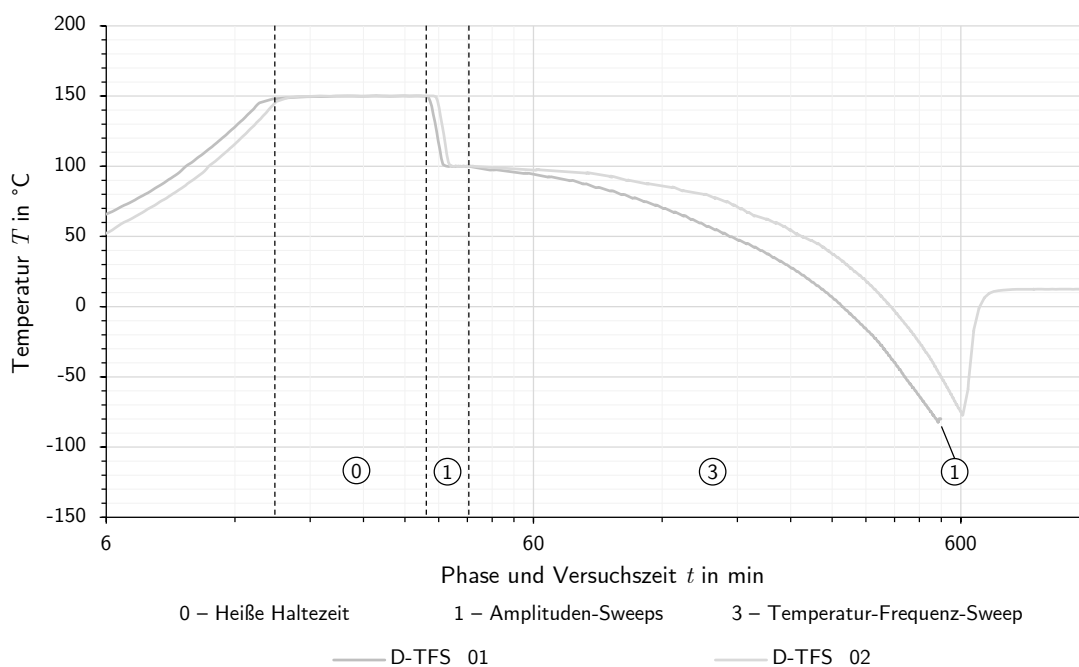


Abbildung AI-6: Abläufe der Versuche D-TFS_01 und D-TFS_02 anhand ihrer Temperaturprogramme (Die Phase 2 fehlt im Ablauf, da sich die Nummerierung der Phasen an derjenigen aus Abbildung 4.4 orientiert und der initiale Temperatur-Sweep in diesen Versuchen nicht durchgeführt wurde)

Folgend werden die Ergebnisse der in den Temperatur-Frequenz-Sweeps von D-TFS_01 und D-TFS_02 gemessenen Speichermoduln dargestellt und die in Abschnitt 4.1.2 behandelten mCC- und vGP-Plots der Versuche. Anders als in den neueren Versuchen charakterisieren die folgenden den Stoff klar als thermorheologisch einfach und sprechen für eine Anwendbarkeit der ZTV.

AI-5.2.1 Ergebnisse von D-TFS_01

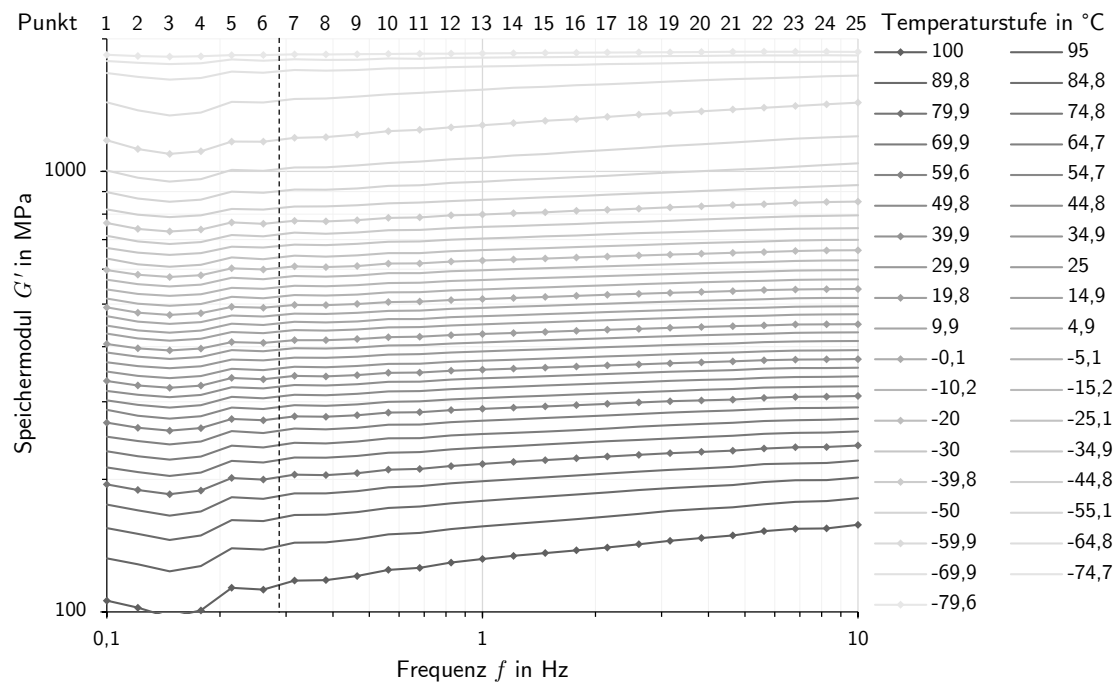


Abbildung AI-7: Ergebnisse des Speichermoduls G' in Abhängigkeit von der Frequenz und der Temperatur aus dem TF-Sweep (Phase 3) des Versuchs D-TFS_01

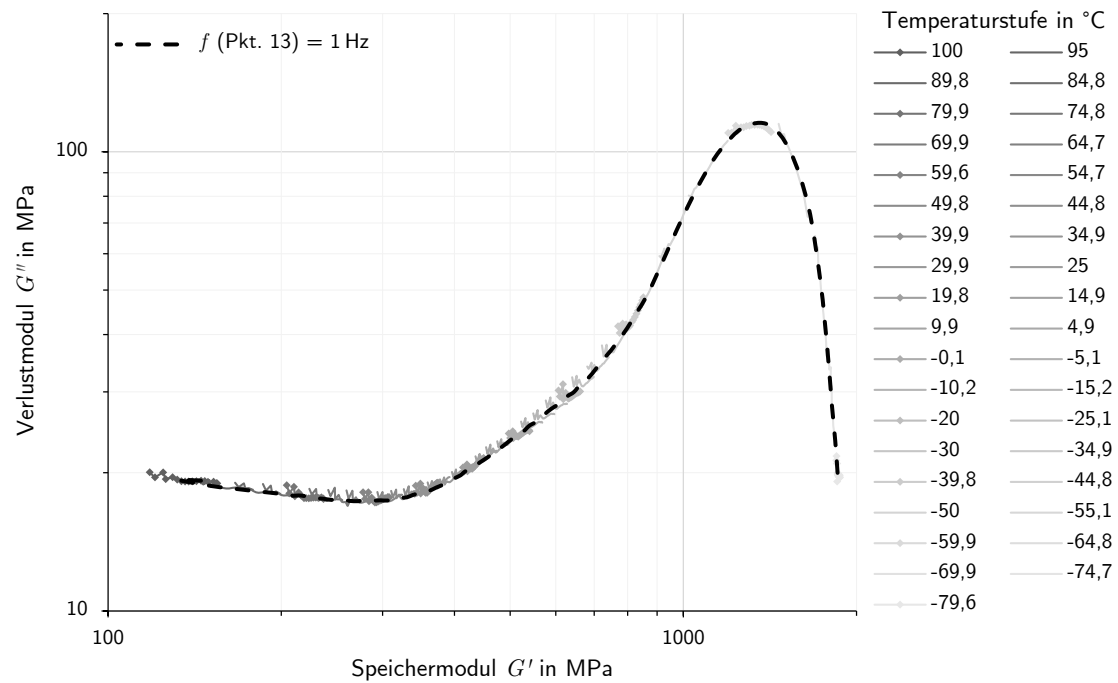


Abbildung AI-8: mCC-Plot des Versuchs D-TFS_01

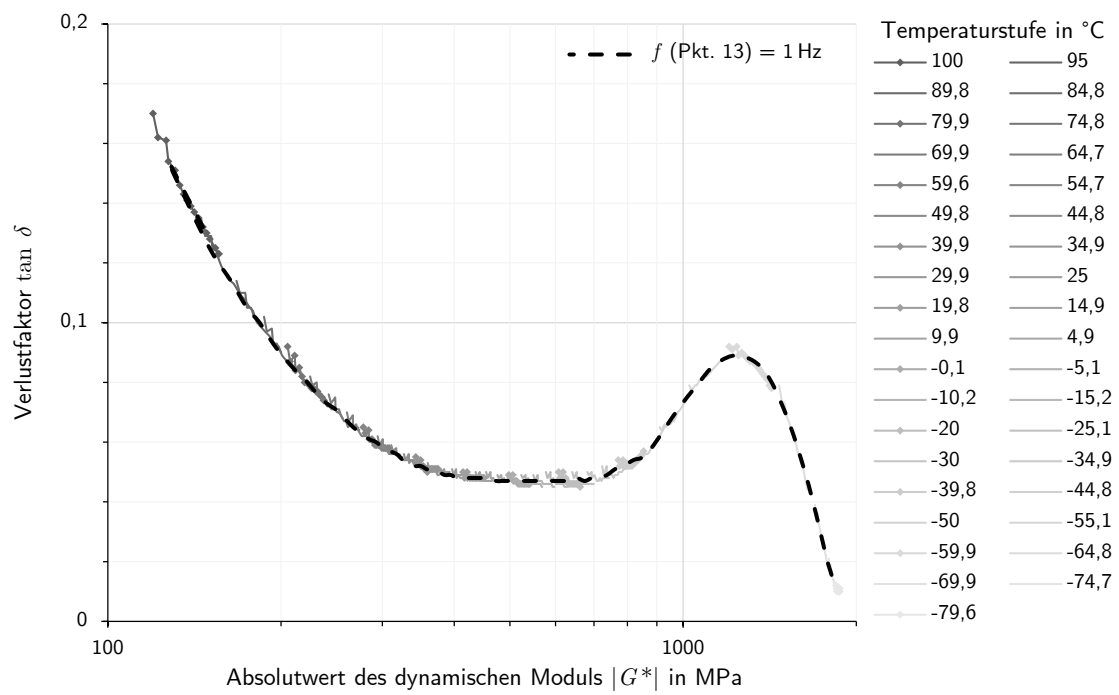


Abbildung AI-9: vGP-Plot des Versuchs D-TFS_01

AI-5.2.2 Ergebnisse von D-TFS_02

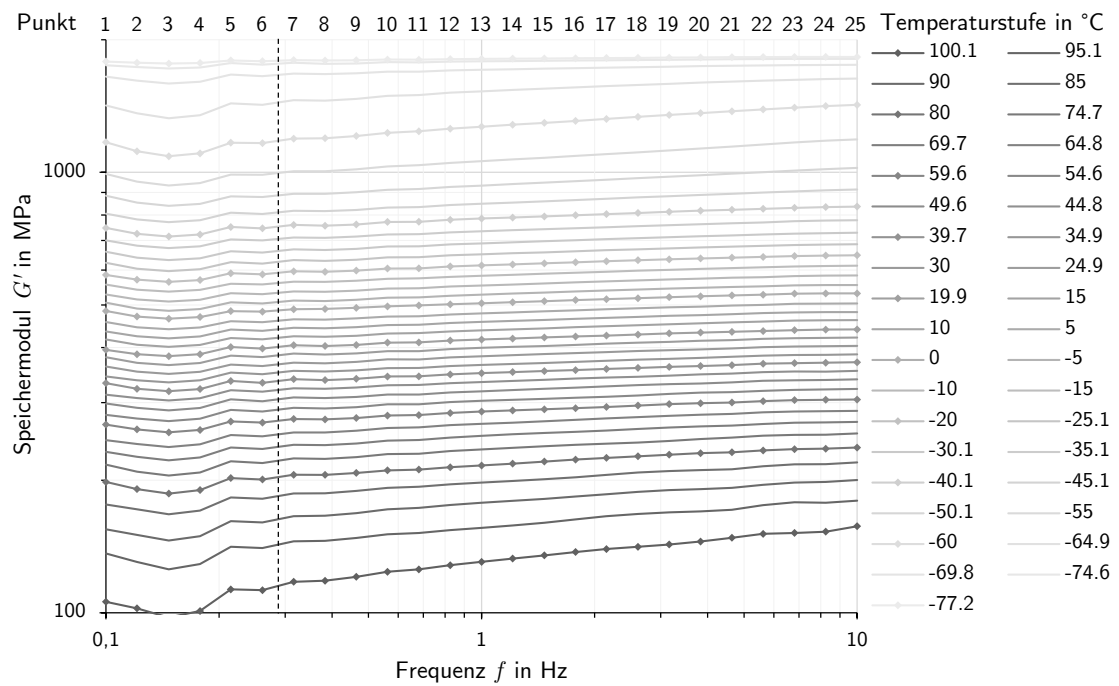


Abbildung AI-10: Ergebnisse des Speichermoduls G' in Abhängigkeit von der Frequenz und der Temperatur aus dem TF-Sweep (Phase 3) des Versuchs D-TFS_02

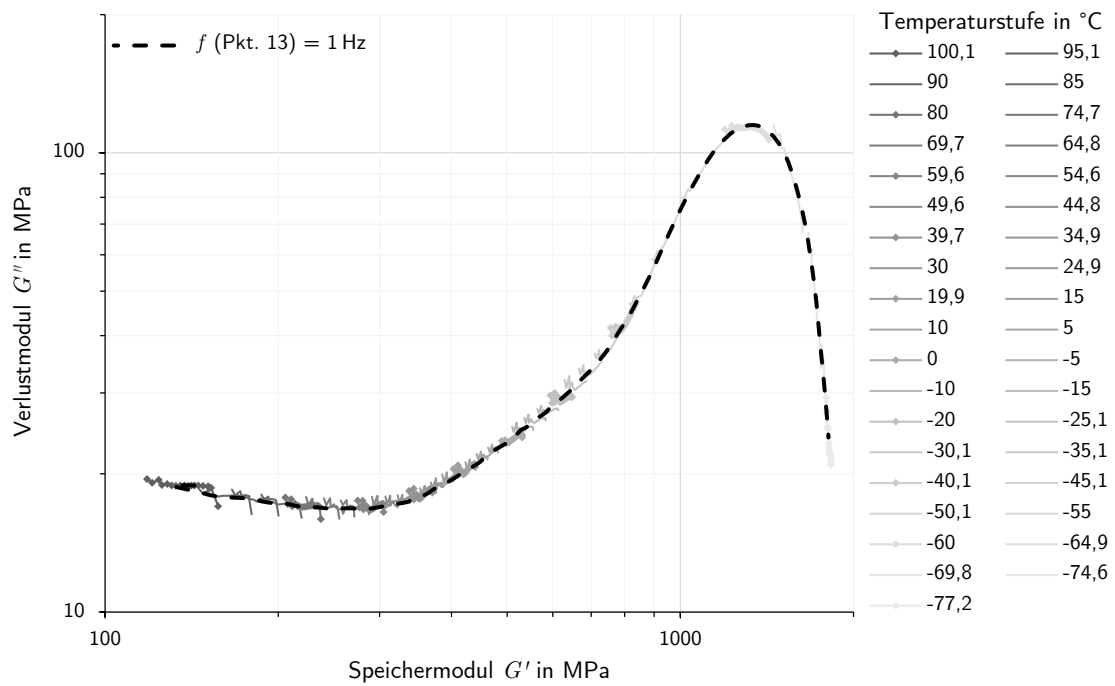


Abbildung AI-11: mCC-Plot des Versuchs D-TFS_02

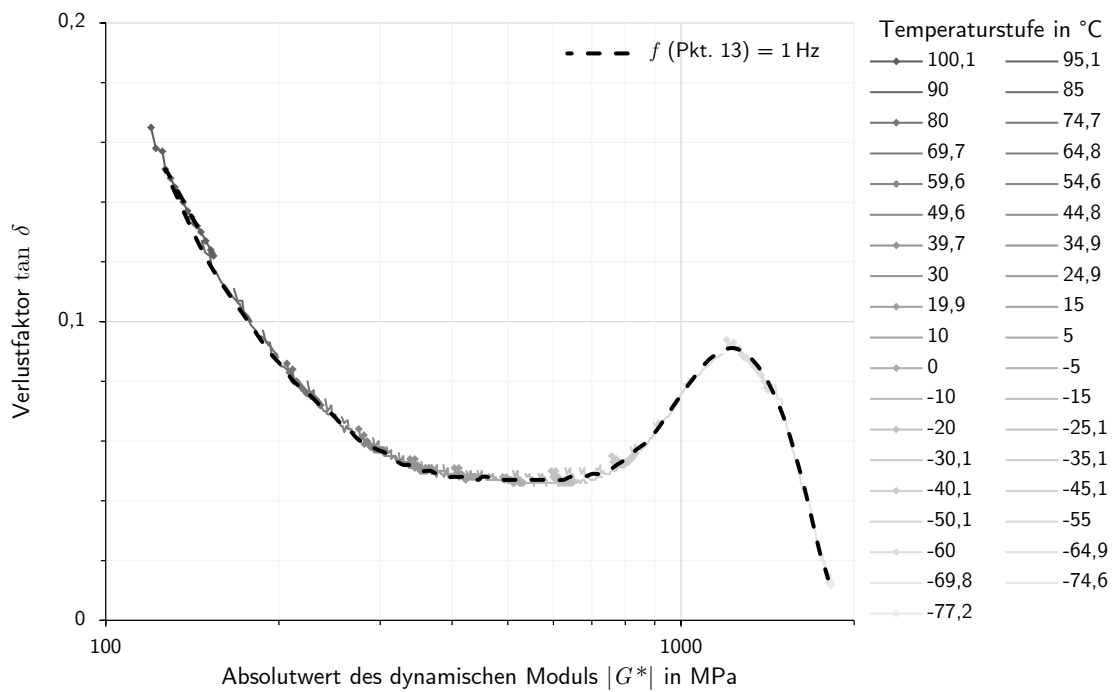


Abbildung AI-12: vGP-Plot des Versuchs D-TFS_02

AI-5.3 Die Versuche D-TFS_03 bis D-TFS_06

Folgend werden die Ergebnisse der Temperatur-Frequenz-Sweeps mit korrigiertem Temperaturprogramm gezeigt. Analog zu den in Abschnitt 4.1.2 präsentierten Graphen von Versuch D-TFS_03, werden für jeden der anderen Versuche die Ergebnisse der TF-Sweeps, ein Vergleich der Ergebnisse aus den Temperatur- und TF-Sweep gegeben sowie die in Abschnitt 4.1.2 behandelten mCC- und vGP-Plots dargestellt. Zusätzlich werden die bei $f = 1$ Hz gemessenen Speichermoduln aus Temperatur- und TF-Sweep und die daraus berechneten Verschiebungsfaktoren $c(T)$ gezeigt. Die Versuchsprogramme mit den Temperierfolgen der Versuche sind in Abbildung 4.4 dargestellt und werden hier nicht noch einmal gegeben.

AI-5.3.1 Ergebnisse von D-TFS_03

Die Ergebnisse des Versuchs D-TFS_03 werden größtenteils schon in Abschnitt 4.1.2 gegeben und daher hier nicht noch einmal aufgeführt. Lediglich die Daten des vertikalen Verschiebungsfaktors $c(T)$ werden, wie auch für die anderen Versuche, hier detailliert gezeigt.

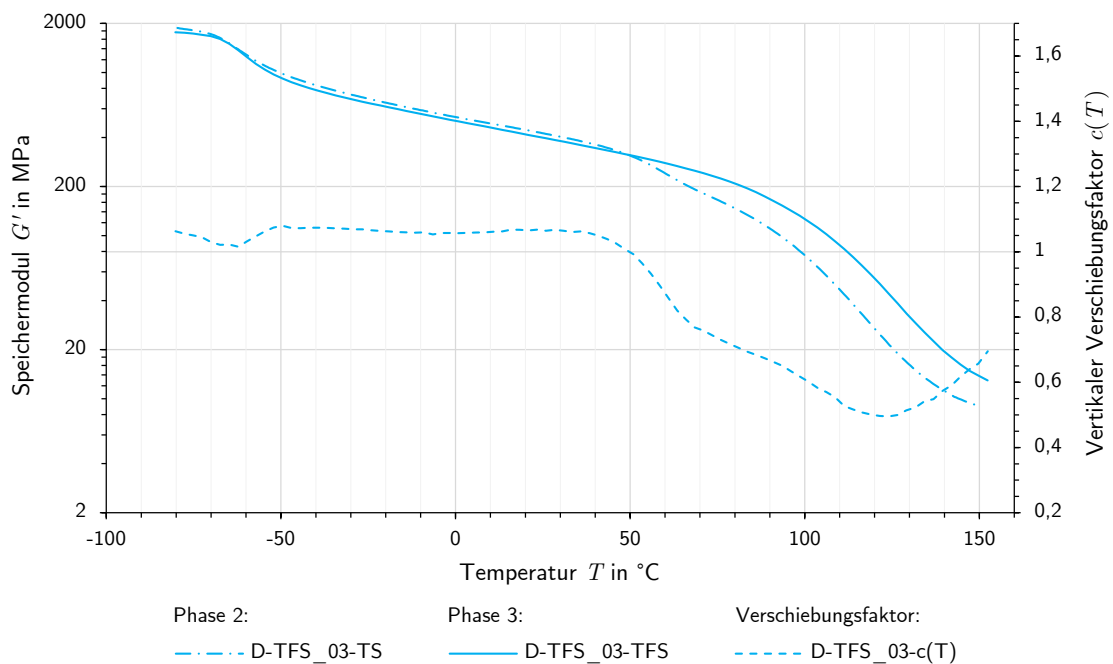


Abbildung AI-13: Verläufe der in den verschiedenen Phasen des Versuchs D-TFS_03 gemessenen Speichermoduln G' und des daraus errechneten vertikalen Verschiebungsfaktors $c(T)$

Tabelle AI-11: Wertetabelle der zuvor dargestellten Ergebnisse für die Verläufe der Speichermoduln G' und des sich daraus ergebenden vertikalen Verschiebungsfaktors $c(T)$

T in °C	G'_{TS} in MPa	G'_{TFS} in MPa	$c(T)$
-80,2	1878,50	1766,80	1,063222
-77,6	1849,40	1752,40	1,055353
-75,1	1820,60	1733,70	1,050124
-72,6	1777,80	1702,50	1,044229
-70,0	1721,00	1671,20	1,029799
-67,4	1642,30	1608,00	1,021331
-64,8	1533,20	1499,90	1,022201
-62,2	1390,90	1370,00	1,015255
-59,7	1280,50	1240,80	1,031995
-57,2	1183,80	1130,30	1,047333
-54,6	1107,90	1042,60	1,062632
-52,1	1045,30	972,83	1,074494
-49,5	991,80	918,74	1,079522
-47,0	936,70	873,18	1,072746
-44,4	896,70	836,04	1,072556
-41,9	861,60	802,52	1,073618
-39,4	831,10	774,08	1,073662
-36,8	802,90	747,88	1,073568
-34,3	775,90	723,89	1,071848
-31,8	751,70	702,05	1,070721
-29,2	728,90	681,90	1,068925
-26,7	707,90	662,37	1,068738
-24,1	686,80	644,26	1,066029
-21,6	668,20	628,09	1,063860
-19,1	650,40	612,12	1,062537
-16,6	632,40	596,39	1,060380
-14,0	615,60	581,08	1,059407
-11,5	599,80	566,71	1,058390
-9,0	585,70	552,64	1,059822
-6,5	568,00	539,18	1,053452
-4,0	556,60	526,16	1,057853
-1,6	543,20	513,62	1,057591
0,9	530,20	501,56	1,057102
3,4	518,20	489,77	1,058048
5,9	506,60	478,29	1,059190
8,4	494,90	467,16	1,059380
10,9	484,10	456,09	1,061413
13,4	473,20	445,45	1,062297
15,9	464,40	434,95	1,067709
18,4	453,10	424,46	1,067474
20,9	441,50	414,41	1,065370
23,4	432,40	404,90	1,067918
25,9	421,00	395,50	1,064475
28,4	412,10	386,04	1,067506
30,9	401,30	376,92	1,064682
33,4	390,50	368,12	1,060795
35,9	381,70	359,29	1,062373
38,4	370,50	350,53	1,056971
40,9	358,70	341,78	1,049506

Tabelle AI-11: Vertikaler Verschiebungsfaktor $c(T)$ für D-TFS_03 (Fortsetzung)

T in °C	G'_{TS} in MPa	G'_{TFS} in MPa	$c(T)$
43,4	346,30	333,27	1,039097
45,9	333,30	324,71	1,026454
48,4	319,00	316,24	1,008728
50,9	306,60	308,73	0,993101
53,4	290,10	300,60	0,965070
56,0	272,40	292,14	0,932430
58,5	254,30	283,83	0,895959
61,0	236,10	275,40	0,857298
63,5	219,00	267,15	0,819764
66,0	204,50	258,17	0,792114
68,5	192,00	249,93	0,768215
71,0	183,30	241,73	0,758284
73,5	173,20	232,77	0,744082
76,0	163,40	223,96	0,729595
78,5	153,90	214,48	0,717549
81,0	144,70	204,95	0,706026
83,5	135,30	194,91	0,694167
86,0	126,30	184,63	0,684071
88,6	117,10	173,88	0,673453
91,1	108,10	163,31	0,661931
93,6	99,30	152,73	0,650167
96,1	90,40	142,62	0,633852
98,6	81,80	132,47	0,617498
101,1	73,40	121,96	0,601837
103,7	65,30	112,04	0,582828
106,2	58,10	101,95	0,569887
108,7	51,10	92,21	0,554200
111,3	43,60	82,75	0,526914
113,9	38,10	73,77	0,516477
116,4	33,20	65,42	0,507506
118,9	28,90	57,65	0,501301
121,5	25,10	50,56	0,496489
124,0	21,90	44,24	0,495061
126,6	19,20	38,42	0,499766
129,1	17,10	33,27	0,513961
131,7	15,20	29,09	0,522534
134,3	13,80	25,46	0,541942
136,9	12,30	22,43	0,548495
139,5	11,40	19,86	0,573903
142,1	10,60	17,94	0,591023
144,6	10,00	16,21	0,616979
147,2	9,50	14,85	0,639860
149,7	9,10	13,85	0,657040
152,4	9,00	12,95	0,694766

AI-5.3.2 Ergebnisse von D-TFS_04

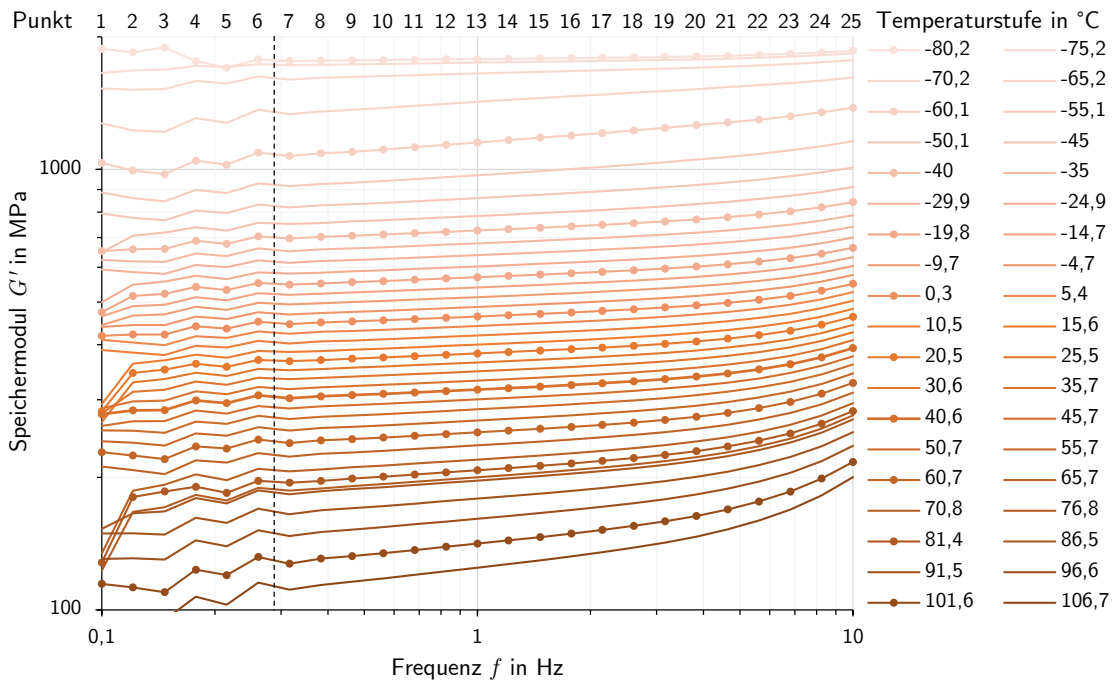


Abbildung AI-14: Ergebnisse des Speichermoduls G' in Abhängigkeit von der Frequenz f und der Temperatur T_F aus den Frequenz-Sweeps (Phase 3) von D-TFS_04

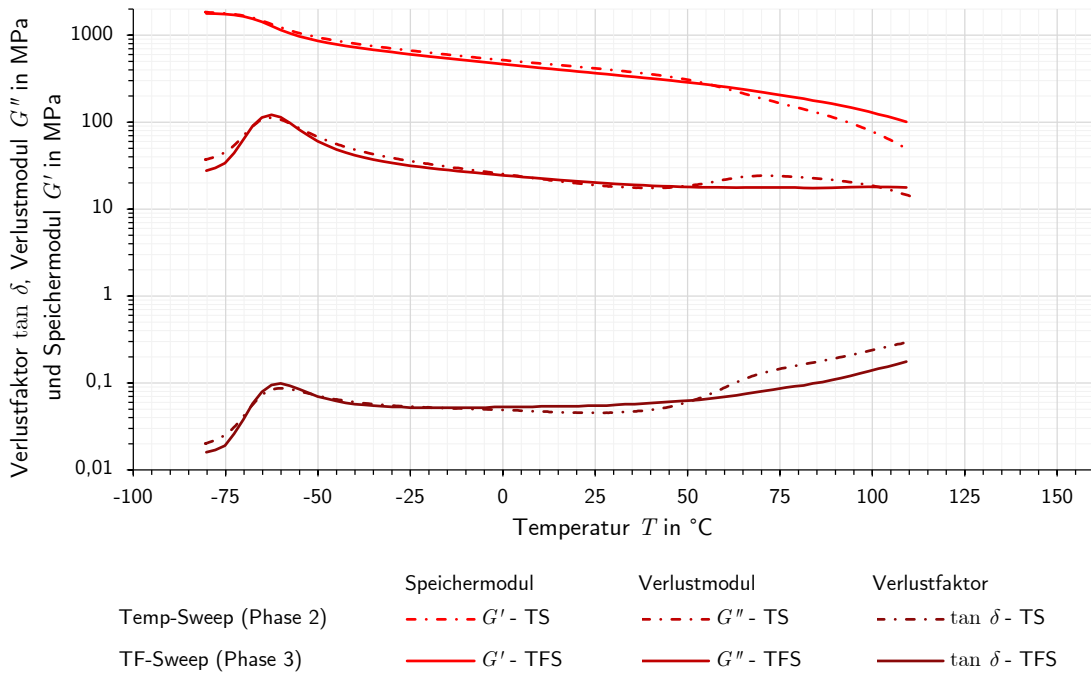


Abbildung AI-15: Ergebnisse des Temperatur-Sweeps und der TF-Sweeps bei $f = 1$ Hz von D-TFS_04

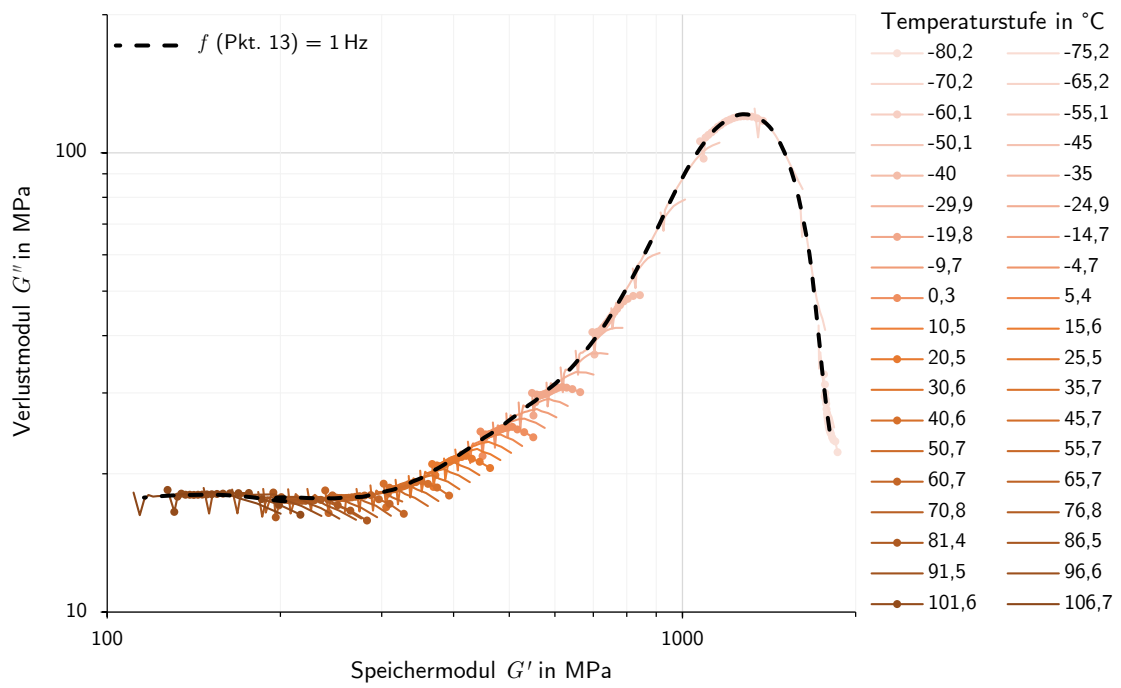


Abbildung AI-16: mCC-Plot des Versuchs D-TFS_04

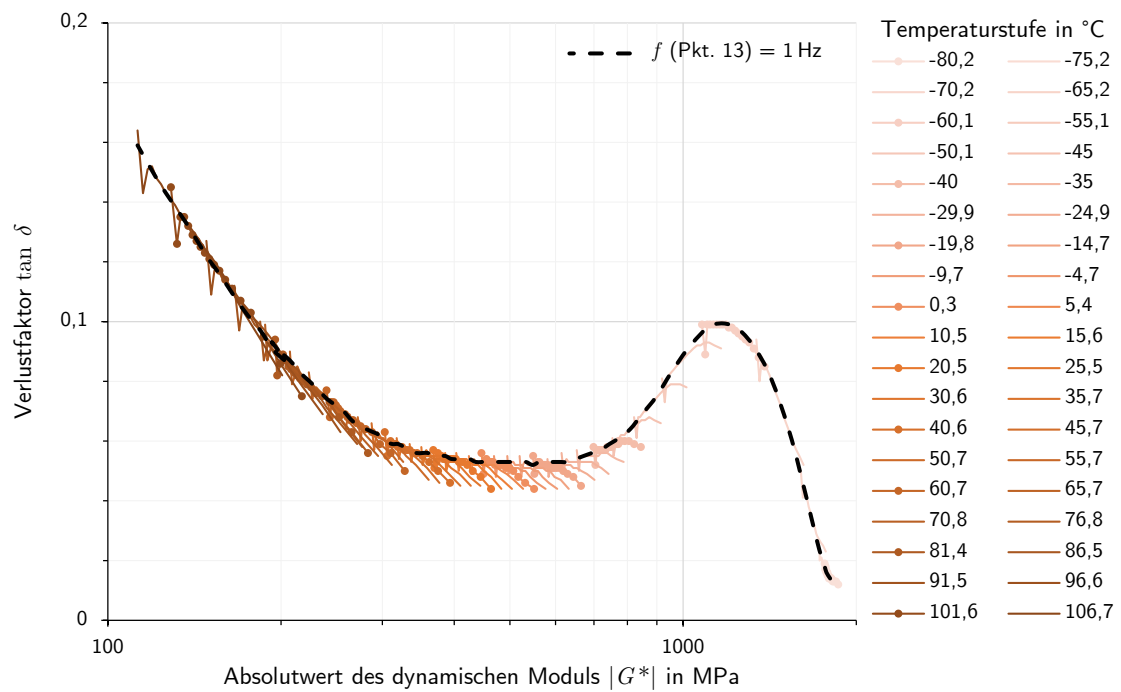


Abbildung AI-17: vGP-Plot des Versuchs D-TFS_04

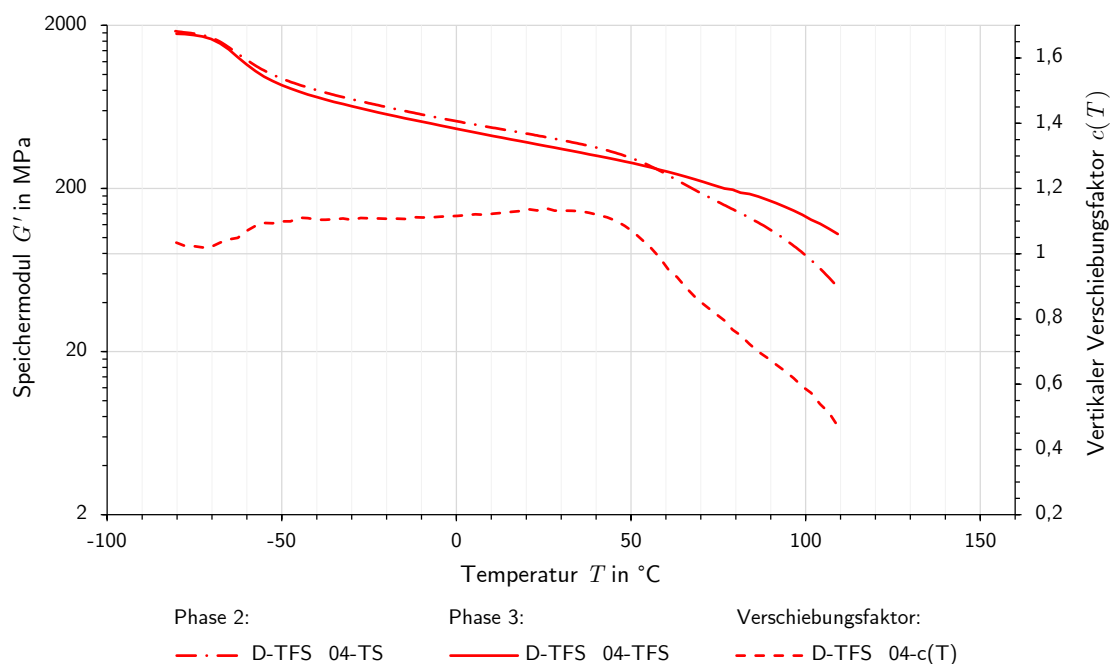


Abbildung AI-18: Verläufe der in den verschiedenen Phasen des Versuchs D-TFS_04 gemessenen Speichermoduln G' und des daraus errechneten vertikalen Verschiebungsfaktors $c(T)$

Tabelle AI-12: Wertetabelle der zuvor dargestellten Ergebnisse für die Verläufe der Speichermoduln G' und des sich daraus ergebenden vertikalen Verschiebungsfaktors $c(T)$

T in °C	G'_{TS} in MPa	G'_{TFS} in MPa	$c(T)$
-80,2	1840,90	1780,20	1,034097
-77,8	1811,90	1768,70	1,024425
-75,2	1788,20	1747,40	1,023349
-72,7	1743,30	1710,10	1,019414
-70,2	1686,70	1651,60	1,021252
-67,7	1602,20	1549,30	1,034144
-65,2	1486,50	1424,20	1,043744
-62,6	1341,80	1279,30	1,048855
-60,1	1232,00	1151,60	1,069816
-57,6	1139,20	1050,00	1,084952
-55,1	1061,60	969,83	1,094625
-52,6	998,30	912,79	1,093680
-50,1	946,60	860,89	1,099560
-47,5	901,40	820,05	1,099201
-45,0	870,60	783,98	1,110488
-42,5	836,10	753,98	1,108915
-40,0	802,30	726,59	1,104199
-37,5	775,40	702,31	1,104071
-35,0	751,30	679,35	1,105910
-32,5	729,80	658,69	1,107957
-29,9	705,50	639,17	1,103775

Tabelle AI-12: Vertikaler Verschiebungsfaktor $c(T)$ für D-TFS_04 (Fortsetzung)

T in °C	G'_{TS} in MPa	G'_{TFS} in MPa	$c(T)$
-27,4	687,80	619,74	1,109820
-24,9	667,40	602,10	1,108454
-22,4	648,40	585,11	1,108168
-19,8	630,30	569,22	1,107305
-17,2	613,20	553,70	1,107459
-14,7	597,10	539,58	1,106601
-12,2	584,80	525,93	1,111935
-9,7	569,90	512,96	1,111003
-7,2	556,00	500,14	1,111689
-4,7	542,60	487,25	1,113597
-2,2	529,70	475,05	1,115041
0,3	517,40	463,56	1,116145
2,9	505,60	452,05	1,118460
5,4	494,40	441,11	1,120809
8,0	481,50	430,18	1,119299
10,5	471,30	419,78	1,122731
13,1	461,20	409,78	1,125482
15,6	451,70	400,28	1,128460
18,1	442,00	390,97	1,130522
20,5	434,30	382,16	1,136435
23,1	422,90	373,35	1,132717
25,5	415,50	364,45	1,140074
28,1	403,70	356,54	1,132271
30,6	394,00	348,02	1,132119
33,1	384,50	339,80	1,131548
35,7	374,80	331,64	1,130141
38,1	364,40	323,84	1,125247
40,6	354,00	316,36	1,118978
43,2	342,80	308,35	1,111724
45,7	330,90	300,66	1,100579
48,2	318,00	292,90	1,085695
50,7	304,40	285,45	1,066386
53,1	289,70	277,59	1,043625
55,7	274,00	269,17	1,017944
58,2	257,70	260,70	0,988493
60,7	240,80	253,00	0,951779
63,2	227,00	244,54	0,928273
65,7	212,00	236,42	0,896709
68,2	198,00	227,99	0,868459
70,8	185,40	219,42	0,844955
73,2	174,00	211,00	0,824645
76,8	159,00	200,03	0,794881
79,1	150,90	196,74	0,767002
81,4	141,40	207,59	0,681150
83,9	134,00	203,77	0,657604
86,5	125,00	196,62	0,635744
89,0	116,30	187,80	0,619276
91,5	107,50	178,96	0,600693
94,1	98,90	169,99	0,581799
96,6	90,50	161,04	0,561972

Tabelle AI-12: Vertikaler Verschiebungsfaktor $c(T)$ für D-TFS_04 (Fortsetzung)

T in °C	G'_{TS} in MPa	G'_{TFS} in MPa	$c(T)$
99,0	82,00	151,97	0,539580
101,6	73,70	141,46	0,520995
104,1	65,60	133,75	0,490467
106,7	58,10	124,75	0,465731
109,2	49,70	115,88	0,428892

AI-5.3.3 Ergebnisse von D-TFS_05

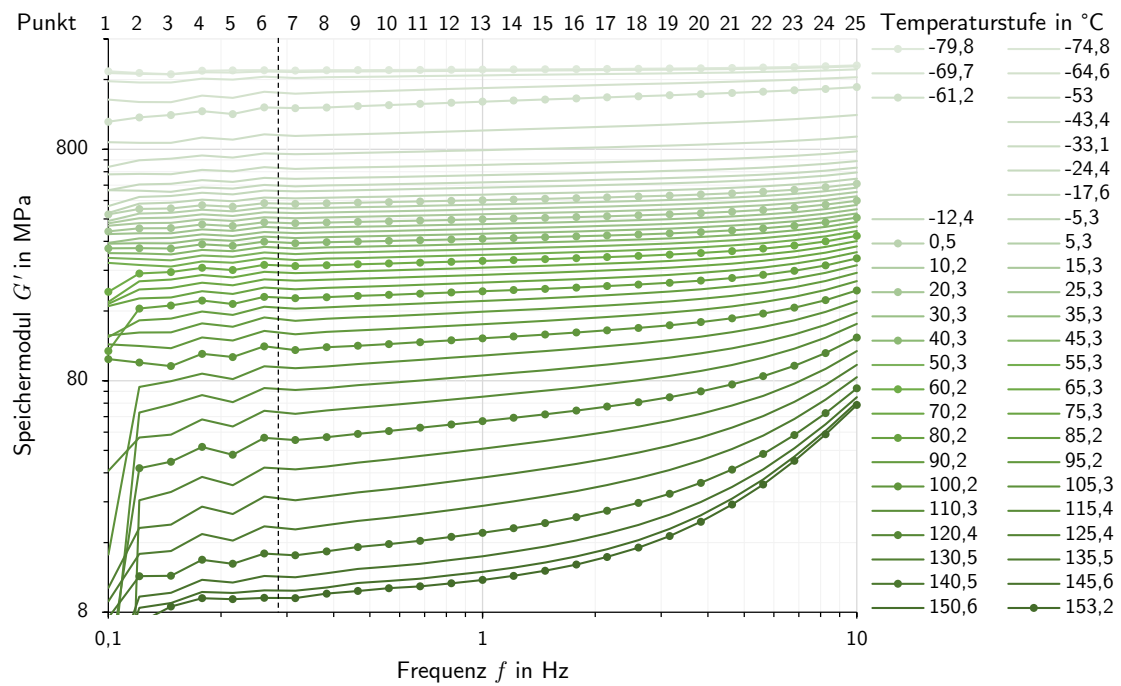


Abbildung AI-19: Ergebnisse des Speichermoduls G' in Abhängigkeit von der Frequenz f und der Temperatur T_F aus den Frequenz-Sweeps (Phase 3) von D-TFS_05

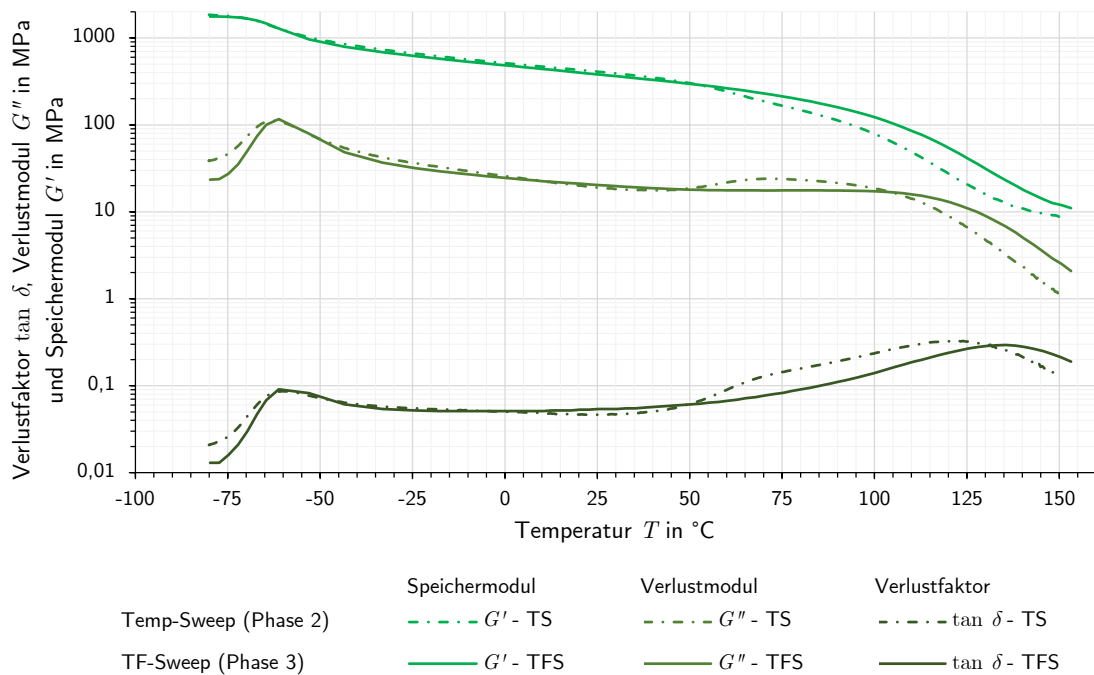


Abbildung AI-20: Ergebnisse des Temperatur-Sweeps und der TF-Sweeps bei $f = 1$ Hz von D-TFS_05

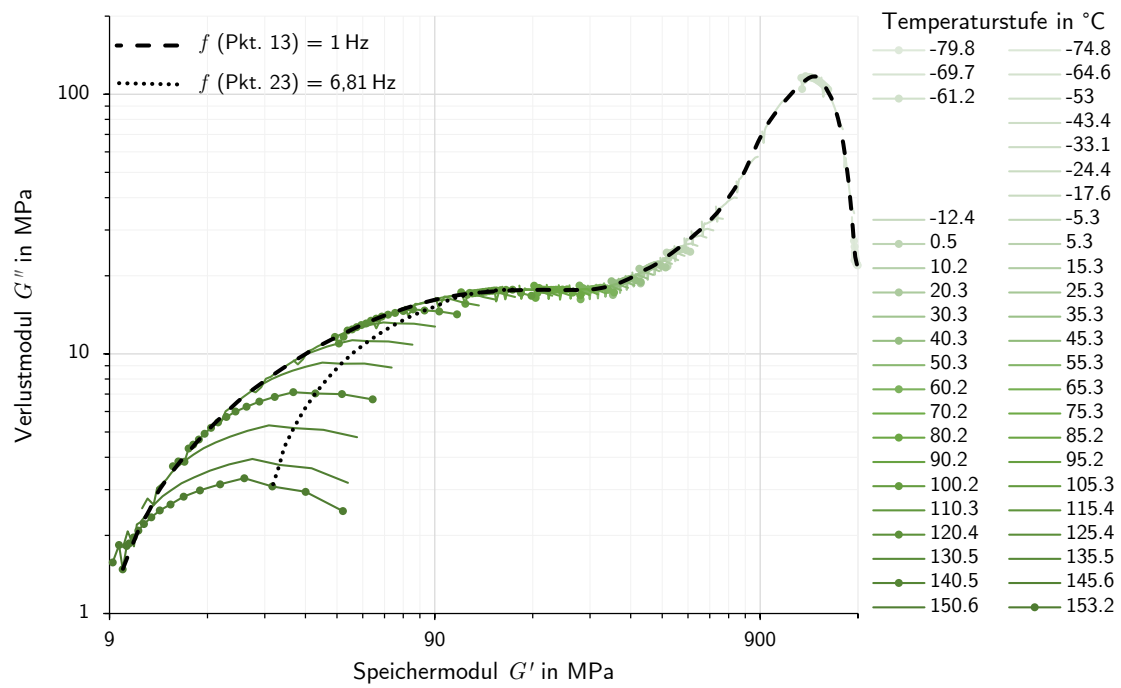


Abbildung AI-21: mCC-Plot des Versuchs D-TFS_05

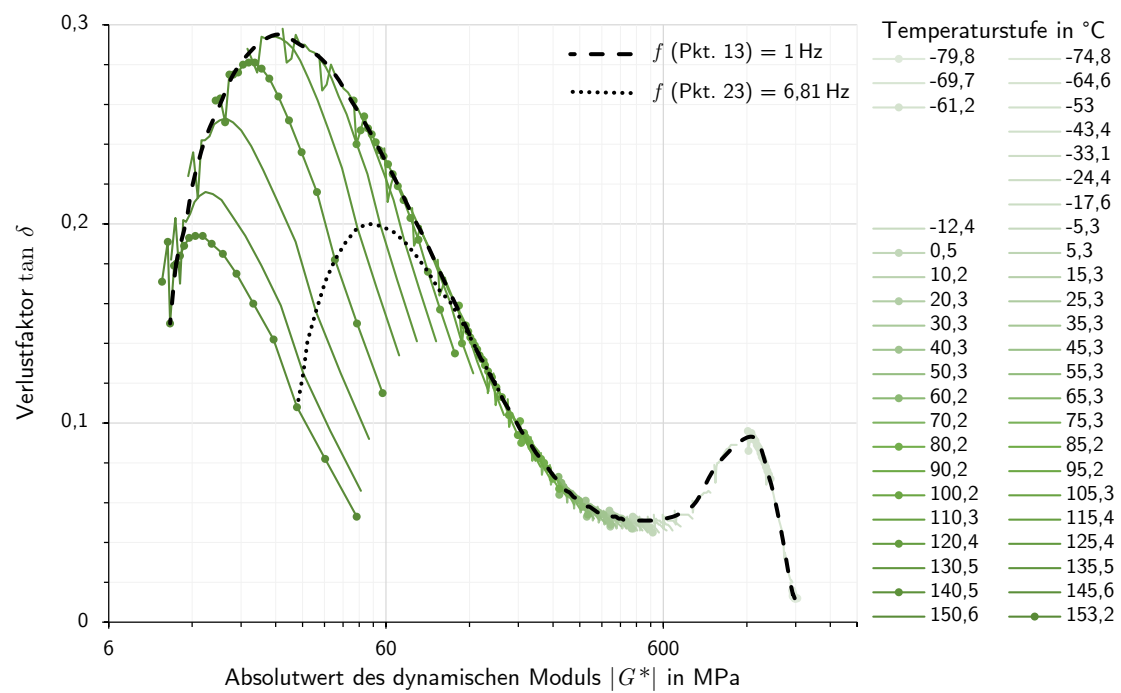


Abbildung AI-22: vGP-Plot des Versuchs D-TFS_05

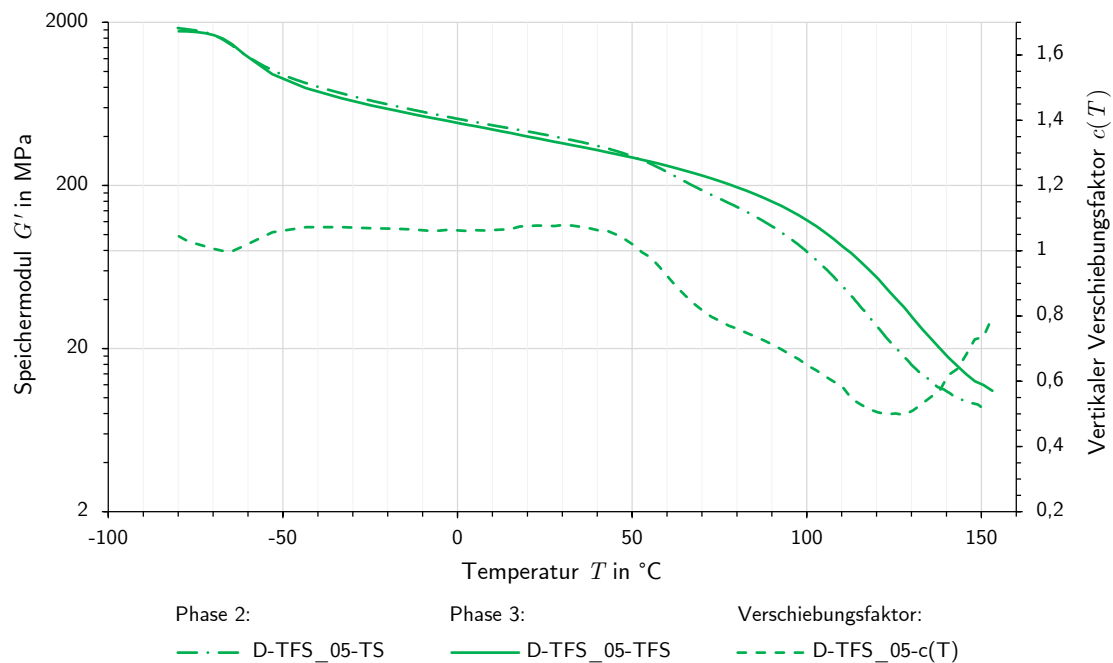


Abbildung AI-23: Verläufe der in den verschiedenen Phasen des Versuchs D-TFS_05 gemessenen Speichermoduln G' und des daraus errechneten vertikalen Verschiebungsfaktors $c(T)$

Tabelle AI-13: Wertetabelle der zuvor dargestellten Ergebnisse für die Verläufe der Speichermoduln G' und des sich daraus ergebenden vertikalen Verschiebungsfaktors $c(T)$

T in °C	G'_{TS} in MPa	G'_{TFS} in MPa	$c(T)$
-79,8	1845,50	1766,80	1,044544
-77,3	1815,70	1763,30	1,029717
-74,8	1782,90	1745,80	1,021251
-72,2	1740,50	1717,00	1,013687
-69,7	1677,30	1667,90	1,005636
-67,1	1585,10	1586,70	0,998992
-64,6	1467,30	1470,20	0,998027
-61,2	1302,50	1284,20	1,014250
-53,0	1018,10	963,72	1,056427
-43,4	849,80	792,62	1,072140
-33,1	734,60	684,97	1,072456
-24,4	660,70	618,23	1,068696
-17,6	614,00	575,30	1,067269
-12,4	581,50	545,92	1,065174
-8,5	557,70	525,36	1,061558
-5,3	540,80	509,46	1,061516
-2,4	527,40	495,44	1,064508
0,5	512,10	482,14	1,062140
2,9	499,70	471,16	1,060574
5,3	490,10	461,05	1,063008
7,7	478,90	450,91	1,062074

Tabelle AI-13: Vertikaler Verschiebungsfaktor $c(T)$ für D-TFS_05 (Fortsetzung)

T in °C	G'_{TS} in MPa	G'_{TFS} in MPa	$c(T)$
10,2	468,00	440,05	1,063516
12,8	457,30	429,43	1,064900
15,3	447,10	419,23	1,066479
17,8	439,00	408,68	1,074190
20,3	429,00	398,76	1,075835
22,8	419,20	389,16	1,077192
25,3	409,10	379,89	1,076891
27,8	399,00	370,87	1,075849
30,3	390,90	362,19	1,079268
32,8	380,80	353,56	1,077045
35,3	370,40	345,16	1,073126
37,8	360,00	336,79	1,068915
40,3	349,00	328,51	1,062373
42,8	340,00	320,29	1,061538
45,3	327,90	312,21	1,050255
47,8	315,00	304,05	1,036014
50,3	301,40	295,95	1,018415
52,8	286,50	287,90	0,995137
55,3	274,10	279,84	0,979488
57,8	258,20	271,65	0,950488
60,2	242,60	263,43	0,920928
62,8	226,40	254,87	0,888296
65,3	212,30	246,33	0,861852
67,8	199,00	237,78	0,836908
70,2	187,30	229,33	0,816727
72,7	176,30	221,01	0,797701
75,3	166,40	212,25	0,783981
77,7	157,00	203,82	0,770288
80,2	148,20	194,78	0,760858
82,7	139,30	186,14	0,748361
85,2	130,40	176,88	0,737223
87,7	121,80	167,94	0,725259
90,2	113,10	158,86	0,711948
92,7	104,60	149,90	0,697799
95,2	95,80	140,45	0,682093
97,7	87,60	131,25	0,667429
100,2	79,10	121,96	0,648573
102,8	71,10	112,31	0,633069
105,3	63,20	102,75	0,615085
107,8	56,00	93,61	0,598252
110,3	49,10	84,32	0,582278
112,9	41,80	76,60	0,545699
115,4	36,10	68,25	0,528914
118,0	31,10	60,49	0,514118
120,4	27,00	53,51	0,504569
123,0	23,20	46,54	0,498464
125,4	20,40	40,70	0,501229
127,9	17,70	35,63	0,496800
130,5	15,60	30,54	0,510789
133,1	14,00	26,31	0,532117

Tabelle AI-13: Vertikaler Verschiebungsfaktor $c(T)$ für D-TFS_05 (Fortsetzung)

T in °C	G'_{TS} in MPa	G'_{TFS} in MPa	$c(T)$
135,5	12,70	23,04	0,551311
138,1	11,50	20,12	0,571627
140,5	10,90	17,63	0,618299
143,1	10,00	15,69	0,637552
145,6	9,50	13,96	0,680418
148,1	9,20	12,63	0,728194
150,6	8,80	11,96	0,735663
153,2	8,80	11,03	0,797969

AI-5.3.4 Ergebnisse von D-TFS_06

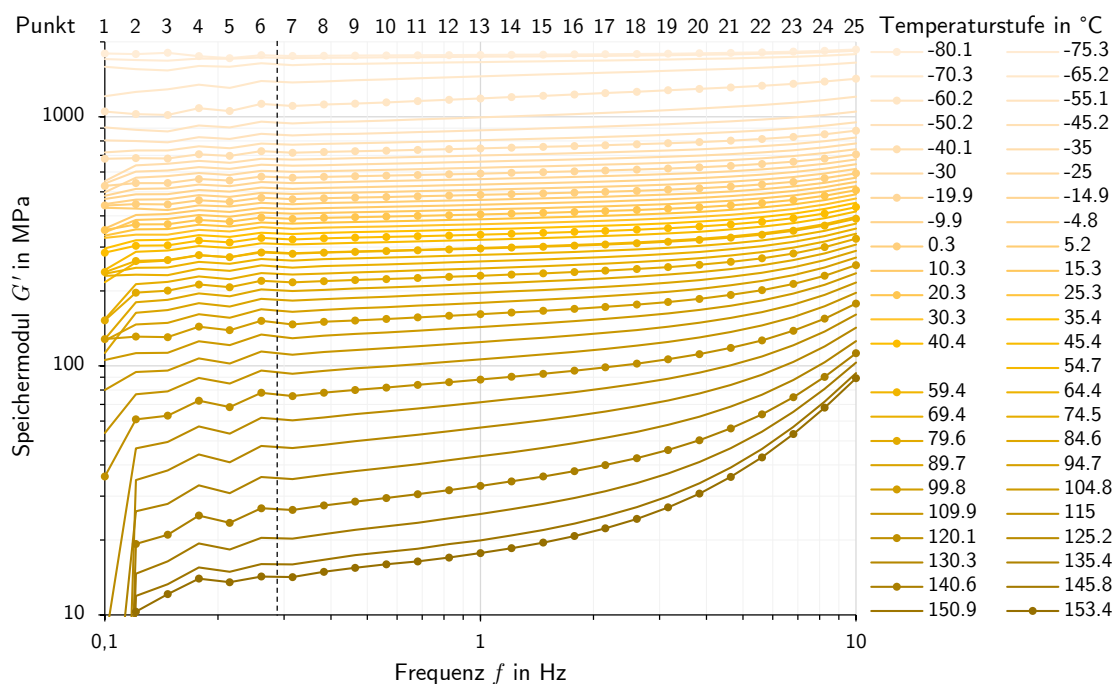


Abbildung AI-24: Ergebnisse des Speichermoduls G' in Abhängigkeit von der Frequenz f und der Temperatur T_F aus den Frequenz-Sweeps (Phase 3) von D-TFS_06

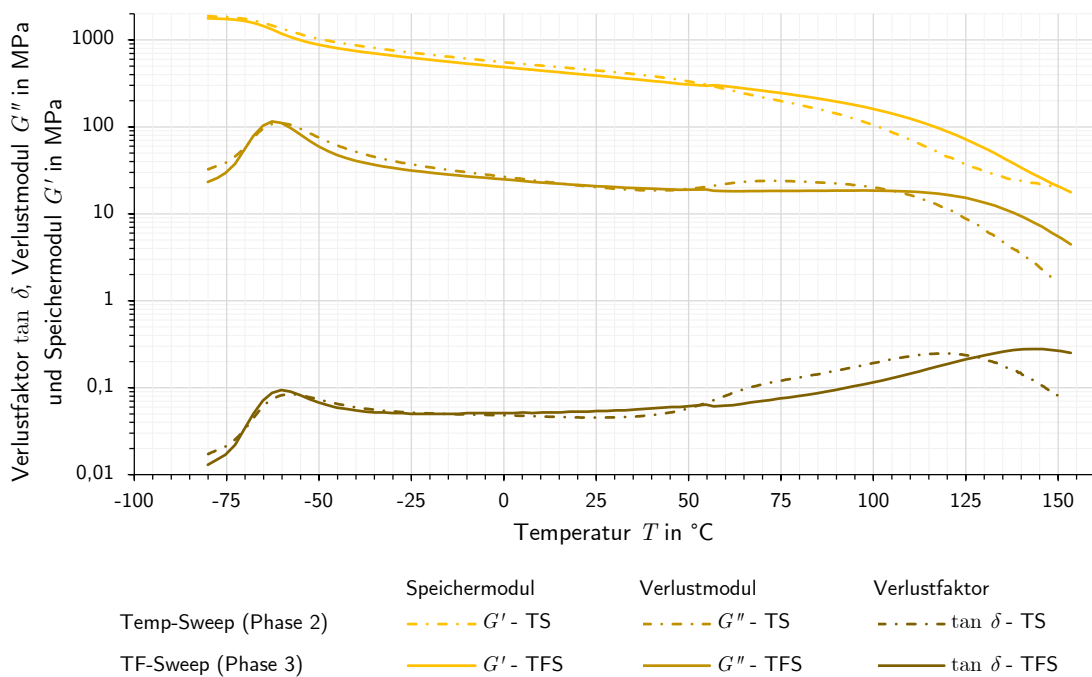


Abbildung AI-25: Ergebnisse des Temperatur-Sweeps und der TF-Sweeps bei $f = 1$ Hz von D-TFS_06

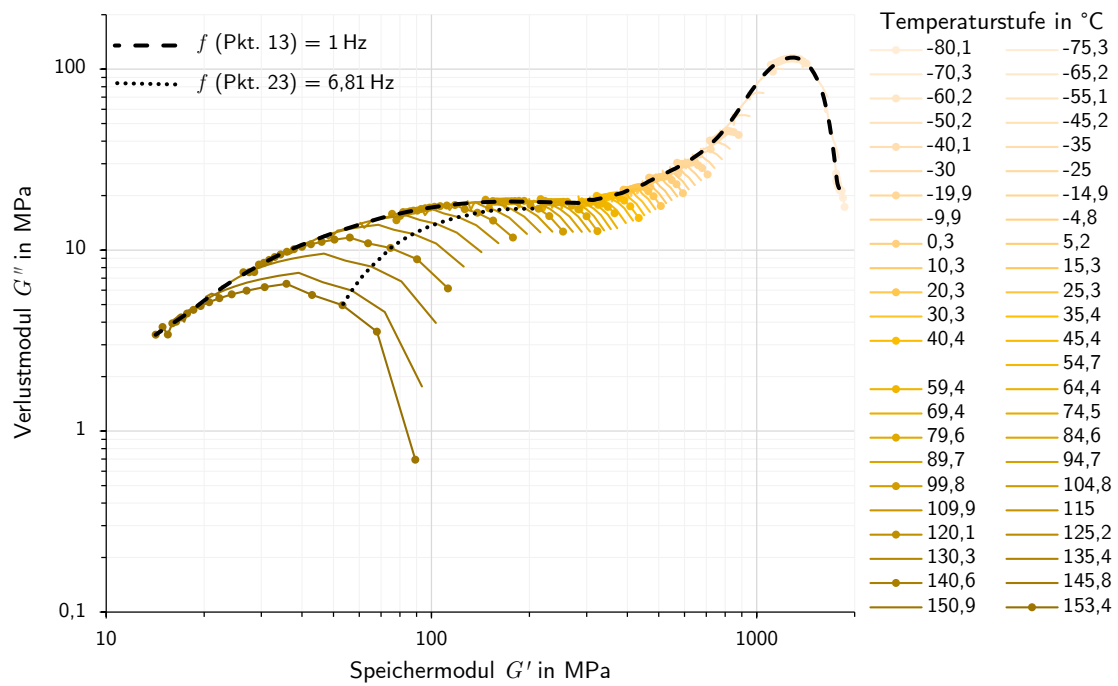


Abbildung AI-26: mCC-Plot des Versuchs D-TFS_06

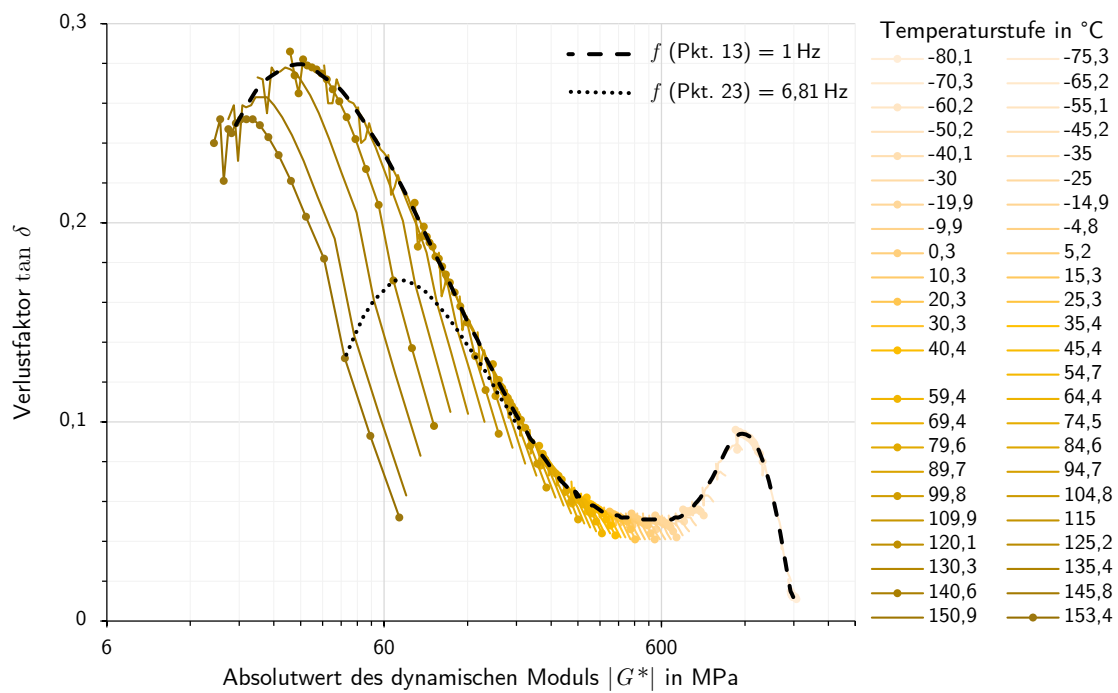


Abbildung AI-27: vGP-Plot des Versuchs D-TFS_06

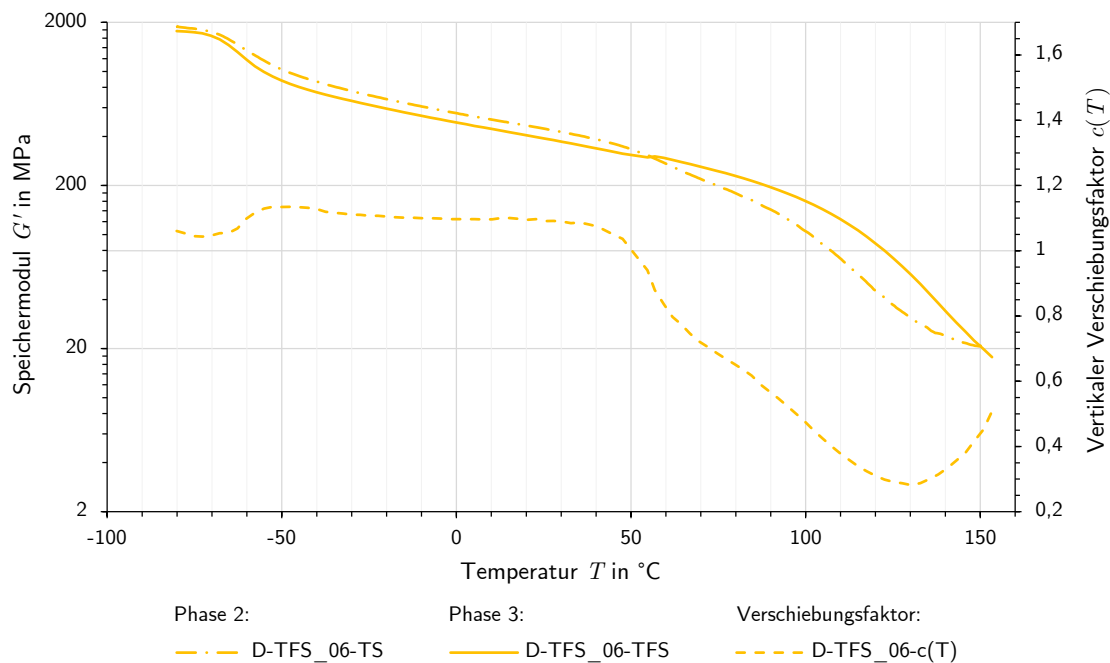


Abbildung AI-28: Verläufe der in den verschiedenen Phasen des Versuchs D-TFS_06 gemessenen Speichermoduln G' und des daraus errechneten vertikalen Verschiebungsfaktors $c(T)$

Tabelle AI-14: Wertetabelle der zuvor dargestellten Ergebnisse für die Verläufe der Speichermoduln G' und des sich daraus ergebenden vertikalen Verschiebungsfaktors $c(T)$

T in °C	G'_{TS} in MPa	G'_{TFS} in MPa	$c(T)$
-80,1	1880,40	1798,20	1,045712
-77,5	1854,40	1785,80	1,038414
-75,3	1834,40	1773,30	1,034456
-72,7	1802,80	1748,80	1,030878
-70,3	1758,70	1706,70	1,030468
-67,8	1680,00	1642,50	1,022831
-65,2	1581,20	1543,00	1,024757
-62,7	1467,50	1424,50	1,030186
-60,2	1351,20	1294,30	1,043962
-57,7	1258,00	1174,40	1,071185
-55,1	1177,50	1078,60	1,091693
-52,6	1102,80	1004,20	1,098188
-50,2	1039,30	945,75	1,098916
-47,6	986,80	895,45	1,102016
-45,2	942,50	856,74	1,100100
-42,6	902,70	821,73	1,098536
-40,1	868,30	791,43	1,097128
-37,5	838,50	764,61	1,096638
-35,0	810,70	740,57	1,094697
-32,5	784,20	719,34	1,090166
-30,0	759,20	698,96	1,086185

Tabelle AI-14: Vertikaler Verschiebungsfaktor $c(T)$ für D-TFS_06 (Fortsetzung)

T in °C	G'_{TS} in MPa	G'_{TFS} in MPa	$c(T)$
-27,5	735,90	678,83	1,084071
-25,0	718,50	660,97	1,087039
-22,4	698,10	642,77	1,086081
-19,9	678,80	626,82	1,082927
-17,5	660,20	610,92	1,080665
-14,9	643,20	595,81	1,079539
-12,4	626,70	581,05	1,078565
-9,9	611,00	567,38	1,076880
-7,3	595,90	553,88	1,075865
-4,8	581,30	540,79	1,074909
-2,2	567,10	528,54	1,072956
0,3	553,60	516,27	1,072307
2,8	543,50	505,06	1,076110
5,2	531,00	493,71	1,075530
7,8	519,10	483,58	1,073452
10,3	507,60	472,84	1,073513
12,8	496,10	462,74	1,072092
15,3	485,60	452,56	1,073007
17,8	477,10	442,76	1,077559
20,3	466,30	433,37	1,075986
22,8	456,00	423,87	1,075802
25,3	445,60	415,18	1,073269
27,8	437,20	406,56	1,075364
30,3	426,60	396,88	1,074884
32,8	416,00	388,52	1,070730
35,4	405,30	379,59	1,067731
37,9	394,30	370,68	1,063721
40,4	382,90	362,54	1,056159
42,9	370,70	353,80	1,047767
45,4	360,60	345,62	1,043342
47,6	347,80	337,56	1,030335
54,7	308,70	323,63	0,953867
56,8	293,20	326,64	0,897624
59,4	279,10	320,35	0,871235
61,9	263,10	311,86	0,843648
64,4	248,10	303,31	0,817975
66,9	234,00	295,03	0,793140
69,4	223,00	286,82	0,777491
72,0	211,20	278,74	0,757695
74,5	201,60	270,73	0,744653
77,0	191,30	262,87	0,727736
79,6	180,60	254,56	0,709459
82,1	171,90	246,26	0,698043
84,6	163,40	237,84	0,687016
87,2	152,20	229,55	0,663036
89,7	144,00	220,99	0,651613
92,2	134,20	212,31	0,632095
94,7	125,90	203,73	0,617975
97,3	115,70	194,87	0,593729
99,8	105,50	185,81	0,567784

Tabelle AI-14: Vertikaler Verschiebungsfaktor $c(T)$ für D-TFS_06 (Fortsetzung)

T in °C	G'_{TS} in MPa	G'_{TFS} in MPa	$c(T)$
102,3	97,20	176,91	0,549432
104,8	89,10	167,71	0,531274
107,3	79,60	158,23	0,503065
109,9	72,00	148,95	0,483384
112,4	64,70	139,43	0,464032
115,0	58,20	130,09	0,447383
117,5	51,80	120,62	0,429448
120,1	45,30	111,46	0,406424
122,6	41,70	102,84	0,405484
125,2	37,20	93,91	0,396107
127,7	33,60	85,47	0,393120
130,3	31,00	77,52	0,399892
132,9	28,70	69,92	0,410481
135,4	26,30	62,58	0,420275
138,0	24,90	56,31	0,442164
140,6	24,00	50,30	0,477118
143,1	22,70	45,54	0,498496
145,8	21,70	41,13	0,527595
148,2	21,00	37,08	0,566282
150,9	20,80	33,78	0,615804
153,4	20,80	30,70	0,677436

AI-5.4 Das Verfahren der Superposition

In der Masterung nach dem ZTV-Prinzip wird aus den Einzelkurven der Frequenz-Sweeps der D-TFS-Versuche eine Masterkurve gebildet. Zur Ermittlung der dafür notwendigen inkrementellen horizontalen Verschiebungsfaktoren $a_{i/j}$ wird das von Cho (2009) und Bae et al. (2011) gezeigte Verfahren der *Minimierung der Bogenlänge* in abgewandelter Form angewendet. Das grundlegende Prinzip des Verfahrens wird in Abschnitt 4.1.2 erläutert. Statt des Verlustfaktors $\tan \delta$ werden im vorliegenden Fall direkt die Speichermodul-Kurven über der Kreisfrequenz ω verschoben. Für die Umsetzung des Verfahrens wurden in MS Excel VBA-Routinen implementiert, die eine direkte Verarbeitung der Versuchsdaten ermöglichen. Sie wurden spezifisch für die verwendeten Datenblätter zur Auswertung geschrieben und würden in Quelltextform davon losgelöst nur wenig nachvollziehbar erscheinen. Daher wird im Folgenden der Ablauf einer Superposition beispielhaft beschrieben, der grob in zwei Prozessschritte unterteilt werden kann. In der *Aufbereitung* erfolgt das Einlesen, Vorbereiten und Sortieren aller notwendigen Daten, bevor in der eigentlich *Superposition* die Berechnung der inkrementellen Verschiebungsfaktoren erfolgt. Beide Schritte werden in den Abbildungen AI-29 und AI-32 verallgemeinert als Ablaufdiagramme bzw. Struktogramm mit ausgewählten Passagen des Quellcodes dargestellt. Anwendungsspezifische Einzelheiten wie bspw. die Eingabe werden darin vernachlässigt und durch Kommentare ersetzt.

Aufbereitung

Vor Beginn der eigentlichen Aufbereitung werden zunächst alle notwendigen Daten des jeweiligen D-TFS-Versuchs eingelesen und Festlegungen für die Auswertung getroffen:

- Die Anzahl aller erfolgten Frequenz-Sweeps n_{FS} sowie die Anzahl der in jedem Sweep durchgeführten Messungen (25 Stück) werden spezifiziert.
- Der initiale Temperatur-Sweep bei $f = 1$ Hz und alle Frequenz-Sweeps werden eingelesen und jeweils in ein eigenes Datenblatt gespeichert.
- Die Zahl der in der Auswertung zu vernachlässigenden, unphysikalischen Messdatenpunkte (Punkt 1 bis Punkt 6) wird festgelegt (vgl. Abschnitt 4.1.2 bzw. Abb. 4.6).

Aus den gespeicherten Daten aller Frequenz-Sweeps wird jeweils der Speichermodul G' des 13. Messpunkts bei $f = 1$ Hz ausgelesen und daraus eine Funktion $G'_{\text{TFS}}(T)$ erstellt. Diese wird dann zum initialen Temperatur-Sweep $G'_{\text{TS}}(T)$ ins Verhältnis gesetzt, um daraus die Funktion des vertikalen Verschiebungsfaktors $c(T)$ zu ermitteln (s. bspw. Anhang AI-13).

Nach einer Nutzerabfrage welche Methode angewendet werden soll, wird entweder der Faktor $c(T)$ aus vorheriger Berechnung eingelesen (M2) oder dieser zu $c(T) = 1,0$ gesetzt (M1). Die Daten des Speichermoduls G' aller Frequenz-Sweeps werden dann mit dem Faktor $c(T)$ multipliziert. Anschließend werden für jede Superposition S die Daten der jeweilig beteiligten Frequenz-Sweeps i und j zusammen kopiert und nach der Größe des faktorisierten Speichermoduls $c(T) \cdot G'$ aufsteigend sortiert.

Nachdem die Frequenz f auf die Kreisfrequenz ω umgerechnet wurde, werden die aufbereiteten Daten in je einer Ursprungsmatrix \mathbf{U}_s für jede Superposition gespeichert. Zusätzlich zu den n_{sup} Matrizen der sortierten Daten wird ein Vektor \vec{T}_R angelegt, welcher die Referenztemperaturen aller Superpositionen enthält. Die Daten werden in dafür vorgesehenen Datenblättern abgelegt, um diese an die Prozedur der Superposition zu übergeben.

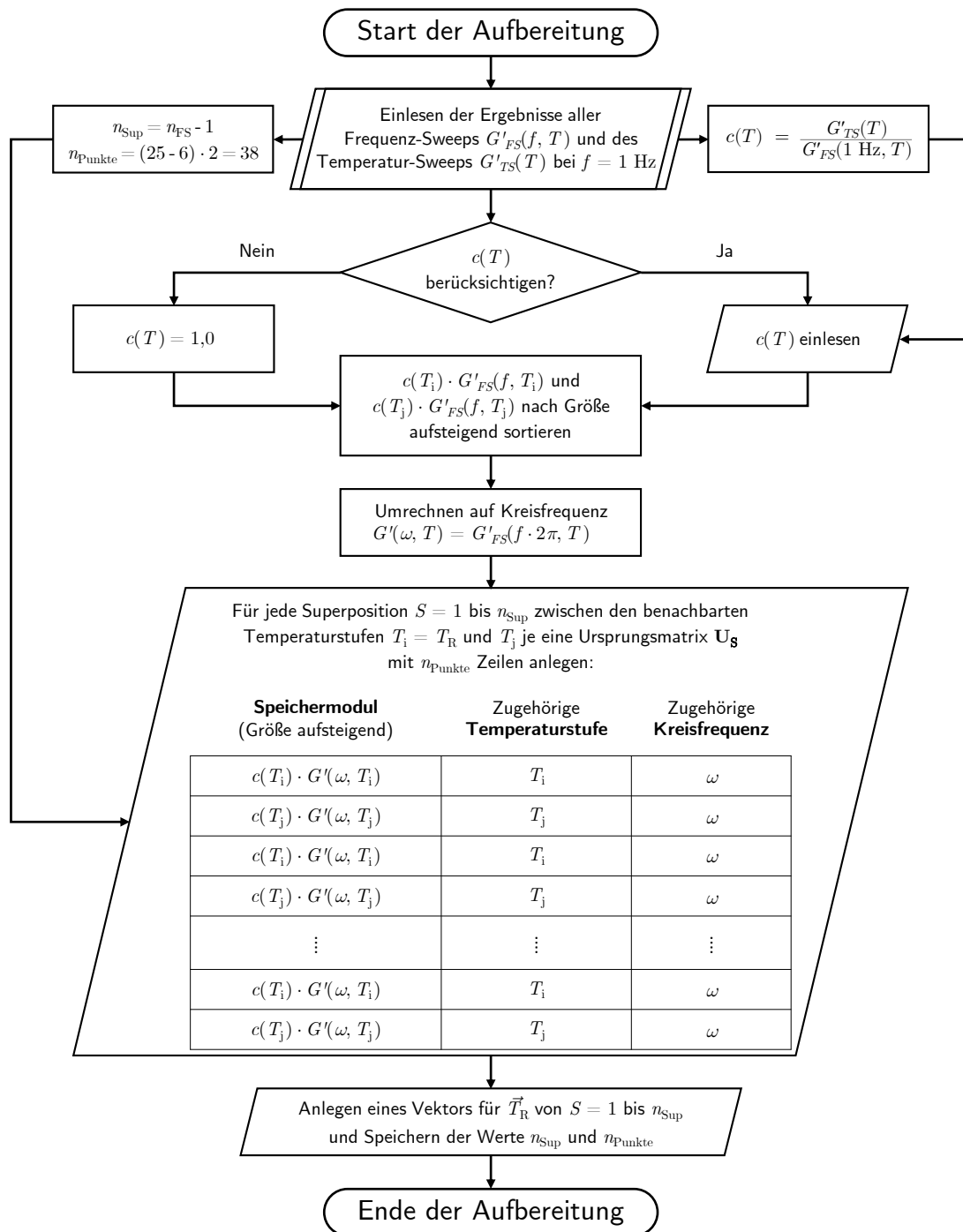


Abbildung A1-29: Flussdiagramm der Aufbereitung der Daten und Sortierung der jeweils an der Superposition beteiligten Frequenz-Sweep-Kurven aufsteigend nach dem Speichermodul G'

Superposition

Der programmtechnische Prozess der Superposition besteht aus mehreren Schleifen auf zwei Ebenen. Diese sind in Abbildung AI-32 durch die optische Trennung in Flussdiagramm und Struktogramm angedeutet. Auf der übergeordneten Ebene (Flussdiagramm) wird eine Zähl-Schleife bis zum Erreichen von n_{Sup} über alle Superpositionen zwischen den Temperaturstufen durchlaufen. Diese sorgt dafür, dass alle inkrementellen Verschiebungsfaktoren $a_{i/j}$ berechnet werden. Das Struktogramm stellt den Ablauf einer einzelnen Superposition S dar, in der ein inkrementeller Verschiebungsfaktor $a_T(S) \equiv a_{i/j}$ zwischen zwei benachbarten Temperaturstufen T_i und T_j ermittelt wird. Dieser soll folgend anhand eines Beispiels erläutert werden.

Betrachtet wird die Superposition 56 ($S = 56$) nach vorheriger Vertikalverschiebung (M2) zwischen den Frequenz-Sweeps 56 und 57 mit $T_i = T_{56} = 58,5^\circ\text{C}$ und $T_j = T_{57} = 61^\circ\text{C}$ des Versuchs D-TFS_03. Die Gestalt der Speichermodulkurven, ihre unverschobene bzw. verschobene Lage und die Ergebnisse sind in Abbildung AI-30 rechts dargestellt. Da die Faktorisierung der Speichermoduln mit $c(T)$ bereits zuvor in der Aufbereitung erfolgte und die Superposition davon unabhängig abläuft, wird darauf nicht mehr eingegangen.

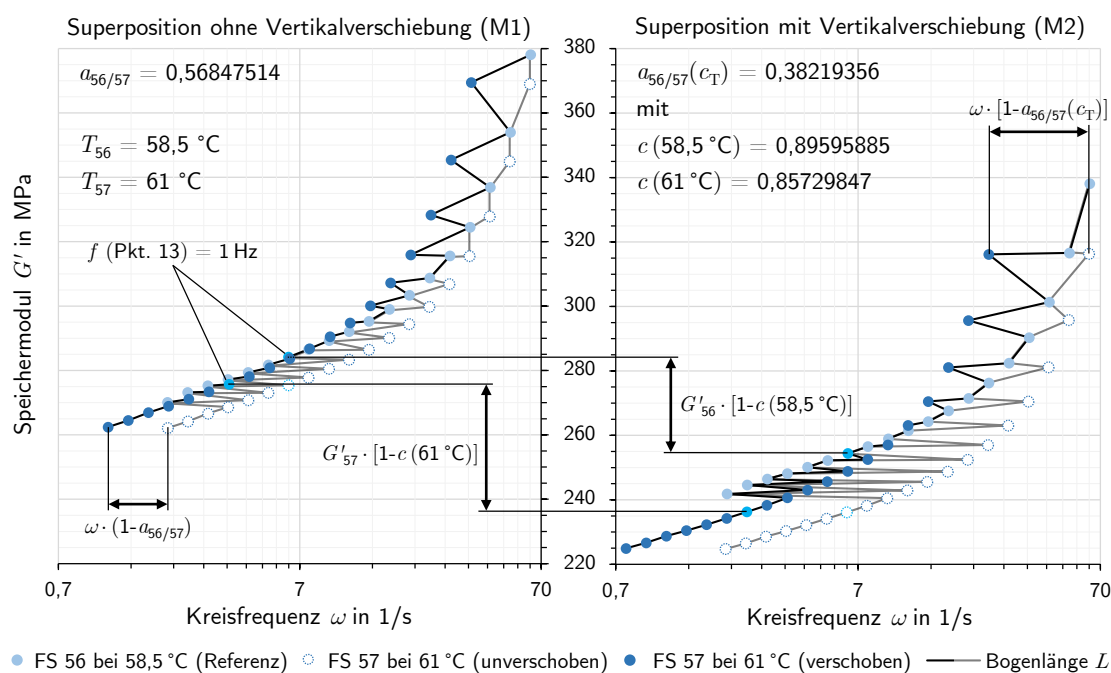


Abbildung AI-30: Beispiel der Superposition 56 mit und ohne Vertikalverschiebung zwischen den Frequenz-Sweeps 56 und 57 mit $T_{56} = 58,5^\circ\text{C}$ und $T_{57} = 61^\circ\text{C}$ des Versuchs D-TFS_03 mit Ergebnissen (vgl. Tabelle AI-16)

Innerhalb einer Superposition S werden per Definition zehn Iterationsschleifen (*Loops*) zur Minimierung der Bogenlänge L durchlaufen. Abbildung AI-31 zeigt die Entwicklung von L über die 10 Iterationsschleifen der Superposition 56. In jeder Schleife wird der Verschiebungsfaktor $a_T(S) \equiv a_{i/j}$ innerhalb eines Suchbereichs ausgehend von einem Startwert um die Schrittweite s verändert. Um das Suchintervall auf den Wertebereich $W = \{a_T \in \mathbb{R} \mid 0 < a_T \leq 1\}$ begrenzen zu können, wird stets die niedrigere Temperatur als Referenz gewählt $T_R \equiv T_i$.

In der Superposition 56 wird somit die Kurve FS 57 schrittweise in Richtung der Referenzkurve FS 56 verschoben. Dabei wird nach jedem Schritt der Momentanwert L_k der Länge des sich zwischen den beiden Kurven ergebenden Bogens berechnet. $a_T(S)$ wird solange um die Schrittweite s verändert bzw. im Beispiel die Kurve FS 57 verschoben, bis der Momentanwert der Bogenlänge L_k größer ist als dessen Referenzwert $L_r = L_{k-1}$ des vorangegangenen Schritts und demnach das Minimum der Bogenlänge L überschritten wurde. Ist dies der Fall werden Start-, Endwert und daraus der Suchbereich bzw. die Schrittweite s angepasst und die nächste Iterationsschleife beginnt. Dabei werden die Grenzen des Suchbereichs derart neu definiert, dass dieser immer kleiner wird (40% der Größe des vorherigen Suchbereichs) und die Laufrichtung der Iterationen alterniert (in Abbildung AI-31 durch Pfeile gekennzeichnet). Dadurch wird sichergestellt, dass zum einen das globale Minimum von L gefunden wird und zum anderen das Ergebnis für $a_T(S)$ eine hohe Genauigkeit hat.

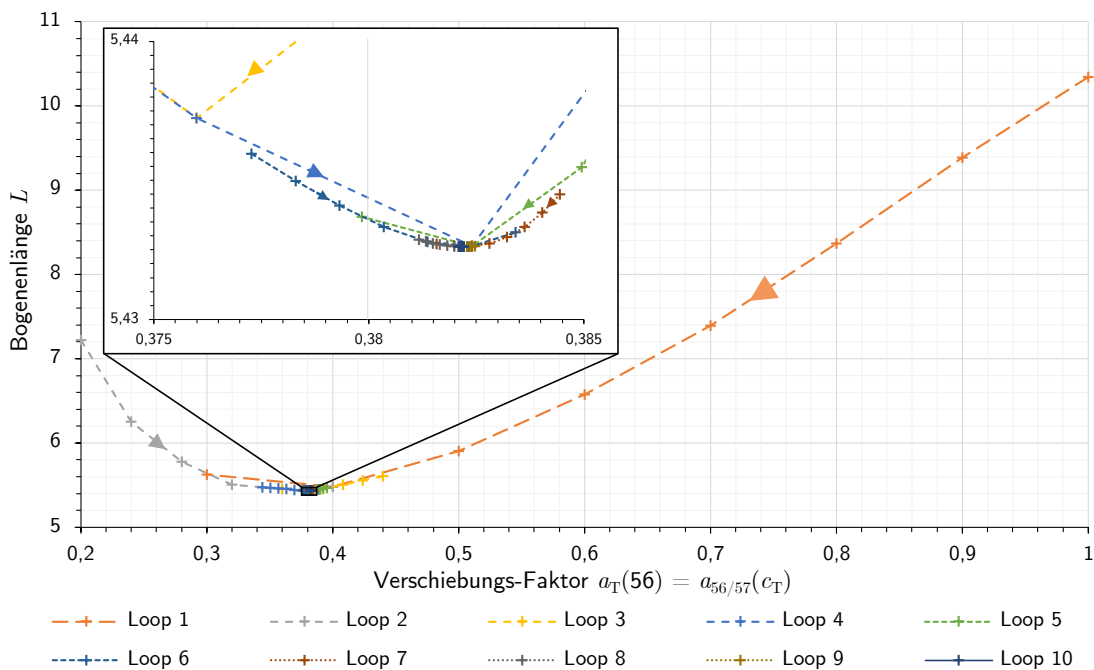


Abbildung AI-31: Beispielhafter grafischer Verlauf der iterativen Ermittlung des inkrementellen horizontalen Verschiebungsfaktors $a_{56/57}(c_T)$ in der Superposition 56 nach vorheriger Vertikalverschiebung mit $c(T)$ (vgl. Abbildung AI-30 r.)

Nach Abschluss der zehnten Iteration wird der für $a_T(S)$ gefundene Wert im Lösungsvektor \vec{a}_T gespeichert und die nächste Superposition zwischen den nächsten beiden Frequenz-Sweeps beginnt. Wenn alle Superpositionen abgeschlossen sind, erfolgt die Ausgabe des Lösungsvektors \vec{a}_T aller inkrementellen Verschiebungsfaktoren.

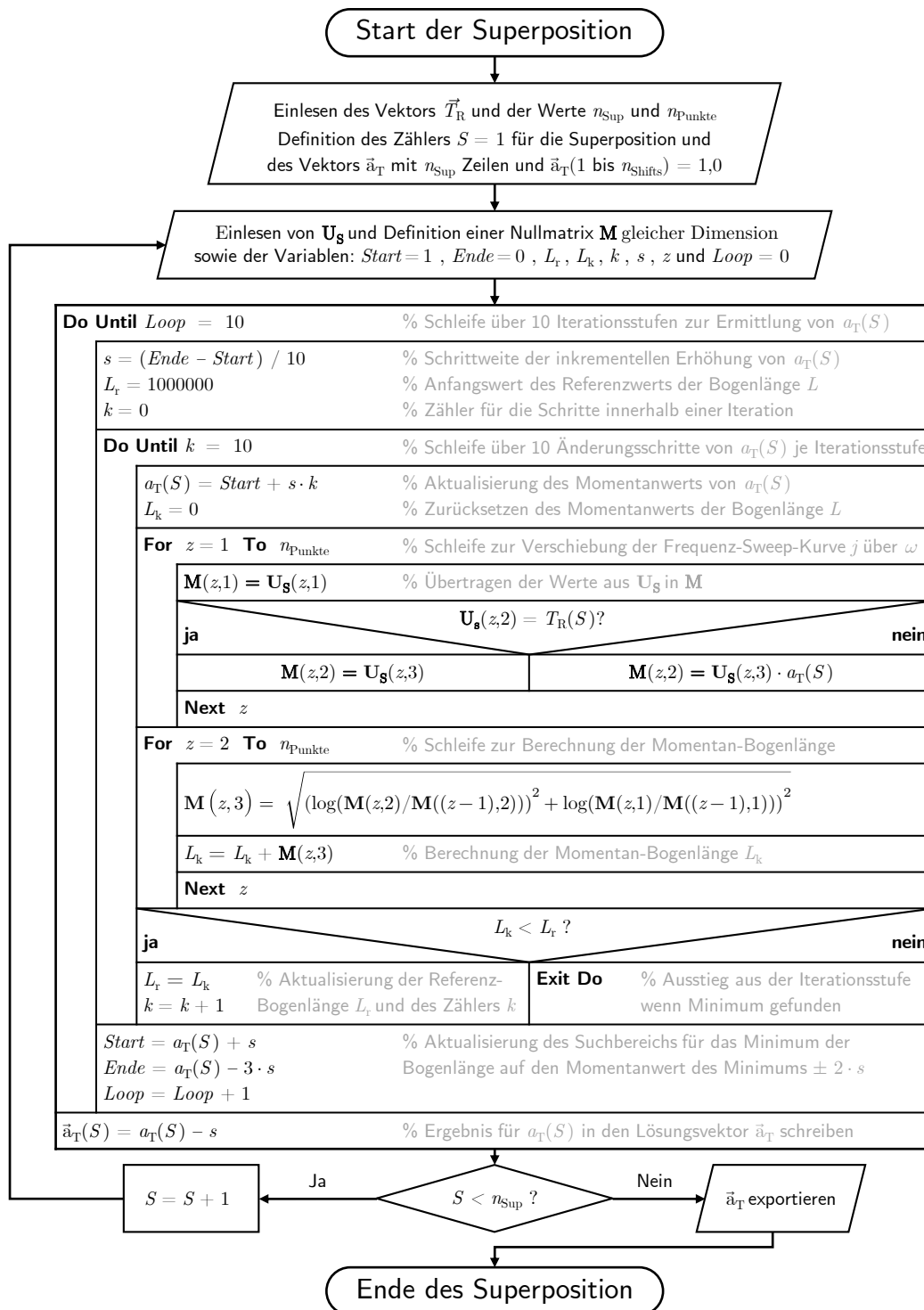


Abbildung AI-32: Ablaufdiagramm der VBA-Routine zur Superposition der jeweils an einer Verschiebung beteiligten Kurven aufsteigend nach dem Speichermodul G'

AI-5.5 Die inkrementellen horizontalen Verschiebungsfaktoren

Im Folgenden sind die Ergebnisse der horizontalen Verschiebungsfaktoren $a_{i/j}$ tabellarisch so aufbereitet, dass die Faktoren versetzt zwischen den *Sweeps* der verschiedenen Temperaturstufen angeordnet sind, welche durch sie verknüpft werden. Die Pfeile in der Kopfzeile geben an in welche Richtung *verschoben* wird bzw. der beiden Temperaturen dabei die Referenztemperatur ist. Dies kann aber auch aus dem Index des Faktors geschlossen werden, da dessen erster Buchstabe in der Nomenklatur dieser Arbeit stets die Referenz angibt und $i < j$ gilt.

Aufgrund des multiplikativen Zusammenhangs bei der Berechnung der diskreten Verschiebungsfaktoren (vgl. Gleichung 4.7, besteht in der Masterung die Gefahr der Potenzierung etwaiger Fehler bei Verschiebungen über große Temperaturbereiche. Daher wurden die inkrementellen Faktoren im zuvor beschriebenen Verfahren durch mehrfache Iteration möglichst genau berechnet (siehe Anhang AI-5.4). Deren Ergebnisse werden folgend mit neun signifikanten Stellen angegeben.

AI-5.5.1 Verschiebungsfaktoren von D-TFS_01 und D-TFS_02

In den Versuchen D-TFS_01 und D-TFS_02 wurde jeweils eine falsche Temperierfolge verwendet und vor den Versuchen keine Temperatur-Sweeps gefahren (vgl. Abschnitt AI-5.2). Daher existieren keine Daten zum ursprünglichen, nicht nachvernetzten Zustand der Probekörper. Demnach konnte auch nur eine Superposition durch rein horizontale Verschiebung (M1) erfolgen. Da die Höhen der Temperaturstufen in beiden Versuche annähernd gleich waren, werde diese folgen in einer Tabelle zusammengefasst. Auf der letzten Temperaturstufe bei ca. -80 °C existieren für D-TFS_02 aufgrund eines Fehlers keine Daten. Folglich konnten auch keine Verschiebungsfaktoren ermittelt werden.

Tabelle AI-15: Horizontale Verschiebungsfaktoren $a_{i/j}$ für D-TFS_01 und D-TFS_02

Frequenz-Sweep Nr.	T in °C	D-TFS_01		D-TFS_02	
		$a_{i/j}$ ↓	$a_{j/i}$ ↑	$a_{i/j}$ ↓	$a_{j/i}$ ↑
73	100,1				
72	97,4	0,31651046	3,15945321	0,26157532	3,82299062
71	95,1	0,38220995	2,61636310	0,38110976	2,62391601
70	92,6	0,38199040	2,61786684	0,38287514	2,61181755
69	89,9	0,38259005	2,61376371	0,38300221	2,61095096
68	87,5	0,38638019	2,58812444	0,38301532	2,61086161
67	84,9	0,38393446	2,60461119	0,38338560	2,60834001
66	82,5	0,38653092	2,58711516	0,38745661	2,58093413
65	80,0	0,38424576	2,60250107	0,38233446	2,61551101
64	77,4	0,38393446	2,60461119	0,38464061	2,59982946
63	74,8	0,38393446	2,60461119	0,38375424	2,60583440
62	72,3	0,45955779	2,17600491	0,46249830	2,16217009
61	69,8	0,46144154	2,16712177	0,46003046	2,17376908

Tabelle AI-15: Horizontale Verschiebungsfaktoren $a_{i/j}$ für D-TFS_01 und D-TFS_02 (Fortsetzung)

Frequenz-Sweep		D-TFS_01		D-TFS_02	
Nr.	T in °C	$a_{i/j}$ ↓	$a_{j/i}$ ↑	$a_{i/j}$ ↓	$a_{j/i}$ ↑
61	69,8	0,38424576	2,60250107	0,46096230	2,16937479
60	67,2	0,38526403	2,59562257	0,46233446	2,16293631
59	64,8	0,46219356	2,16359569	0,38489948	2,59808092
58	62,3	0,46246554	2,16232329	0,38489948	2,59808092
57	59,6	0,46249830	2,16217009	0,38434406	2,60183542
56	57,1	0,46290790	2,16025691	0,46252452	2,16204755
55	54,7	0,46298819	2,15988233	0,38361661	2,60676927
54	52,1	0,46267197	2,16135849	0,46434790	2,15355769
53	49,7	0,46346332	2,15766805	0,46332570	2,15830896
52	47,2	0,46328637	2,15849214	0,46465756	2,15212251
51	44,8	0,46452649	2,15272976	0,46476570	2,15162179
50	42,4	0,46451994	2,15276013	0,46192323	2,16486192
49	39,8	0,46323395	2,15873644	0,46442819	2,15318542
48	37,4	0,46348954	2,15754601	0,46519270	2,14964678
47	34,9	0,46280960	2,16071577	0,46346332	2,15766805
46	32,4	0,46175939	2,16563005	0,46212803	2,16390252
45	30,0	0,46110976	2,16868105	0,46348954	2,15754601
44	27,4	0,46348954	2,15754601	0,46284892	2,16053220
43	25,0	0,46519270	2,14964678	0,46338468	2,15803424
42	22,4	0,46293412	2,16013459	0,46342400	2,15785113
41	19,9	0,46445440	2,15306390	0,38383616	2,60527825
40	17,4	0,31743616	3,15023972	0,46301440	2,15976004
39	15,0	0,46218045	2,16365705	0,38418022	2,60294502
38	12,4	0,46598886	2,14597403	0,55872384	1,78979297
37	10,0	0,46367616	2,15667763	0,46364954	2,15680147
36	7,5	0,46293412	2,16013459	0,46290790	2,16025691
35	5,0	0,46293412	2,16013459	0,31657600	3,15879915
34	2,5	0,38486016	2,59834637	0,46310615	2,15933215
33	-0,1	0,38361661	2,60676927	0,46249830	2,16217009
32	-2,6	0,38437028	2,60165797	0,46338468	2,15803424
31	-5,1	0,38482084	2,59861187	0,38537216	2,59489424
30	-7,6	0,38380995	2,60545619	0,38380995	2,60545619
29	-10,1	0,38284892	2,61199639	0,38352486	2,60739288
28	-12,6	0,38366249	2,60645757	0,38359040	2,60694741
27	-15,1	0,38318244	2,60972294	0,38261955	2,61356225
26	-17,5				

Tabelle AI-15: Horizontale Verschiebungsfaktoren $a_{i/j}$ für D-TFS_01 und D-TFS_02 (Fortsetzung)

Frequenz-Sweep		D-TFS_01		D-TFS_02	
Nr.	T in °C	$a_{i/j} \downarrow$	$a_{j/i} \uparrow$	$a_{i/j} \downarrow$	$a_{j/i} \uparrow$
26	-17,5	0,38381978	2,60538946	0,38256384	2,61394281
25	-20,0	0,38242621	2,61488351	0,31722972	3,15228975
24	-22,6	0,38226237	2,61600426	0,31706588	3,15391866
23	-25,1	0,31747932	3,14981144	0,38220995	2,61636310
22	-27,6	0,31678244	3,15674065	0,31712486	3,15333206
21	-30,1	0,31679555	3,15661004	0,31671363	3,15742652
20	-32,6	0,38192323	2,61832728	0,31612452	3,16331047
19	-35,0	0,31600000	3,16455696	0,31657600	3,15879915
18	-37,5	0,31766554	3,14796503	0,31603932	3,16416323
17	-40,0	0,31410560	3,18364270	0,31547735	3,16979967
16	-42,6	0,31637284	3,16082760	0,31442468	3,18041194
15	-45,0	0,26159130	3,82275716	0,26108954	3,83010371
14	-47,5	0,26137216	3,82596218	0,26129024	3,82716170
13	-50,1	0,26050790	3,83865512	0,25989530	3,84770334
12	-52,5	0,21776384	4,59213063	0,21549865	4,64040031
11	-55,1	0,21756068	4,59641883	0,17888000	5,59033989
10	-57,5	0,17904384	5,58522426	0,17772605	5,62663703
9	-60,0	0,17597379	5,68266459	0,17593446	5,68393467
8	-62,4	0,14740644	6,78396419	0,12173056	8,21486403
7	-64,9	0,12116572	8,25315928	0,12108954	8,25835190
6	-67,4	0,10013092	9,98692527	0,12095846	8,26730074
5	-69,9	0,12121446	8,24984054	0,12115261	8,25405216
4	-72,3	0,21517015	4,64748478	0,14678979	6,81246311
3	-74,7	0,17780797	5,62404472	0,14685532	6,80942296
2	-77,2	0,17795226	5,61948481		
1	-79,6				

AI-5.5.2 Verschiebungsfaktoren von D-TFS_03

Tabelle AI-16: Horizontale Verschiebungsfaktoren $a_{i/j}$ für D-TFS_03

Sweep-Nr.	T in °C	$a_{i/j} \uparrow$	$a_{j/i} \downarrow$	$a_{i/j}(c_T) \uparrow$	$a_{j,i}(c_T) \downarrow$
1	-80,2	0,46544000	2,14850464	0,38361661	2,60676927
2	-77,6	0,46529510	2,14917370	0,31654979	3,15906074
3	-75,1	0,31660221	3,15853760	0,26115261	3,82917859
4	-72,6	0,46335846	2,15815633	0,21561508	4,63789456
5	-70,0	0,31590170	3,16554173	0,21577155	4,63453138
6	-67,4	0,17889024	5,59001989	0,21480151	4,65546074
7	-64,8	0,21516605	4,64757325	0,17800960	5,61767455
8	-62,2	0,21552486	4,63983589	0,26185508	3,81890627
9	-59,7	0,26067994	3,83612186	0,31657508	3,15880835
10	-57,2	0,26185508	3,81890627	0,38120151	2,62328446
11	-54,6	0,31627197	3,16183564	0,38313984	2,61001310
12	-52,1	0,31712486	3,15333206	0,38328730	2,60900899
13	-49,5	0,38220995	2,61636310	0,31726249	3,15196417
14	-47,0	0,38365594	2,60650209	0,38368215	2,60632401
15	-44,4	0,38403932	2,60390003	0,38424576	2,60250107
16	-41,9	0,46162176	2,16627570	0,46162176	2,16627570
17	-39,4	0,46418406	2,15431782	0,46418406	2,15431782
18	-36,8	0,46511959	2,14998469	0,46421028	2,15419616
19	-34,3	0,46531108	2,14909992	0,46496230	2,15071199
20	-31,8	0,46582595	2,14672456	0,46570470	2,14728344
21	-29,2	0,46577024	2,14698131	0,46582595	2,14672456
22	-26,7	0,55974784	1,78651873	0,46573092	2,14716258
23	-24,1	0,56265830	1,77727760	0,55970852	1,78664424
24	-21,6	0,56231424	1,77836507	0,56105405	1,78235946
25	-19,1	0,56110976	1,78218251	0,55961021	1,78695809
26	-16,6	0,56169984	1,78031028	0,55948570	1,78735579
27	-14,0	0,56343040	1,77484211	0,56275005	1,77698783
28	-11,5	0,56325181	1,77540484	0,56324035	1,77544100
29	-9,0	0,56345661	1,77475954	0,46775424	2,13787480
30	-6,5	0,56339108	1,77496598	0,67501148	1,48145628
31	-4,0	0,56397824	1,77311806	0,56333210	1,77515183
32	-1,6	0,56370237	1,77398579	0,56412570	1,77265458
33	0,9	0,56377446	1,77375895	0,56428954	1,77213990
34	3,4	0,56412570	1,77265458	0,56646400	1,76533725
35	5,9				

Tabelle AI-16: Horizontale Verschiebungsfaktoren $a_{i/j}$ für D-TFS_03 (Fortsetzung)

Sweep-Nr.	T in °C	$a_{i/j} \uparrow$	$a_{j/i} \downarrow$	$a_{i/j}(c_T) \uparrow$	$a_{j/i}(c_T) \downarrow$
35	5,9				
36	8,4	0,56374170	1,77386205	0,56435261	1,77194182
37	10,9	0,56446403	1,77159208	0,56627395	1,76592974
38	13,4	0,56449024	1,77150981	0,56669092	1,76463036
39	15,9	0,56592988	1,76700336	0,68177751	1,46675416
40	18,4	0,56454595	1,77133501	0,56459837	1,77117053
41	20,9	0,56691046	1,76394698	0,56442470	1,77171551
42	23,4	0,56678595	1,76433450	0,68028892	1,46996367
43	25,9	0,56681216	1,76425291	0,56435610	1,77193089
44	28,4	0,56719555	1,76306039	0,68027581	1,46999199
45	30,9	0,56675645	1,76442631	0,56656230	1,76503095
46	33,4	0,56734628	1,76259198	0,56595046	1,76693909
47	35,9	0,56707430	1,76343734	0,67974784	1,47113377
48	38,4	0,56722176	1,76297891	0,56287130	1,77660507
49	40,9	0,56734628	1,76259198	0,56246825	1,77787813
50	43,4	0,56711363	1,76331507	0,56031514	1,78470995
51	45,9	0,56768870	1,76152880	0,55859932	1,79019193
52	48,4	0,56761661	1,76175252	0,46515236	2,14983324
53	50,9	0,68015130	1,47026111	0,55858621	1,79023394
54	53,4	0,56752486	1,76203734	0,38506332	2,59697547
55	56,0	0,56854886	1,75886377	0,46249830	2,16217009
56	58,5	0,56857508	1,75878268	0,38260316	2,61367417
57	61,0	0,56847514	1,75909189	0,38219356	2,61647526
58	63,5	0,56895846	1,75759755	0,38226237	2,61600426
59	66,0	0,56752486	1,76203734	0,38448988	2,60084868
60	68,5	0,67558492	1,48019881	0,46133668	2,16761434
61	71,0	0,56914852	1,75701064	0,55964954	1,78683254
62	73,5	0,56710554	1,76334022	0,46663040	2,14302369
63	76,0	0,56819005	1,75997449	0,46660419	2,14314408
64	78,5	0,56655831	1,76504339	0,55904169	1,78877536
65	81,0	0,56672870	1,76451271	0,46700068	2,14132451
66	83,5	0,56290406	1,77650165	0,46547430	2,14834630
67	86,0	0,56290406	1,77650165	0,46716452	2,14057353
68	88,6	0,56208486	1,77909078	0,46553984	2,14804387
69	91,1	0,56284508	1,77668782	0,46553984	2,14804387
70	93,6	0,56284508	1,77668782	0,46559555	2,14778687

Tabelle AI-16: Horizontale Verschiebungsfaktoren $a_{i/j}$ für D-TFS_03 (Fortsetzung)

Sweep-Nr.	T in °C	$a_{i/j} \uparrow$	$a_{j/i} \downarrow$	$a_{i/j}(c_T) \uparrow$	$a_{j/i}(c_T) \downarrow$
70	93,6				
71	96,1	0,56284508	1,77668782	0,46079846	2,17014612
72	98,6	0,56336486	1,77504858	0,46562176	2,14766595
73	101,1	0,56287130	1,77660507	0,46566108	2,14748460
74	103,7	0,56340419	1,77492469	0,46803779	2,13657963
75	106,2	0,56283197	1,77672919	0,47028803	2,12635650
76	108,7	0,56284508	1,77668782	0,46894628	2,13244042
77	111,3	0,56339108	1,77496598	0,46473948	2,15174316
78	113,9	0,57286400	1,74561502	0,55528730	1,80086958
79	116,4	0,57276570	1,74591462	0,56124355	1,78175768
80	118,9	0,57381181	1,74273163	0,56424960	1,77226532
81	121,5	0,57392486	1,74238836	0,57134244	1,75026382
82	124,0	0,65181594	1,53417544	0,65120154	1,53562291
83	126,6	0,67421824	1,48319927	0,66991130	1,49273494
84	129,1	0,67213379	1,48779904	0,68421955	1,46151920
85	131,7	0,68188390	1,46652530	0,68567363	1,45841981
86	134,3	0,68273024	1,46470735	0,72687130	1,37575938
87	136,9	0,69135130	1,44644265	0,69513600	1,43856742
88	139,5	0,69561114	1,43758481	0,82185114	1,21676537
89	142,1	0,76769024	1,30260872	0,82646170	1,20997743
90	144,6	0,76599040	1,30549939	0,82796452	1,20778122
91	147,2	0,80969830	1,23502790	0,83052452	1,20405837
92	149,7	0,82534595	1,21161315	0,83151939	1,20261778
93	152,4	0,82134979	1,21750808	0,99660892	1,00340262

AI-5.5.3 Verschiebungsfaktoren von D-TFS_04

Tabelle AI-17: Horizontale Verschiebungsfaktoren $a_{i/j}$ für D-TFS_04

Sweep-Nr.	T in °C	$a_{i/j} \uparrow$	$a_{j/i} \downarrow$	$a_{i/j}(c_T) \uparrow$	$a_{j,i}(c_T) \downarrow$
1	-80,2	0,56324035	1,77544100	0,26112640	3,82956300
2	-77,8	0,38368215	2,60632401	0,38256384	2,61394281
3	-75,2	0,26102400	3,83106534	0,21552486	4,63983589
4	-72,7	0,21561508	4,63789456	0,21604572	4,62864986
5	-70,2	0,14767677	6,77154551	0,26071107	3,83566381
6	-67,7	0,17788508	5,62160688	0,21593948	4,63092711
7	-65,2	0,17808988	5,61514214	0,21423012	4,66787773
8	-62,6	0,21542492	4,64198846	0,31146716	3,21061134
9	-60,1	0,26102400	3,83106534	0,31596068	3,16495079
10	-57,6	0,26265114	3,80733171	0,31616384	3,16291705
11	-55,1	0,31671363	3,15742652	0,31651046	3,15945321
12	-52,6	0,31679555	3,15661004	0,38134979	2,62226449
13	-50,1	0,38331351	2,60883056	0,38313984	2,61001310
14	-47,5	0,38380995	2,60545619	0,46467395	2,15204663
15	-45,0	0,38379684	2,60554517	0,38396068	2,60443336
16	-42,5	0,46096230	2,16937479	0,38368870	2,60627949
17	-40,0	0,46486400	2,15116679	0,46486400	2,15116679
18	-37,5	0,46479191	2,15150044	0,46470016	2,15192523
19	-35,0	0,46505405	2,15028767	0,46548188	2,14831133
20	-32,5	0,46495575	2,15074230	0,46451994	2,15276013
21	-29,9	0,46505405	2,15028767	0,56268452	1,77719480
22	-27,4	0,46560640	2,14773680	0,46528486	2,14922100
23	-24,9	0,46556708	2,14791820	0,46563261	2,14761589
24	-22,4	0,55869763	1,78987695	0,46711363	2,14080674
25	-19,8	0,46687770	2,14188857	0,46687770	2,14188857
26	-17,2	0,56249446	1,77779527	0,56157532	1,78070503
27	-14,7	0,56325181	1,77540484	0,67402332	1,48362819
28	-12,2	0,56326492	1,77536353	0,56256000	1,77758817
29	-9,7	0,56329114	1,77528091	0,56316006	1,77569409
30	-7,2	0,56306790	1,77598473	0,56329114	1,77528091
31	-4,7	0,56325181	1,77540484	0,56322560	1,77548748
32	-2,2	0,56312730	1,77579742	0,56346972	1,77471825
33	0,3	0,56325181	1,77540484	0,56345661	1,77475954
34	2,9	0,56370237	1,77398579	0,56415846	1,77255162
35	5,4				

Tabelle AI-17: Horizontale Verschiebungsfaktoren $a_{i/j}$ für D-TFS_04 (Fortsetzung)

Sweep-Nr.	T in °C	$a_{i/j} \uparrow$	$a_{j/i} \downarrow$	$a_{i/j}(c_T) \uparrow$	$a_{j,i}(c_T) \downarrow$
35	5,4				
36	8,0	0,56346972	1,77471825	0,56325181	1,77540484
37	10,5	0,56364995	1,77415080	0,67542108	1,48055787
38	13,1	0,56355492	1,77444996	0,67510979	1,48124056
39	15,6	0,56356803	1,77440869	0,67507046	1,48132684
40	18,1	0,56624445	1,76602171	0,67509668	1,48126932
41	20,5	0,56582339	1,76733593	0,68209372	1,46607419
42	23,1	0,56419779	1,77242808	0,56359424	1,77432615
43	25,5	0,56339108	1,77496598	0,68177751	1,46675416
44	28,1	0,67440384	1,48279108	0,56096230	1,78265098
45	30,6	0,56632637	1,76576625	0,56636570	1,76564366
46	33,1	0,56626084	1,76597061	0,56646400	1,76533725
47	35,7	0,56675645	1,76442631	0,56592988	1,76700336
48	38,1	0,56565955	1,76784783	0,56367616	1,77406829
49	40,6	0,67858621	1,47365210	0,56345661	1,77475954
50	43,2	0,56669092	1,76463036	0,56003005	1,78561845
51	45,7	0,56646400	1,76533725	0,55972163	1,78660240
52	48,2	0,56669092	1,76463036	0,46541532	2,14861856
53	50,7	0,67317955	1,48548780	0,46271130	2,16117482
54	53,1	0,56402084	1,77298414	0,38665216	2,58630393
55	55,7	0,56415130	1,77257414	0,38316605	2,60983453
56	58,2	0,56457216	1,77125277	0,38397379	2,60434446
57	60,7	0,56469668	1,77086220	0,31743616	3,15023972
58	63,2	0,56487363	1,77030747	0,38352486	2,60739288
59	65,7	0,56411197	1,77269770	0,38117530	2,62346487
60	68,2	0,56502108	1,76984547	0,38431130	2,60205727
61	70,8	0,56487363	1,77030747	0,38352486	2,60739288
62	73,2	0,56457892	1,77123156	0,46156605	2,16653714
63	76,8	0,55753600	1,79360615	0,38233446	2,61551101
64	79,1	0,82467994	1,21259164	0,46865372	2,13377160
65	81,4	0,56326492	1,77536353	0,38511575	2,59662192
66	83,9	0,82384425	1,21382167	0,46615363	2,14521554
67	86,5	0,66992486	1,49270471	0,38618972	2,58940087
68	89,0	0,56374170	1,77386205	0,46137600	2,16742960
69	91,5	0,56496230	1,77002960	0,38660956	2,58658890
70	94,1	0,56393175	1,77326423	0,38688154	2,58477055

Tabelle AI-17: Horizontale Verschiebungsfaktoren $a_{i/j}$ für D-TFS_04 (Fortsetzung)

Sweep-Nr.	T in °C	$a_{i/j} \uparrow$	$a_{j/i} \downarrow$	$a_{i/j}(c_T) \uparrow$	$a_{j,i}(c_T) \downarrow$
70	94,1				
71	96,6	0,56363684	1,77419205	0,38361661	2,60676927
72	99,0	0,56432988	1,77201320	0,38334628	2,60860756
73	101,6	0,47242819	2,11672383	0,38328730	2,60900899
74	104,1	0,57088154	1,75167690	0,38368870	2,60627949
75	106,7	0,56424960	1,77226532	0,38338560	2,60834001
76	109,2	0,56438886	1,77182801	0,31606554	3,16390079

AI-5.5.4 Verschiebungsfaktoren von D-TFS_05

Tabelle AI-18: Horizontale Verschiebungsfaktoren $a_{i/j}$ für D-TFS_05

Sweep-Nr.	T in °C	$a_{i/j} \uparrow$	$a_{j/i} \downarrow$	$a_{i/j}(c_T) \uparrow$	$a_{j,i}(c_T) \downarrow$
1	-79,8	0,82512230	1,21194155	0,21552486	4,63983589
2	-77,3	0,38409830	2,60350017	0,21552486	4,63983589
3	-74,8	0,31590170	3,16554173	0,21531351	4,64439039
3	-72,2	0,21538560	4,64283592	0,17757123	5,63154304
4	-69,7	0,17773015	5,62650736	0,14665175	6,81887531
5	-67,1	0,14732452	6,78773642	0,14739005	6,78471830
6	-64,6	0,08282972	12,0729610	0,12114852	8,25433123
7	-61,2	0,03158886	31,6567255	0,03158886	31,6567255
8	-53,0	0,03158886	31,6567255	0,03819735	26,1798263
9	-43,4	0,04659108	21,4633366	0,04656486	21,4754197
10	-33,1	0,12114852	8,25433123	0,09999616	10,0003840
11	-24,4	0,17821440	5,61121884	0,17825372	5,60998105
12	-17,6	0,26199270	3,81690018	0,26105021	3,83068063
13	-12,4	0,38379684	2,60554517	0,38150052	2,62122842
14	-8,5	0,46567194	2,14743454	0,46567194	2,14743454
15	-5,3	0,46734628	2,13974101	0,56303514	1,77608809
16	-2,4	0,55992806	1,78594370	0,46589148	2,14642259
17	0,5	0,56352870	1,77453250	0,56325181	1,77540484
18	2,9	0,56400445	1,77303564	0,68061824	1,46925243
19	5,3	0,56343040	1,77484211	0,56322560	1,77548748
20	7,7	0,56333210	1,77515183	0,56355492	1,77444996
21	10,2	0,56336486	1,77504858	0,56362045	1,77424363
22	12,8	0,56324035	1,77544100	0,56346972	1,77471825
23	15,3	0,56349594	1,77463569	0,68178406	1,46674006
24	17,8	0,56367616	1,77406829	0,56352215	1,77455314
25	20,3	0,56367616	1,77406829	0,56349594	1,77463569
26	22,8	0,56362045	1,77424363	0,56364995	1,77415080
27	25,3	0,56356803	1,77440869	0,56367616	1,77406829
28	27,8	0,56355492	1,77444996	0,67978716	1,47104867
29	30,3	0,56441815	1,77173608	0,56381379	1,77363524
30	32,8	0,56415846	1,77255162	0,56329114	1,77528091
31	35,3	0,56445092	1,77163322	0,56349594	1,77463569
32	37,8	0,56428954	1,77213990	0,55872384	1,78979297
33	40,3	0,56426332	1,77222223	0,56377446	1,77375895
34	42,8				

Tabelle AI-18: Horizontale Verschiebungsfaktoren $a_{i/j}$ für D-TFS_05 (Fortsetzung)

Sweep-Nr.	T in °C	$a_{i/j} \uparrow$	$a_{j/i} \downarrow$	$a_{i/j}(c_T) \uparrow$	$a_{j,i}(c_T) \downarrow$
34	42,8				
35	45,3	0,56673024	1,76450793	0,46555684	2,14796544
36	47,8	0,56435261	1,77194182	0,46521216	2,14955688
37	50,3	0,56452956	1,77138642	0,46271130	2,16117482
38	52,8	0,56453284	1,77137614	0,38294979	2,61130842
39	55,3	0,56457216	1,77125277	0,46267197	2,16135849
40	57,8	0,56430019	1,77210645	0,38150052	2,62122842
41	60,2	0,56404644	1,77290367	0,38141532	2,62181392
42	62,8	0,56492605	1,77014318	0,38267197	2,61320417
43	65,3	0,56487363	1,77030747	0,38406554	2,60372230
44	67,8	0,56514560	1,76945552	0,38424576	2,60250107
45	70,2	0,56489984	1,77022532	0,38657024	2,58685200
46	72,7	0,56448061	1,77154002	0,46185114	2,16519983
47	75,3	0,56449372	1,77149889	0,46215424	2,16377978
48	77,7	0,56464445	1,77102598	0,46525148	2,14937521
49	80,2	0,56362045	1,77424363	0,46608809	2,14551717
50	82,7	0,56595046	1,76693909	0,46573092	2,14716258
51	85,2	0,56325181	1,77540484	0,46579645	2,14686048
52	87,7	0,56362045	1,77424363	0,46579645	2,14686048
53	90,2	0,56329114	1,77528091	0,46534979	2,14892116
54	92,7	0,56405955	1,77286247	0,46537600	2,14880011
55	95,2	0,56290406	1,77650165	0,46137600	2,16742960
56	97,7	0,56339108	1,77496598	0,46534979	2,14892116
57	100,2	0,56294339	1,77637756	0,45749668	2,18580822
58	102,8	0,56306790	1,77598473	0,46073948	2,17042394
59	105,3	0,56242237	1,77802315	0,46042819	2,17189136
60	107,8	0,56284508	1,77668782	0,46415130	2,15446991
61	110,3	0,55485148	1,80228409	0,46374784	2,15634428
62	112,9	0,56960000	1,75561798	0,38958244	2,56685082
63	115,4	0,56280576	1,77681195	0,46596419	2,14608768
64	118,0	0,56283197	1,77672919	0,46706621	2,14102405
65	120,4	0,56864154	1,75857713	0,55135555	1,81371169
66	123,0	0,56352870	1,77453250	0,56116163	1,78201779
67	125,4	0,57635645	1,73503739	0,64720445	1,54510679
68	127,9	0,65665372	1,52287266	0,57728870	1,73223552
69	130,5	0,57461955	1,74028191	0,67852068	1,47379444

Tabelle AI-18: Horizontale Verschiebungsfaktoren $a_{i/j}$ für D-TFS_05 (Fortsetzung)

Sweep-Nr.	T in °C	$a_{i/j} \uparrow$	$a_{j/i} \downarrow$	$a_{i/j}(c_T) \uparrow$	$a_{j,i}(c_T) \downarrow$
69	130,5				
70	133,1	0,67306972	1,48573018	0,69656960	1,43560672
71	135,5	0,68242468	1,46536318	0,70224870	1,42399693
72	138,1	0,68250332	1,46519433	0,70352870	1,42140611
73	140,5	0,68262784	1,46492707	0,82886400	1,20647054
74	143,1	0,69865405	1,43132355	0,76873984	1,30083020
75	145,6	0,69654339	1,43566075	0,83151939	1,20261778
76	148,1	0,76674406	1,30421616	0,97382339	1,02688025
77	150,6	0,82821028	1,20742283	0,83138176	1,20281686
78	153,2	0,80950170	1,23532786	1,01225830	0,98789014

AI-5.5.5 Verschiebungsfaktoren von D-TFS_06

Tabelle AI-19: Horizontale Verschiebungsfaktoren $a_{i/j}$ für D-TFS_06

Sweep-Nr.	T in °C	$a_{i/j} \uparrow$	$a_{j/i} \downarrow$	$a_{i/j}(c_T) \uparrow$	$a_{j,i}(c_T) \downarrow$
1	-80,1	0,46540324	2,14867435	0,38361661	2,60676927
2	-77,5	0,56114908	1,78205763	0,38319555	2,60963368
3	-75,3	0,31654979	3,15906074	0,31684797	3,15608772
4	-72,7	0,26077824	3,83467578	0,26077824	3,83467578
5	-70,3	0,21511772	4,64861747	0,14695363	6,80486783
6	-67,8	0,17780224	5,62422610	0,17787351	5,62197259
7	-65,2	0,17837824	5,60606495	0,21524797	4,64580446
8	-62,7	0,21359360	4,68178822	0,26019005	3,84334444
9	-60,2	0,26006554	3,84518462	0,38227548	2,61591456
10	-57,7	0,26201892	3,81651831	0,38294979	2,61130842
11	-55,1	0,31679555	3,15661004	0,31725594	3,15202928
12	-52,6	0,38274406	2,61271198	0,38277028	2,61253304
13	-50,2	0,38220995	2,61636310	0,38383616	2,60527825
14	-47,6	0,38383616	2,60527825	0,38359040	2,60694741
15	-45,2	0,38438339	2,60156926	0,38562775	2,59317437
16	-42,6	0,46369597	2,15658547	0,38575555	2,59231529
17	-40,1	0,46438886	2,15336774	0,46438886	2,15336774
18	-37,5	0,46567194	2,14743454	0,46438886	2,15336774
19	-35,0	0,46567194	2,14743454	0,46445440	2,15306390
20	-32,5	0,46752486	2,13892367	0,46528486	2,14922100
21	-30,0	0,46595046	2,14615088	0,46681216	2,14218927
22	-27,5	0,56110976	1,78218251	0,56336486	1,77504858
23	-25,0	0,55948570	1,78735579	0,46577024	2,14698131
24	-22,4	0,56287130	1,77660507	0,46732006	2,13986104
25	-19,9	0,56269763	1,77715340	0,55938084	1,78769084
26	-17,5	0,56386621	1,77347033	0,56277955	1,77689471
27	-14,9	0,56294339	1,77637756	0,55903514	1,78879633
28	-12,4	0,56333210	1,77515183	0,56345661	1,77475954
29	-9,9	0,56367616	1,77406829	0,56336486	1,77504858
30	-7,3	0,56409948	1,77273696	0,56374170	1,77386205
31	-4,8	0,56359424	1,77432615	0,56340419	1,77492469
32	-2,2	0,56367616	1,77406829	0,56345661	1,77475954
33	0,3	0,56432640	1,77202413	0,68124995	1,46789003
34	2,8	0,56406016	1,77286054	0,56363684	1,77419205
35	5,2				

Tabelle AI-19: Horizontale Verschiebungsfaktoren $a_{i/j}$ für D-TFS_06 (Fortsetzung)

Sweep-Nr.	T in °C	$a_{i/j} \uparrow$	$a_{j/i} \downarrow$	$a_{i/j}(c_T) \uparrow$	$a_{j,i}(c_T) \downarrow$
35	5,2				
36	7,8	0,67394468	1,48380131	0,56568576	1,76776591
37	10,3	0,56691046	1,76394698	0,56691046	1,76394698
38	12,8	0,67612068	1,47902591	0,56643779	1,76541895
39	15,3	0,56639846	1,76554151	0,56621824	1,76610347
40	17,8	0,56681216	1,76425291	0,68232637	1,46557430
41	20,3	0,67603548	1,47921230	0,56722176	1,76297891
42	22,8	0,67316316	1,48552395	0,56660572	1,76489570
43	25,3	0,68018406	1,47019028	0,56710052	1,76335582
44	27,8	0,67982976	1,47095649	0,68137446	1,46762177
45	30,3	0,56711363	1,76331507	0,56728730	1,76277524
46	32,8	0,67986908	1,47087142	0,56598886	1,76681921
47	35,4	0,67486976	1,48176739	0,67424000	1,48315140
48	37,9	0,56729385	1,76275488	0,56685148	1,76413052
49	40,4	0,67924649	1,47221961	0,56287130	1,77660507
50	42,9	0,68031514	1,46990703	0,56321372	1,77552492
51	45,4	0,67939395	1,47190008	0,56589148	1,76712326
52	47,6	0,67551939	1,48034242	0,56048061	1,78418303
53	54,7	0,46420797	2,15420685	0,21531351	4,64439039
54	56,8	1,21296384	0,82442688	0,46249830	2,16217009
55	59,4	0,68406554	1,46184824	0,46393600	2,15546972
56	61,9	0,56837028	1,75941642	0,38438339	2,60156926
57	64,4	0,67594045	1,47942026	0,38438339	2,60156926
58	66,9	0,56886016	1,75790127	0,38534595	2,59507077
59	69,4	0,56864061	1,75857998	0,46531046	2,14910275
60	72,0	0,56857508	1,75878268	0,46379428	2,15612837
61	74,5	0,67517532	1,48109679	0,46732508	2,13983807
62	77,0	0,56877824	1,75815446	0,46511959	2,14998469
63	79,6	0,56946391	1,75603753	0,46482468	2,15134877
64	82,1	0,56991939	1,75463412	0,55939395	1,78764895
65	84,6	0,57011108	1,75404415	0,55942016	1,78756518
66	87,2	0,57059932	1,75254327	0,46089021	2,16971411
67	89,7	0,57075005	1,75208043	0,55643581	1,79715247
68	92,2	0,56660419	1,76490048	0,46476570	2,15162179
69	94,7	0,57232169	1,74726909	0,46701379	2,14126441
70	97,3	0,56701379	1,76362555	0,46022339	2,17285786

Tabelle AI-19: Horizontale Verschiebungsfaktoren $a_{i/j}$ für D-TFS_06 (Fortsetzung)

Sweep-Nr.	T in °C	$a_{i/j} \uparrow$	$a_{j/i} \downarrow$	$a_{i/j}(c_T) \uparrow$	$a_{j,i}(c_T) \downarrow$
70	97,3				
71	99,8	0,56881756	1,75803292	0,38300221	2,61095096
72	102,3	0,57101916	1,75125472	0,46489021	2,15104549
73	104,8	0,66694339	1,49937764	0,46489021	2,15104549
74	107,3	0,57222339	1,74756926	0,38512230	2,59657774
75	109,9	0,57080576	1,75190944	0,46287514	2,16040984
76	112,4	0,56905114	1,75731131	0,46470016	2,15192523
77	115,0	0,57433446	1,74114573	0,46502784	2,15040889
78	117,5	0,57052068	1,75278485	0,46492954	2,15086357
79	120,1	0,57072384	1,75216091	0,46202972	2,16436293
80	122,6	0,57399040	1,74218942	0,57136486	1,75019513
81	125,2	0,57504000	1,73900946	0,55587548	1,79896404
82	127,7	0,57548892	1,73765291	0,56492954	1,77013227
83	130,3	0,57657600	1,73437673	0,67281372	1,48629549
84	132,9	0,57760000	1,73130194	0,68243779	1,46533504
85	135,4	0,57892956	1,72732586	0,67948570	1,47170133
86	138,0	0,64991130	1,53867152	0,78151363	1,27956822
87	140,6	0,67240576	1,48719725	0,82461440	1,21268802
88	143,1	0,68073948	1,46899075	0,76518595	1,30687189
89	145,8	0,68281216	1,46453162	0,82461440	1,21268802
90	148,2	0,68434406	1,46125327	0,82851994	1,20697156
91	150,9	0,69881216	1,43099971	0,97949594	1,02093328
92	153,4	0,69990170	1,42877208	0,99181148	1,00825612

AI-5.6 Masterkurven der D-TFS-Versuche im Frequenzbereich

AI-5.6.1 Masterkurven von D-TFS_01 und D-TFS_02

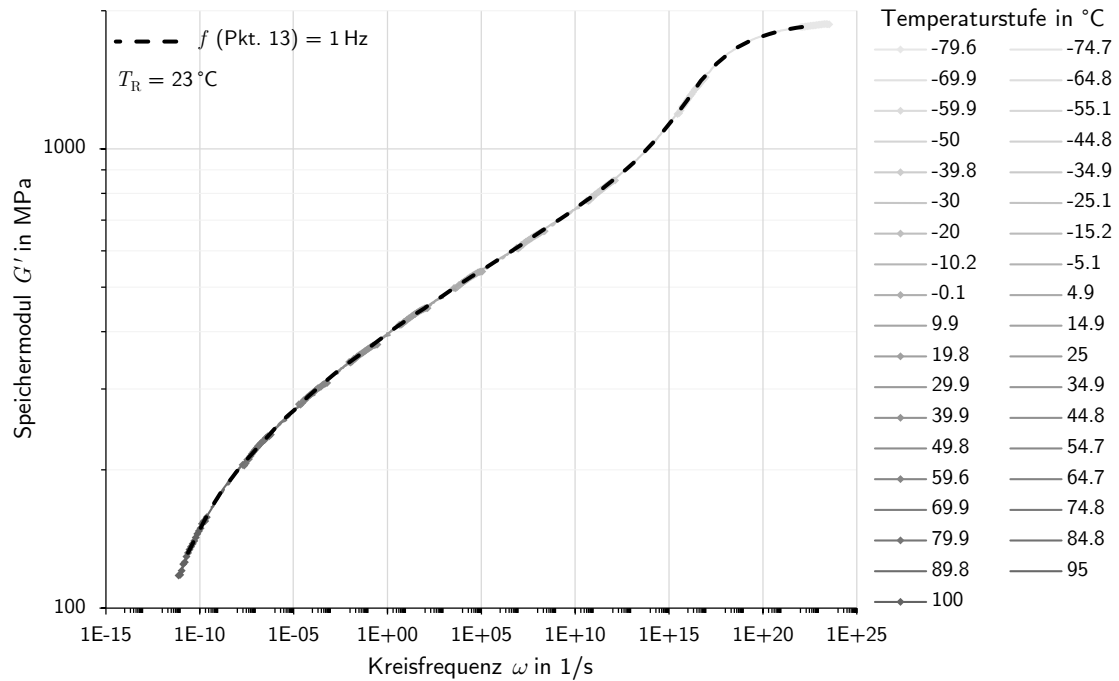


Abbildung AI-33: Masterkurve (M1) des Versuchs D-TFS_01 bei $T_R = 23^\circ\text{C}$

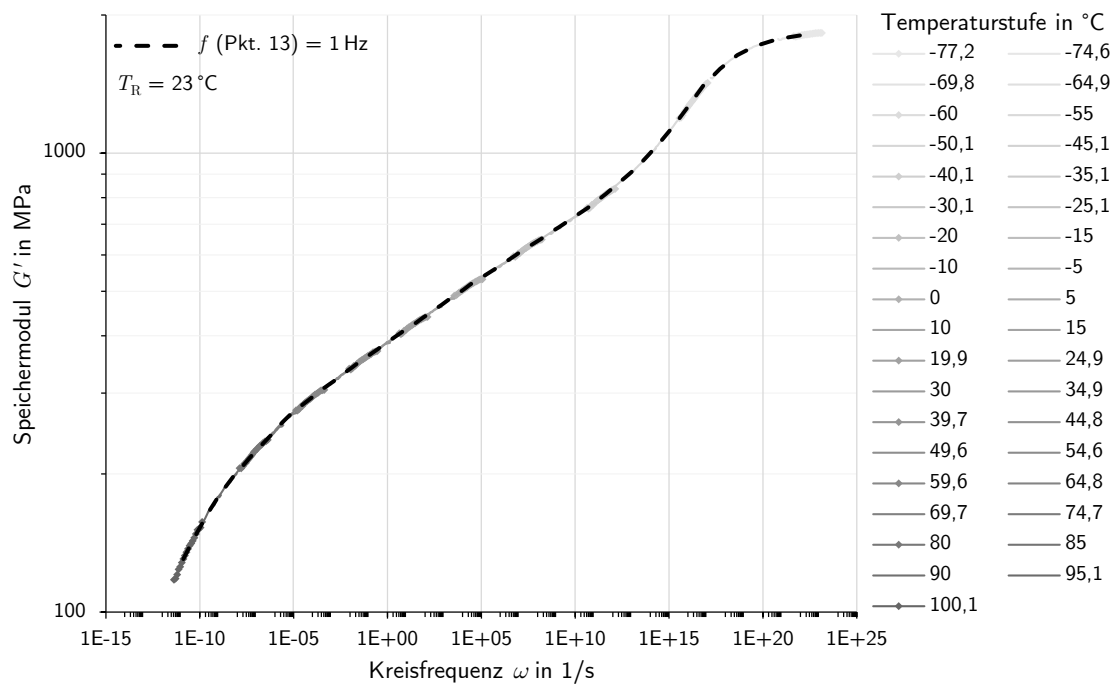


Abbildung AI-34: Masterkurve (M1) des Versuchs D-TFS_02 bei $T_R = 23^\circ\text{C}$

AI-5.6.2 Masterkurven von D-TFS_04

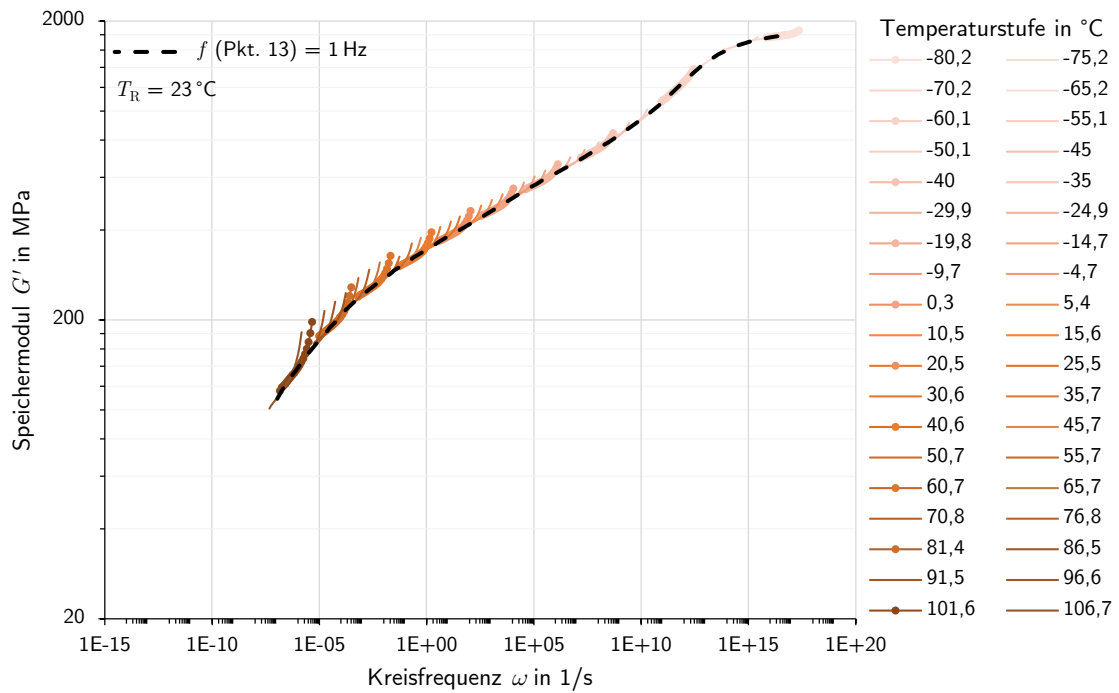


Abbildung AI-35: Masterkurve (M1) des Versuchs D-TFS_04 bei $T_R = 23^\circ\text{C}$

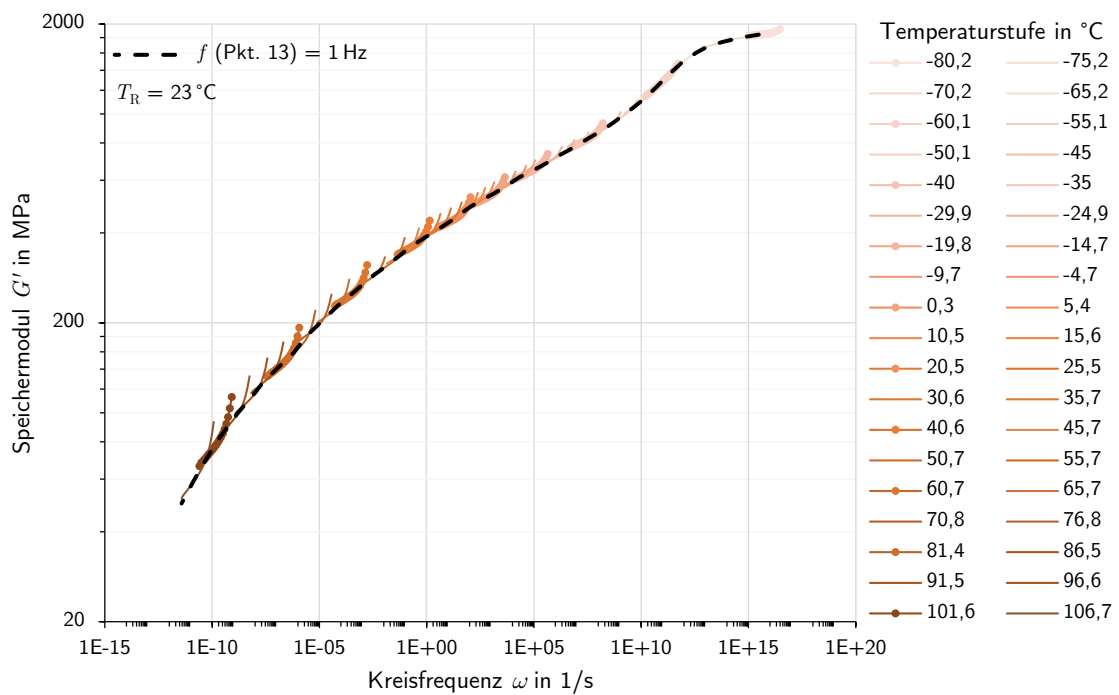
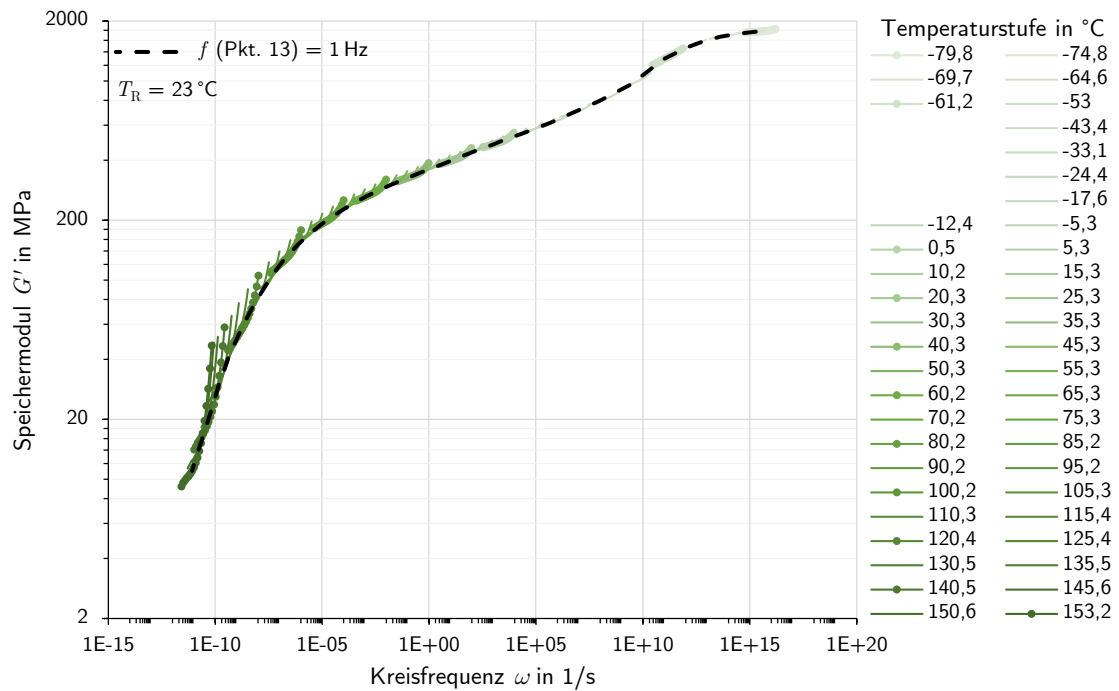
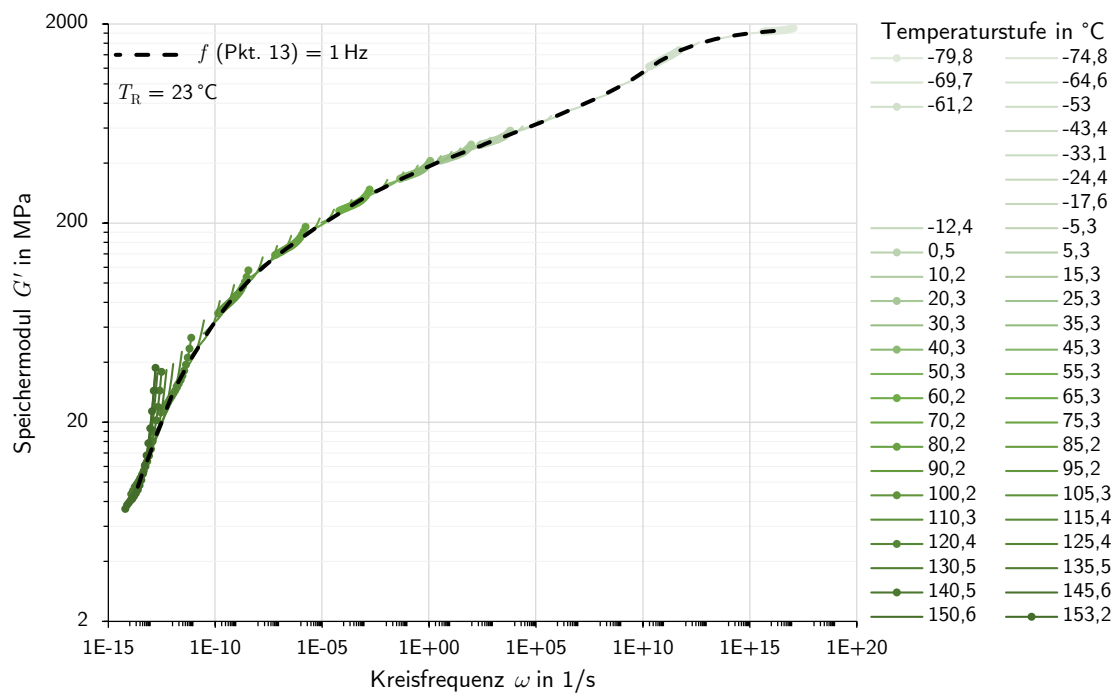


Abbildung AI-36: Masterkurve (M2) des Versuchs D-TFS_04 bei $T_R = 23^\circ\text{C}$

AI-5.6.3 Masterkurven von D-TFS_05

Abbildung AI-37: Masterkurve (M1) des Versuchs D-TFS_05 bei $T_R = 23\text{ °C}$ Abbildung AI-38: Masterkurve (M2) des Versuchs D-TFS_05 bei $T_R = 23\text{ °C}$

AI-5.6.4 Masterkurven von D-TFS_06

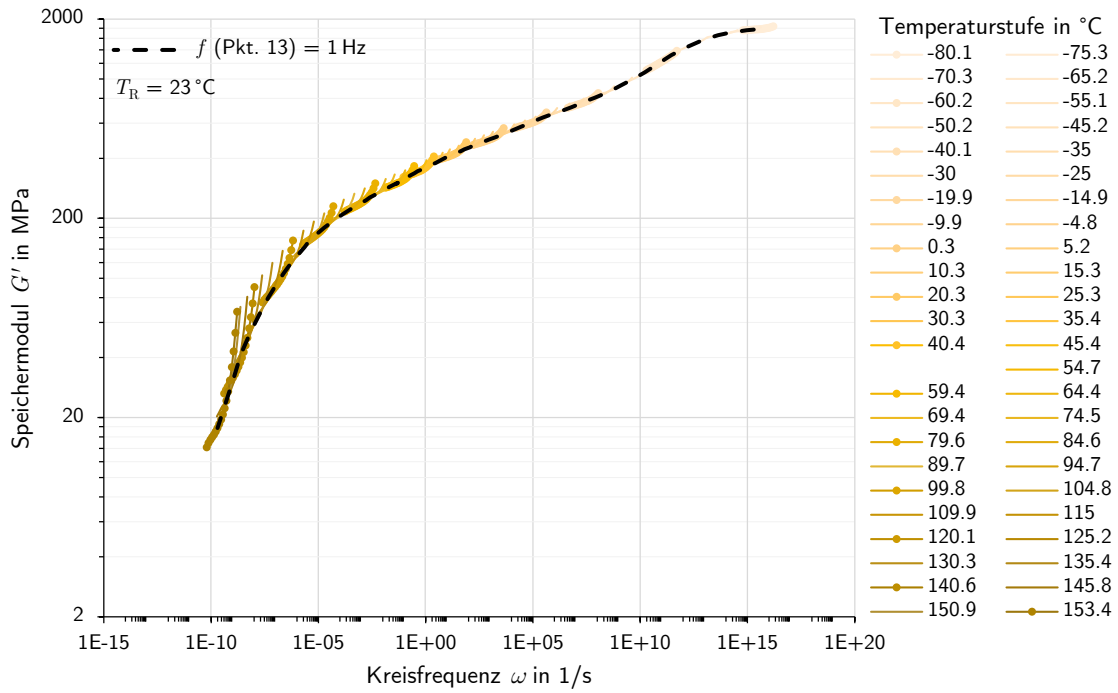


Abbildung AI-39: Masterkurve (M1) des Versuchs D-TFS_06 bei $T_R = 23\text{ °C}$

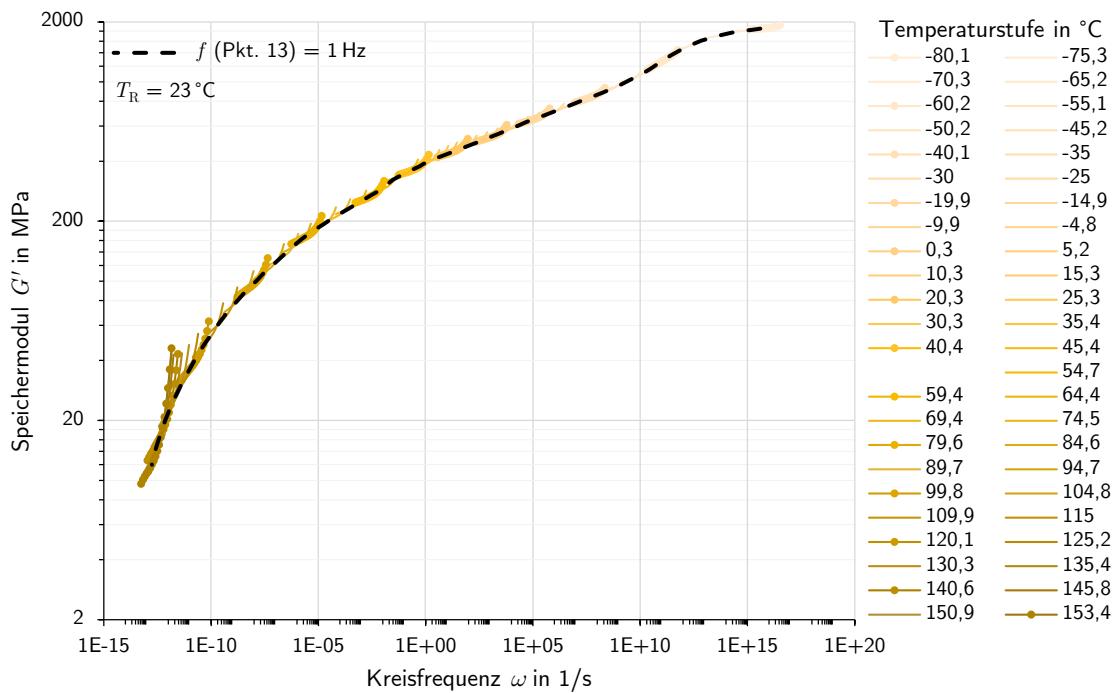


Abbildung AI-40: Masterkurve (M2) des Versuchs D-TFS_06 bei $T_R = 23\text{ °C}$

AI-6 Ergebnisse der Lang- und Kurzzeit-Versuche unter Zug

AI-6.1 Langzeit-Kriechen unter konstantem Zug bei Raumtemperatur (TC)

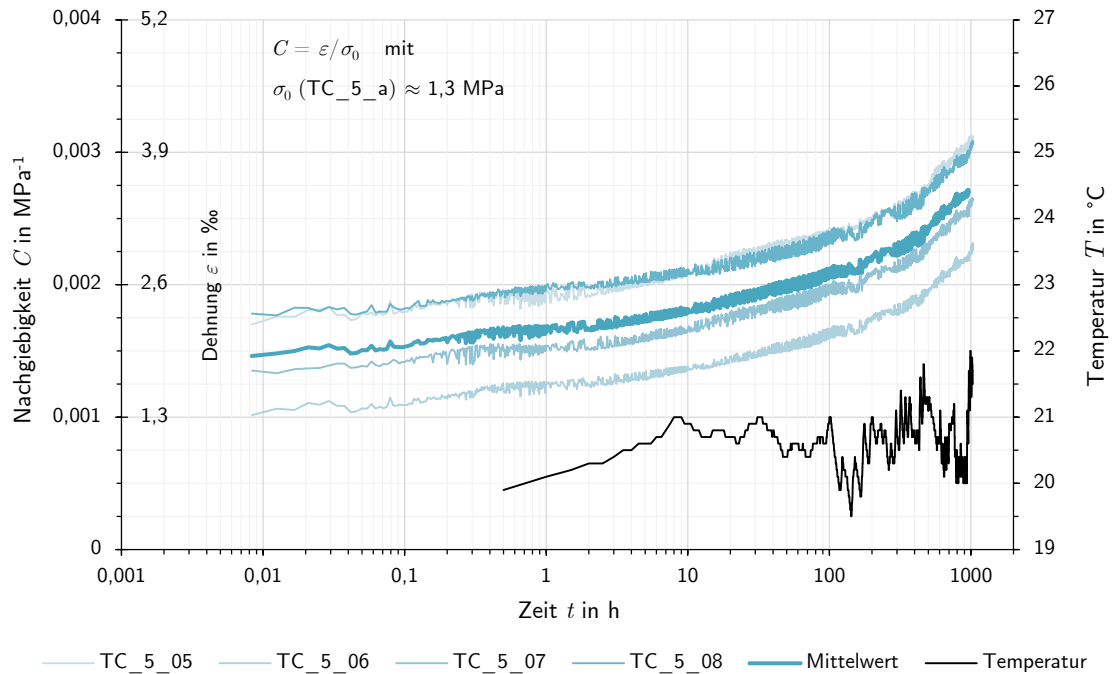


Abbildung AI-41: Ergebnisse des Versuchs TC_5_a mit seinen vier Probekörpern ($T \approx 20,7^{\circ}\text{C}$)

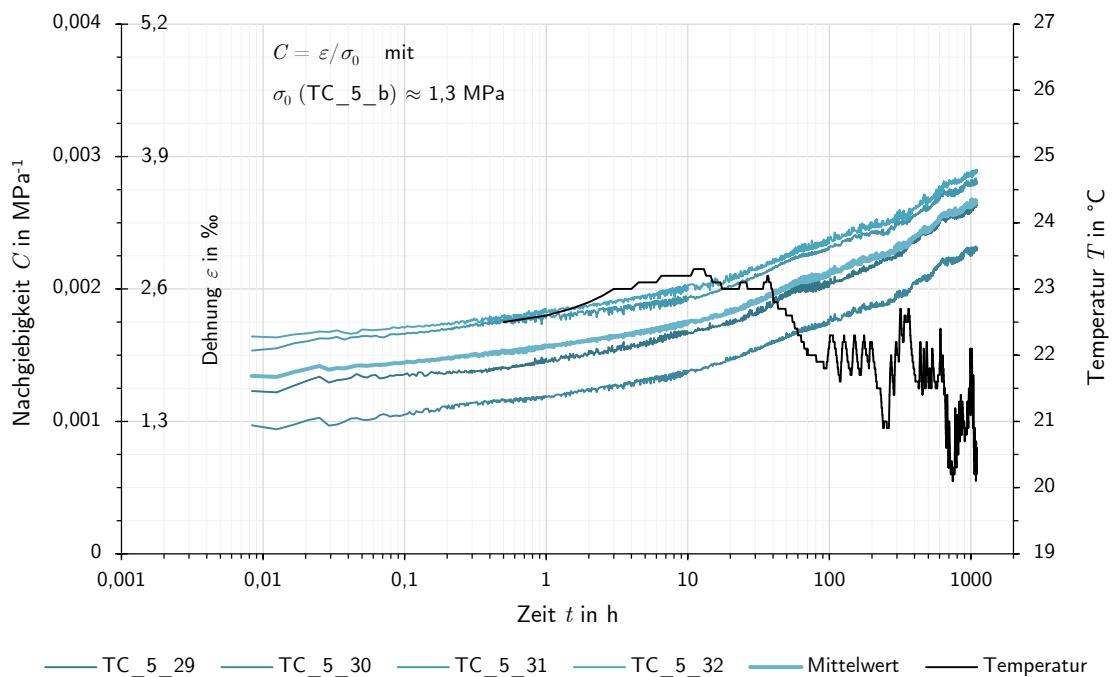


Abbildung AI-42: Ergebnisse des Versuchs TC_5_b mit seinen vier Probekörpern ($T \approx 21,5^{\circ}\text{C}$)

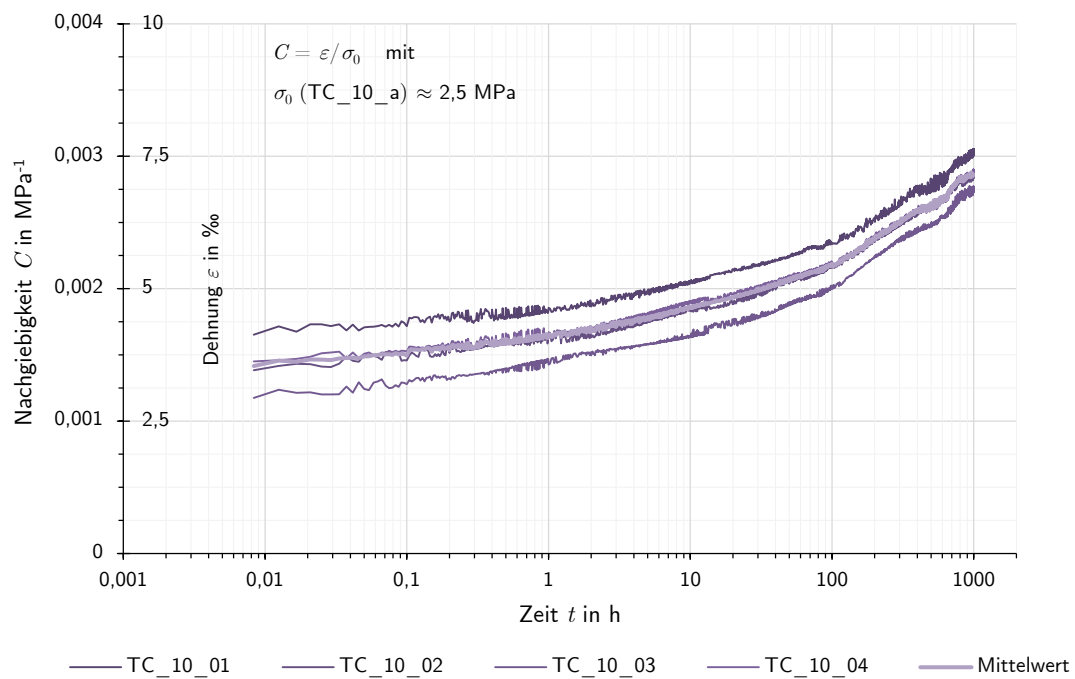


Abbildung AI-43: Ergebnisse des Versuchs TC_10_a mit seinen vier Probekörpern (Ausfall der Temperaturmessung)

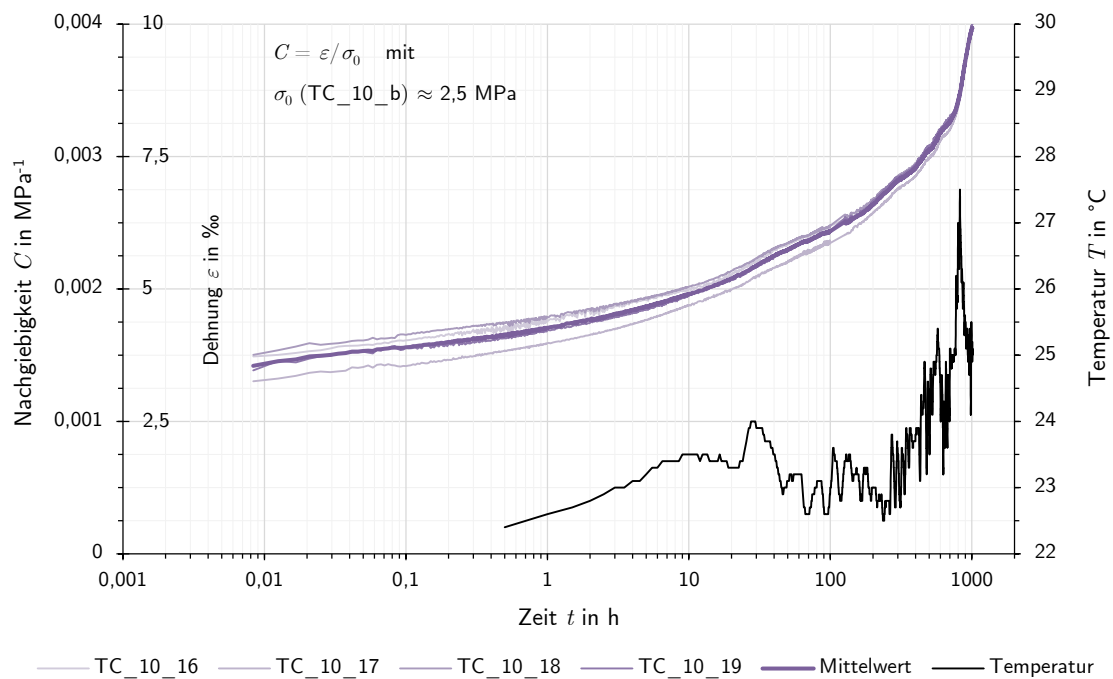


Abbildung AI-44: Ergebnisse des Versuchs TC_10_b mit seinen vier Probekörpern ($T \approx 24,2^\circ\text{C}$)

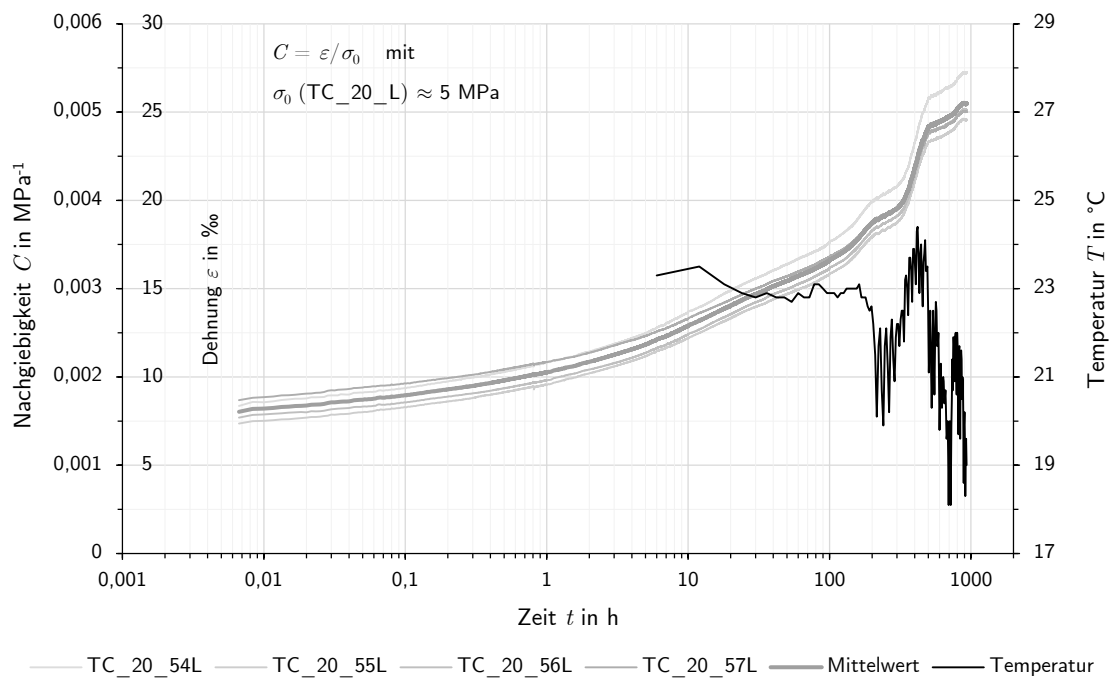


Abbildung AI-45: Ergebnisse des Versuchs TC_20_L mit seinen vier Laborprobekörpern ($T \approx 21,8^\circ\text{C}$)

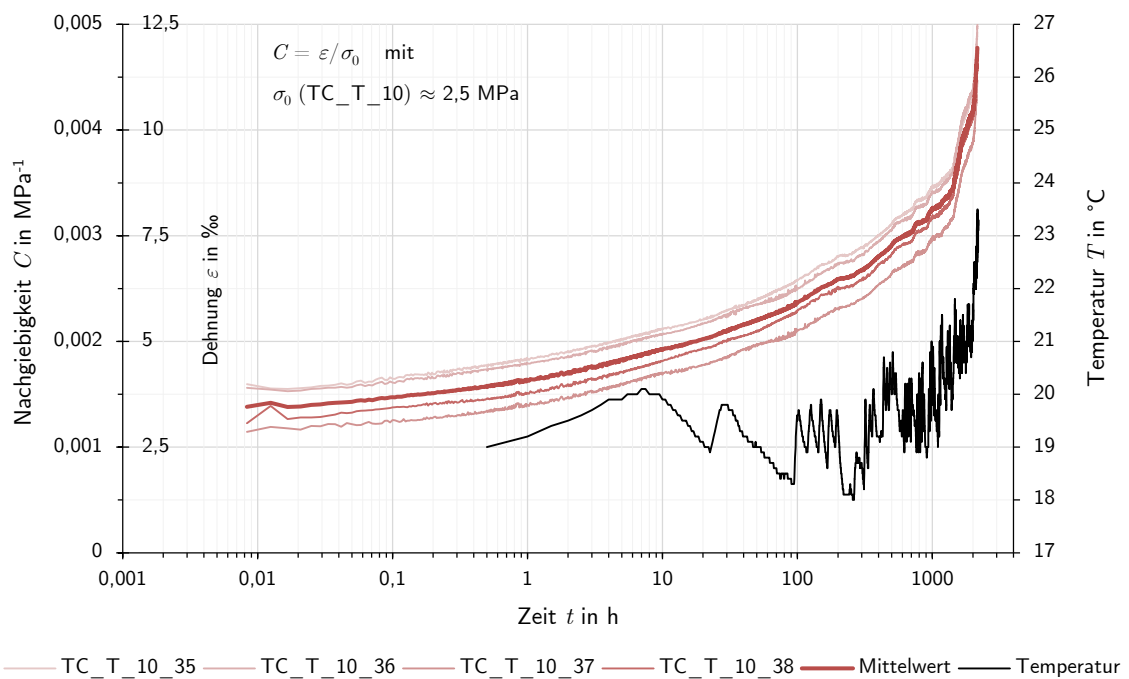


Abbildung AI-46: Ergebnisse des Versuchs TC_T_10 mit seinen vier Probekörpern ($T \approx 21,2^\circ\text{C}$)

AI-6.2 Kurzzeit-Kriechversuche unter schrittweise erhöhter Zuglast (TCL)

Im Verlauf mehrerer Langzeit-Kriechversuchen unter Zug (TC) kam es zu einer stärkeren Zunahme der Verformung, welche auf das Verlassen des LVE-Bereichs zurückgeführt wurde (vgl. Abschnitt 4.2.1). Um diese These zu überprüfen und wenn möglich die Grenze des LVE-Bereichs genauer zu verorten, wurden drei zusätzliche Kurzzeit-Kriechversuche (TCL) unter stufenweise steigender Belastung durchgeführt. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass die Versuche zwar schon früh im Verlauf des Projekts erfolgten, jedoch erst nach der Formulierung des viskoelastischen Materialgesetzes für das PUR in der in Abschnitt 5.3.2 gezeigten Form ausgewertet wurden. Entsprechend empfiehlt es sich diesen Anhang erst nach Kapitel 5 zu lesen, um den Erkenntnissen nicht vorzugreifen.

Ähnlich den grundlegenden Zugversuchen (vgl. Abschnitt 3.2.2) erfolgten die TCL-Versuche an einer Universalprüfmaschine bei Raumtemperatur. Aufgrund der Versuchslaufzeit von jeweils 12 h wurde die Deformation jedoch in diesem Fall über den Traversenweg der Maschine gemessen. Um daraus die Dehnung im Probekörper errechnen zu können, wurden die verwendeten Standard-Zugprobekörper so in die Maschine eingespannt, dass die freie Länge nur aus dem schmalen Mittelteil der Probekörper bestand (s. Abb. AI-47 r.).

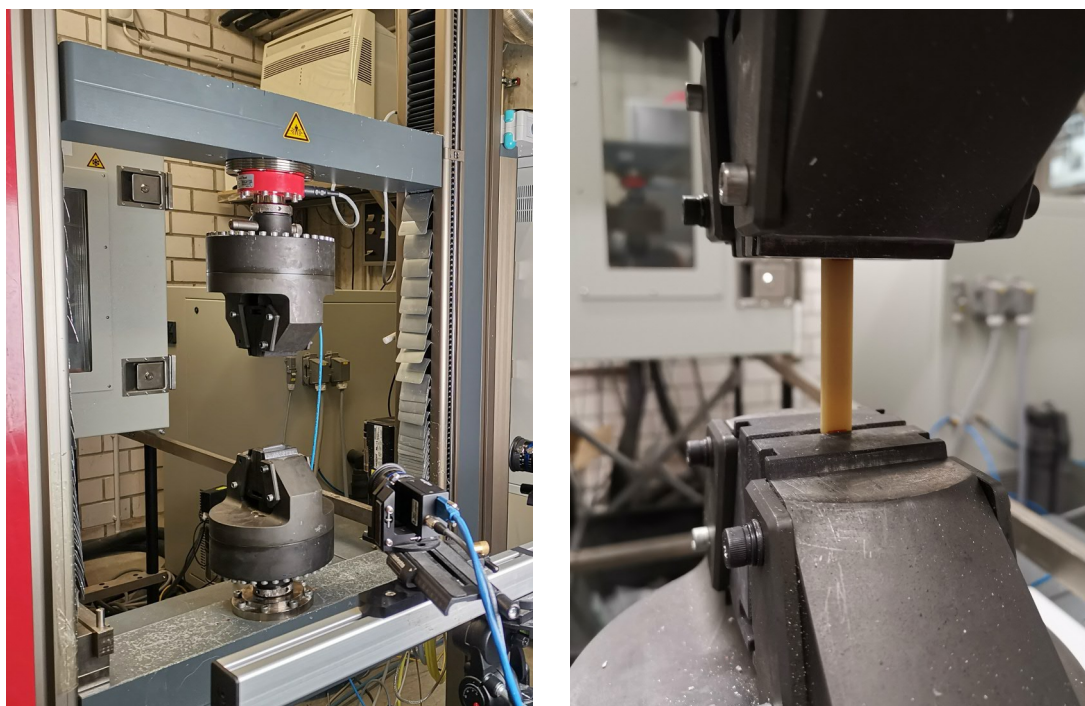


Abbildung AI-47: Versuchsaufbau der Kurzzeit-Kriechversuche unter schrittweise erhöhter Zuglast (TCL) in der Übersicht (l.) und im Detail (r.)

In zwei Versuchen (TCL_09 und TCL_10) wurde die Zugbelastung auf den Probekörper stufenweise in Schritten von 10 und 20 N erhöht. Auf jeder Stufe wurde die Kraft für 60 min konstant gehalten und dabei der Traversenweg kontinuierlich nachgeregelt. Für die Erhöhung der Belastung zur vollen Stunde wurde die Deformationsgeschwindigkeit zu 5 mm/min festgelegt. Um eine etwaige Nachgiebigkeit im Versuchsaufbau berücksichtigen zu können, wurde ein weiterer Versuch durchgeführt (TCL_11), bei dem nur die erste Belastungsstufen von 20 N für 12 h gehalten wurde.

Es zeigte sich, dass gerade am Beginn der Versuche starke Verformungen aus der kraftführenden Bauteilkette der Versuchsanordnung resultierten. Tabelle AI-20 zeigt den Belastungsverlauf der drei Versuche in den Zeitschritten von jeweils 60 min.

Tabelle AI-20: Ablauf der Versuche TCL_09 und TCL_10 zur Überprüfung der Grenze des LVE-Bereichs (Für alle Stufen war die Haltedauer der Kraft $\Delta t = \text{const.} = 60 \text{ min}$)

Stufe s	Startzeit t_s in min	Belastung	
		$\Delta F(s)$ in N	$F(s)$ in N
0	0	20	20
1	60	20	40
2	120	10	50
3	180	10	60
4	240	20	80
5	300	20	100
6	360	20	120
7	420	20	140
8	480	10	150
9	540	10	160
10	600	20	180
11	660	20	200

Aus den aufgezeichneten Daten ergeben sich die in Abbildung AI-48 dargestellten Dehnungsverläufe der Versuche über die Zeit. Die Erhöhung der Belastung ist jeweils an der sprunghaften Zunahme der Dehnung zu erkennen. Im LVE-Bereich sollte es möglich sein die Versuche über das gefundene linear-viskoelastische Materialgesetz für das PUR nachzurechnen (vgl. Abschnitt 5.3). Dafür werden zunächst die einzelnen Deformationsanteile der Laststufen s mithilfe von Gleichung 5.21 ihrer Startzeit t_s und dem vereinfachten Zusammenhang $G^{-1} = J$ nach Gleichung 2.23 berechnet.

$$\varepsilon_s(t, t_s) = \frac{\Delta F(s)}{A_0} \cdot \left(6,5 + 45 \cdot \sum_{k=\lfloor \log(t-t_s)-2 \rfloor}^{10} e^{-\left(\frac{k}{20} + \frac{t-t_s}{10^k}\right)} \right)^{-1} \quad (\text{AI-1})$$

Wie die Ergebniskurven der Versuche in Abbildung AI-48 zeigen, fällt die Verformung aus der initialen Stufe 0 mit 20 N deutlich größer aus, als bspw. die darauf folgende Stufe 1 aus der Erhöhung um die gleiche Last. Dies bestätigt die anfängliche Vermutung einer zusätzlichen Nachgiebigkeit im Versuchsaufbau. Um diese Verformung in der Nachrechnung zu berücksichtigen, wird sie durch eine logarithmische Funktion angenähert (siehe Abb. AI-48). Die Verformungsanteile aus den Laststufen werden analog dem in Abbildung 2.4 gezeigten Superpositionsprinzip zu einer Gesamtdehnung aufsummiert und eine Einhüllende gebildet.

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0(t) + \sum_{s=2}^{12} \left[\frac{\Delta F(s)}{A_0} \cdot \left(6,5 + 45 \cdot \sum_{k=\lfloor \log(t-t_s)-2 \rfloor}^{10} e^{-\left(\frac{k}{20} + \frac{t-t_s}{10^k}\right)} \right)^{-1} \right] \quad (\text{AI-2})$$

mit

$$\varepsilon_0(t) = (3,94828 \cdot \ln(t) + 6,09614) \cdot 10^{-4} \quad (\text{AI-3})$$

Für die Einhüllende der errechneten Kriechfunktionen wird zusätzlich die Abweichung zum Mittelwert aus den Messwertkurven der Versuche TCL_09 und TCL_10 berechnet und im Diagramm dargestellt. Vergleicht man die Einhüllende qualitativ mit den beiden Versuchskurven fällt auf, dass die Kurven sich mit zunehmender Last voneinander entfernen. Eine erste deutliche Abweichung ist dabei am Beginn von Laststufe 7 zu erkennen, bei der die Dehnung der Probekörper ca. 8‰ überschreitet. Dies bestätigt die Beobachtungen aus den Zugkriechversuchen in Abschnitt 4.2.1. Die quantitative Auswertung der Abweichung zeigt jedoch, dass diese auch für höhere Laststufen nur langsam zunimmt und erst mit dem Wechsel auf Laststufe 11 die 5‰ überschreitet. Die Abweichungen vom linear-viskoelastischen Verhalten sind auch für die in der Literatur für den Glasbereich genannte Grenze von 1‰ Gesamtdehnung noch vertretbar klein (s. bspw. Menges 1984, S. 111 oder Schwarzl 1990, S. 140).

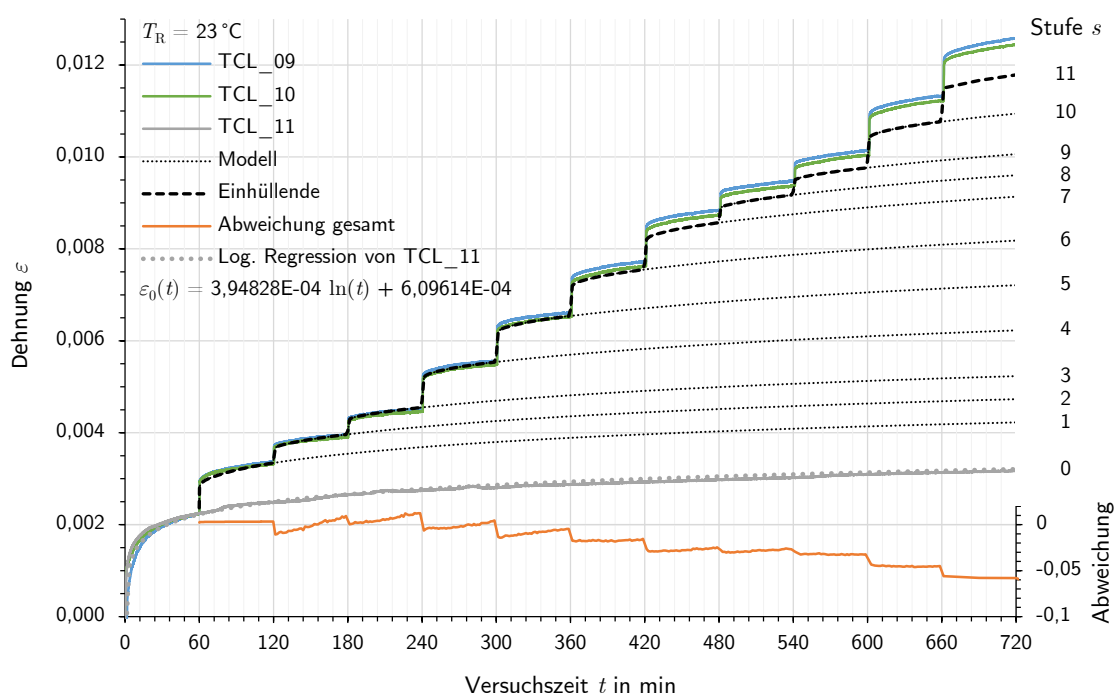


Abbildung AI-48: Ergebnisse der TCL-Versuche im Vergleich zur Nachrechnung mithilfe von Gleichung 5.21

AI-6.3 Kurzzeit-Relaxation unter konstanter Zugdeformation bei verschiedenen Temperaturen (TR-TTS)

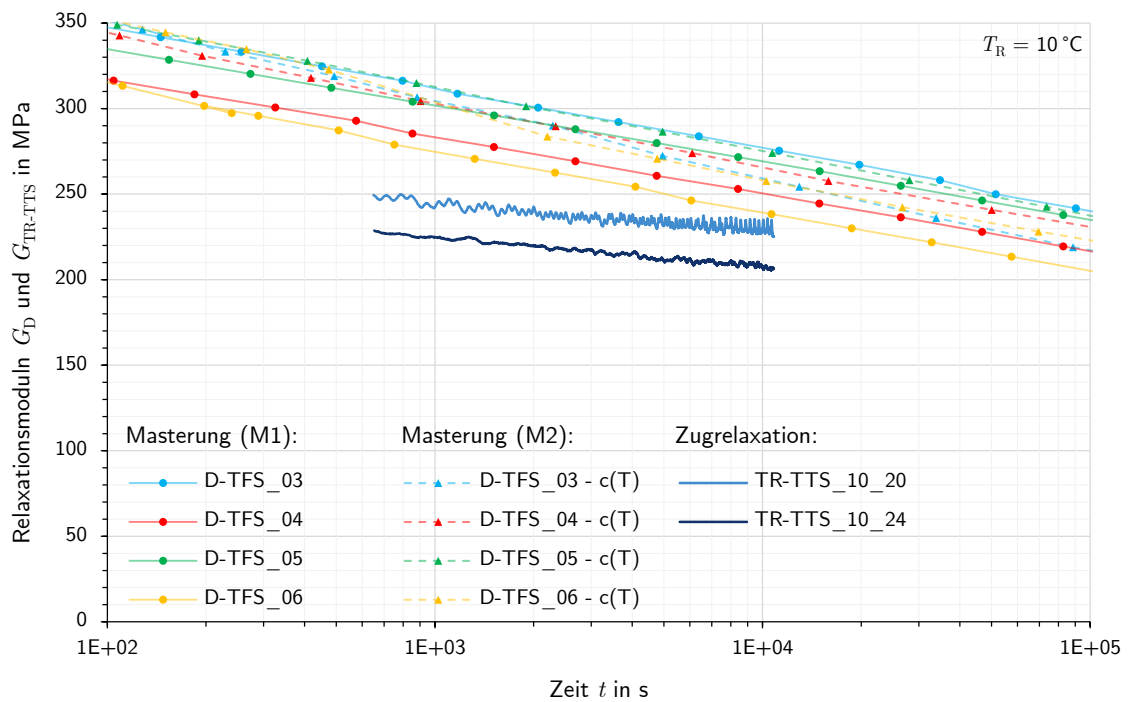


Abbildung AI-49: Ergebnisse der Versuche TR-TTS_10_20 und 24 im Vergleich mit den Masterkurven der D-TFS-Versuche für $T_R = 10^\circ\text{C}$

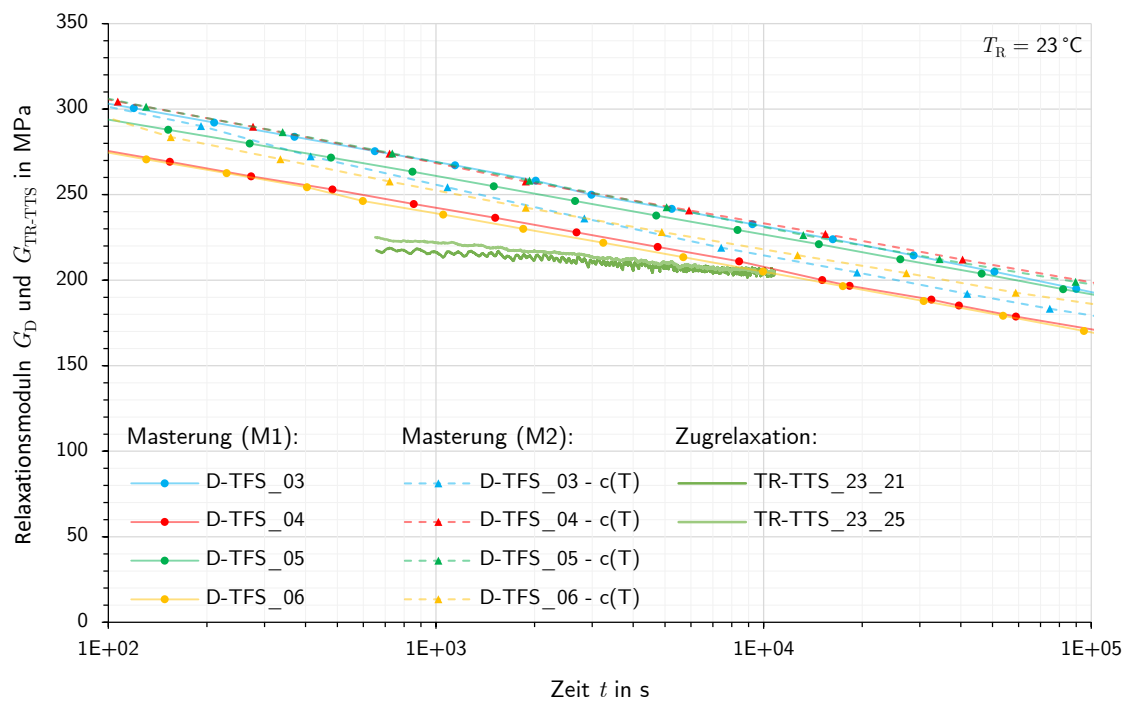


Abbildung AI-50: Ergebnisse der Versuche TR-TTS_23_21 und 25 im Vergleich mit den Masterkurven der D-TFS-Versuche für $T_R = 23^\circ\text{C}$

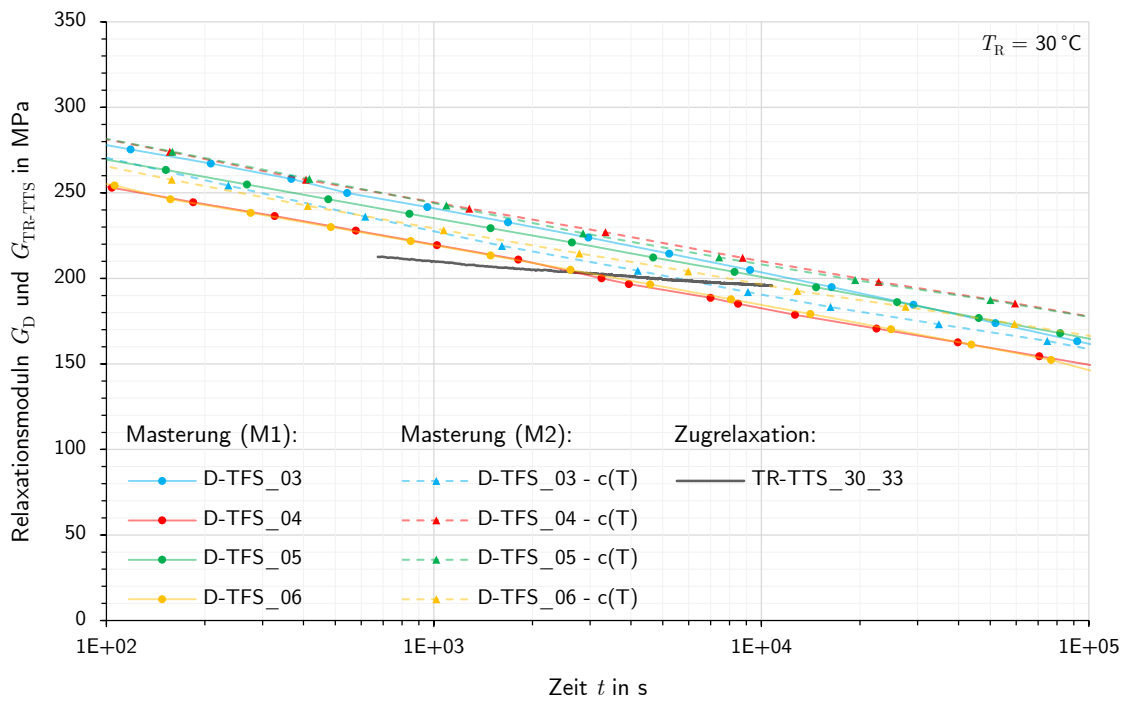


Abbildung AI-51: Ergebnisse des Versuchs TR-TTS_30_33 im Vergleich mit den Masterkurven der D-TFS-Versuche für $T_R = 30\text{ °C}$

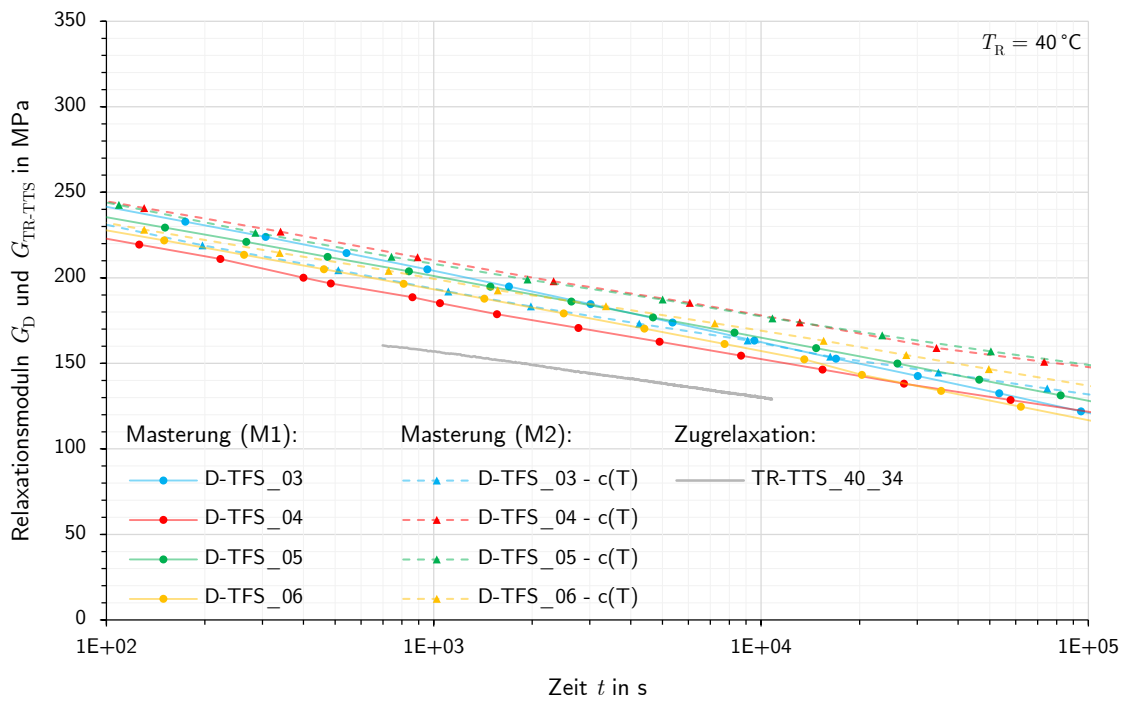


Abbildung AI-52: Ergebnisse des Versuchs TR-TTS_40_34 im Vergleich mit den Masterkurven der D-TFS-Versuche für $T_R = 40\text{ °C}$

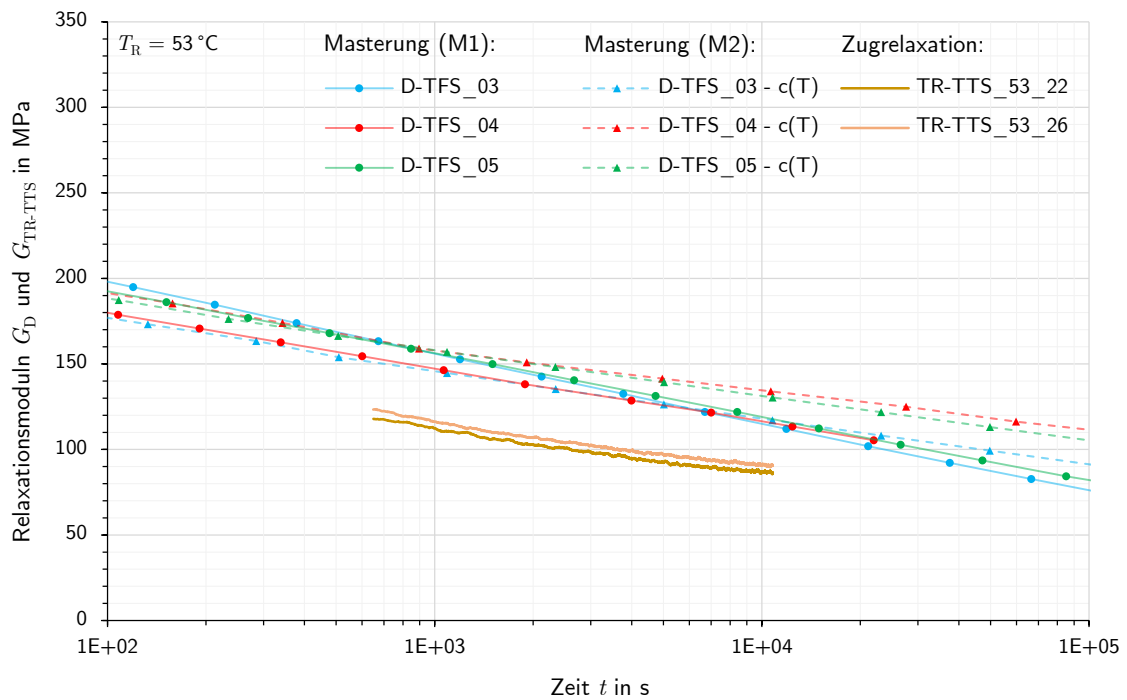


Abbildung AI-53: Ergebnisse der Versuche TR-TTS_53_22 und 26 im Vergleich mit den Masterkurven der D-TFS-Versuche für $T_R = 53\text{ °C}$

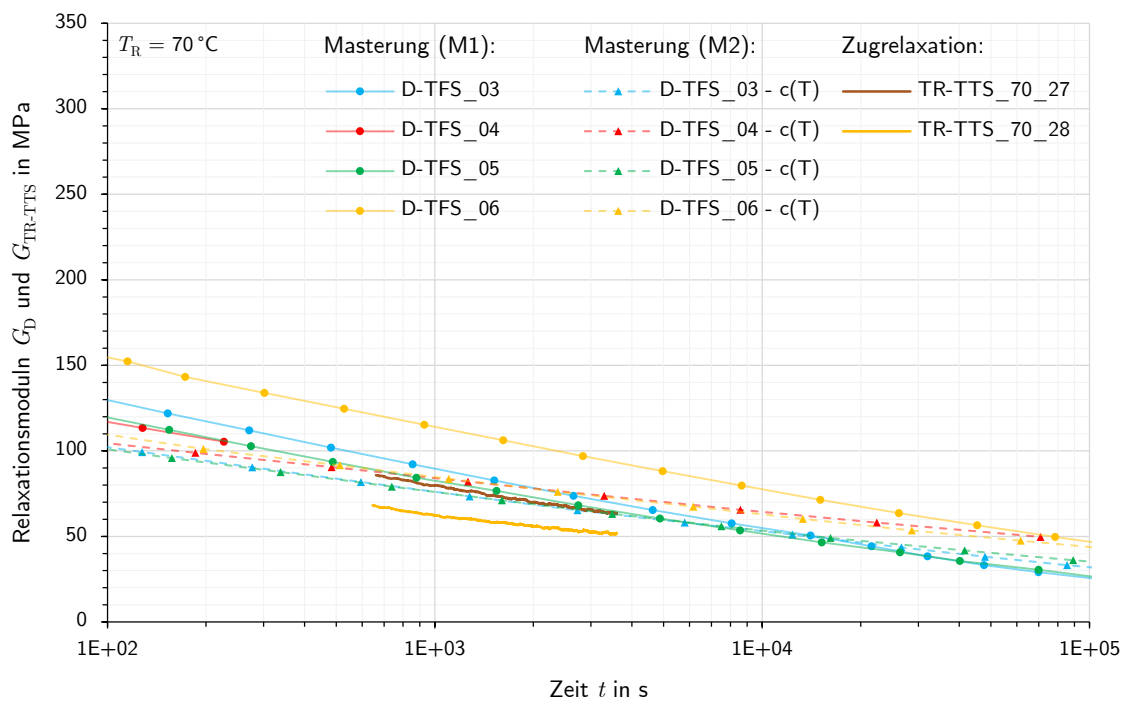


Abbildung AI-54: Ergebnisse der Versuche TR-TTS_70_27 und 28 im Vergleich mit den Masterkurven der D-TFS-Versuche für $T_R = 70\text{ °C}$

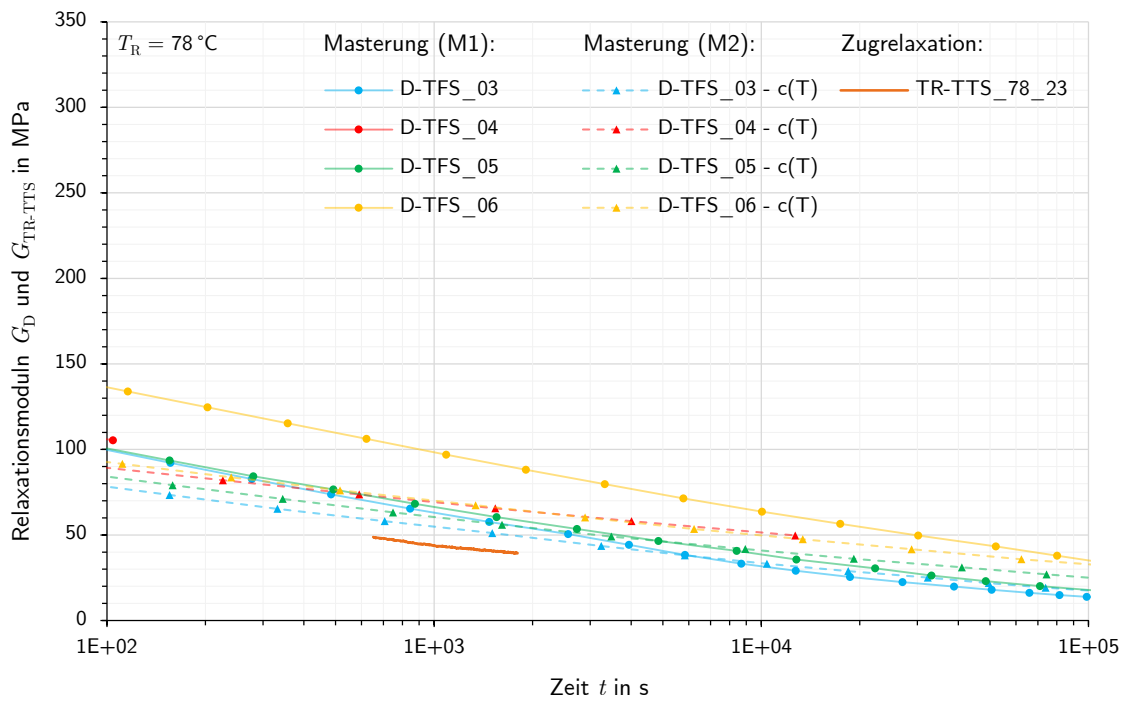


Abbildung AI-55: Ergebnisse des Versuchs TR-TTS_78_23 im Vergleich mit den Masterkurven der D-TFS-Versuche für $T_R = 78\text{ °C}$

AI-7 Ergebnisse der Lang- und Kurzzeitversuche unter Schub

AI-7.1 Steifigkeit unter Schubdeformation bei verschiedenen Temperaturen (ST)

Die Versuche zur Steifigkeit unter Schubdeformation (ST) wurden als Hilfsversuche für die in Abschnitt 4.3.1 beschriebenen Relaxationsversuche unter Schub konzipiert. Sie dienen zur Bestimmung der initialen Steifigkeit der Schubprobekörper $G_{ST}(1800\text{ s}) \hat{=} G_{SR}(1800\text{ s})$. Diese wird als Ausgangswert für die Relaxationsversuche benötigt, da die ursprüngliche Messmethode nicht die notwendige Genauigkeit lieferte. Da die ST-Versuche dementsprechend zuverlässig funktionierten, wurden an weiteren Probekörpern zusätzliche Versuche der gleichen Art durchgeführt. Um sie zu unterscheiden, werden diese analog zu den vergleichbaren Versuchen unter Zug mit *SR-TTS* bezeichnet. Die Versuchsdurchführung war in beiden Fällen gleich, sodass deren Beschreibung dem Kapitel 4.3.2 der SR-TTS-Versuche entnommen werden kann.

Die folgenden Abbildungen zeigen die Ergebnisse der ST-Versuche bei den verschiedenen Temperaturen. Im Fall von ST_50_b_09 kam es zu einem Fehler im Versuch: Aufgrund einer fehlerhaften Bohrung konnte eine der Schrauben zur Befestigung auf der unteren Seite nicht korrekt gesetzt werden (vgl. Abb. 4.24), wodurch es zu einem Schlupf im Versuchsaufbau kam. In den SR-Versuchen war der Fehler in der Bohrung zunächst nicht aufgefallen. Weil die Schubkraft hier über Kontakt der äußeren Lamellen zum Versuchsrahmen übertragen wurde, dienten die Schrauben anders als in den ST- und SR-TTS-Versuchen nur der Lagesicherung und die Bohrungen des Versuchsrahmens hatten entsprechend viel Lochspiel.

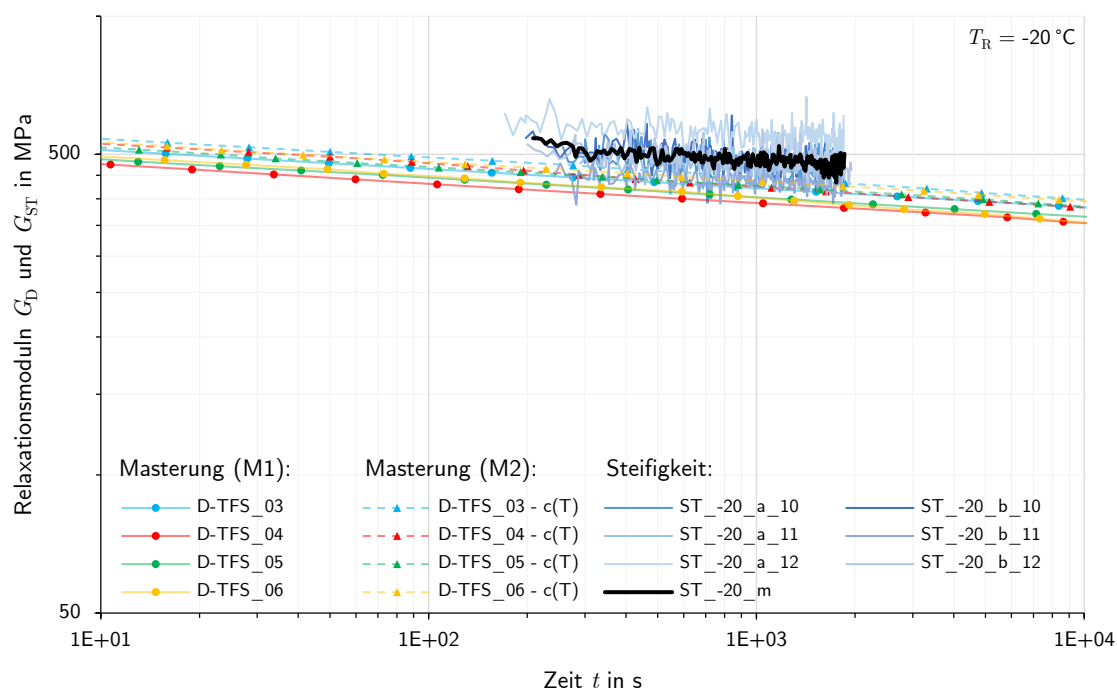


Abbildung AI-56: Ergebnisse aller Steifigkeitsversuche (ST_-20) bei $T_R = -20\text{ °C}$ im Vergleich mit den Masterkurven der D-TFS-Versuche für die gleiche Referenztemperatur

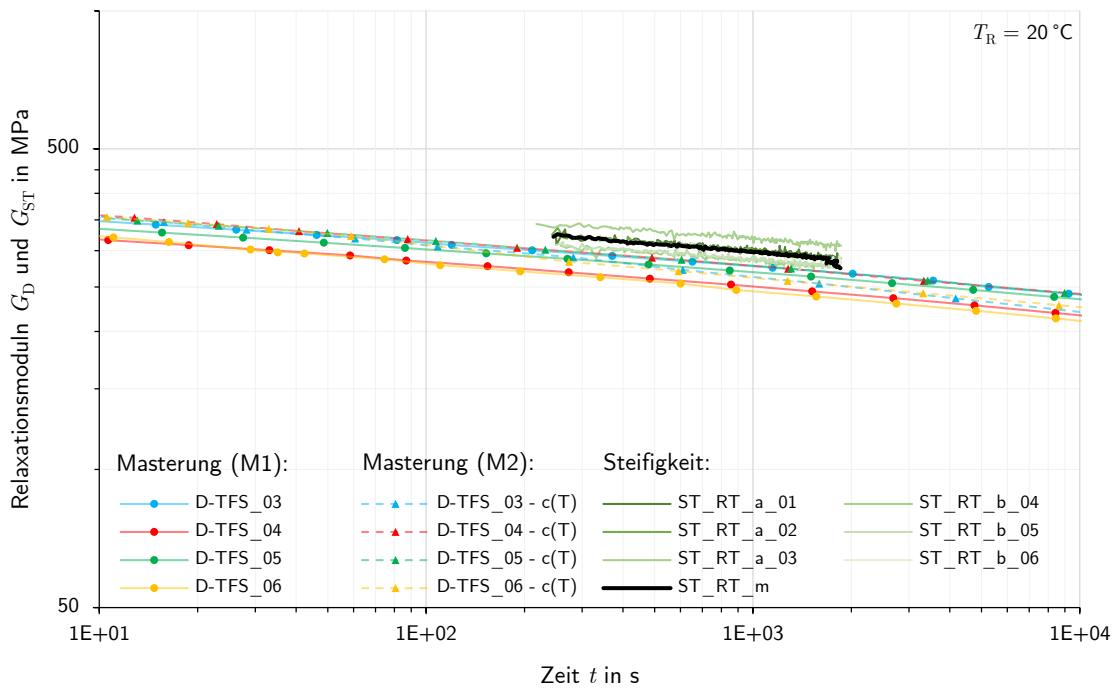


Abbildung AI-57: Ergebnisse aller Steifigkeitsversuche (ST_RT) bei $T_R = 20\text{ °C}$ im Vergleich mit den Masterkurven der D-TFS-Versuche für die gleiche Referenztemperatur

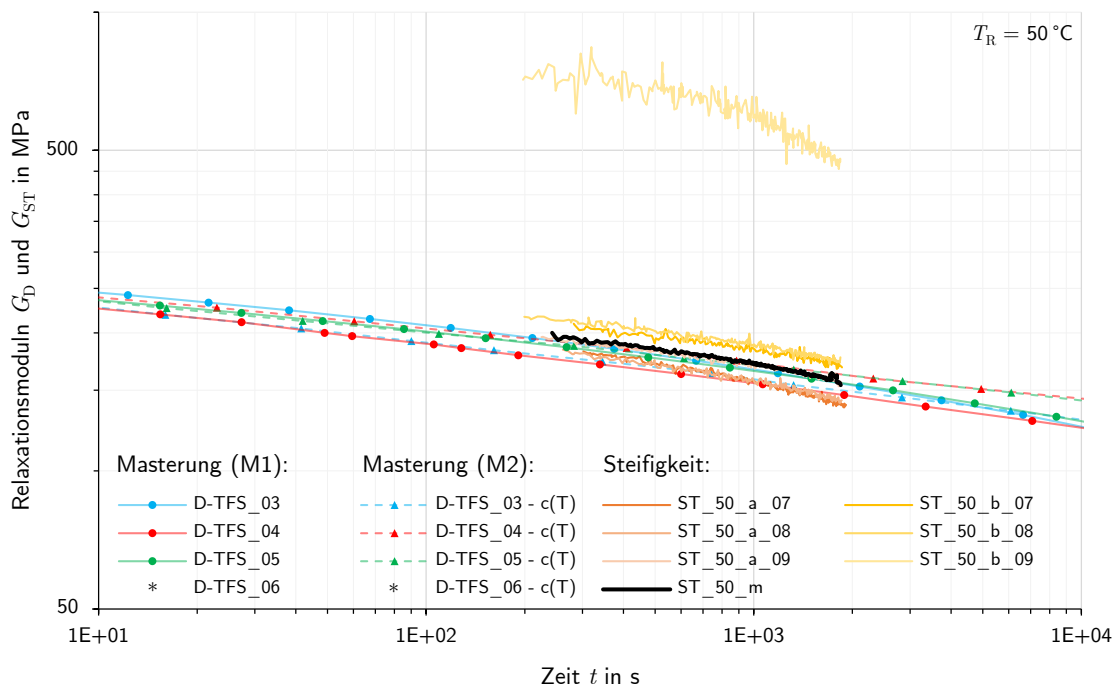


Abbildung AI-58: Ergebnisse aller Steifigkeitsversuche (ST_50) bei $T_R = 50\text{ °C}$ im Vergleich mit den Masterkurven der D-TFS-Versuche für die gleiche Referenztemperatur

AI-7.2 Langzeit-Relaxation unter Schubdeformation bei verschiedenen Temperaturen (SR)

Tabelle AI-21: Aufstellung aller durchgeführten Langzeit-Relaxationsversuche unter Schub (SR)
(Je Versuche wurden drei Probekörper über eine Dauer von $t = 1000$ h belastet)

Bezeichnung Versuch	Nr.	Temperatur T in °C	Belastung F_0 in N	$G_{SR}(1800\text{ s}) \hat{=} G_{ST}(1800\text{ s})$ in MPa	Besonderheiten
SR_RT_a_	01	20	1074	291,4	-
	02		1088	299,0	
	03		1006	308,8	
SR_RT_b_	04	20	1115	276,8	Ausfall der Klimatisierung gegen Ende des Versuchs
	05		1135	277,4	
	06		1134	285,4	
SR_50_a_	07	50	1137	139,9	-
	08		1054	143,6	
	09		1059	158,7	
SR_50_b_	07	50	1253	166,8	Maximale Schubgleitung aller Versuche mit $\max \gamma \approx 2,8\%$
	08		1251	172,4	
	09		1206	477,5	
SR_-20_a_	10	-20	1119	487,1	Nach 200 h Vereisung d. Klimaschranks u. Anstieg d. Temperatur
	11		1040	466,8	
	12		1096	583,0	
SR_-20_b_	10	-20	1239	481,3	-
	11		1264	454,9	
	12		1301	485,1	

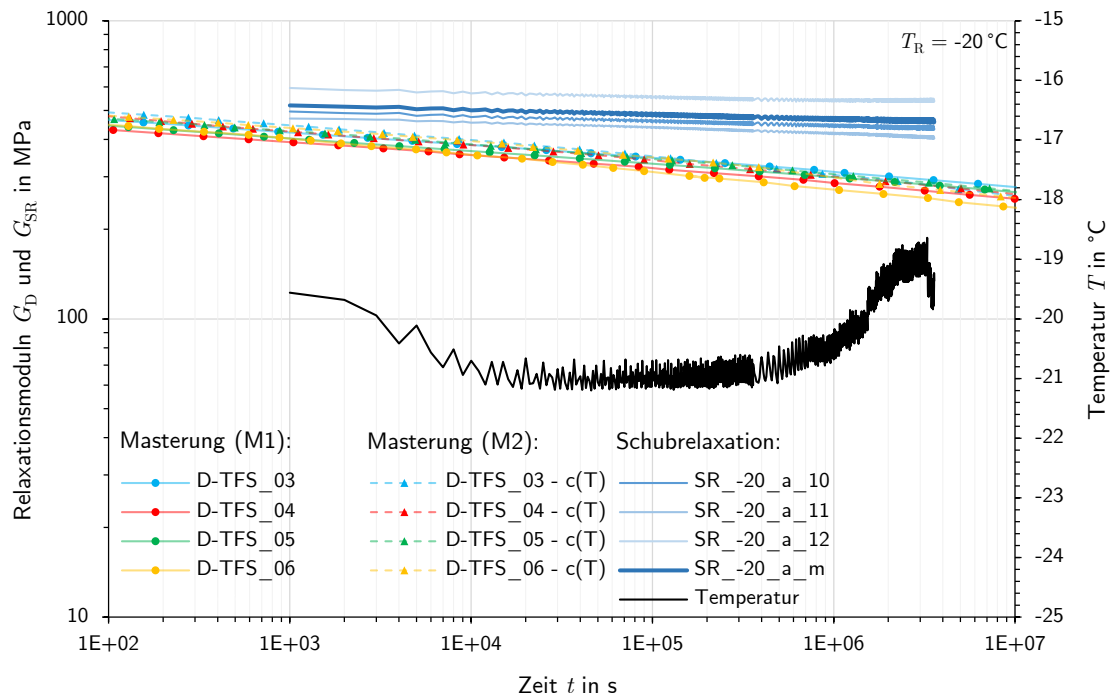


Abbildung AI-59: Ergebnisse des Versuchs SR_-20_a mit seinen drei Probekörpern ($T \approx -20,2^\circ\text{C}$) im Vergleich mit den Masterkurven der D-TFS-Versuche für $T_R = -20^\circ\text{C}$

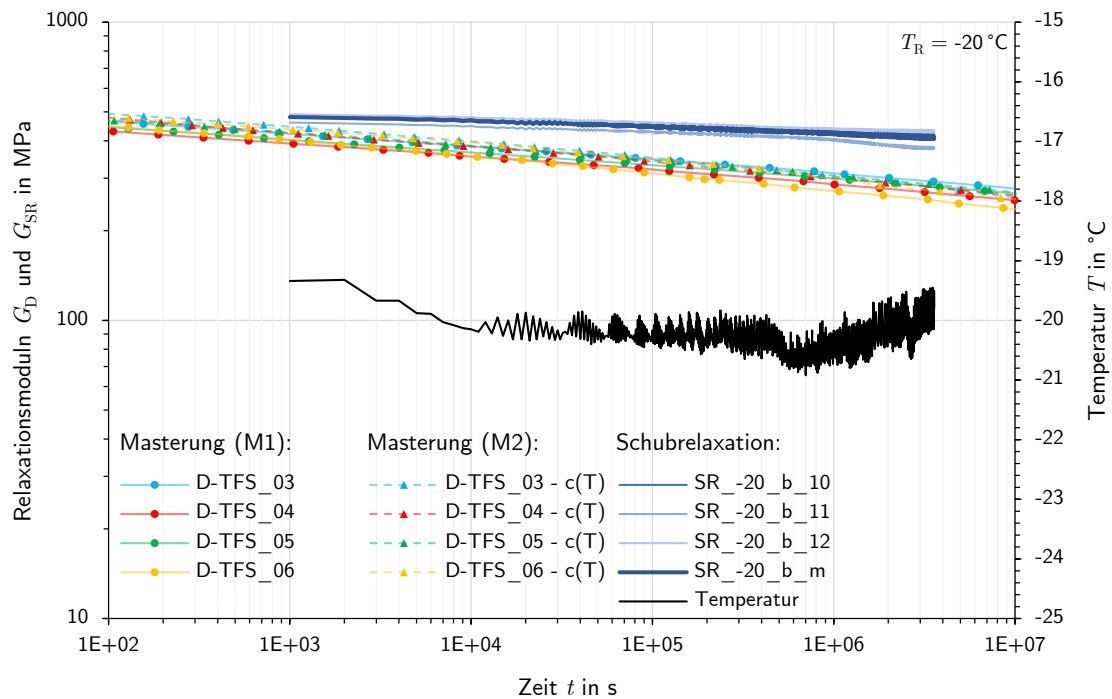


Abbildung AI-60: Ergebnisse des Versuchs SR_-20_b mit seinen drei Probekörpern ($T \approx -20,3^\circ\text{C}$) im Vergleich mit den Masterkurven der D-TFS-Versuche für $T_R = -20^\circ\text{C}$

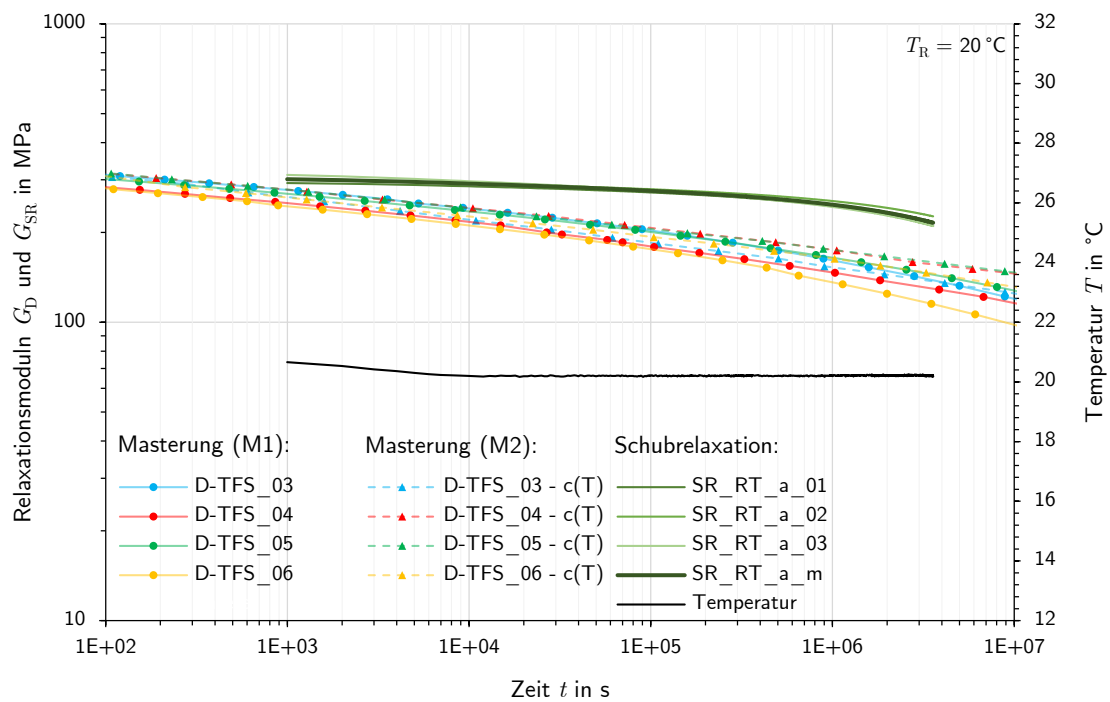


Abbildung AI-61: Ergebnisse des Versuchs SR_RT_a mit seinen drei Probekörpern ($T \approx 20,1^\circ\text{C}$) im Vergleich mit den Masterkurven der D-TFS-Versuche für $T_R = 20^\circ\text{C}$

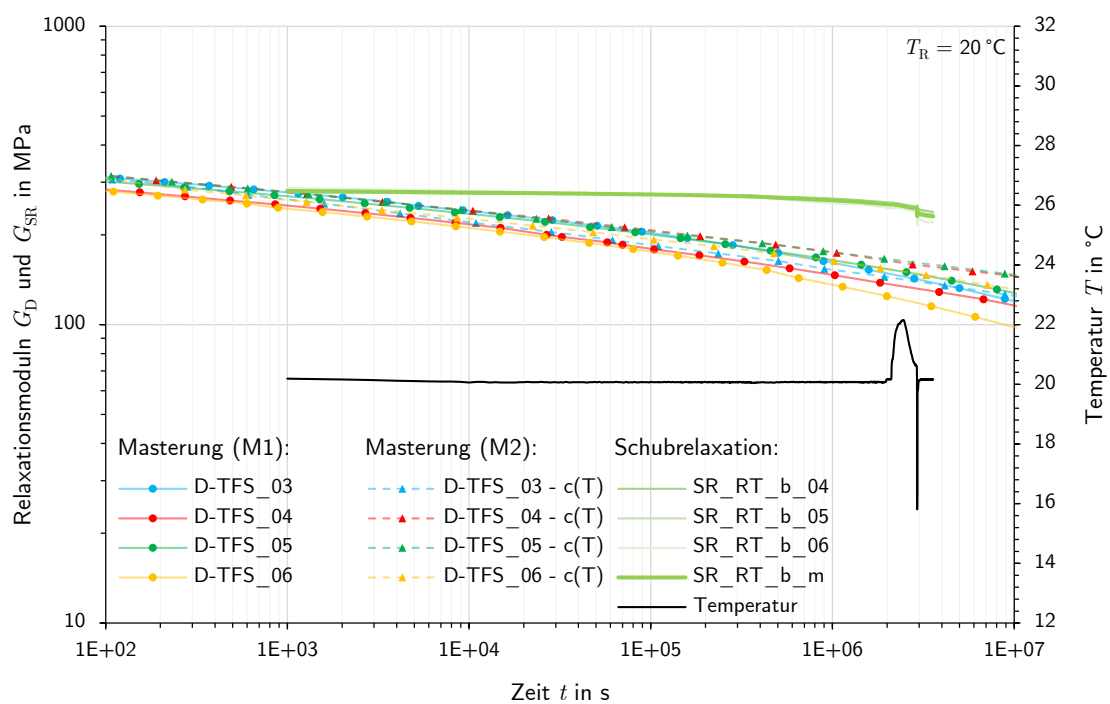


Abbildung AI-62: Ergebnisse des Versuchs SR_RT_b mit seinen drei Probekörpern ($T \approx 20,3^\circ\text{C}$) im Vergleich mit den Masterkurven der D-TFS-Versuche für $T_R = 20^\circ\text{C}$

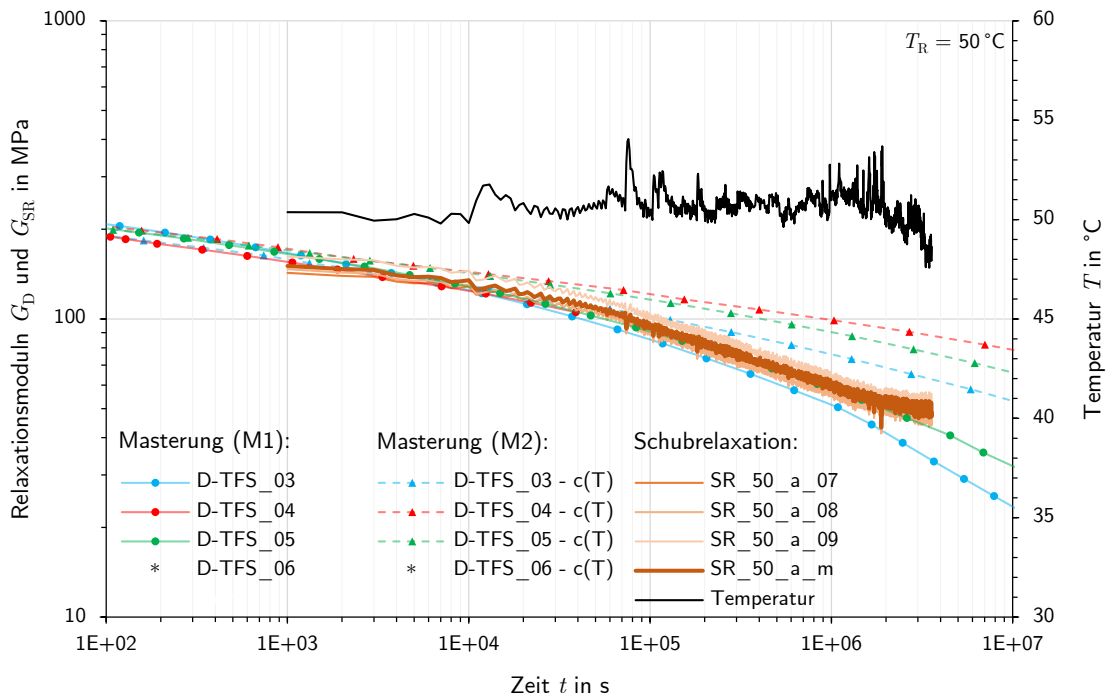


Abbildung AI-63: Ergebnisse des Versuchs SR_50_a mit seinen drei Probekörpern ($T \approx 50,5^\circ\text{C}$) im Vergleich mit den Masterkurven der D-TFS-Versuche für $T_R = 50^\circ\text{C}$
 * (Die Masterkurve von D-TFS_06 konnte nicht zu $T_R = 50^\circ\text{C}$ verschoben werden, da für diese Temperatur keine Messdaten im Versuch vorhanden sind)

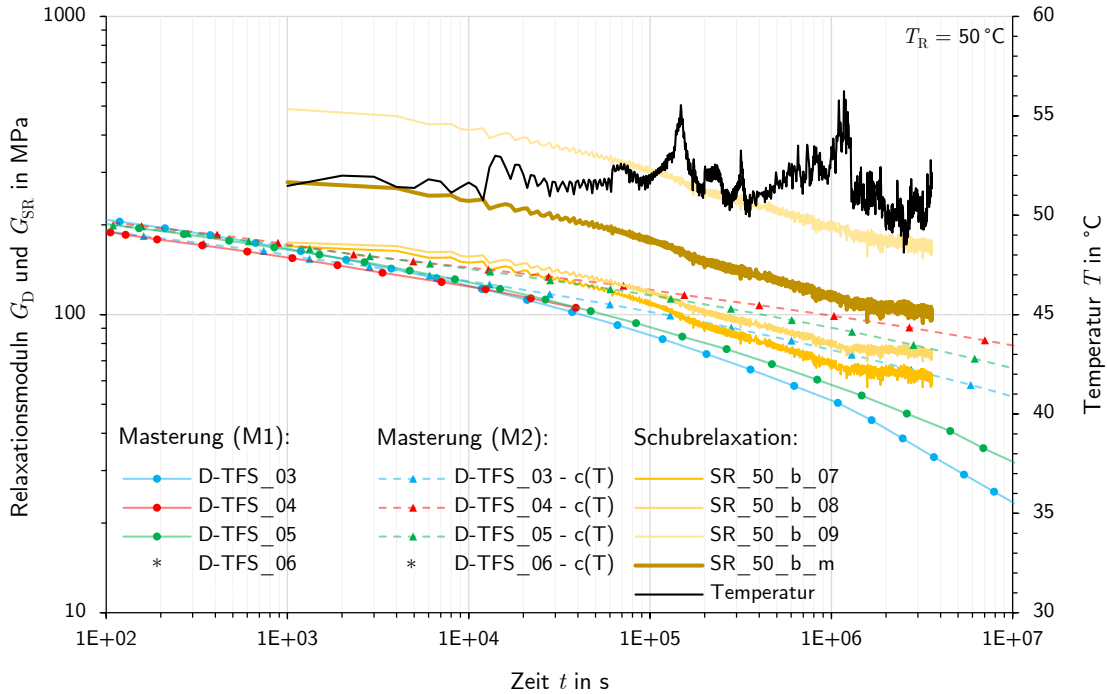


Abbildung AI-64: Ergebnisse des Versuchs SR_50_b mit seinen drei Probekörpern ($T \approx 51,3^\circ\text{C}$) im Vergleich mit den Masterkurven der D-TFS-Versuche für $T_R = 50^\circ\text{C}$
 * (Die Masterkurve von D-TFS_06 konnte nicht zu $T_R = 50^\circ\text{C}$ verschoben werden, da für diese Temperatur keine Messdaten im Versuch vorhanden sind)

AI-7.3 Kurzzeit-Relaxation unter Schubdeformation bei verschiedenen Temperaturen (SR-TTS)

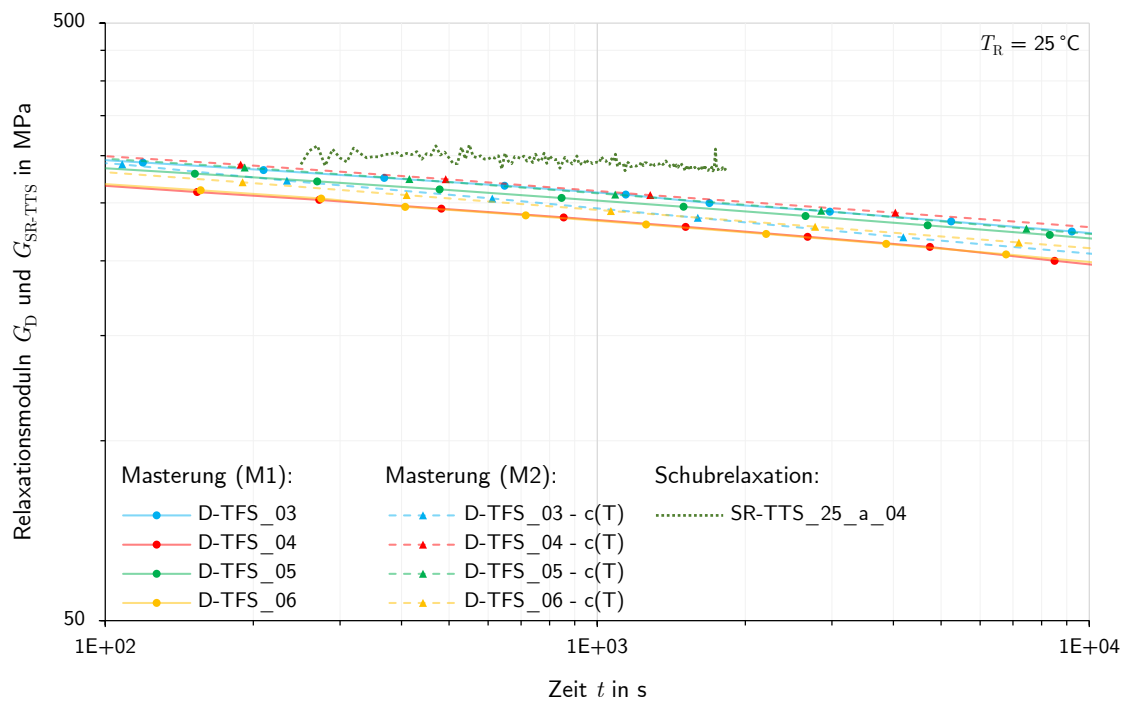


Abbildung AI-65: Ergebnis des Versuchs SR-TTS_25_a_04 im Vergleich mit den Masterkurven der D-TFS-Versuche für $T_R = 25\text{ °C}$

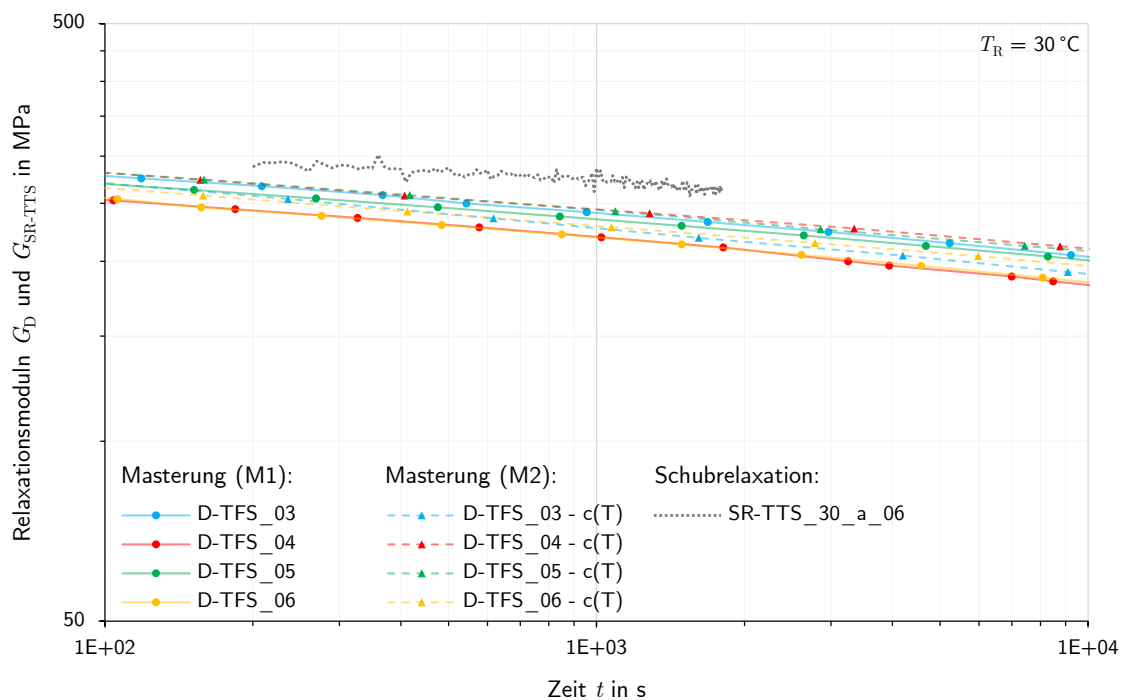


Abbildung AI-66: Ergebnis des Versuchs SR-TTS_30_a_06 im Vergleich mit den Masterkurven der D-TFS-Versuche für $T_R = 30\text{ °C}$

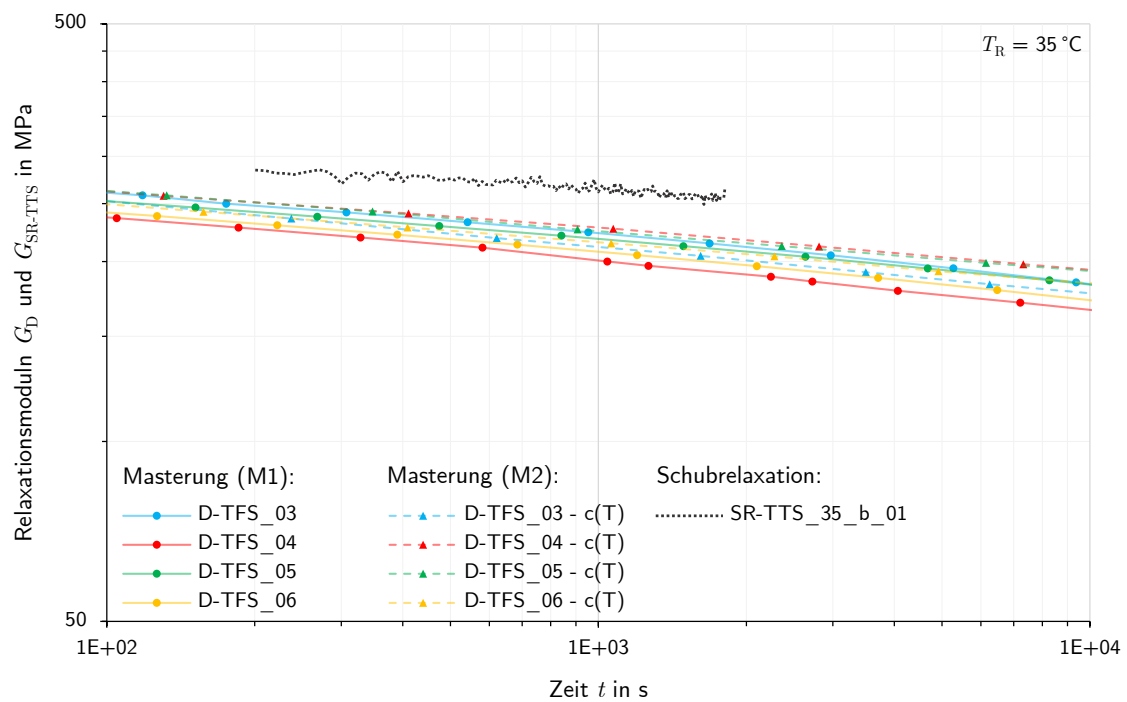


Abbildung AI-67: Ergebnis des Versuchs SR-TTS_35_b_01 im Vergleich mit den Masterkurven der D-TFS-Versuche für $T_R = 35\text{ °C}$

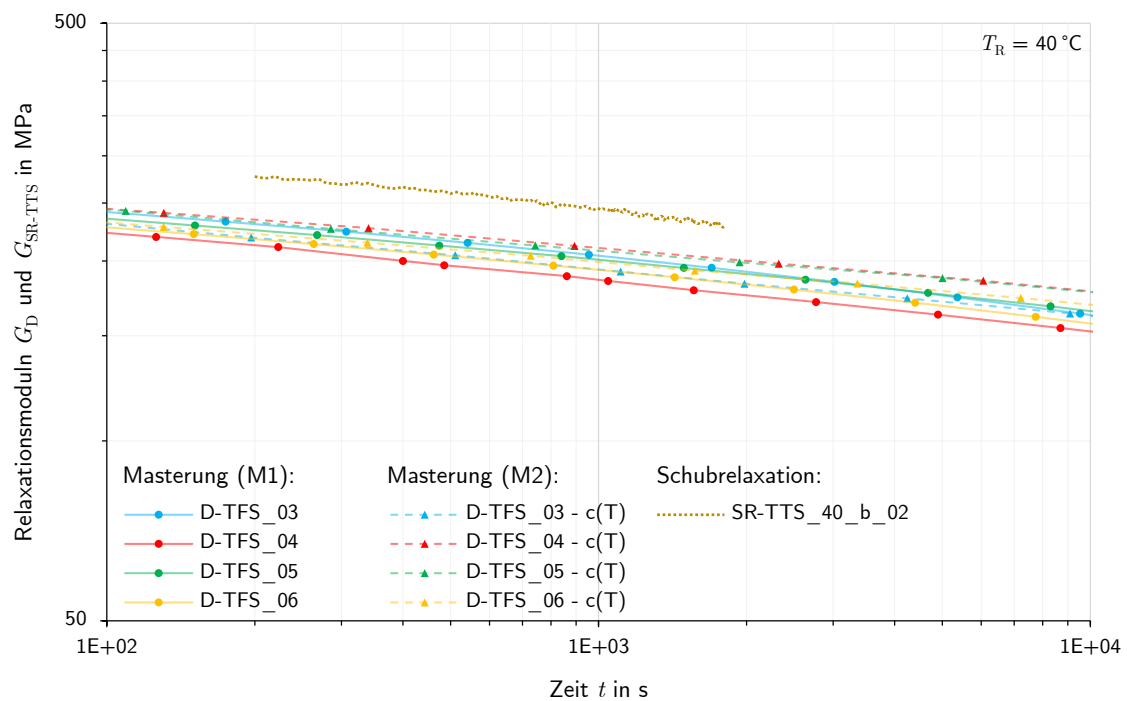


Abbildung AI-68: Ergebnis des Versuchs SR-TTS_40_b_02 im Vergleich mit den Masterkurven der D-TFS-Versuche für $T_R = 40\text{ °C}$

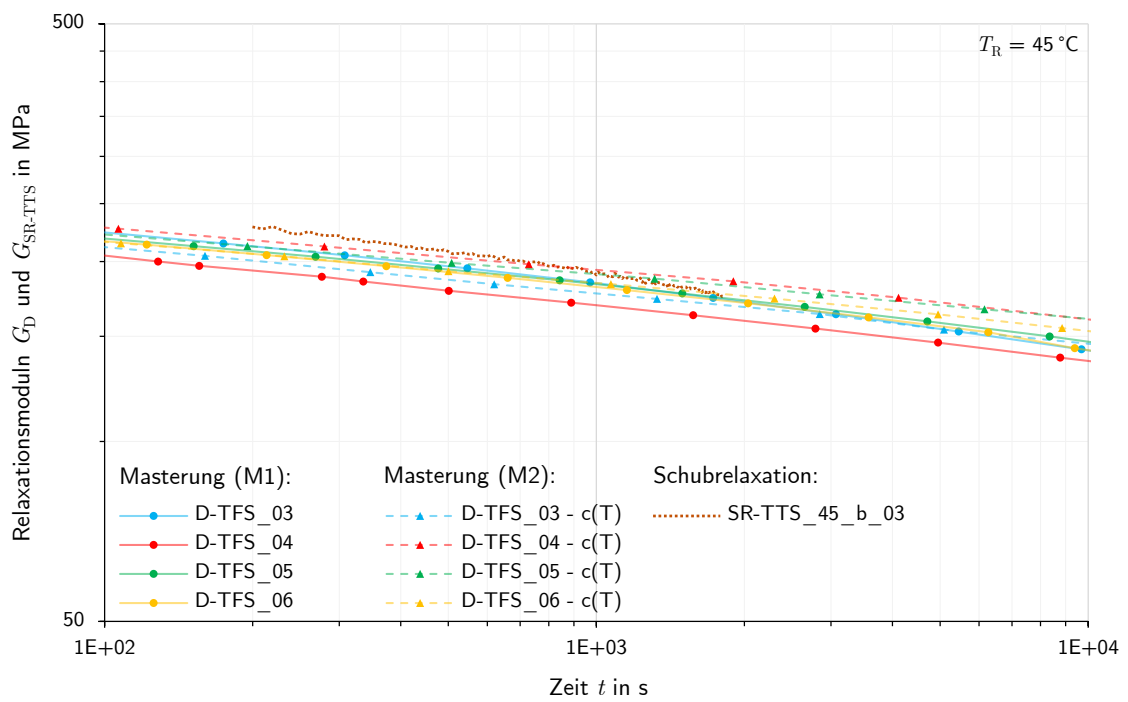


Abbildung AI-69: Ergebnis des Versuchs SR-TTS_45_b_03 im Vergleich mit den Masterkurven der D-TFS-Versuche für $T_R = 45\text{ °C}$

AI-8 Die Interaktion zwischen Probekörper und Versuchsapparatur

Sowohl in den Relaxationsversuchen unter Zug (TR-TTS vgl. Abschnitt 4.2.2), als auch in denen unter Schub (SR vgl. Abschnitt 4.3.1) kam es zu Verfälschungen der Messergebnisse aus der jeweilig verwendeten Versuchsapparatur. Diese wirkten sich durch ihre eigene elastische Nachgiebigkeit auf die Messungen aus. In diesem Anhang soll das Phänomen, dessen mechanischer Ursprung und die Auswirkungen beleuchtet werden.

Die Aufbauten beider Versuche entsprachen einer Reihenschaltung aus Apparatur und Probekörper, wie in der Darstellungen von deren rheologischen Modellen in Abbildung AI-70 zu erkennen ist. Ihr Unterschied bestand lediglich im Bezugssystem und den daraus entstehenden Vorzeichen für Kraft und Deformation. Dem offenen System der TR-TTS-Versuche wurde von außen eine Verschiebung aufgezwungen, während in dem geschlossenen System der SR-Versuchen durch die Vorspannung eine interne Differenzverformung aufgebracht wurde. In beiden Fällen kann das Verhalten anhand eines Verspannungsdiagramms verdeutlicht werden (vgl. Petersen 2013, S. 563 ff.), welches in Abbildung AI-70 unten links dargestellt ist. Die initial aufgebrachte Deformation δ ergibt sich zu jedem Zeitpunkt als Summe der Einzelverformungen $\gamma(t)$ aus dem PUR und $\varepsilon(t)$ aus der Apparatur:

$$\delta = \text{const.}^1 = \varepsilon(t) + \gamma(t) \quad (\text{AI-4})$$

Sie entspricht der blauen Linie im Verspannungsdiagramm. Während die Steifigkeit k_a der Apparatur zeitunabhängig ist, nimmt diejenige des PUR $G(t)$ stetig ab. Im Diagramm entspricht dies einer Drehung der Spannungsgerade des PUR um den Ursprung. Mit zunehmender Zeit verschiebt sich die blaue Linie der Gesamtverformung δ somit parallel in Richtung x -Achse. Dabei sinkt der Deformationsanteil der Feder $\varepsilon(t)$ während die Deformation $\gamma(t)$ des PUR zunimmt. Es kommt zu einem zusätzlichen Kriechen des PUR bedingt durch die Reihenschaltung mit der Versuchsapparatur. Dabei beeinflusst deren Steifigkeit k_a auch die gemessene Größe des Kraftabfalls ΔF im System. Dieser fällt umso geringer aus, je kleiner die Steifigkeit k_a der Apparatur im Verhältnis zur Steifigkeit $G(t)$ der PUR ist. Dementgegen fällt die Kraft F im Extremfall $k_a \rightarrow \infty$ am schnellsten und verhält sich im Fall linearer Viskoelastizität sodann direkt proportional zur Steifigkeit des PUR $G(t)$.

Um die Erklärungen zu verdeutlichen wird ein vereinfachtes Beispiel gezeigt in dem die Steifigkeit des PUR durch ein einfaches Maxwell-Element mit einer Relaxationszeit von $\lambda = 10\text{s}$ repräsentiert wird. Dessen Steifigkeit ergibt sich dann zu:

$$G(t) = G \cdot e^{-t/10\text{s}} \quad (\text{AI-5})$$

Die Steifigkeit k_a der Apparatur wird über einen Faktor x als Vielfaches der initialen Steifigkeit G des PUR angegeben:

$$k_a = x \cdot G \quad (\text{AI-6})$$

Der Parameter x wird dabei mit 5, 10, 20, 50 und ∞ angenommen.

¹Anders als in einem konventionellen aus der Vorspannung von Schrauben bekannten Verspannungsdreieck, ändert sich mit der Relaxation des PUR über die Zeit nicht die Gesamtverformung δ , wohl aber deren Verteilung auf die beiden Anteile.

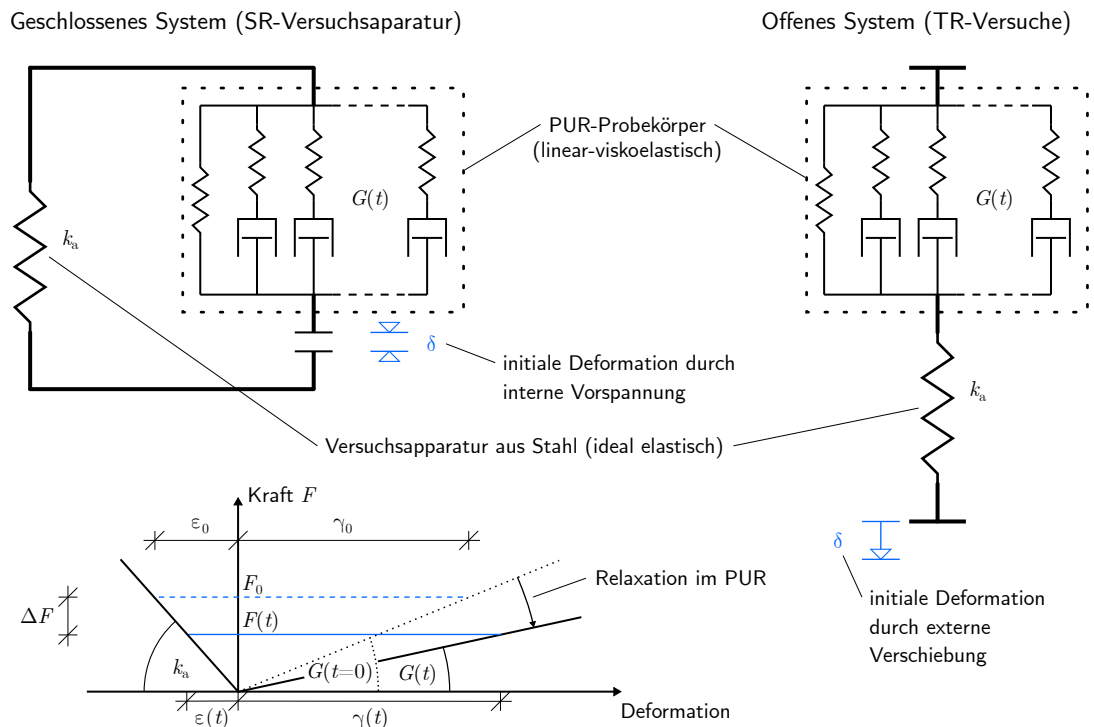


Abbildung AI-70: Rheologische Modelle der TR-TTS- und SR-Versuche und Verspannungsdiagramm

Die von außen über die Kraft $F(t)$ messbare Gesamtsteifigkeit $K_x(t)$ des Systems ergibt sich nach den Modellen aus Abbildung AI-70 als Reihenschaltung zu:

$$K_x(t) = \frac{1}{\frac{1}{k_a} + \frac{1}{G(t)}} \quad (\text{AI-7})$$

Einsetzen der zuvor gezeigten Grundbeziehungen in Gleichung AI-7 ergibt:

$$K_x(t) = \frac{1}{\frac{1}{x \cdot G} + \frac{1}{G(t)}} \quad (\text{AI-8})$$

$$= \frac{G}{\frac{1}{x} + e^{t/10}} \quad (\text{AI-9})$$

Bezieht man nun die messbare Steifigkeit $K_x(t)$ auf die eigentliche Zielgröße der Messung $G(t)$, ergibt sich das Verhältnis $V_x(t)$ der gemessenen zur wahren Steifigkeit des PUR:

$$V_x(t) = \frac{K_x(t)}{G(t)} = \frac{e^{t/10}}{\frac{1}{x} + e^{t/10}} \quad (\text{AI-10})$$

Abbildung AI-71 zeigt die Verläufe der messbaren Gesamtsteifigkeit $K_x(t)$ und deren Verhältnis $V_x(t)$ zur wahren Steifigkeit $G(t)$ über der Zeit für die verschiedenen Steifigkeitsfaktoren $x = \{5, 10, 20, 50\}$ und $x \rightarrow \infty$. Dabei wurde die initiale Steifigkeit des PUR zu $G = 1000$ MPa gesetzt. An den Verläufen ist zu erkennen, dass die Messgröße $K_x(t)$ zu Beginn stets deutlich von der wahren Steifigkeit $G(t)$ des PUR abweicht und sich dieser erst mit zunehmender Relaxation im PUR annähert. Dies bedeutet, dass für die Stärke der Verfälschung das Verhältnis der momentanen Steifigkeit des PUR $G(t)$ zur Steifigkeit des Versuchsaufbaus k_a entscheidend ist. Dies zeigt sich auch in der Abstufung der Kurven in Abhängigkeit vom Steifigkeitsverhältnis x .

Die Verfälschung der Messungen in den TR-TTS- und SR-Versuchen durch die jeweilige Apparatur, sollte demnach mit zunehmender Zeit abklingen. Es kann jedoch keine Aussage über die Schnelligkeit und Stärke dieses Prozess getroffen werden, da das Verhältnis der Steifigkeiten für keinen Zeitpunkt bekannt ist. Es kann nur vermutet werden, dass die TR-TTS-Versuche wesentlich weniger verfälscht wurden als die SR-Versuche. So dehnte eine massige Universalprüfmaschine die schlanken Zugprobekörper der TR-TTS-Versuche (vgl. Abb. 4.24). In den SR-Versuchen waren die Schubprobekörper durch ihre Dicke von 15 mm sehr steif und die Versuchsapparaturen dementsgegen vergleichsweise weich (vgl. Abb. 4.20).

An den Kurven in Abbildung AI-71 zeigt sich ebenfalls, dass die Steigung der gemessenen im Vergleich zur wahren Steifigkeit langsamer abnimmt. Diese Beobachtungen entsprechen jenen, die an den Relaxationsversuchen gemacht wurden. Auch dort waren die Steigungen der Steifigkeitslinien aus den Versuchen nur in höheren Temperaturen (niedrigeren PUR-Steifigkeiten) mit denen der DMTA vergleichbar (vgl. 4.2.2).

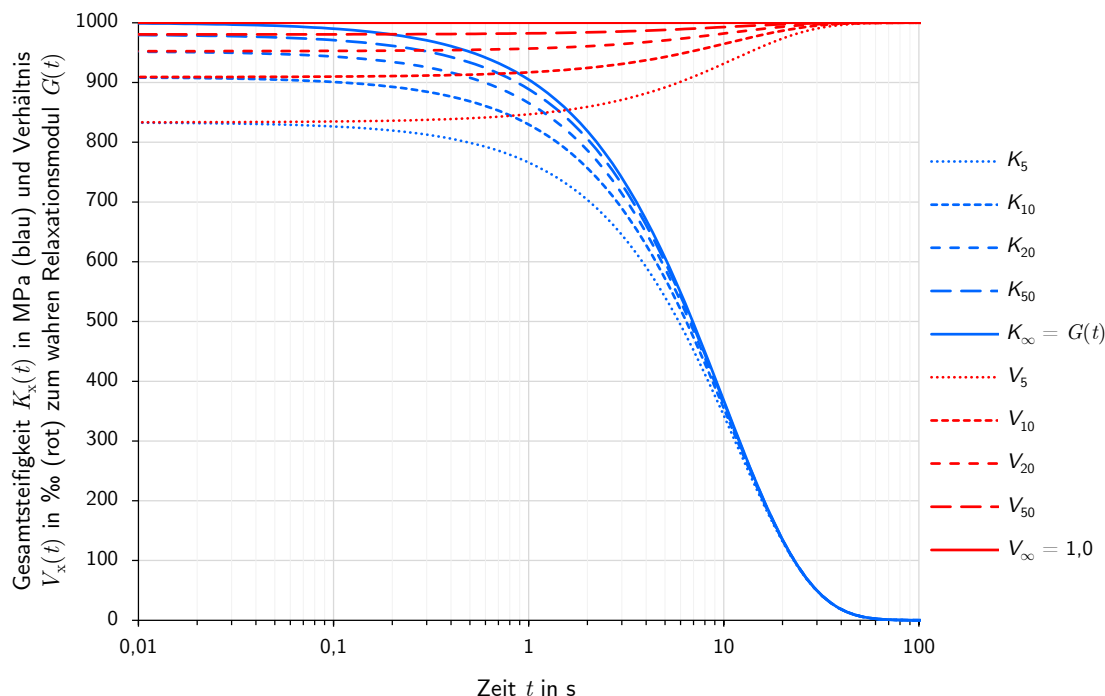


Abbildung AI-71: Verläufe der messbaren Gesamtsteifigkeit $K_x(t)$ aus Apparatur und PUR nach Gl. AI-7 und deren Verhältnis $V_x(t)$ zur wahren Steifigkeit $G(t)$ des PUR

AI-9 Vergleich der Verschiebungsfaktoren mit den untersuchten ZTV-Ansätzen

Tabelle AI-22: Aufstellung aller durch Näherung ermittelten Konstanten der ZTV-Ansätze

Versuch	Arrhenius E_a in J/mol	Williams Landel Ferry I_1 in °C	I_2 in °C	e-Ansatz m
D-TFS_03	167208	17500	-372	4,4645
D-TFS_04	165328	16500	-375	4,4720
D-TFS_05	172559	18500	-380	4,3616
D-TFS_06	166695	16500	-375	4,6486
Mittelwert	167948	17250	-376	4,4867

AI-9.1 Vergleiche mit dem Ansatz nach Arrhenius

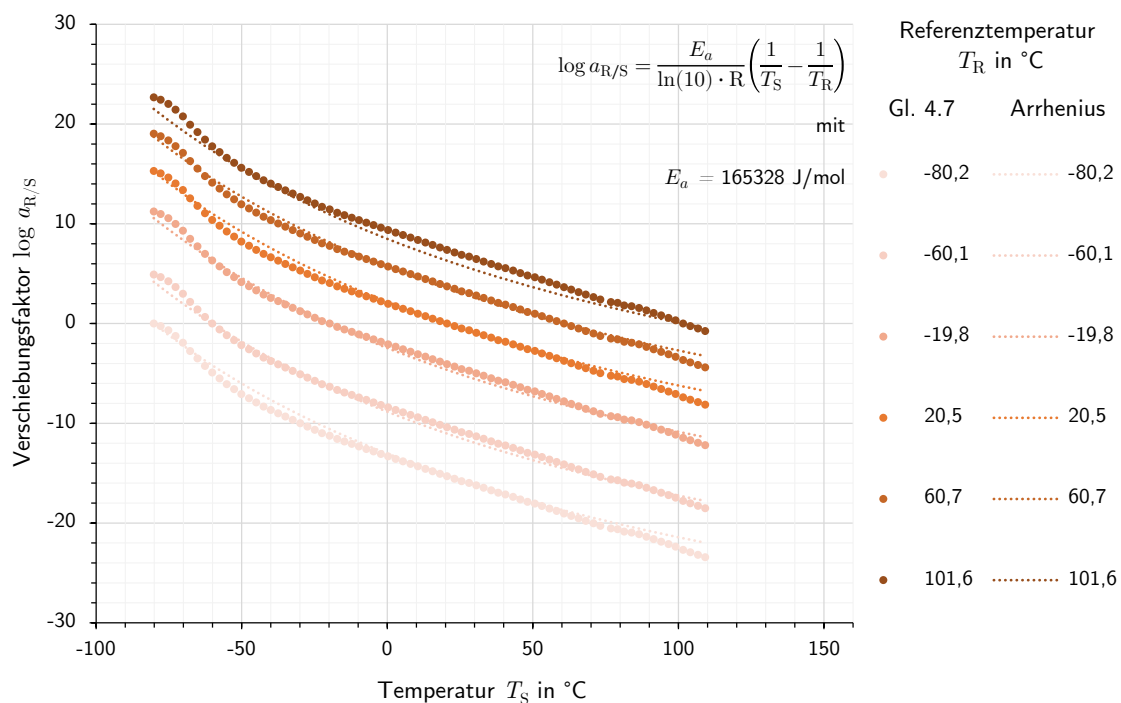


Abbildung AI-72: Verschiebungsfaktoren $\log a_{R/S}$ des Versuchs D-TFS_04 aus diskreter Berechnung und über den Arrhenius-Ansatz

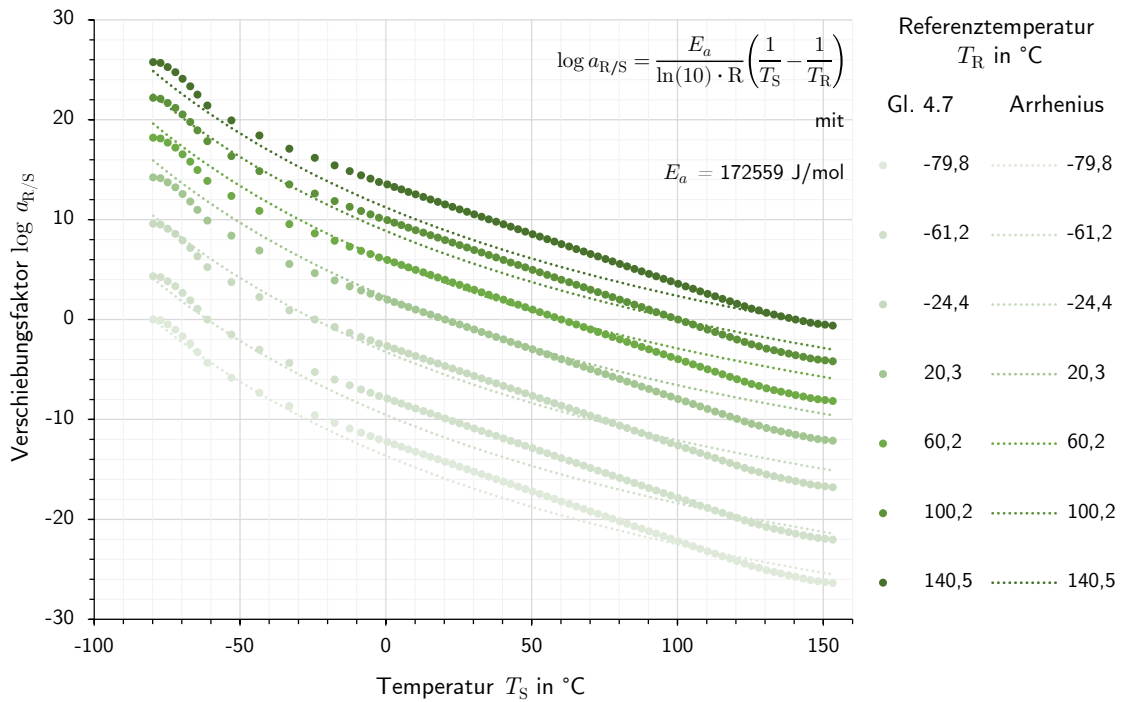


Abbildung AI-73: Verschiebungsfaktoren $\log a_{R/S}$ des Versuchs D-TFS_05 aus diskreter Berechnung und über den Arrhenius-Ansatz

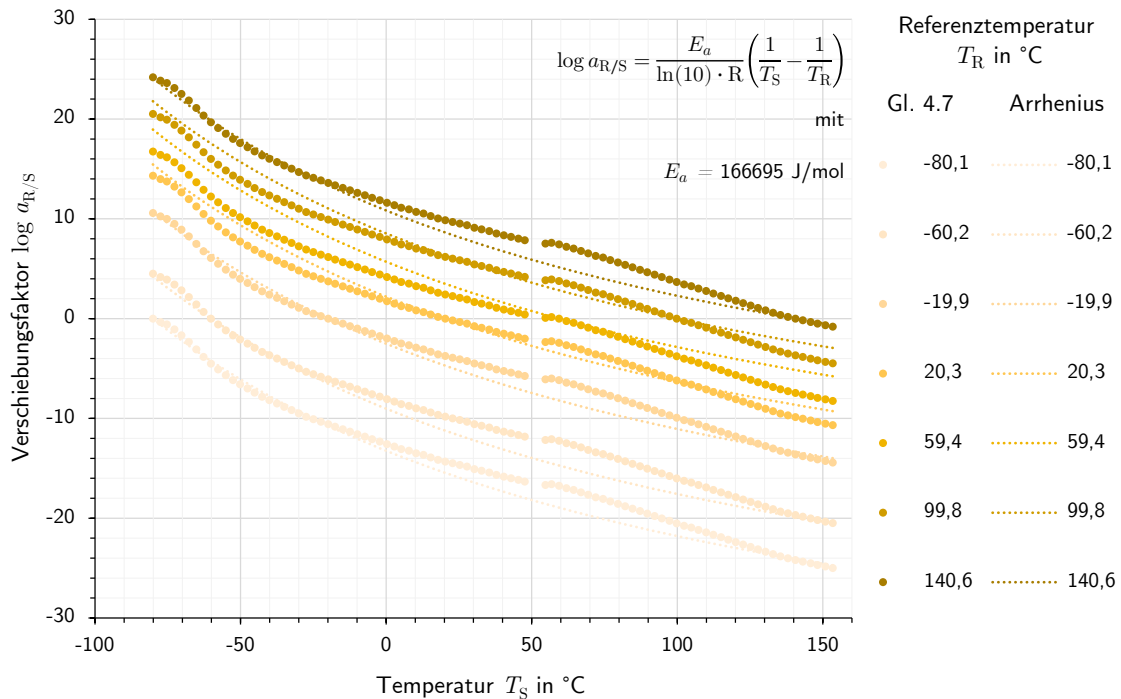


Abbildung AI-74: Verschiebungsfaktoren $\log a_{R/S}$ des Versuchs D-TFS_06 aus diskreter Berechnung und über den Arrhenius-Ansatz

AI-9.2 Vergleiche mit dem Ansatz nach Williams Landel und Ferry

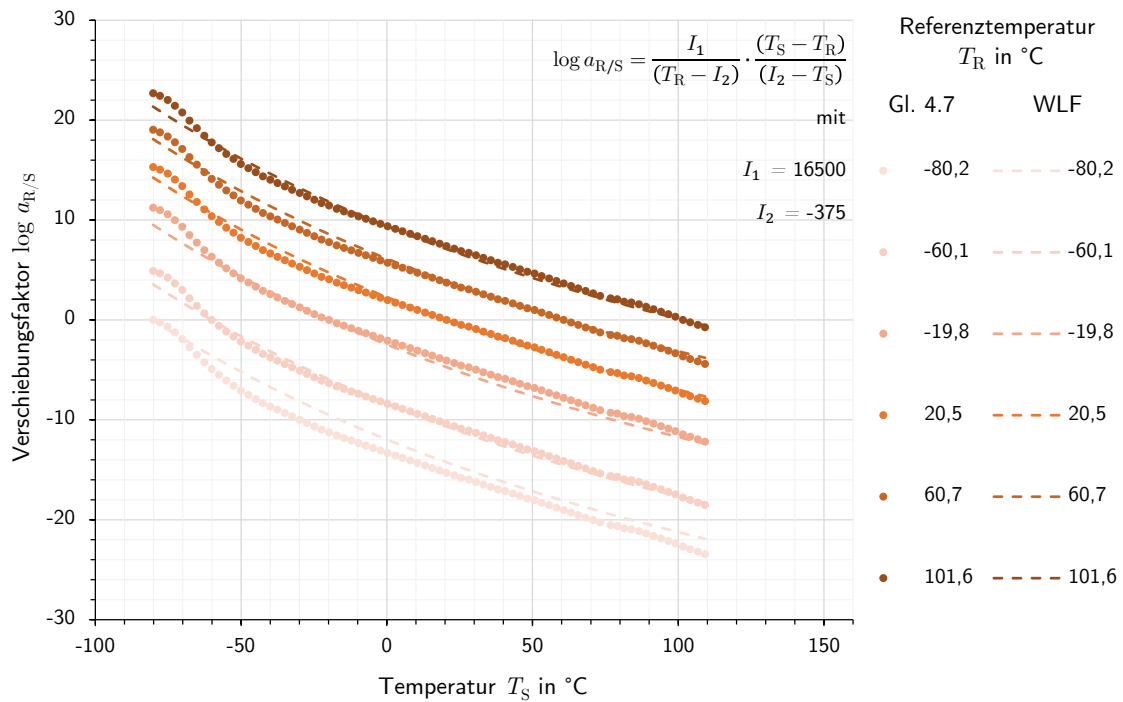


Abbildung AI-75: Verschiebungsfaktoren $\log a_{R/S}$ des Versuchs D-TFS_04 aus diskreter Berechnung und über den WLF-Ansatz

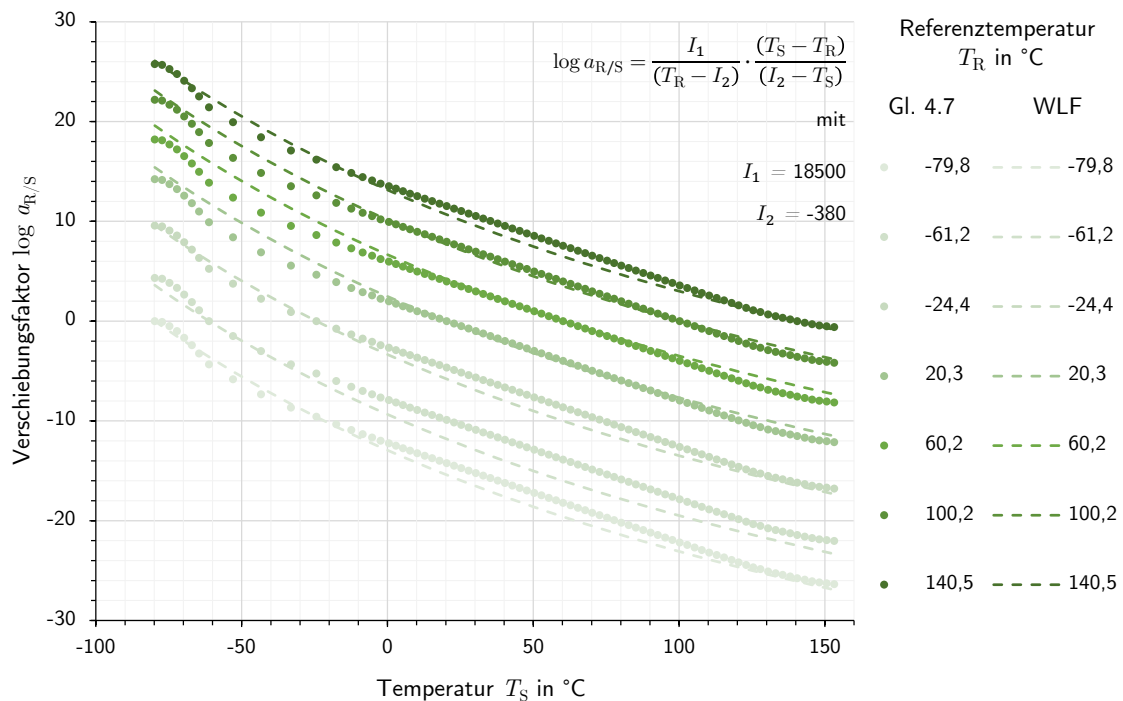


Abbildung AI-76: Verschiebungsfaktoren $\log a_{R/S}$ des Versuchs D-TFS_05 aus diskreter Berechnung und über den WLF-Ansatz

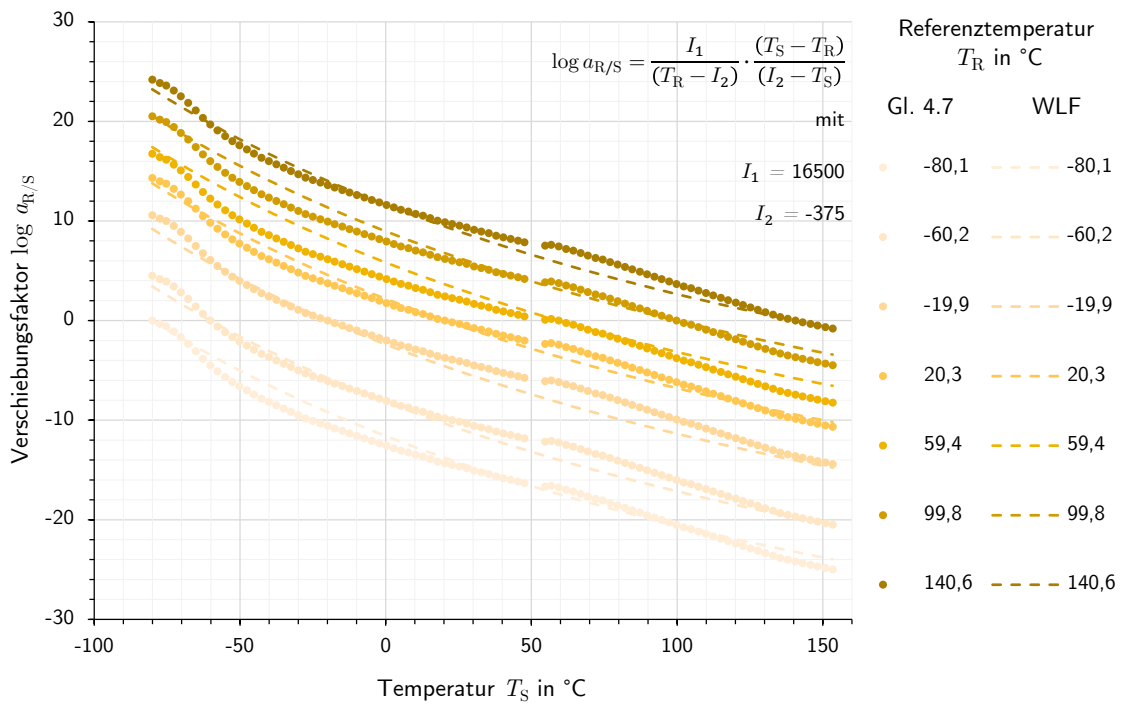


Abbildung AI-77: Verschiebungsfaktoren $\log a_{R/S}$ des Versuchs D-TFS_06 aus diskreter Berechnung und über den WLF-Ansatz

AI-9.3 Vergleiche mit dem empirischen Exponential-Ansatz

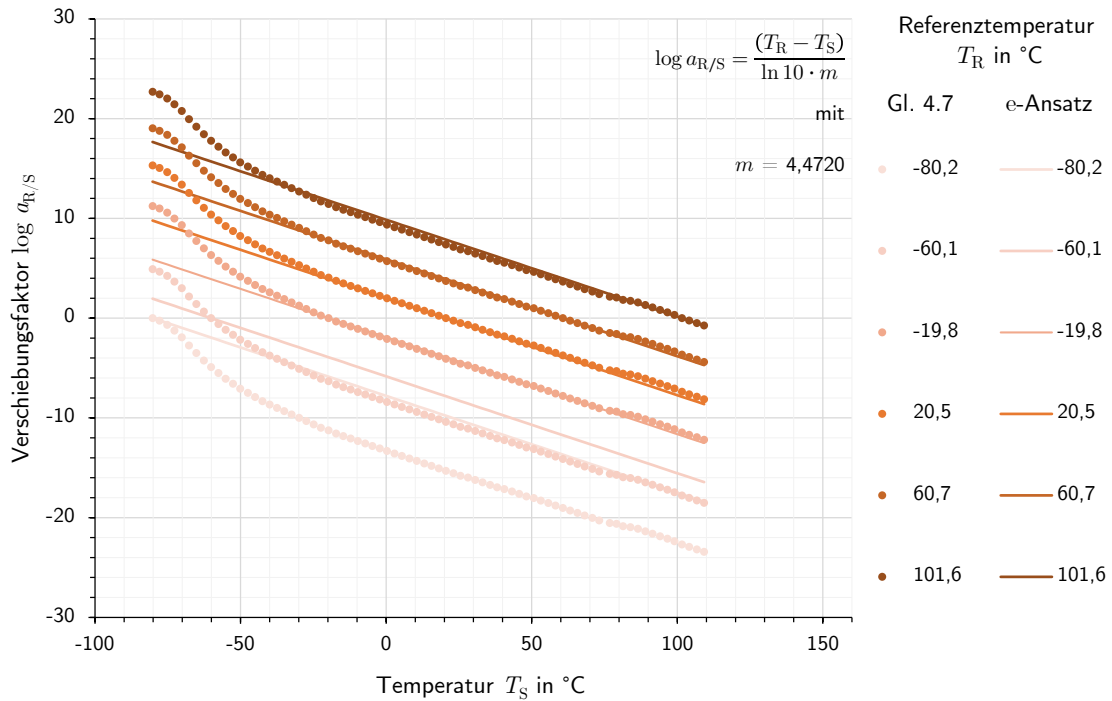


Abbildung AI-78: Verschiebungsfaktoren $\log a_{R/S}$ des Versuchs D-TFS_04 aus diskreter Berechnung und über den e-Ansatz

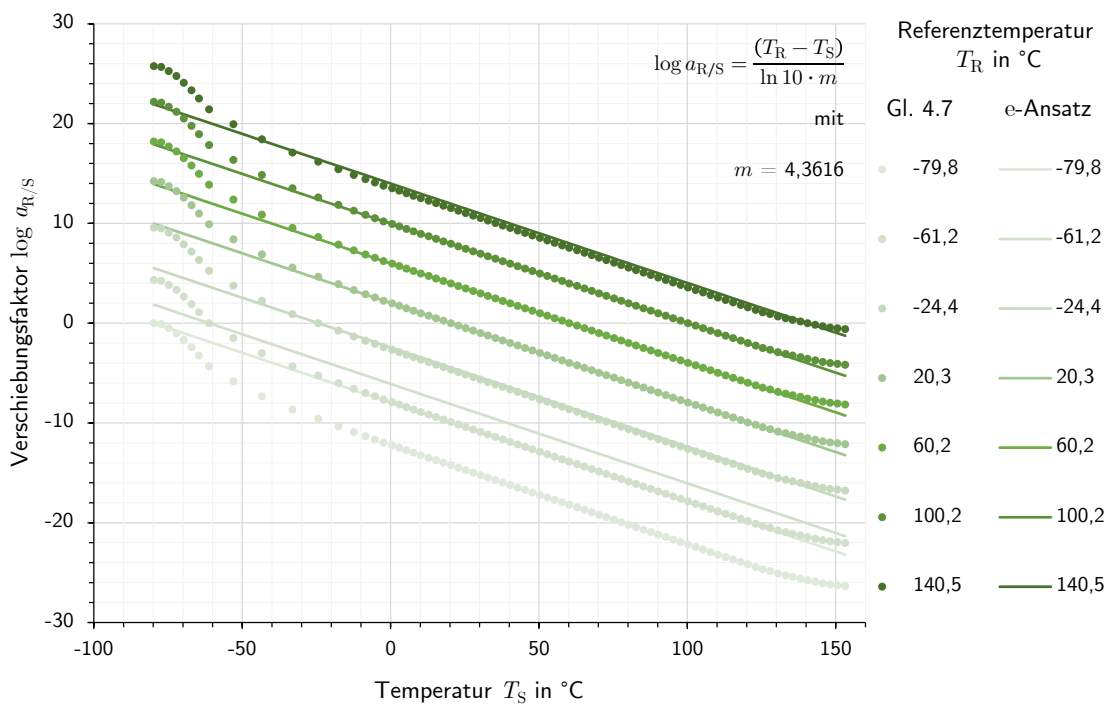


Abbildung AI-79: Verschiebungsfaktoren $\log a_{R/S}$ des Versuchs D-TFS_05 aus diskreter Berechnung und über den e-Ansatz

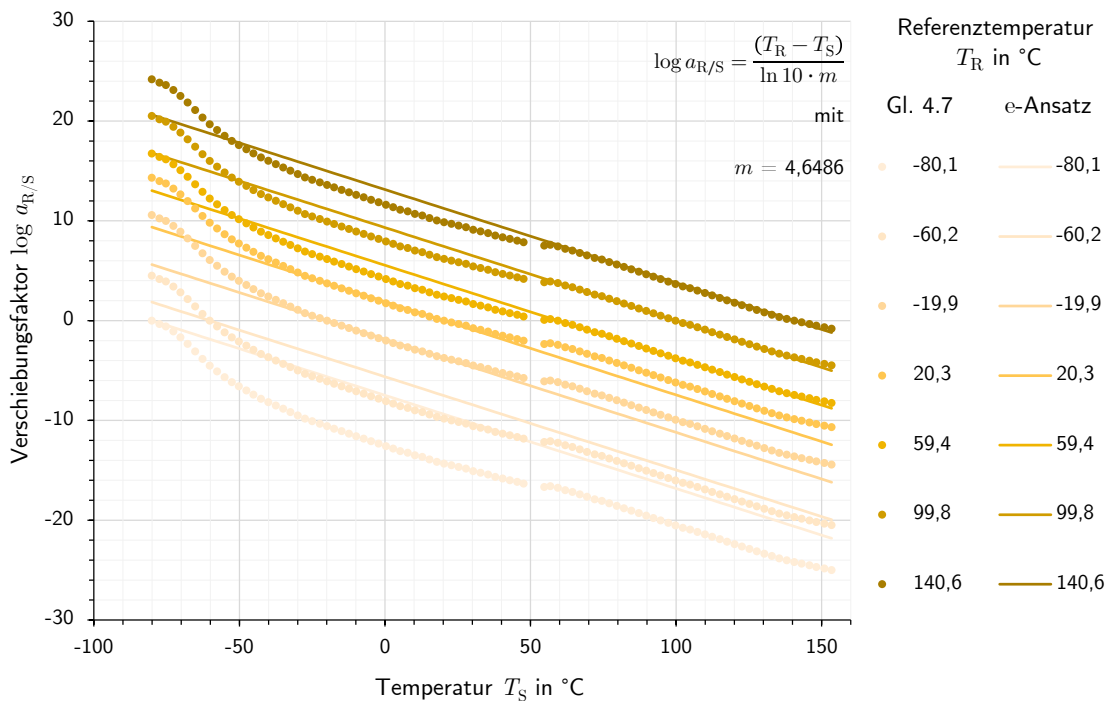


Abbildung AI-80: Verschiebungsfaktoren $\log a_{R/S}$ des Versuchs D-TFS_06 aus diskreter Berechnung und über den e-Ansatz

AI-10 Die Prony-Parameter aus den D-TFS-Versuchen

Tabelle AI-23: Ergebnisse der Prony-Parameter aus allen Funktionsanpassungen an die D-TFS-Versuche

Reihenglieder		Prony-Parameter G_i				Mittelwert ¹
i	$\log(\lambda_i)$	D-TFS_03	D-TFS_04	D-TFS_05	D-TFS_06	
e	-	6,316	<i>54,411</i>	6,832	6,474	6,541
1	12	-	-	2,800	-	2,800
2	11	6,300	-	9,481	3,964	6,581
3	10	17,587	-	20,507	14,130	17,408
4	9	29,711	-	26,660	22,566	26,313
5	8	35,995	42,944	36,895	31,777	36,903
6	7	40,809	28,584	36,186	36,131	35,428
7	6	42,767	33,215	35,935	37,560	37,369
8	5	38,849	34,366	34,514	34,408	35,534
9	4	36,657	35,914	34,857	36,169	35,899
10	3	34,876	32,208	32,451	34,293	33,457
11	2	34,889	34,701	31,832	44,446	36,467
12	1	34,483	32,641	31,888	40,812	34,956
13	0	36,921	36,600	35,844	46,181	38,887
14	-1	41,231	35,273	40,820	43,519	40,211
15	-2	43,154	42,429	39,903	40,404	41,472
16	-3	49,206	48,107	44,024	51,920	48,314
17	-4	57,709	51,660	47,963	59,396	54,182
18	-5	62,958	52,118	52,864	52,291	55,058
19	-6	59,772	54,376	<i>89,973</i>	63,633	59,260
20	-7	76,057	69,943	<i>85,438</i>	67,542	71,181
21	-8	83,088	73,318	<i>-664,579</i>	94,906	83,770
22	-9	105,273	95,834	<i>2825,223</i>	94,477	98,528
23	-10	144,983	104,378	<i>-2322,749</i>	173,437	140,933
24	-11	191,112	183,746	<i>844,435</i>	147,742	174,200
25	-12	202,856	188,167	<i>37,644</i>	264,697	218,573
26	-13	144,265	162,313	<i>226,059</i>	98,798	135,125
27	-14	88,828	202,084	-	155,895	148,935

¹Die *kursiv* gestellten Werte der Versuche D-TFS_04 und D-TFS_05 gehen aufgrund der in Abschnitt 5.2.2 genannten Gründe nicht in die Berechnung des Mittelwerts mit ein.

Anhang II

All-1 Ergebnisse der Voruntersuchung zum Vergleich der Berechnungsverfahren

Tabelle All-24: Ergebnisse der Ersatzsteifigkeit k_S in N/mm eines SPS-Balkens unter einer Einslast in Feldmitte nach den zu vergleichenden Verfahren (Für nähere Informationen zur Voruntersuchung siehe Abschnitt 6.2)

Bezogene Steifigkeit des Kerns	Element	Modell 1 FE-Volumen (Referenz)	Modell 2 FE-Schale ($V = t_f/2$)	Modell 3 FE-Schale ($V = 0$)	Modell 4 Fachwerk	Modell 5 SST	Modell 6 SMT	Modell 7 Wölfel
G_c	S101010-700	3680,12	3678,09	1311,56	3705,35	3708,33	3010,45	3548,69
	S101010-5000	17,23	17,21	5,32	17,31	17,32	15,83	17,31
	S109010-700	16157,70	16103,06	13234,52	16485,20	16925,13	15351,81	15890,05
	S109010-5000	348,96	348,60	282,99	347,05	347,36	345,21	346,68
$0,5 G_c$	S101010-700	2716,65	2704,02	1063,76	2735,98	2739,00	2023,42	2561,66
	S101010-5000	16,97	16,95	5,31	17,04	17,04	15,55	17,02
	S109010-700	8964,59	8919,02	7369,74	9165,90	9371,40	8098,99	8637,23
	S109010-5000	305,33	304,92	247,51	304,37	304,73	301,80	303,27
$0,1 G_c$	S101010-700	1169,84	1149,39	665,19	1186,54	1186,96	558,50	1096,74
	S101010-5000	15,11	15,08	4,80	15,19	15,19	13,59	15,07
	S109010-700	2371,19	2343,24	2000,08	2453,27	2449,43	1694,52	2232,75
	S109010-5000	155,59	155,10	126,20	155,57	155,75	150,45	151,93

AII-2 Die Querschnittswerte in Abhängigkeit von den Verhältnisparametern

Wie in Abschnitt 7.1.1 beschrieben, werden alle Abmessungen im Sandwich von den dimensionslosen Verhältnisparametern ρ_S , $\bar{\lambda}_f$ und δ abhängig gemacht, um deren Einfluss auf die Tragwirkung von Sandwichelementen mit dicken Deckschichten sichtbar zu machen. Dafür ist es erforderlich, auch alle wichtigen Querschnittsgrößen und Eingangsparmeter für die Berechnungen nach der Sandwichtheorie dicker Deckschichten (SST) und der Biegetheorie von diesen Parametern abhängig zu machen und die absoluten geometrischen Größen zu isolieren. Folgend werden die wichtigsten Querschnittswerte eines allgemeinen Sandwichbalkens und seiner Grenzfälle in Abhängigkeit von den Verhältnisparametern hergeleitet: Der Plattenstreifen mit starrem Verbund, das Sandwich mit elastischem Verbund und die Deckschichten ohne Verbund. Diese werden in den späteren Herleitungen der Steifigkeits- und Spannungsfaktoren und deren Grenzfallfunktionen wieder aufgegriffen.

Abbildung AII-81 zeigt dafür die wichtigsten Abmessungen im Sandwichquerschnitt in der verwendeten Nomenklatur in Anlehnung an DIN EN 14509 und die drei im Rahmen dieser Studie untersuchten Systeme mit deren Abmessungen und Belastung. Letztere sind aus Platzgründen gemeinsam auf die Systeme angetragen. Sie werden jedoch stets getrennt betrachtet. Die mittige Einzellast F dient zur Ermittlung der Steifigkeit und aller sich daraus ergebenden Faktoren. Die Gleichlast q wird allein zur Ermittlung der maximalen Zugspannung am unteren Rand des Balkens und dem daraus abgeleiteten Spannungsfaktors f_σ verwendet.

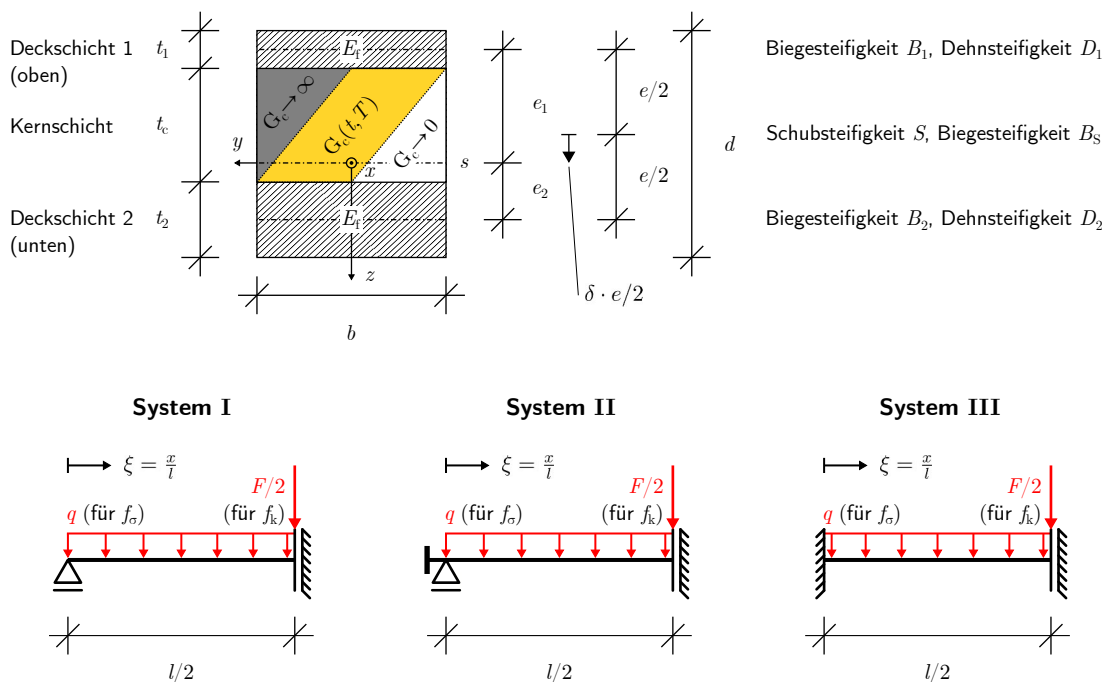


Abbildung AII-81: Allgemeiner Querschnitt eines Sandwichbalkens mit veränderlicher Kernsteifigkeit ($G_c(t, T)$) sowie angedeutet die betrachteten Grenzfällen $G_c \rightarrow \infty$ bzw. $G_c \rightarrow 0$) mit seinen Abmessungen in der verwendeten Nomenklatur und den Querschnittswerten seiner Bestandteile (o.). Außerdem dargestellt sind die untersuchten Systeme von Einfeldbalken mit den betrachteten Belastungsszenarien (u.). (analog zu Abbildung 7.3)

Grundlegend gelten die folgenden Querschnitts- und Ersatzgrößen, welche teilweise bereits in Abschnitt 7.1.1 definiert wurden:

$$t_f = \frac{t_1 + t_2}{2} \quad \text{Mittlere Dicke der Deckschichten 1 und 2} \quad (\text{AII-1})$$

$$\delta = \frac{\Delta t_i}{\sum t_i} = \frac{t_2 - t_1}{2 t_f} \quad \text{Deckschichtparameter für den Unterschied} \quad (7.4)$$

$$\quad \quad \quad \text{zwischen den Deckschichtdicken}$$

$$t_1 = t_f \cdot (1 - \delta) \quad \text{Deckschichtdicke oben} \quad (\text{AII-2})$$

$$t_2 = t_f \cdot (1 + \delta) \quad \text{Deckschichtdicke unten} \quad (\text{AII-3})$$

$$E_{f,\text{mod}} = \frac{E_f}{(1 - \nu_f^2)} \quad \text{Modifizierter } E\text{-Modul für die Plattentragwirkung} \quad (\text{AII-4})$$

$$\quad \quad \quad \text{der Deckschichten im Sandwich}^1$$

$$e = e_1 + e_2 = t_c + t_f \quad \text{Statische Höhe des Sandwichelements} \quad (\text{AII-5})$$

$$e_1 = \frac{e \cdot t_2}{2 t_f} = \frac{e}{2} \cdot (1 + \delta) \quad \text{Hebelarm der oberen Deckschicht} \quad (\text{AII-6})$$

$$e_2 = \frac{e \cdot t_1}{2 t_f} = \frac{e}{2} \cdot (1 - \delta) \quad \text{Hebelarm der unteren Deckschicht} \quad (\text{AII-7})$$

$$d = e + t_f = t_c + 2 t_f \quad \text{Gesamthöhe des Sandwichelements} \quad (\text{AII-8})$$

$$\quad \quad \quad = t_f \cdot (\rho_S + 1)$$

$$\rho_S = \frac{e}{t_f} = \frac{t_c}{t_f} + 1 \quad \text{Sandwichparameter des Elements} \quad (7.5)$$

$$\bar{\lambda}_f = \frac{l}{t_f} \cdot \sqrt{\frac{2 G_c}{E_f}} \quad \text{Bezugsschlankheit der Deckschichten} \quad (7.10)$$

$$\rho_{\text{ep}} = \frac{t_{\text{ep}}}{t_f} \quad \text{Stirnplattenfaktor für System II} \quad (7.34)$$

Diese Größen werden in allen Berechnungen des zweiten Teils verwendet. Sie ermöglichen erst die Verallgemeinerung der verschiedenen Lösungen und die Reduktion der Unbekannten auf die Verhältnissparameter δ , ρ_S und $\bar{\lambda}_f$. In deren Abhängigkeit können sodann die zu untersuchenden Faktoren berechnet und dargestellt werden.

¹Eine nähere Erläuterung zum modifizierten E -Modul wird in Fußnote 1 auf Seite 166 gegeben.

AII-2.1 Die Deckschichten ohne Verbund

In den Systemen I und III besteht die Biegesteifigkeit eines Elements ohne Verbund nur aus denen der beiden Deckschichten. Sie ergibt sich aus deren Flächenträgheitsmomenten I und dem modifizierten E -Modul zu:

$$2 B_f = B_1 + B_2 \quad (\text{AII-9})$$

$$= E_{f,\text{mod}} \cdot (I_1 + I_2)$$

$$= \frac{E_f}{(1 - \nu_f^2)} \cdot \left(\frac{b \cdot t_1^3}{12} + \frac{b \cdot t_2^3}{12} \right)$$

$$= \frac{E_f \cdot b \cdot t_f^3}{12(1 - \nu_f^2)} \cdot [(1 + \delta)^3 + (1 - \delta)^3]$$

$$2 B_f = \frac{E_f \cdot b \cdot t_f^3}{6(1 - \nu_f^2)} \cdot (1 + 3\delta^2) \quad (\text{AII-10})$$

AII-2.2 Der Sandwichbalken mit elastischem Verbund

Die Biegesteifigkeit eines Sandwichbalkens setzt sich aus mehreren Teilen zusammen. Die charakteristische Sandwich-Biegesteifigkeit entsteht dabei aus den Dehnsteifigkeiten der Deckschichten:

$$D_1 = E_f \cdot b \cdot t_1 \quad \text{und} \quad D_2 = E_f \cdot b \cdot t_2 \quad (\text{AII-11})$$

Diese bilden über ihren inneren Hebelarm e die Steiner-Anteile, welche in Summe die Sandwich-Biegesteifigkeit ergeben:

$$B_S = D_1 \cdot e_1^2 + D_2 \cdot e_2^2 \quad (\text{AII-12})$$

$$= E_f \cdot b \cdot (t_1 \cdot e_1^2 + t_2 \cdot e_2^2)$$

$$= E_f \cdot b \cdot [t_f \cdot (1 - \delta) \cdot e_1^2 + t_f \cdot (1 + \delta) \cdot e_2^2]$$

$$= E_f \cdot b \cdot t_f \cdot \left[(1 - \delta) \cdot e^2 \cdot \frac{(1 + \delta)^2}{4} + (1 + \delta) \cdot e^2 \cdot \frac{(1 - \delta)^2}{4} \right]$$

$$= E_f \cdot b \cdot t_f \cdot \frac{e^2}{4} \cdot [(1 - \delta) \cdot (1 + \delta) \cdot (1 + \delta + 1 - \delta)]$$

$$B_S = E_f \cdot b \cdot t_f^3 \cdot \frac{\rho_S^2 \cdot (1 - \delta^2)}{2} \quad (\text{AII-13})$$

Die Gesamtbiegesteifigkeit setzt sich aus der zuvor definierten Biegesteifigkeit der beiden Deckschichten und den Steiner-Anteilen des Sandwichs zusammen:

$$B = B_1 + B_2 + B_S \quad (\text{AII-14})$$

$$= 2 B_f + B_S$$

$$= E_f \cdot b \cdot t_f^3 \cdot \left[\frac{(1 + 3 \delta^2)}{6 \cdot (1 - \nu_f^2)} + \frac{\rho_S^2 \cdot (1 - \delta^2)}{2} \right]$$

$$= \frac{E_f \cdot b \cdot t_f^3}{6 \cdot (1 - \nu_f^2)} \cdot \left[(1 + 3 \delta^2) + 3 \rho_S^2 \cdot (1 - \delta^2) \cdot (1 - \nu_f^2) \right]$$

$$B = \frac{E_f \cdot b \cdot t_f^3}{6 \cdot (1 - \nu_f^2)} \cdot \left[4 + 3 \cdot (\rho_S^2 \cdot (1 - \nu_f^2) - 1) \cdot (1 - \delta^2) \right] \quad (\text{AII-15})$$

Die Schubsteifigkeit eines Sachwichbalkens ergibt sich zu:

$$S = G_c \cdot b \cdot \frac{e^2}{t_c} \quad (\text{AII-16})$$

$$= G_c \cdot b \cdot \frac{\rho_S^2 \cdot t_f^2}{(e - t_f)}$$

$$S = G_c \cdot b \cdot t_f \cdot \frac{\rho_S^2}{(\rho_S - 1)} \quad (\text{AII-17})$$

AII-2.3 Der Balken mit starrem Verbund

Das Flächenträgheitsmoment der Deckschichten mit starrem Verbund ergibt sich analog zur Gesamtbiegesteifigkeit eines Sandwichelements aus den Eigenträgheitsmomenten der Deckschichten und deren Steiner-Anteilen zu:

$$I_r = I_1 + I_2 + b \cdot (t_1 \cdot e_1^2 + t_2 \cdot e_2^2) \quad (\text{AII-18})$$

$$= b \cdot \left(\frac{t_1^3}{12} + \frac{t_2^3}{12} + t_1 \cdot \frac{e^2}{4} \cdot (1 + \delta)^2 + t_2 \cdot \frac{e^2}{4} \cdot (1 - \delta)^2 \right)$$

$$= \frac{b \cdot t_f^3}{12} \cdot \left((1 - \delta)^3 + (1 + \delta)^3 + 3 \rho_S^2 \cdot (1 - \delta) \cdot (1 + \delta)^2 + 3 \rho_S^2 \cdot (1 + \delta) \cdot (1 - \delta)^2 \right)$$

$$= \frac{b \cdot t_f^3}{12} \cdot \left(8 + 6 \cdot (1 - \delta^2) \cdot (\rho_S^2 - 1) \right)$$

$$I_r = \frac{b \cdot t_f^3}{6} \cdot \left(4 + 3 \cdot (\rho_S^2 - 1) \cdot (1 - \delta^2) \right) \quad (\text{AII-19})$$

Für den Plattenstreifen mit starrem Verbund ergibt sich unter Anwendung des modifizierten E -Moduls für die Deckschichten AII-4 daraus die Biegesteifigkeit:

$$B_r = E_{f,\text{mod}} \cdot I_r \quad (\text{AII-20})$$

$$B_r = \frac{E_f \cdot b \cdot t_f^3}{6 \cdot (1 - \nu_f^2)} \cdot \left(4 + 3 \cdot (\rho_S^2 - 1) \cdot (1 - \delta^2) \right) \quad (\text{AII-21})$$

Der Unterschied zwischen der Gesamtbiegesteifigkeit des Sandwichelements mit elastischem Verbund B und der Biegesteifigkeit des starren Verbunds B_r besteht im Einfluss der Plattenbiegesteifigkeit (vgl. Abschnitt 6.2.2). Während im elastischen Verbund nur die Querdehnung für die Biegetragwirkung der Deckschichten behindert wird (vgl. Gl. AII-15), geschieht dies im starren Verbund ebenfalls für die Steiner-Anteile aus der Membrantragwirkung (vgl. Gl. AII-19). Dies resultiert daraus, dass die Querdehnungen der Deckschichten aus ihrer Membrantragwirkung durch den weichen Kern nicht kurzgeschlossen werden können, wohingegen die Kopplung im starren Verbund dies sehr wohl vermag.

All-3 Die Grenzfallfunktionen der betrachteten Systeme

Folgend werden die Grenzfallfunktionen der Steifigkeits- und Spannungsfaktoren für die drei betrachteten Systeme als Ergänzung zu Abschnitt 7.1.2 hergeleitet.

Tabelle All-25: Zusammenstellung der Grenzfallfunktionen des Steifigkeitsfaktors f_k

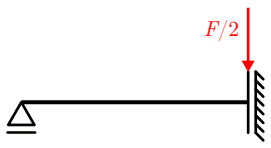
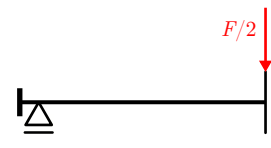
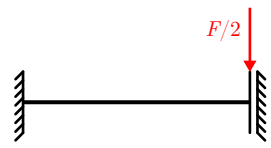
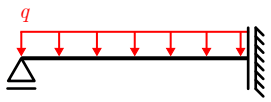
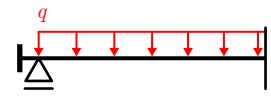
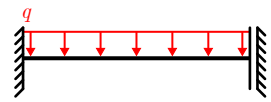
	System I	System II	System III
f_k			
Starrer Verbund ($\rho_S = 1$)	$f_{k,r} = f_{k,I,r} = f_{k,II,r} = f_{k,III,r} = \frac{B}{B_r}$		
siehe:	Gleichung 7.14 in Abschnitt 7.1.2		
Kein Verbund ($\bar{\lambda}_f = 0$)	$f_{k,I,f} = \frac{2 B_f}{B_r}$	$f_{k,II,f} = \frac{k_{II,f}}{k_{II,r}} = \frac{w_{II,r}}{w_{II,f}}$	$f_{k,III,f} = \frac{2 B_f}{B_r}$
siehe:	Gleichung 7.18	Anhang All-3.3.1	Gleichung 7.18

Tabelle All-26: Zusammenstellung der Grenzfallfunktionen des Spannungsfaktors f_σ

	System I	System II	System III
f_σ			
Starrer Verbund ($\rho_S = 1$)	$f_{\sigma,r} = f_{\sigma,I,r} = f_{\sigma,II,r} = f_{\sigma,III,r} = \frac{W_{y,r}}{W_y}$		
siehe:	Anhang All-3.1		
Kein Verbund ($\bar{\lambda}_f = 0$)	$f_{\sigma,I,f} = \frac{W_{y,r}}{W_{y,f}}$	$f_{\sigma,II,f} = \frac{\sigma_{II,f}}{\sigma_{II,r}}$	$f_{\sigma,III,f} = \frac{W_{y,r}}{W_{y,f}}$
siehe:	Anhang All-3.2	Anhang All-3.3.2	Anhang All-3.2

AII-3.1 Die Grenzfallfunktion $f_{\sigma,r}$ aller Systeme mit starrem Verbund

Aufgrund der Tatsache, dass die Steifigkeit der Deckschichten im Sandwichelement durch die Plattentragwirkung gegenüber den Steiner-Anteilen erhöht ist, tragen diese im Grenzfall des starren Verbunds einen größeren Anteil des Biegemoments (vgl. Abschnitt 7.1.2). Zur Berechnung des Widerstandsmoments wird daher zunächst die Spannung am unteren Rand des Elements ($\max z$) allgemein aufgestellt. Dabei wird das Biegemoment nach den Anteilen gewichtet:

$$M_S = M_y \cdot \frac{B_S}{B} \quad \text{und} \quad M_2 = M_y \cdot \frac{B_2}{B} \quad (\text{AII-22})$$

Die Spannung am äußeren Rand der unteren Deckschicht ($\max z$) setzt sich entsprechend aus den beiden Anteilen zusammen:

$$\sigma_x(\max z) = \frac{M_S}{e \cdot b \cdot t_2} + \frac{M_2}{I_2} \cdot \frac{t_2}{2} \quad (\text{AII-23})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{M_y}{B} \cdot \left[\frac{B_S}{e \cdot b \cdot t_2} + \frac{E_{f,\text{mod}} \cdot t_2}{2} \right] \\ &= \frac{M_y}{B} \cdot \left[\frac{E_f \cdot b \cdot t_f^3 \cdot \rho_S^2 \cdot (1 - \delta^2)}{2 e \cdot b \cdot t_f \cdot (1 + \delta)} + \frac{E_f \cdot t_f \cdot (1 + \delta)}{2(1 - \nu_f^2)} \right] \\ &= \frac{M_y \cdot E_f \cdot t_f}{2B} \cdot \left[\rho_S \cdot (1 - \delta) + \frac{(1 + \delta)}{(1 - \nu_f^2)} \right] \end{aligned}$$

$$\sigma_x = \frac{M_y}{b \cdot t_f^2} \cdot \left[\frac{3 \rho_S \cdot (1 - \delta) \cdot (1 - \nu_f^2) + 3 \cdot (1 + \delta)}{4 + 3 \cdot (\rho_S^2 \cdot (1 - \nu_f^2) - 1) \cdot (1 - \delta^2)} \right] \quad (\text{AII-24})$$

Die innere Verteilung der Schnittgröße auf Steiner-Anteil und Eigenbiegung ist dabei unabhängig vom äußerlichen statischen System, sodass das Biegemoment eliminiert und aus voriger Gleichung das Widerstandsmoment W_y ermittelt werden kann:

$$W_y = \frac{M_y}{\sigma_x} = \frac{b \cdot t_f^2 \cdot \left[4 + 3 \cdot (\rho_S^2 \cdot (1 - \nu_f^2) - 1) \cdot (1 - \delta^2) \right]}{3 \cdot (\rho_S \cdot (1 - \delta) \cdot (1 - \nu_f^2) + \delta + 1)} \quad (\text{AII-25})$$

Mit $\rho_S = 1$ ergibt sich entsprechend:

$$W_y(\rho_S = 1) = \frac{b \cdot t_f^2 \cdot (4 + 3 \nu_f^2 \cdot (1 - \delta^2))}{3 \cdot ((1 - \delta) \cdot (1 - \nu_f^2) + \delta + 1)} \quad (\text{AII-26})$$

Für einen Plattenstreifen mit starrem Verbund ergibt sich das Widerstandsmoment für den unteren Rand ($\max z$) nach der klassischen Biegetheorie unter Verwendung von Gleichung AII-19 zu:

$$W_{y,r} = \frac{I_r}{\left(e_2 + \frac{t_2}{2}\right)} \quad (\text{AII-27})$$

$$= \frac{b \cdot t_f^2 \cdot (4 + 3 \cdot (\rho_S^2 - 1) \cdot (1 - \delta^2))}{3 \cdot (\rho_S \cdot (1 - \delta) + \delta + 1)} \quad (\text{AII-28})$$

Mit $\rho_S = 1$ ergibt sich entsprechend:

$$W_{y,r}(\rho_S = 1) = \frac{4 \cdot b \cdot t_f^2}{6} = \frac{b \cdot d^2}{6} \quad (\text{AII-29})$$

Die Grenzfallfunktion des Spannungsfaktors $f_{\sigma,r}$ für $\rho_S = 1$ ergibt sich aus dem Verhältnis der beiden Widerstandsmomente:

$$f_{\sigma,r} = \frac{\sigma(\rho_S = 1)}{\sigma_r(\rho_S = 1)} = \frac{W_{y,r}(\rho_S = 1)}{W_y(\rho_S = 1)} \quad (\text{AII-30})$$

$$= \frac{2 \cdot (1 - \delta) \cdot (1 - \nu_f^2) + 2 \cdot (1 + \delta)}{4 - 3 \nu_f^2 \cdot (1 - \delta^2)} \quad (\text{AII-31})$$

$$= 1,024 \quad \text{für } \delta = 0 \text{ und } \nu_f = 0,3$$

AII-3.2 Die Grenzfallfunktionen $f_{\sigma,I,f}$ und $f_{\sigma,III,f}$ der Systeme I und III ohne Verbund ($\bar{\lambda}_f = 0$)

Die Grenzfallfunktionen des Spannungsfaktors f_σ ohne Verbund für die Systeme I und III können ebenfalls unabhängig vom statischen System hergeleitet werden, da in diesen sowohl im Grenzfall ohne Verbund als auch im Bezugssystem des Plattenstreifens mit starrem Verbund eine identische Schnittgrößenverteilung vorliegt.

$$W_{y,f} = \frac{I_1 + I_2}{\frac{t_f}{2}} \quad (\text{AII-32})$$

$$= \frac{b \cdot t_f^2 \cdot (1 + 3\delta^2)}{3 \cdot (1 + \delta)} \quad (\text{AII-33})$$

Das Widerstandsmoment des starren Verbunds ergibt sich wie zuvor bereits in Gleichung AII-27 gezeigt:

$$W_{y,r} = \frac{b \cdot t_f^2 \cdot (4 + 3 \cdot (\rho_S^2 - 1) \cdot (1 - \delta^2))}{3 \cdot (\rho_S \cdot (1 - \delta) + \delta + 1)} \quad (\text{AII-27})$$

Die Grenzfallfunktionen $f_{\sigma,I,f}$ und $f_{\sigma,III,f}$ ergeben sich wiederum aus dem Verhältnis der zuvor definierten Widerstandsmomente:

$$f_{\sigma,I,f} = f_{\sigma,III,f} = \frac{W_{y,r}}{W_{y,f}} \quad (\text{AII-34})$$

$$= \frac{4 \cdot (1 + \delta) + 3 \cdot (\rho_S^2 - 1) \cdot (1 - \delta^2) \cdot (1 + \delta)}{(1 + 3\delta^2) \cdot (\rho_S \cdot (1 - \delta) + \delta + 1)} \quad (\text{AII-35})$$

$$= \frac{3\rho_S^2 + 1}{\rho_S + 1} \quad \text{für } \delta = 0 \quad (\text{AII-36})$$

AII-3.3 Die Grenzfallfunktionen des gelenkig gelagerten Sandwichbalkens mit starren Stirnplatten (System II) und ohne Verbund ($\bar{\lambda}_f = 0$)

Um die Grenzfallfunktionen $f_{k,II,f}$ und $f_{\sigma,II,f}$ des Sandwichbalkens mit starren Stirnplatten nach Abschnitt 7.1.2 zu ermitteln, wird der Sandwichbalken bis zu seiner Symmetrieachse als vereinfachtes Stabwerk aus den Deckschichten (Stab 1 und 2) und einer Stirnplatte (Stab 3) abgebildet (s. Abb. AII-82). Der sich ergebende Rahmen wird mithilfe des Weggrößenverfahrens (WGV) in der Konvention nach Friemann (1990) berechnet¹. Um die mathematische Handhabung des Modells zu vereinfachen, werden dabei die folgenden Annahmen getroffen:

- In der Grenzfallbetrachtung wird die Steifigkeit des Kerns zu $G_c = 0 = \bar{\lambda}_f$ gesetzt, wodurch der Lastabtrag zwischen den Deckschichten rein als Schubkopplung über die starren Stirnplatten erfolgt und eine Berechnung als Rahmen möglich wird.
- Trotz der zuvor getroffenen Annahme wird weiterhin eine bestehende Kopplung der Deckschichten in Dickenrichtung durch den Kern vorausgesetzt. Die Effekte aus Theorie 2. Ordnung auf die einzelnen Teile des Stabwerks werden vernachlässigt und alle Gleichungen des WGV sowie die Stabkoeffizienten nach Theorie I. Ordnung verwendet ($\alpha = 4$, $\beta = 2$ und $\gamma = 3$).
- Für die starre Stirnplatte ($EI \rightarrow \infty$) wird analog zum Kern angenommen, dass diese in Dickenrichtung des Elements unverformbar ist. Ihre Dehnsteifigkeit wird entsprechen $EA_3 \rightarrow \infty$ gesetzt.
- Infolge der Umkehr der Lagerungsbedingungen (s. Abb. AII-82) wird die Lagerkraft des Sandwichbalkens als Einwirkung in der Mitte von Stab 3 auf das Stabwerk aufgebracht. Durch die zuvor getroffenen Annahmen (die Stirnplatte ist dehnstarr und die Abtriebssterme werden nicht berücksichtigt), spielt die genaue Lage der Kraft im Stabverlauf dabei keine Rolle.
- Die Knoten des Systems werden nach der Konvention des WGV im Uhrzeigersinn nummeriert. Um den Bezug beizubehalten, werden die Stäbe jedoch weiterhin nach der bisher verwendeten Nomenklatur im Sandwich benannt (Stab 1 = Deckschicht oben, Stab 2 = Deckschicht unten).
- Um Verwechslungen mit dem Index c für den Kern des Sandwichelements vorzubeugen, wird für den Bezugsstab nach dem WGV der Index R (für engl.: *Reference*) anstatt der Index C wie nach Friemann (1990) verwendet. Für die Steifigkeitswerte der Stäbe wird als Variable weiterhin ein großes C verwendet.

¹Auf die Grundlagen des verwendeten Weggrößenverfahrens wird an dieser Stelle nicht näher eingegangen. Hierfür wird auf das Manuskript von Friemann (1990) verwiesen.

- Als Bezugsstab wird ein fiktives Blech mit der Dicke $t_R = t_f = (t_1 + t_2)/2$ und der Länge $l_R = l/2$ definiert. Zusammen mit den grundlegenden Querschnitts- und Ersatzgrößen (vgl. Gl. 7.4 bis Gl. 7.34) ergibt sich daraus:

$$A_1 = A_R \cdot (1 - \delta) \quad (\text{AII-37})$$

$$A_2 = A_R \cdot (1 + \delta) \quad (\text{AII-38})$$

$$I_1 = I_R \cdot (1 - \delta)^3 \quad (\text{AII-39})$$

$$I_2 = I_R \cdot (1 + \delta)^3 \quad (\text{AII-40})$$

- Zur Ermittlung der Grenzfunktion des Steifigkeitsfaktors $f_{k,II,f}$ wird in Knoten 3 eine Kraft $F/2$ angesetzt, die der Auflagerkraft des Sandwichbalkens aus einer mittigen Einzellast F entspricht.
- Für die Ermittlung der Grenzfunktion des Spannungsfaktors $f_{\sigma,II,f}$ wird, den zuvor getroffenen Annahmen folgend, die Belastung q gewichtet nach den Biegesteifigkeiten zu q_1 und q_2 auf die Deckschichten aufgeteilt. Die Auflagerkraft im Knoten 3 ergibt sich entsprechend zu $(q_1 + q_2) \cdot l/2 = q \cdot l/2$.

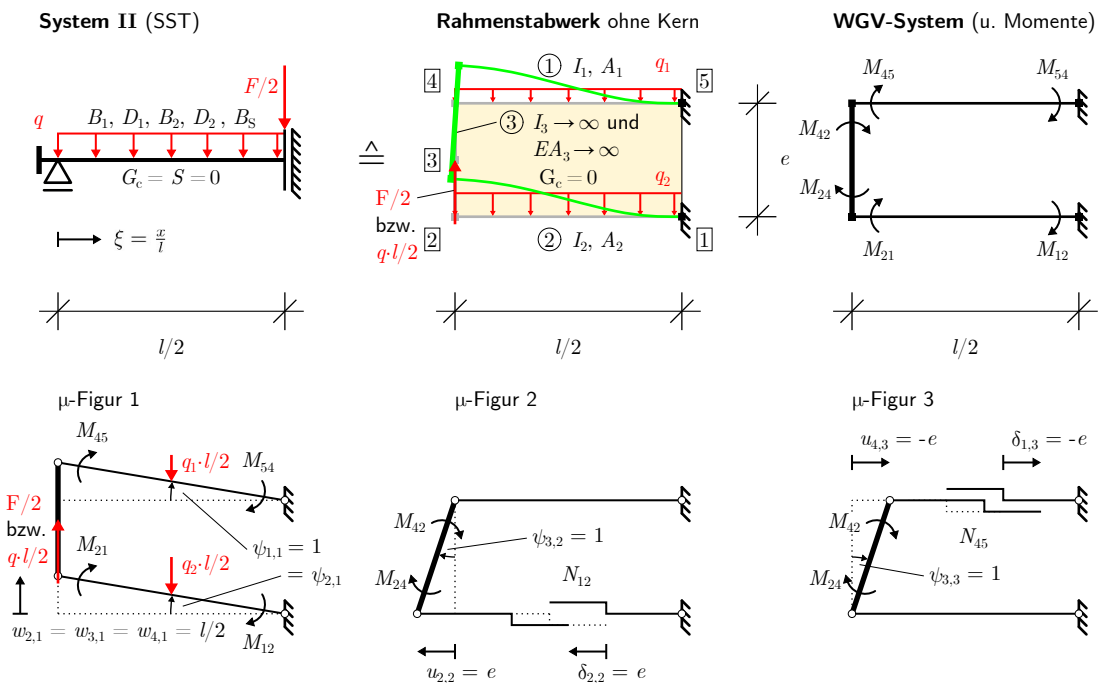


Abbildung AII-82: Das System II des Sandwichbalkens mit starren Stirnplatten nach Abschnitt 7.1.1 (o.l.) und sein nachmodelliertes Pendant nach dem WGV (o.m.) mit den wirkenden Stabendmomenten (o.r.) und den drei Einheits-Verformungszuständen (μ -Figuren) (u.)

Unbekanntenvektor

Der Vektor der unbekanntenen Weggrößen setzt sich für beide gesuchten Grenzfallfunktionen aus den Einheits-Verformungs-Zuständen μ_1 , μ_2 und μ_3 zusammen:

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \psi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \psi_2 \\ \delta_2 \\ w_3 \\ \psi_3 \\ u_4 \\ w_4 \end{pmatrix} = \mu_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ l/2 \\ 1 \\ 0 \\ l/2 \\ 0 \\ 0 \\ l/2 \end{pmatrix} + \mu_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -e \\ 0 \\ 0 \\ e \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_3 \cdot \begin{pmatrix} -e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ e \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{AII-41})$$

Steifigkeitswerte

Aus den zuvor definierten Abhängigkeiten ergeben sich die Steifigkeitswerte. Diese gelten sowohl für die Ermittlung der Grenzfallfunktion des Steifigkeitsfaktors, als auch für die des Spannungsfaktors.

$$C_1 = \frac{I_1}{I_R} = (1 - \delta)^3 \quad C_2 = \frac{I_2}{I_R} = (1 + \delta)^3 \quad C_3 = \frac{I_3}{I_R} \rightarrow \infty \quad (\text{AII-42})$$

Allgemeine Grundgleichungen

Die allgemeinen elastischen Grundgleichungen der Stabnormalkräfte N_{ik} ergeben sich zu:

$$N_{12} = \frac{A_2 \cdot l_R}{I_R \cdot l_2} \cdot e \cdot \hat{\mu}_2 = 12 \cdot \frac{e}{t_f^2} \cdot (1 + \delta) \cdot (1 - \nu_f^2) \cdot \hat{\mu}_2 \quad (\text{AII-43})$$

$$N_{45} = \frac{A_1 \cdot l_R}{I_R \cdot l_1} \cdot -e \cdot \hat{\mu}_3 = -12 \cdot \frac{e}{t_f^2} \cdot (1 - \delta) \cdot (1 - \nu_f^2) \cdot \hat{\mu}_3 \quad (\text{AII-44})$$

Da die Stirnplatte nicht deformiert, sondern nur als Starrkörper verschoben bzw. verdreht wird, ergeben sich die Verdrehungen an den Knoten 2 und 4 zu $\hat{\varphi}_2 = \hat{\varphi}_4 = \psi_{3,2} \cdot \hat{\mu}_2 + \psi_{3,3} \cdot \hat{\mu}_3$.

Die Grundgleichungen der Stabendmomente M_{ik} lauten entsprechend:

$$M_{12} = C_2 \cdot [2 \cdot (\psi_{3,2} \cdot \hat{\mu}_2 + \psi_{3,3} \cdot \hat{\mu}_3) - 6 \cdot \psi_{2,1} \cdot \hat{\mu}_1] + M_{12}^0 \quad (\text{AII-45})$$

$$M_{21} = C_2 \cdot [4 \cdot (\psi_{3,2} \cdot \hat{\mu}_2 + \psi_{3,3} \cdot \hat{\mu}_3) - 6 \cdot \psi_{2,1} \cdot \hat{\mu}_1] + M_{21}^0 \quad (\text{AII-46})$$

$$M_{24} = C_3 \cdot [4 \cdot (\psi_{3,2} \cdot \hat{\mu}_2 + \psi_{3,3} \cdot \hat{\mu}_3) + 2 \cdot (\psi_{3,2} \cdot \hat{\mu}_2 + \psi_{3,3} \cdot \hat{\mu}_3) - 6 \cdot (\psi_{3,2} \cdot \hat{\mu}_2 + \psi_{3,3} \cdot \hat{\mu}_3)] \quad (\text{AII-47})$$

$$M_{42} = C_3 \cdot [2 \cdot (\psi_{3,2} \cdot \hat{\mu}_2 + \psi_{3,3} \cdot \hat{\mu}_3) + 4 \cdot (\psi_{3,2} \cdot \hat{\mu}_2 + \psi_{3,3} \cdot \hat{\mu}_3) - 6 \cdot (\psi_{3,2} \cdot \hat{\mu}_2 + \psi_{3,3} \cdot \hat{\mu}_3)] \quad (\text{AII-48})$$

$$M_{45} = C_1 \cdot [4 \cdot (\psi_{3,2} \cdot \hat{\mu}_2 + \psi_{3,3} \cdot \hat{\mu}_3) - 6 \cdot \psi_{1,1} \cdot \hat{\mu}_1] + M_{45}^0 \quad (\text{AII-49})$$

$$M_{54} = C_1 \cdot [2 \cdot (\psi_{3,2} \cdot \hat{\mu}_2 + \psi_{3,3} \cdot \hat{\mu}_3) - 6 \cdot \psi_{1,1} \cdot \hat{\mu}_1] + M_{54}^0 \quad (\text{AII-50})$$

Wie an den Gleichungen AII-47, AII-48 und der Steifigkeitswert C_3 aus Gleichung AII-42 erkennbar, sind die Momente M_{24} und M_{42} mathematisch nicht eindeutig bestimmbar. Die Grundgleichungen lassen sich demnach nicht zur Lösung des Systems heranziehen. Über Gleichgewicht am jeweiligen Knoten werden stattdessen die folgenden Zusammenhänge verwendet:

$$M_{24} = -M_{21} = C_2 \cdot [6 \psi_{2,1} \cdot \hat{\mu}_1 - 4 \psi_{3,2} \cdot \hat{\mu}_2 - 4 \psi_{3,3} \cdot \hat{\mu}_3] - M_{21}^0 \quad (\text{AII-51})$$

$$M_{42} = -M_{45} = C_1 \cdot [6 \psi_{1,1} \cdot \hat{\mu}_1 - 4 \psi_{3,2} \cdot \hat{\mu}_2 - 4 \psi_{3,3} \cdot \hat{\mu}_3] - M_{45}^0 \quad (\text{AII-52})$$

Allgemeine Netzgleichungen 2 und 3

Das Vorgehen zur Ermittlung der beiden Grenzfallfunktionen $f_{k,II,f}$ und $f_{\sigma,II,f}$ unterscheidet sich durch die gewählten Verformungszustände (s. Abb. AII-82) nur in der μ -Figur 1 und den Starreinspannmomenten M_{ik}^0 . Daher werden die Netzgleichungen 2 und 3 zunächst allgemein aufgestellt, wobei die Faktoren $\psi_{s,j}$ der Weggrößen aus dem Unbekanntenvektor direkt eingesetzt werden.

Die Netzgleichung 2 aus der Dehnelastizität der oberen Deckschicht ergibt sich zu:

$$0 = - [(M_{24} + M_{42}) \cdot \bar{\psi}_{3,2} - N_{12} \cdot \bar{e}] = (M_{21} + M_{45}) \cdot \bar{\psi}_{3,2} + N_{12} \cdot \bar{e} \quad (\text{AII-53})$$

$$\begin{aligned} &= -6 \cdot (C_1 + C_2) \cdot \hat{\mu}_1 + 4 \cdot [C_1 + C_2 + 3 \rho_S^2 \cdot (1 + \delta) \cdot (1 - \nu_f^2)] \cdot \hat{\mu}_2 \\ &\quad + 4 \cdot (C_1 + C_2) \cdot \hat{\mu}_3 + M_{21}^0 + M_{45}^0 \end{aligned} \quad (\text{AII-54})$$

Die Netzgleichung 3 aus der Dehnelastizität der unteren Deckschicht ergibt sich zu:

$$0 = - [(M_{24} + M_{42}) \cdot \bar{\psi}_{3,3} - N_{45} \cdot -\bar{e}] = (M_{21} + M_{45}) \cdot \bar{\psi}_{3,2} - N_{45} \cdot \bar{e} \quad (\text{AII-55})$$

$$\begin{aligned} &= -6 \cdot (C_1 + C_2) \cdot \hat{\mu}_1 + 4 \cdot (C_1 + C_2) \cdot \hat{\mu}_2 \\ &\quad + 4 \cdot [C_1 + C_2 + 3 \rho_S^2 \cdot (1 - \delta) \cdot (1 - \nu_f^2)] \cdot \hat{\mu}_3 + M_{21}^0 + M_{45}^0 \end{aligned} \quad (\text{AII-56})$$

AII-3.3.1 Die Funktion $f_{k,\text{II},f}$ für den Grenzfall ohne Verbund ($\bar{\lambda}_f = 0$)

Für die Grenzfallfunktion des Steifigkeitsfaktors $f_{k,\text{II},f}$ wird zunächst die Durchbiegung $w_{\text{II},f} = w_2$ des Sandwichbalkens unter einer zentrischen Einzellast F ermittelt. Dabei wird das zuvor definierte System mit der Einzellast $F/2$ in Knoten 3 verwendet. Da keine Belastungen im Verlauf der Stäbe zwischen den Knoten auftreten, sind die Starreinspannmomente $M_{21}^0 = M_{45}^0 = 0$.

Netzgleichung 1

Die Netzgleichung 1 ergibt sich für die Verschiebung des Systems unter der Einzellast zu:

$$0 = - \left[(M_{12} + M_{21}) \cdot \bar{\psi}_{2,1} + (M_{45} + M_{54}) \cdot \bar{\psi}_{1,1} + \frac{F}{2} \cdot \bar{w}_{2,1} \right] \quad (\text{AII-57})$$

$$\begin{aligned} &= -6 C_2 \cdot (\hat{\mu}_2 + \hat{\mu}_3) - 6 C_1 \cdot (\hat{\mu}_2 + \hat{\mu}_3) + 12 (C_1 + C_2) \cdot \hat{\mu}_1 - \frac{F \cdot l}{4} \\ &= 12 \cdot (C_1 + C_2) \cdot \hat{\mu}_1 - 6 \cdot (C_1 + C_2) \cdot \hat{\mu}_2 - 6 \cdot (C_1 + C_2) \cdot \hat{\mu}_3 - \frac{F \cdot l}{4} \end{aligned} \quad (\text{AII-58})$$

Systemmatrix

Aus den zuvor gezeigten Netzgleichungen AII-53, AII-55 und AII-57 wird das lineare Gleichungssystem zur Lösung des Systems zusammengesetzt:

$$\begin{pmatrix} 24 C_f & -12 C_f & -12 C_f \\ -12 C_f & 4 \cdot [2 C_f + 3 C_S \cdot (1 + \delta)] & 8 C_f \\ -12 C_f & 8 C_f & 4 \cdot [2 C_f + 3 C_S \cdot (1 - \delta)] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\mu}_1 \\ \hat{\mu}_2 \\ \hat{\mu}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F \cdot l}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{AII-59})$$

mit

$$2 C_f = C_1 + C_2 = \frac{2 B_f}{B_R} = 2 \cdot (1 + 3 \delta^2) \quad \text{und} \quad C_S = \rho_S^2 \cdot (1 - \nu_f^2) \quad (\text{AII-60})$$

Für die Bestimmung der Grenzfallfunktion wird nur die Verformung $w_{II,f} = w_2 = \mu_1 \cdot l/2$ des Sandwichelements benötigt. Gemäß Gleichung AII-41 ist dafür die Lösung des Gleichungssystems nach der Unbekannten μ_1 mit der Cramerschen Regel hinreichend. Zunächst werden die zur Lösung notwendigen Determinanten $\det \mathbf{N}$ und $\det \hat{\boldsymbol{\mu}}_1$ bestimmt:

$$\det \mathbf{N} = \det \begin{pmatrix} 24 C_f & -12 C_f & -12 C_f \\ -12 C_f & 4 \cdot [2 C_f + 3 C_S \cdot (1 + \delta)] & 8 C_f \\ -12 C_f & 8 C_f & 4 \cdot [2 C_f + 3 C_S \cdot (1 - \delta)] \end{pmatrix} \quad (\text{AII-61})$$

$$\det \mathbf{N} = 1152 \cdot C_f \cdot C_S \cdot [C_f + 3 C_S \cdot (1 - \delta^2)] \quad (\text{AII-62})$$

und

$$\det \hat{\boldsymbol{\mu}}_1 = \det \begin{pmatrix} \frac{F \cdot l}{4} & -12 C_f & -12 C_f \\ 0 & 4 \cdot [2 C_f + 3 C_S \cdot (1 + \delta)] & 8 C_f \\ 0 & 8 C_f & 4 \cdot [2 C_f + 3 C_S \cdot (1 - \delta)] \end{pmatrix} \quad (\text{AII-63})$$

$$\det \hat{\boldsymbol{\mu}}_1 = 12 F \cdot l \cdot C_S \cdot [4 C_f + 3 C_S \cdot (1 - \delta^2)] \quad (\text{AII-64})$$

Die unbekannte normierte Einheitsverformung $\hat{\mu}_1$ ergibt sich aus den Determinanten zu:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{\det \hat{\boldsymbol{\mu}}_1}{\det \mathbf{N}} = \frac{F \cdot l}{96 C_f} \cdot \frac{4 C_f + 3 C_S \cdot (1 - \delta^2)}{C_f + 3 C_S \cdot (1 - \delta^2)} \quad (\text{AII-65})$$

Die Verformung des Sandwichbalkens mit starren Stirnplatten und ohne Verbund $w_{II,f} = w_2$ berechnet sich daraus zu:

$$w_{II,f} = \frac{\hat{\mu}_1 \cdot l^2}{4 E_f \cdot I_R} = \frac{\hat{\mu}_1 \cdot l^2 \cdot 3 \cdot (1 - \nu_f^2)}{E_f \cdot b \cdot t_f^3} \quad (\text{AII-66})$$

$$= \frac{F \cdot l^3 \cdot (1 - \nu_f^2)}{E_f \cdot b \cdot t_f^3 \cdot 32 C_f} \cdot \frac{4 C_f + 3 C_S \cdot (1 - \delta^2)}{C_f + 3 C_S \cdot (1 - \delta^2)}$$

$$w_{II,f} = \frac{F \cdot l^3 \cdot (1 - \nu_f^2)}{E_f \cdot b \cdot t_f^3 \cdot 32 \cdot (1 + 3 \delta^2)} \cdot \frac{4 \cdot (1 + 3 \delta^2) + 3 \rho_S^2 \cdot (1 - \nu_f^2) \cdot (1 - \delta^2)}{(1 + 3 \delta^2) + 3 \rho_S^2 \cdot (1 - \nu_f^2) \cdot (1 - \delta^2)} \quad (\text{AII-67})$$

Um die Grenzfallfunktion des Steifigkeitsfaktors $f_{k,II,f}$ zu bestimmen, wird die Steifigkeit des Sandwichbalkens mit starren Stirnplatten und ohne Verbund auf die Steifigkeit des Balkens mit starrem Verbund bezogen. Dafür wird die Durchbiegung eines Einfeldträgers nach der Biegetheorie verwendet (Goris 2012, S. 4.2):

$$w_{II,r} = w_{II,F,r}(\xi = 0,5) = \frac{F \cdot l^3}{48 B_r} \quad (\text{AII-68})$$

$$f_{k,II,f} = \frac{k_{II,f}}{k_{II,r}} = \frac{w_{II,r}}{w_{II,f}} \quad (\text{AII-69})$$

$$= \frac{F \cdot l^3}{48 B_r} \cdot \frac{E_f \cdot b \cdot t_f^3 \cdot 32 \cdot (1 + 3 \delta^2)}{F l^3 \cdot (1 - \nu_f^2)} \cdot \frac{(1 + 3 \delta^2) + 3 \rho_S^2 \cdot (1 - \nu_f^2) \cdot (1 - \delta^2)}{4 \cdot (1 + 3 \delta^2) + 3 \rho_S^2 \cdot (1 - \nu_f^2) \cdot (1 - \delta^2)} \quad (\text{AII-70})$$

Einsetzen der Biegesteifigkeit des starren Verbunds B_r nach Gleichung AII-21 ergibt:

$$f_{k,II,f} = \frac{4 \cdot (1 + 3 \delta^2)}{4 + 3 \cdot (\rho_S^2 - 1) \cdot (1 - \delta^2)} \cdot \frac{(1 + 3 \delta^2) + 3 \rho_S^2 \cdot (1 - \nu_f^2) \cdot (1 - \delta^2)}{4 \cdot (1 + 3 \delta^2) + 3 \rho_S^2 \cdot (1 - \nu_f^2) \cdot (1 - \delta^2)} \quad (\text{AII-71})$$

Für den Sonderfall $t_1 = t_2$ und damit $\delta = 0$ vereinfacht sich der Zusammenhang zu:

$$f_{k,II,f} = \frac{4}{1 + 3 \rho_S^2} \cdot \frac{1 + 3 \rho_S^2 \cdot (1 - \nu_f^2)}{4 + 3 \rho_S^2 \cdot (1 - \nu_f^2)} \quad (\text{AII-72})$$

AII-3.3.2 Die Funktion $f_{\sigma,II,f}$ für den Grenzfall ohne Verbund ($\bar{\lambda}_f = 0$)

Für die Grenzfallfunktion des Spannungsfaktors $f_{\sigma,II,f}$ wird die Normalspannung σ_x am unteren Rand ($\max z$) des Ersatzsystem des Sandwichbalkens in Knoten 1 unter einer Gleichlast q ermittelt. Wie bereits zuvor beschrieben, wird die Gleichlast dafür entsprechend der Biegesteifigkeiten B_1 und B_2 auf die Deckschichten aufgeteilt. Ihre Gesamtergebnisierende steht mit der ebenfalls äußerlich aufgebrachtene Auflagerkraft $q \cdot l/2$ in Knoten 3 im Gleichgewicht. Die Anteile q_1 und q_2 der Gleichlast auf die Deckschichten ergeben sich zu:

$$q_1 = q \cdot \frac{B_1}{2 B_f} = q \cdot \frac{C_1}{2 C_f} = \frac{q}{2} \cdot \frac{(1 - \delta)^3}{(1 + 3 \delta^2)} \quad (\text{AII-73})$$

$$q_2 = q \cdot \frac{B_2}{2 B_f} = q \cdot \frac{C_2}{2 C_f} = \frac{q}{2} \cdot \frac{(1 + \delta)^3}{(1 + 3 \delta^2)} \quad (\text{AII-74})$$

Die allgemeinen Momentengleichungen sowie die Netzgleichungen 2 und 3 bleiben unverändert. Die Starreinspannmomente und die Netzgleichung 1 müssen neu ermittelt werden.

Starreinspannmomente

Aus den Gleichlasten auf den Deckschichten 1 und 2 ergeben sich jeweils Starreinspannmomente, welche in die Grundgleichungen der Stabendmomente AII-45 bis AII-50 eingehen:

$$M_{12}^0 = \frac{1}{12} \cdot q_2 \cdot \frac{l^2}{4} = \frac{q \cdot l^2}{96} \cdot \frac{C_2}{C_f} \quad (\text{AII-75})$$

$$M_{21}^0 = -M_{12}^0 = -\frac{q \cdot l^2}{96} \cdot \frac{C_2}{C_f} \quad (\text{AII-76})$$

$$M_{45}^0 = -\frac{1}{12} \cdot q_1 \cdot \frac{l^2}{4} = -\frac{q \cdot l^2}{96} \cdot \frac{C_1}{C_f} \quad (\text{AII-77})$$

$$M_{54}^0 = -M_{45}^0 = \frac{q \cdot l^2}{96} \cdot \frac{C_1}{C_f} \quad (\text{AII-78})$$

Netzgleichung 1

Aus den gegensätzlichen Vorzeichen der betragsmäßig gleichen Starreinspannmomente zeigt sich, dass diese sich in der Netzgleichung 1 in den Summen $(M_{12} + M_{21})$ und $(M_{45} + M_{54})$ aufheben. Somit geht die Gleichlast nur über ihre virtuelle Arbeit ein:

$$0 = - \left[(M_{12} + M_{21}) \cdot \bar{\psi}_{2,1} + (M_{45} + M_{54}) \cdot \bar{\psi}_{1,1} + \frac{q \cdot l}{2} \cdot \bar{w}_{2,1} - \frac{q \cdot l}{2} \cdot \frac{\bar{w}_{2,1}}{2} \right] \quad (\text{AII-79})$$

$$= -6 C_2 \cdot (\hat{\mu}_2 + \hat{\mu}_3) - 6 C_1 \cdot (\hat{\mu}_2 + \hat{\mu}_3) + 12 (C_1 + C_2) \cdot \hat{\mu}_1 - \frac{q \cdot l^2}{8}$$

$$= 12 \cdot (C_1 + C_2) \cdot \hat{\mu}_1 - 6 \cdot (C_1 + C_2) \cdot \hat{\mu}_2 - 6 \cdot (C_1 + C_2) \cdot \hat{\mu}_3 - \frac{q \cdot l^2}{8} \quad (\text{AII-80})$$

Systemmatrix

Aus der zuvor gezeigten Netzgleichungen AII-53, AII-55 mit den Starreinspannmomenten AII-75 bis AII-78 und der neuen Netzgleichung AII-79 wird das lineare Gleichungssystem zur Lösung des Systems unter der Gleichlast zusammengesetzt:

$$\begin{pmatrix} 24 C_f & -12 C_f & -12 C_f \\ -12 C_f & 4 \cdot [2 C_f + 3 C_S \cdot (1 + \delta)] & 8 C_f \\ -12 C_f & 8 C_f & 4 \cdot [2 C_f + 3 C_S \cdot (1 - \delta)] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\mu}_1 \\ \hat{\mu}_2 \\ \hat{\mu}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{q \cdot l^2}{8} \\ \frac{q \cdot l^2}{48} \\ \frac{q \cdot l^2}{48} \end{pmatrix} \quad (\text{AII-81})$$

mit

$$2 C_f = C_1 + C_2 = \frac{2 B_f}{B_R} = 2 \cdot (1 + 3 \delta^2) \quad \text{und} \quad C_S = \rho_S^2 \cdot (1 - \nu_f^2) \quad (\text{AII-82})$$

Da sich die Änderung der Belastung nur auf die Rechte Seite auswirkt, bleibt die Nennerdeterminante der Steifigkeitsmatrix AII-62 unverändert. Um die Spannung σ_x am unteren Rand ($\max z$) ermitteln zu können, wird das Moment M_{12} und die Normalkraft N_{12} benötigt, für deren Berechnung das Gleichungssystem komplett gelöst werden muss. Zunächst werden dafür die Determinanten bestimmt:

$$\det \hat{\boldsymbol{\mu}}_1 = \det \begin{pmatrix} \frac{q \cdot l^2}{8} & -12 C_f & -12 C_f \\ \frac{q \cdot l^2}{48} & 4 \cdot [2 C_f + 3 C_S \cdot (1 + \delta)] & 8 C_f \\ \frac{q \cdot l^2}{48} & 8 C_f & 4 \cdot [2 C_f + 3 C_S \cdot (1 - \delta)] \end{pmatrix} \quad (\text{AII-83})$$

$$\det \hat{\boldsymbol{\mu}}_1 = q \cdot l^2 \cdot 6 C_S \cdot [5 C_f + 3 C_S \cdot (1 - \delta^2)] \quad (\text{AII-84})$$

$$\det \hat{\boldsymbol{\mu}}_2 = \det \begin{pmatrix} 24 C_f & \frac{q \cdot l^2}{8} & -12 C_f \\ -12 C_f & \frac{q \cdot l^2}{48} & 8 C_f \\ -12 C_f & \frac{q \cdot l^2}{48} & 4 \cdot [2 C_f + 3 C_S \cdot (1 - \delta)] \end{pmatrix} \quad (\text{AII-85})$$

$$\det \hat{\boldsymbol{\mu}}_2 = q \cdot l^2 \cdot 24 C_f \cdot C_S \cdot (1 - \delta) \quad (\text{AII-86})$$

$$\det \hat{\boldsymbol{\mu}}_3 = \det \begin{pmatrix} 24 C_f & -12 C_f & \frac{q \cdot l^2}{8} \\ -12 C_f & 4 \cdot [2 C_f + 3 C_S \cdot (1 + \delta)] & \frac{q \cdot l^2}{48} \\ -12 C_f & 8 C_f & \frac{q \cdot l^2}{48} \end{pmatrix} \quad (\text{AII-87})$$

$$\det \hat{\boldsymbol{\mu}}_3 = q \cdot l^2 \cdot 24 C_f \cdot C_S \cdot (1 + \delta) \quad (\text{AII-88})$$

Die Unbekannten ergeben sich daraus zu:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{\det \hat{\boldsymbol{\mu}}_1}{\det \mathbf{N}} = \frac{q \cdot l^2}{192 C_f} \cdot \frac{5 C_f + 3 C_S \cdot (1 - \delta^2)}{C_f + 3 C_S \cdot (1 - \delta^2)} \quad (\text{AII-89})$$

$$\hat{\mu}_2 = \frac{\det \hat{\boldsymbol{\mu}}_2}{\det \mathbf{N}} = \frac{q \cdot l^2}{48} \cdot \frac{(1 - \delta)}{C_f + 3 C_S \cdot (1 - \delta^2)} \quad (\text{AII-90})$$

$$\hat{\mu}_3 = \frac{\det \hat{\boldsymbol{\mu}}_3}{\det \mathbf{N}} = \frac{q \cdot l^2}{48} \cdot \frac{(1 + \delta)}{C_f + 3 C_S \cdot (1 - \delta^2)} \quad (\text{AII-91})$$

Die gelösten Unbekannten werden in die Grundgleichungen für M_{12} (Gl. AII-45) und N_{12} (Gl. AII-43) eingesetzt und diese soweit möglich vereinfacht:

$$M_{12} = C_2 \cdot [2 \cdot (\hat{\mu}_2 + \hat{\mu}_3) - 6 \cdot \hat{\mu}_1] + M_{12}^0 \quad (\text{AII-45})$$

$$= -\frac{q \cdot l^2}{8} \cdot \frac{C_2}{2 C_f} \cdot \frac{C_f + C_S \cdot (1 - \delta^2)}{C_f + 3 C_S \cdot (1 - \delta^2)} \quad (\text{AII-92})$$

$$N_{12} = 12 \cdot \frac{e}{t_f^2} \cdot (1 + \delta) \cdot (1 - \nu_f^2) \cdot \hat{\mu}_2 \quad (\text{AII-43})$$

$$= \frac{q \cdot l^2}{4 e} \cdot \frac{C_S \cdot (1 - \delta^2)}{C_f + 3 C_S \cdot (1 - \delta^2)} \quad (\text{AII-93})$$

Aus den Schnittgrößen unter der Gleichlast q wird sodann die maximale Normalspannung σ_x am unteren Rand des Sandwichbalkens ($\max z$) für das System II ohne Verbund ($\bar{\lambda}_f = 0$) berechnet. Das negative Vorzeichen des Moments in der Gleichung resultiert dabei aus der Änderung der Vorzeichenkonvention aus dem WGV auf die unten liegende positive Faser.

$$\sigma_{\text{II},f} = \sigma_{x,\text{II},q,f}(\xi = 0,5, \max z) \quad (\text{AII-94})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{N_{12}}{A_2} - \frac{M_{12}}{I_2} \cdot \frac{t_2}{2} = \frac{N_{12}}{b \cdot t_2} - \frac{6 M_{12}}{b \cdot t_2^2} \\ &= \frac{q \cdot l^2}{4 b \cdot t_2^2} \cdot \left[\frac{t_2 \cdot C_S \cdot (1 - \delta^2)}{e \cdot (C_f + 3 C_S \cdot (1 - \delta^2))} + \frac{3 C_2 \cdot (C_f + C_S \cdot (1 - \delta^2))}{2 C_f \cdot (C_f + 3 C_S \cdot (1 - \delta^2))} \right] \end{aligned} \quad (\text{AII-95})$$

Einsetzen der folgenden Zusammenhänge:

$$t_2 = t_f \cdot (1 + \delta), \quad e = \rho_S \cdot t_f \quad \text{und} \quad C_2 = (1 + \delta)^3 \quad (\text{AII-96})$$

$$\sigma_{\text{II},f} = \frac{q \cdot l^2}{8 b \cdot t_f^2} \cdot \left[\frac{2 C_S / \rho_S \cdot (1 - \delta) + 3 \cdot (1 + \delta) \cdot (1 + C_S / C_f \cdot (1 - \delta^2))}{C_f + 3 C_S \cdot (1 - \delta^2)} \right] \quad (\text{AII-97})$$

Ausmultiplizieren unter Einsetzen der zuvor eingeführten Abkürzungen:

$$C_S = \rho_S^2 \cdot (1 - \nu_f^2) \quad \text{und} \quad C_f = (1 + 3 \delta^2) \quad (\text{AII-98})$$

$$\sigma_{\text{II},f} = \frac{q \cdot l^2}{8 b \cdot t_f^2} \cdot \left[\frac{2 \rho_S \cdot (1 - \nu_f^2) \cdot (1 - \delta) + 3 \cdot (1 + \delta) \cdot \left(1 + \rho_S^2 \cdot (1 - \nu_f^2) \cdot \frac{(1 - \delta^2)}{(1 + 3 \delta^2)} \right)}{(1 + 3 \delta^2) + 3 \rho_S^2 \cdot (1 - \nu_f^2) \cdot (1 - \delta^2)} \right] \quad (\text{AII-99})$$

Auch der Spannungsfaktor der Grenzfallfunktion $f_{\sigma_{II,f}}$ ergibt sich aus dem Verhältnis der Spannung σ_x am unteren Rand des Ersatzsystems ($\max z$) unter einer Gleichlast q und der eines Plattenstreifens gleicher Abmessungen mit starrem Verbund (vgl. auch Abschnitt 7.1.1). Letztere ergibt sich nach Gleichung AII-19 zu:

$$\sigma_r = \sigma_{x,q,r}(\xi = 0,5, \max z) = \frac{M_y}{I_r} \cdot \left(e_2 + \frac{t_2}{2} \right) \quad (\text{AII-100})$$

$$= \frac{q \cdot l^2}{8b \cdot t_f^2} \cdot \frac{3 \cdot (\rho_S \cdot (1 - \delta) + \delta + 1)}{4 + 3 \cdot (\rho_S^2 - 1) \cdot (1 - \delta^2)} \quad (\text{AII-101})$$

Die Lösung für die Grenzfallfunktion des Spannungsfaktor lautet demnach:

$$f_{\sigma_{II,f}} = \frac{\sigma_{II,f}}{\sigma_r} = \frac{4 + 3 \cdot (\rho_S^2 - 1) \cdot (1 - \delta^2)}{3 \cdot (\rho_S \cdot (1 - \delta) + \delta + 1)} \cdot \frac{2 \rho_S \cdot (1 - \nu_f^2) \cdot (1 - \delta) + 3 \cdot (1 + \delta) \cdot \left(1 + \rho_S^2 \cdot (1 - \nu_f^2) \cdot \frac{(1 - \delta^2)}{(1 + 3\delta^2)} \right)}{(1 + 3\delta^2) + 3\rho_S^2 \cdot (1 - \nu_f^2) \cdot (1 - \delta^2)} \quad (\text{AII-102})$$

Für den Sonderfall $t_1 = t_2$ und damit $\delta = 0$ vereinfacht sich der Zusammenhang zu:

$$f_{\sigma_{II,f}} = \frac{4 + 3 \cdot (\rho_S^2 - 1)}{3 \cdot (\rho_S + 1)} \cdot \frac{2 \rho_S \cdot (1 - \nu_f^2) + 3 + 3 \rho_S^2 \cdot (1 - \nu_f^2)}{1 + 3 \rho_S^2 \cdot (1 - \nu_f^2)} \quad (\text{AII-103})$$

AII-4 Geschlossene Lösungen des elastischen Verbunds für Sandwichbalken mit dicken Deckschichten nach der SST

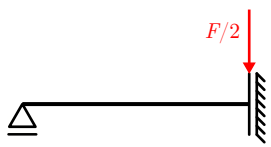

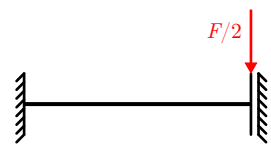
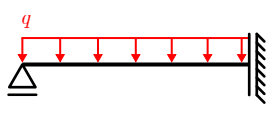
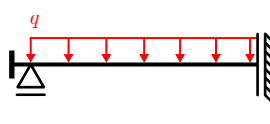
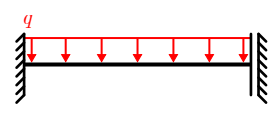
Um mit Blick auf die Verhältnisparameter alle Lösungen in der gleichen Form vorliegen zu haben, wurden die DGLn des Sandwichbalkens mit dicken Deckschichten unter Ausnutzung der Symmetrie für die jeweilige Belastung abermals gelöst. Ausgangspunkt aller Berechnungen für Sandwichbalken mit dicken Deckschichten sind dabei die bei Stamm u. Witte (1974, S. 87) gegebenen DGLn:

$$-\frac{B_1 + B_2}{S} \cdot w^{IV} + \frac{B}{B_S} \cdot w'' = -\frac{M}{B_S} - \frac{q}{S} \quad (6.2)$$

$$-\frac{B_1 + B_2}{S} \cdot \gamma'' + \frac{B}{B_S} \cdot \gamma = \frac{Q}{S}$$

Ihre Lösungen werden folgend für die jeweilige Belastung direkt gegeben. Auf eine genaue Aufschlüsselung des Lösungswegs wird verzichtet. Das Vorgehen kann exemplarisch für einen gelenkigen Sandwichbalken unter Einzellast bei Stamm u. Witte (1974, S. 93 ff.) nachgelesen werden. Die zugrunde liegenden System-, Querschnitts- und Hilfsgrößen werden in Abschnitt 7.1 erläutert bzw. in Anhang AII-2 gezeigt. Die folgende Tabelle gibt abermals einen Überblick über alle hergeleiteten Faktoren mit Verweisen wo diese zu finden sind.

Tabelle AII-27: Zusammenstellung der Steifigkeits- f_k , Gleitungs- f_γ und Spannungsfaktoren f_σ

	System I	System II	System III
Lösungen der DGLn siehe:	$w_I(\xi)$ u. $\gamma_I(\xi)$ AII-4.1	$w_{II}(\xi)$ u. $\gamma_{II}(\xi)$ AII-4.2	$w_{III}(\xi)$ u. $\gamma_{III}(\xi)$ AII-4.3
Herleitung Faktoren für die			
Steifigkeit siehe:	$f_{k,I}(\rho_S, \bar{\lambda}_f)$ AII-4.1.3	$f_{k,II}(\rho_S, \bar{\lambda}_f)$ AII-4.2.3	$f_{k,III}(\rho_S, \bar{\lambda}_f)$ AII-4.3.4
Gleitung siehe:	$f_{\gamma,I}(\rho_S, \bar{\lambda}_f)$ AII-4.1.5	$f_{\gamma,II}(\rho_S, \bar{\lambda}_f)$ AII-4.2.5	$f_{\gamma,III}(\rho_S, \bar{\lambda}_f)$ AII-4.3.2
Herleitung Spannungsfaktoren			
Spannung siehe:	$\sigma_{I,e}(\xi)$ AII-4.1.2	$\sigma_{II,e}(\xi)$ AII-4.2.2	$\sigma_{III,e}(\xi)$ AII-4.3.3
Faktor siehe:	$f_{\sigma,I}(\rho_S, \bar{\lambda}_f)$ AII-4.1.4	$f_{\sigma,II}(\rho_S, \bar{\lambda}_f)$ AII-4.2.4	$f_{\sigma,III}(\rho_S, \bar{\lambda}_f)$ AII-4.3.5

AII-4.1 Der gelenkig gelagerte Sandwichbalken (System I)

AII-4.1.1 Lösungen der Differentialgleichungen

Für den beidseitig gelenkig gelagerten Sandwichbalken ohne Stirnplatten unter einer mittigen Einzellast ergeben sich aus Lösung der DGLn folgende Verformungsfunktionen:

$$w_{I,F}(\xi) = \frac{F \cdot l^3}{2B} \cdot \left[\frac{\xi}{8} - \frac{\xi^3}{6} + \frac{\xi}{\alpha \lambda^2} - \frac{\sinh(\lambda \xi)}{\alpha \lambda^3 \cdot \cosh\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \right] \quad (\text{AII-104})$$

$$\gamma_{I,F}(\xi) = \frac{F \cdot l^2 \cdot \beta}{2B} \cdot \left[1 - \frac{\cosh(\lambda \xi)}{\cosh\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \right] \quad (\text{AII-105})$$

Eine konstante Gleichlast führt nach Lösung der DGLn zu den folgenden Verformungsfunktionen:

$$w_{I,q}(\xi) = \frac{q \cdot l^4}{B} \cdot \left[\frac{\xi}{24} \cdot (1 - 2\xi^2 + \xi^3) + \frac{\xi \cdot (1 - \xi)}{2\alpha \lambda^2} + \frac{\sinh(\lambda \xi)}{\alpha \lambda^4} \cdot \left(\tanh\left(\frac{\lambda}{2} \xi\right) - \tanh\left(\frac{\lambda}{2}\right) \right) \right] \quad (\text{AII-106})$$

$$\gamma_{I,q}(\xi) = \frac{q \cdot l^3 \cdot \beta}{B} \cdot \left[\frac{1}{2} - \xi + \frac{\cosh(\lambda \xi)}{\lambda} \cdot \left(\tanh(\lambda \xi) - \tanh\left(\frac{\lambda}{2}\right) \right) \right] \quad (\text{AII-107})$$

AII-4.1.2 Ermittlung der Normalspannung $\sigma_{x,I}$ am unteren Rand

Durch Differenzieren der Verformungsfunktionen und Einsetzen in die folgenden Zusammenhänge, ergeben sich für eine Gleichlast q die Schnittgrößen des Sandwich- und des Deckschichtbiegemoments:

$$M_{I,q,S}(\xi) = B_S \cdot \left(\gamma'_{I,q}(\xi) - w''_{I,q}(\xi) \right) \quad (\text{AII-108})$$

$$= \frac{B_S}{B} \cdot q \cdot l^2 \cdot \left[\frac{\xi}{2} \cdot (1 - \xi) + \frac{\sinh(\lambda \xi)}{\lambda^2} \cdot \left(\tanh\left(\frac{\lambda}{2} \xi\right) - \tanh\left(\frac{\lambda}{2}\right) \right) \right] \quad (\text{AII-109})$$

$$M_{I,q,1/2}(\xi) = -B_{1/2} \cdot w''_{I,q}(\xi) \quad (\text{AII-110})$$

$$= \frac{B_{1/2}}{B} \cdot q \cdot l^2 \cdot \left[\frac{\xi}{2} \cdot (1 - \xi) - \frac{\sinh(\lambda \xi)}{\alpha \lambda^2} \cdot \left(\tanh\left(\frac{\lambda}{2} \xi\right) - \tanh\left(\frac{\lambda}{2}\right) \right) \right] \quad (\text{AII-111})$$

Aus diesen wird wiederum die maximale Normalspannung σ_x am äußeren Rand der unteren Deckschicht (f_2) bei $\max z$ ermittelt.

$$\sigma_{I,e}(\xi) = \sigma_{x,I,q}(\xi, \max z) = \frac{M_{I,q,S}(\xi)}{e \cdot b \cdot t_2} + \frac{6 M_{I,q,2}(\xi)}{b \cdot t_2^2} \quad (\text{AII-112})$$

Einsetzen der zugehörigen Schnittgrößen, Auflösen und Umstellen liefert:

$$\begin{aligned} \sigma_{I,e}(\xi) = \frac{q \cdot l^2}{B \cdot b \cdot t_2^2} \cdot \left[\left(B_S \cdot \frac{t_2}{e} - \frac{6 B_2}{\alpha} \right) \cdot \frac{\sinh(\lambda \xi)}{\lambda^2} \cdot \left(\tanh\left(\frac{\lambda}{2} \xi\right) - \tanh\left(\frac{\lambda}{2}\right) \right) \right. \\ \left. + \left(B_S \cdot \frac{t_2}{e} + 6 B_2 \right) \cdot \frac{\xi}{2} \cdot (1 - \xi) \right] \quad (\text{AII-113}) \end{aligned}$$

Ausklammern von B_S und einsetzen der folgenden Zusammenhänge:

$$t_2 = t_f \cdot (1 + \delta), \quad \frac{B_2}{B_S} = \alpha_2, \quad \frac{B}{B_S} = (\alpha + 1) \quad \text{und} \quad e = \rho_S \cdot t_f$$

ergibt:

$$\begin{aligned} \sigma_{I,e}(\xi) = \frac{q \cdot l^2}{b \cdot t_f^2 \cdot (1 + \delta)^2 \cdot (\alpha + 1)} \cdot \left[\left(\frac{(1 + \delta)}{\rho_S} - \frac{6 \alpha_2}{\alpha} \right) \cdot \frac{\sinh(\lambda \xi)}{\lambda^2} \cdot \left(\tanh\left(\frac{\lambda}{2} \xi\right) - \tanh\left(\frac{\lambda}{2}\right) \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{(1 + \delta)}{\rho_S} + 6 \alpha_2 \right) \cdot \frac{\xi}{2} \cdot (1 - \xi) \right] \quad (\text{AII-114}) \end{aligned}$$

AII-4.1.3 Herleitung des Steifigkeitsfaktors $f_{k,I}$

Der Steifigkeitsfaktor ergibt sich aus dem Verhältnis der Steifigkeit eines Sandwichelements zu der eines Plattenstreifens gleicher Abmessungen mit starrem Verbund (vgl. auch Abschnitt 7.1.1). Die Steifigkeit kann wiederum als Reziprok der maximalen Verformung in Feldmitte unter einer dort wirkenden Einzellast geschrieben werden. So ergibt sich der Steifigkeitsfaktor wie folgt:

$$f_{k,I} = \frac{k_{I,e}}{k_{I,r}} = \frac{w_{I,r}}{w_{I,e}} = \frac{w_{I,F,r}(\xi = 0,5)}{w_{I,F,e}(\xi = 0,5)} \quad (\text{AII-115})$$

Die Verformungsfunktionen ergeben sich für $\xi = 0,5$ aus Gleichung AII-104 und nach Goris (2012, S. 4.2) zu:

$$w_{I,F,e}(\xi = 0,5) = \frac{F \cdot l^3}{4B} \cdot \left[\frac{1}{12} + \frac{1}{\alpha \lambda^3} \cdot \left(\lambda - 2 \cdot \tanh\left(\frac{\lambda}{2}\right) \right) \right] \quad (\text{AII-116})$$

und

$$w_{I,F,r}(\xi = 0,5) = \frac{F \cdot l^3}{48B_r} \quad (\text{AII-117})$$

Diese werden in Gleichung AII-115 eingesetzt:

$$f_{k,I} = \frac{B}{12B_r} \cdot \left[\frac{1}{12} + \frac{1}{\alpha \lambda^3} \cdot \left(\lambda - 2 \cdot \tanh\left(\frac{\lambda}{2}\right) \right) \right]^{-1} \quad (\text{AII-118})$$

Die Querschnittswerte B und B_r nach Abschnitt AII-2 werden eingesetzt und die Gleichung soweit möglich vereinfacht:

$$f_{k,I} = \frac{4 + 3 \cdot (\rho_S^2 (1 - \nu_f^2) - 1) \cdot (1 - \delta^2)}{4 + 3 \cdot (\rho_S^2 - 1) \cdot (1 - \delta^2)} \cdot \left[1 + \frac{12}{\alpha \lambda^3} \cdot \left(\lambda - 2 \cdot \tanh\left(\frac{\lambda}{2}\right) \right) \right]^{-1} \quad (\text{AII-119})$$

Für den Sonderfall $t_1 = t_2$ und damit $\delta = 0$ vereinfacht sich die Gleichung weiter zu:

$$f_{k,I}(\delta = 0) = \frac{1 + 3 \rho_S^2 \cdot (1 - \nu_f^2)}{1 + 3 \rho_S^2} \cdot \left[1 + \frac{12}{\alpha \lambda^3} \cdot \left(\lambda - 2 \cdot \tanh\left(\frac{\lambda}{2}\right) \right) \right]^{-1} \quad (\text{AII-120})$$

AII-4.1.4 Herleitung des Spannungsfaktors $f_{\sigma,I}$

Der Spannungsfaktor ergibt sich aus dem Verhältnis der unteren Randspannung aus einer Gleichlast in einem Sandwichelement und einem Plattenstreifen gleicher Abmessungen mit starrem Verbund (vgl. auch Abschnitt 7.1.1):

$$f_{\sigma,I} = \frac{\sigma_{I,e}(\xi = 0,5)}{\sigma_{I,r}(\xi = 0,5)} \quad (\text{AII-121})$$

Die Spannungen ergeben sich in Feldmitte ($\xi = 0,5$) aus Gleichung AII-114 und unter Verwendung der Querschnittswerte I_r , e_2 und t_2 nach Abschnitt AII-2 zu:

$$\begin{aligned} \sigma_{I,e}(\xi = 0,5) = \frac{q l^2}{b \cdot t_f^2 \cdot (1 + \delta)^2 \cdot (\alpha + 1)} \cdot \left[\left(\frac{(1 + \delta)}{\rho_S} - \frac{6 \alpha_2}{\alpha} \right) \cdot \frac{(1 - \cosh(\frac{\lambda}{2}))}{\lambda^2 \cdot \cosh(\frac{\lambda}{2})} \right. \\ \left. + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{(1 + \delta)}{\rho_S} + 6 \alpha_2 \right) \right] \quad (\text{AII-122}) \end{aligned}$$

und

$$\sigma_{I,r}(\xi = 0,5) = \frac{M_y}{I_r} \cdot \left(e_2 + \frac{t_2}{2} \right) \quad (\text{AII-123})$$

$$= \frac{q \cdot l^2}{8 b \cdot t_f^2} \cdot \frac{3 \cdot (\rho_S \cdot (1 - \delta) + \delta + 1)}{4 + 3 \cdot (\rho_S^2 - 1) \cdot (1 - \delta^2)} \quad (\text{AII-124})$$

Diese werden in Gleichung AII-121 eingesetzt und soweit möglich vereinfacht:

$$\begin{aligned} f_{\sigma,I} = \frac{64 + 48 \cdot (\rho_S^2 - 1) \cdot (1 - \delta^2)}{(\alpha + 1) \cdot (1 + \delta)^2 \cdot (\rho_S \cdot (1 - \delta) + \delta + 1)} \cdot \left[\frac{(1 - \cosh(\frac{\lambda}{2}))}{\lambda^2 \cdot \cosh(\frac{\lambda}{2})} \cdot \left(\frac{(1 + \delta)}{6 \rho_S} - \frac{\alpha_2}{\alpha} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{(1 + \delta)}{6 \rho_S} + \alpha_2 \right) \right] \quad (\text{AII-125}) \end{aligned}$$

Für den Sonderfall $t_1 = t_2$ und damit $\delta = 0$ sowie $\alpha = 2 \cdot \alpha_2$ vereinfacht sich die Gleichung weiter zu:

$$f_{\sigma,I}(\delta = 0) = \frac{8 + 24 \rho_S^2}{(\alpha + 1) \cdot (\rho_S + 1)} \cdot \left[\frac{(1 - \cosh(\frac{\lambda}{2}))}{\lambda^2 \cdot \cosh(\frac{\lambda}{2})} \cdot \left(\frac{1}{3 \rho_S} - 1 \right) + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{3 \rho_S} + \alpha \right) \right] \quad (\text{AII-126})$$

AII-4.1.5 Herleitung des Gleitungsfaktors $f_{\gamma, I}$

Der Gleitungsfaktor für System I wird aus der Lösungsfunktion AII-105 des Schubwinkels $\gamma_{I, F}(\xi)$ hergeleitet:

$$\gamma_{I, F}(\xi) = \frac{F \cdot l^2 \cdot \beta}{2B} \cdot \left[1 - \frac{\cosh(\lambda \xi)}{\cosh\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \right] \quad (\text{AII-105})$$

Wie in Abschnitt 7.3.2 beschrieben, soll er die Berechnung der größten auftretenden Schubgleitung im Element ermöglichen. Um das Maximum im Trägerverlauf zu lokalisieren, genügt es eine Extremwertanalyse an den hyperbolischen Anteilen von Gleichung AII-105 durchzuführen, da diese als einzige die Laufvariable ξ enthalten. Es ergibt sich, dass das Maximum unabhängig von λ stets am Rand des Trägers bei $\xi = 0$ auftritt. Die maximale Schubgleitung des Kerns γ_c wird geometrisch aus dem entsprechenden Schubwinkel $\gamma_{I, F}(\xi = 0)$ berechnet (vgl. Abb. 6.1 bzw. Stamm u. Witte 1974, S. 18 f.). Unter Berücksichtigung des Sandwichparameters (Gl. 7.5) ergibt sich diese zu:

$$\max \gamma_{c, I, F} = \gamma_{I, F}(\xi = 0) \cdot \frac{e}{t_c} \quad (\text{AII-127})$$

$$= \frac{F \cdot l^2 \cdot \beta}{2B} \cdot \frac{\rho_S}{(\rho_S - 1)} \cdot \left[1 - \frac{1}{\cosh\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \right] \quad (\text{AII-128})$$

Einsetzen von β und B nach den Gleichungen 7.11 bzw. AII-15 liefert:

$$\max \gamma_{c, I, F}(\xi) = \frac{F \cdot l^2}{E_f \cdot b \cdot t_f^3} \cdot \frac{3 \rho_S \cdot (1 - \nu_f^2) \cdot (1 - \delta^2)}{\bar{\lambda}_f^2 \cdot [4 + 3 \cdot (\rho_S^2 \cdot (1 - \nu_f^2) - 1) \cdot (1 - \delta^2)]} \cdot \left[1 - \frac{1}{\cosh\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \right] \quad (\text{AII-129})$$

$$= \frac{F \cdot l^2}{E_f \cdot b \cdot t_f^3} \cdot f_{\gamma, I} \quad (\text{AII-130})$$

mit dem Gleitungsfaktor

$$f_{\gamma, I} = \frac{3 \rho_S \cdot (1 - \nu_f^2) \cdot (1 - \delta^2)}{\bar{\lambda}_f^2 \cdot [4 + 3 \cdot (\rho_S^2 \cdot (1 - \nu_f^2) - 1) \cdot (1 - \delta^2)]} \cdot \left[1 - \frac{1}{\cosh\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \right] \quad (\text{AII-131})$$

Für den Sonderfall $t_1 = t_2$ und damit $\delta = 0$ vereinfacht sich die Gleichung zu:

$$f_{\gamma, I}(\delta = 0) = \frac{3 \rho_S \cdot (1 - \nu_f^2)}{\bar{\lambda}_f^2 \cdot (1 + 3 \rho_S^2 \cdot (1 - \nu_f^2))} \cdot \left[1 - \frac{1}{\cosh\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \right] \quad (\text{AII-132})$$

AII-4.2 Der gelenkig gelagerte Sandwichbalken mit Stirnplatten (System II)

AII-4.2.1 Lösungen der Differentialgleichungen

Für den beidseitig gelenkig gelagerten Sandwichbalken mit starren Stirnplatten unter einer mittigen Einzellast ergeben sich aus Lösung der DGLn folgende Verformungsfunktionen:

$$w_{II,F}(\xi) = \frac{F l^3}{2B} \cdot \left[\frac{\xi}{8} - \frac{\xi^3}{6} + \frac{\xi}{\alpha \lambda^2} + \frac{\sinh(\lambda \xi)}{\alpha \lambda^3} \cdot \left(\tanh\left(\frac{\lambda}{4}\right) \cdot \tanh\left(\frac{\lambda}{2} \xi\right) - 1 \right) \right] \quad (\text{AII-133})$$

$$\gamma_{II,F}(\xi) = \frac{F \cdot l^2 \cdot \beta}{2B} \cdot \sinh(\lambda \xi) \cdot \left[\tanh\left(\frac{\lambda}{4}\right) - \tanh\left(\frac{\lambda}{2} \xi\right) \right] \quad (\text{AII-134})$$

Eine konstante Gleichlast führt nach Lösung der DGLn zu den folgenden Verformungsfunktionen:

$$w_{II,q}(\xi) = \frac{q \cdot l^4}{2B} \cdot \left[\frac{\xi}{12} \cdot (1 - 2\xi^2 + \xi^3) + \frac{\xi \cdot (1 - \xi)}{\alpha \lambda^2} + \frac{\sinh(\lambda \xi)}{\alpha \lambda^3} \cdot \left(\coth\left(\frac{\lambda}{2}\right) \cdot \tanh\left(\frac{\lambda}{2} \xi\right) - 1 \right) \right] \quad (\text{AII-135})$$

$$\gamma_{II,q}(\xi) = \frac{q l^3 \beta}{2B} \cdot \left[1 - 2\xi + \sinh(\lambda \xi) \cdot \left(\coth\left(\frac{\lambda}{2}\right) - \coth(\lambda \xi) \right) \right] \quad (\text{AII-136})$$

AII-4.2.2 Ermittlung der Normalspannung $\sigma_{x,II}$ am unteren Rand

Durch Differenzieren der Verformungsfunktionen und Einsetzen in die folgenden Zusammenhänge, ergeben sich für eine Gleichlast q die Schnittgrößen des Sandwich- und des Deckschichtbiegemoments:

$$M_{S,II,q}(\xi) = B_S \cdot \left(\gamma_{II,q}(\xi)' - w_{II,q}(\xi)'' \right) \quad (\text{AII-137})$$

$$= \frac{B_S}{B} \cdot \frac{q \cdot l^2}{2} \cdot \left[\xi \cdot (1 - \xi) + \frac{\cosh(\lambda \xi)}{\lambda} \cdot \left(\coth\left(\frac{\lambda}{2}\right) - \tanh(\lambda \xi) \right) - \frac{2}{\lambda^2} \right] \quad (\text{AII-138})$$

$$M_{1/2,II,q}(\xi) = -B_{1/2} \cdot w_{II,q}(\xi)'' \quad (\text{AII-139})$$

$$= \frac{B_{1/2}}{B} \cdot \frac{q \cdot l^2}{2} \cdot \left[\xi \cdot (1 - \xi) - \frac{\cosh(\lambda \xi)}{\alpha \lambda} \cdot \left(\coth\left(\frac{\lambda}{2}\right) - \tanh(\lambda \xi) \right) + \frac{2}{\alpha \lambda^2} \right] \quad (\text{AII-140})$$

Aus diesen wird wiederum die maximale Normalspannung σ_x am äußeren Rand der unteren Deckschicht (f_2) bei $\max z$ ermittelt:

$$\sigma_{II,e}(\xi) = \sigma_{x,II,q}(\xi, \max z) = \frac{M_{S,II,q}(\xi)}{e \cdot b \cdot t_2} + \frac{6 M_{2,II,q}(\xi)}{b \cdot t_2^2} \quad (\text{AII-141})$$

Einsetzen der zugehörigen Schnittgrößen, Auflösen und Umstellen liefert:

$$\sigma_{II,e}(\xi) = \frac{q \cdot l^2}{2 B b t_2^2} \cdot \left[\left(B_S \cdot \frac{t_2}{e} - \frac{6 B_2}{\alpha} \right) \cdot \left(\frac{\cosh(\lambda \xi)}{\lambda} \cdot \left(\coth\left(\frac{\lambda}{2}\right) - \tanh(\lambda \xi) \right) - \frac{2}{\lambda^2} \right) + \left(B_S \cdot \frac{t_2}{e} + 6 B_2 \right) \cdot \xi \cdot (1 - \xi) \right] \quad (\text{AII-142})$$

Ausklammern von B_S und einsetzen der folgenden Zusammenhänge:

$$t_2 = t_f \cdot (1 + \delta), \quad \frac{B_2}{B_S} = \alpha_2, \quad \frac{B}{B_S} = (\alpha + 1) \quad \text{und} \quad e = \rho_S \cdot t_f$$

ergibt:

$$\sigma_{II,e}(\xi) = \frac{q \cdot l^2}{2 b \cdot t_f^2 \cdot (1 + \delta)^2 \cdot (\alpha + 1)} \cdot \left[\left(\frac{(1 + \delta)}{\rho_S} - \frac{6 \alpha_2}{\alpha} \right) \cdot \left(\frac{\cosh(\lambda \xi)}{\lambda} \cdot \left(\coth\left(\frac{\lambda}{2}\right) - \tanh(\lambda \xi) \right) - \frac{2}{\lambda^2} \right) + \left(\frac{(1 + \delta)}{\rho_S} + 6 \alpha_2 \right) \cdot \xi \cdot (1 - \xi) \right] \quad (\text{AII-143})$$

AII-4.2.3 Herleitung des Steifigkeitsfaktors $f_{k,II}$

Der Steifigkeitsfaktor ergibt sich aus dem Verhältnis der Steifigkeit eines Sandwichelements zu der eines Plattenstreifens gleicher Abmessungen mit starrem Verbund (vgl. auch Abschnitt 7.1.1). Die Steifigkeit kann wiederum als Reziprok der maximalen Verformung in Feldmitte unter einer dort wirkenden Einzellast geschrieben werden. So ergibt sich der Steifigkeitsfaktor wie folgt:

$$f_{k,II} = \frac{k_{II,e}}{k_{II,r}} = \frac{w_{II,r}}{w_{II,e}} = \frac{w_{II,F,r}(\xi = 0,5)}{w_{II,F,e}(\xi = 0,5)} \quad (\text{AII-144})$$

Die Verformungsfunktion ergibt sich für $\xi = 0,5$ aus Gleichung AII-133:

$$w_{II,F,e}(\xi = 0,5) = \frac{F \cdot l^3}{4 B} \cdot \left[\frac{1}{12} + \frac{1}{\alpha \lambda^3} \cdot \left(\lambda - 4 \cdot \tanh \left(\frac{\lambda}{4} \right) \right) \right] \quad (\text{AII-145})$$

Da die starren Stirnplatten auf den starren Verbund keine Auswirkungen haben und die äußeren Randbedingungen weiterhin die eines gelenkigen Einfeldträgers sind, ergibt sich die Verformungsfunktion des starren Verbunds analog zu Gleichung AII-117:

$$w_{II,F,r}(\xi = 0,5) = w_{I,F,r}(\xi = 0,5) = \frac{F \cdot l^3}{48 B_r} \quad (\text{AII-117})$$

Die werden in Gleichung AII-144 eingesetzt:

$$f_{k,II} = \frac{B}{12 B_r} \cdot \left[\frac{1}{12} + \frac{1}{\alpha \lambda^3} \cdot \left(\lambda - 4 \cdot \tanh \left(\frac{\lambda}{4} \right) \right) \right]^{-1} \quad (\text{AII-146})$$

Die Querschnittswerte B und B_r nach Abschnitt AII-2 werden eingesetzt und die Gleichung soweit möglich vereinfacht:

$$f_{k,II} = \frac{4 + 3 \cdot (\rho_S^2 \cdot (1 - \nu_f^2) - 1) \cdot (1 - \delta^2)}{4 + 3 \cdot (\rho_S^2 - 1) \cdot (1 - \delta^2)} \cdot \left[1 + \frac{12}{\alpha \lambda^3} \cdot \left(\lambda - 4 \cdot \tanh \left(\frac{\lambda}{4} \right) \right) \right]^{-1} \quad (\text{AII-147})$$

Für den Sonderfall $t_1 = t_2$ und damit $\delta = 0$ vereinfacht sich die Gleichung weiter zu:

$$f_{k,II}(\delta = 0) = \frac{1 + 3 \rho_S^2 \cdot (1 - \nu_f^2)}{1 + 3 \rho_S^2} \cdot \left[1 + \frac{12}{\alpha \lambda^3} \cdot \left(\lambda - 4 \cdot \tanh \left(\frac{\lambda}{4} \right) \right) \right]^{-1} \quad (\text{AII-148})$$

AII-4.2.4 Herleitung des Spannungsfaktors $f_{\sigma,II}$

Der Spannungsfaktor ergibt sich aus dem Verhältnis der unteren Randspannung aus einer Gleichlast in einem Sandwichelement und einem Plattenstreifen gleicher Abmessungen mit starrem Verbund (vgl. auch Abschnitt 7.1.1):

$$f_{\sigma,II} = \frac{\sigma_{II,e}(\xi = 0,5)}{\sigma_{II,r}(\xi = 0,5)} \quad (\text{AII-149})$$

Die Spannungen ergeben sich in Feldmitte ($\xi = 0,5$) aus Gleichung AII-143 und unter Verwendung der Querschnittswerte I_r , e_2 und t_2 nach Abschnitt AII-2 zu:

$$\begin{aligned} \sigma_{II,e}(\xi = 0,5) = \frac{q \cdot l^2}{2 b \cdot t_f^2 \cdot (1 + \delta)^2 \cdot (\alpha + 1)} \cdot \left[\left(\frac{(1 + \delta)}{\rho_S} - \frac{6 \alpha_2}{\alpha} \right) \cdot \frac{\left(\lambda - 2 \cdot \sinh \left(\frac{\lambda}{2} \right) \right)}{\lambda^2 \cdot \sinh \left(\frac{\lambda}{2} \right)} \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{(1 + \delta)}{\rho_S} + 6 \alpha_2 \right) \right] \quad (\text{AII-150}) \end{aligned}$$

Ähnlich wie zuvor bei der Steifigkeit, haben die starren Stirnplatten auch auf die Spannung des gelenkigen Einfeldträgers mit starrem Verbund keine Auswirkungen und die Spannung des starren Verbunds ergibt sich analog zu Gleichung AII-123:

$$\sigma_{II,r}(\xi = 0,5) = \sigma_{I,r}(\xi = 0,5) \quad (\text{AII-151})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{M_y}{I_r} \cdot \left(e_2 + \frac{t_2}{2} \right) \\ &= \frac{q \cdot l^2}{8 b \cdot t_f^2} \cdot \frac{3 \cdot (\rho_S \cdot (1 - \delta) + \delta + 1)}{4 + 3 \cdot (\rho_S^2 - 1) \cdot (1 - \delta^2)} \quad (\text{AII-123}) \end{aligned}$$

Die Spannungen werden in Gleichung AII-149 eingesetzt und diese soweit möglich vereinfacht:

$$\begin{aligned} f_{\sigma,II} = \frac{32 + 24 \cdot (\rho_S^2 - 1) \cdot (1 - \delta^2)}{(\alpha + 1) \cdot (1 + \delta)^2 \cdot (\rho_S \cdot (1 - \delta) + \delta + 1)} \cdot \left[\frac{\left(\lambda - 2 \cdot \sinh \left(\frac{\lambda}{2} \right) \right)}{\lambda^2 \cdot \sinh \left(\frac{\lambda}{2} \right)} \cdot \left(\frac{(1 + \delta)}{6 \rho_S} - \frac{\alpha_2}{\alpha} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{(1 + \delta)}{6 \rho_S} + \alpha_2 \right) \right] \quad (\text{AII-152}) \end{aligned}$$

Für den Sonderfall $t_1 = t_2$ und damit $\delta = 0$ sowie $\alpha = 2 \cdot \alpha_2$ vereinfacht sich die Gleichung weiter zu:

$$f_{\sigma,II}(\delta = 0) = \frac{4 + 12 \rho_S^2}{(\alpha + 1) \cdot (\rho_S + 1)} \cdot \left[\frac{\left(\lambda - 2 \cdot \sinh \left(\frac{\lambda}{2} \right) \right)}{\lambda^2 \cdot \sinh \left(\frac{\lambda}{2} \right)} \cdot \left(\frac{1}{3 \rho_S} - 1 \right) + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{3 \rho_S} + \alpha \right) \right] \quad (\text{AII-153})$$

AII-4.2.5 Herleitung des Gleitungsfaktors $f_{\gamma,II}$

Der Gleitungsfaktor für System II wird aus der Lösungsfunktion AII-134 des Schubwinkels $\gamma_{II,F}(\xi)$ hergeleitet:

$$\gamma_{II,F}(\xi) = \frac{F \cdot l^2 \cdot \beta}{2B} \cdot \sinh(\lambda \xi) \cdot \left[\tanh\left(\frac{\lambda}{4}\right) - \tanh\left(\frac{\lambda}{2} \xi\right) \right] \quad (\text{AII-134})$$

Wie in Abschnitt 7.3.2 beschrieben, soll der Faktor die Berechnung der größten auftretenden Schubgleitung im Element ermöglichen. Um das Maximum im Trägerverlauf zu lokalisieren, genügt es eine Extremwertanalyse an den hyperbolischen Anteilen von Gleichung AII-134 durchzuführen, da diese als einzige die Laufvariable ξ enthalten. Es ergibt sich, dass das Maximum unabhängig von λ stets im Viertelpunkt des Trägers bei $\xi = 0,25$ auftritt. Die maximale Schubgleitung des Kerns γ_c wird geometrisch aus dem entsprechenden Schubwinkel $\gamma_{II,F}(\xi = 0,25)$ berechnet (vgl. Abb. 6.1 bzw. Stamm u. Witte 1974, S. 18 f.). Unter Berücksichtigung des Sandwichparameters (Gl. 7.5) ergibt sich diese zu:

$$\max \gamma_{c,II,F} = \gamma_{II,F}(\xi = 0,25) \cdot \frac{e}{t_c} \quad (\text{AII-154})$$

$$= \frac{F \cdot l^2 \cdot \beta}{2B} \cdot \frac{\rho_S}{(\rho_S - 1)} \cdot \left[1 - \frac{1}{\cosh\left(\frac{\lambda}{4}\right)} \right] \quad (\text{AII-155})$$

Einsetzen von β und B nach den Gleichungen 7.11 bzw. AII-15 liefert:

$$\max \gamma_{c,II,F} = \frac{F \cdot l^2}{E_f \cdot b \cdot t_f^3} \cdot \frac{3 \rho_S \cdot (1 - \nu_f^2) \cdot (1 - \delta^2)}{\bar{\lambda}_f^2 \cdot [4 + 3 \cdot (\rho_S^2 \cdot (1 - \nu_f^2) - 1) \cdot (1 - \delta^2)]} \cdot \left[1 - \frac{1}{\cosh\left(\frac{\lambda}{4}\right)} \right] \quad (\text{AII-156})$$

$$= \frac{F \cdot l^2}{E_f \cdot b \cdot t_f^3} \cdot f_{\gamma,II} \quad (\text{AII-157})$$

mit dem Gleitungsfaktor

$$f_{\gamma,II} = \frac{3 \rho_S \cdot (1 - \nu_f^2) \cdot (1 - \delta^2)}{\bar{\lambda}_f^2 \cdot [4 + 3 \cdot (\rho_S^2 \cdot (1 - \nu_f^2) - 1) \cdot (1 - \delta^2)]} \cdot \left[1 - \frac{1}{\cosh\left(\frac{\lambda}{4}\right)} \right] \quad (\text{AII-158})$$

Für den Sonderfall $t_1 = t_2$ und damit $\delta = 0$ vereinfacht sich die Gleichung zu:

$$f_{\gamma,II}(\delta = 0) = \frac{3 \rho_S \cdot (1 - \nu_f^2)}{\bar{\lambda}_f^2 \cdot (1 + 3 \rho_S^2 \cdot (1 - \nu_f^2))} \cdot \left[1 - \frac{1}{\cosh\left(\frac{\lambda}{4}\right)} \right] \quad (\text{AII-159})$$

AII-4.3 Der beidseitig eingespannte Sandwichbalken (System III)

AII-4.3.1 Lösungen der Differentialgleichungen

Für den beidseitig eingespannten Sandwichbalken unter einer mittigen Einzellast ergeben sich aus Lösung der DGLn folgende Verformungsfunktionen:

$$w_{\text{III,F}}(\xi) = \frac{F \cdot l^3}{2B} \cdot \left[\frac{\xi^2}{8} - \frac{\xi^3}{6} + \frac{\xi}{\alpha \lambda^2} + \frac{\sinh(\lambda \xi)}{\alpha \lambda^3} \cdot \left(\tanh\left(\frac{\lambda}{4}\right) \cdot \tanh\left(\frac{\lambda}{2} \xi\right) - 1 \right) \right] \quad (\text{AII-160})$$

$$\gamma_{\text{III,F}}(\xi) = \frac{F \cdot l^2 \cdot \beta}{2B} \cdot \sinh(\lambda \xi) \cdot \left[\tanh\left(\frac{\lambda}{4}\right) - \tanh\left(\frac{\lambda}{2} \xi\right) \right] \quad (\text{AII-161})$$

Eine konstante Gleichlast führt nach Lösung der DGLn zu den folgenden Verformungsfunktionen:

$$w_{\text{III,q}}(\xi) = \frac{q \cdot l^4}{2B} \cdot \left[\frac{\xi^2}{12} \cdot (1 - 2\xi + \xi^2) + \frac{\xi \cdot (1 - \xi)}{\alpha \lambda^2} + \frac{\sinh(\lambda \xi)}{\alpha \lambda^3} \cdot \left(\coth\left(\frac{\lambda}{2}\right) \cdot \tanh\left(\frac{\lambda}{2} \xi\right) - 1 \right) \right] \quad (\text{AII-162})$$

$$\gamma_{\text{III,q}}(\xi) = \frac{q \cdot l^3 \cdot \beta}{2B} \cdot \left[1 - 2\xi + \sinh(\lambda \xi) \cdot \left(\coth\left(\frac{\lambda}{2}\right) - \coth(\lambda \xi) \right) \right] \quad (\text{AII-163})$$

AII-4.3.2 Herleitung des Gleitungsfaktors $f_{\gamma,\text{III}}$

Ein Vergleich der Lösungsfunktionen für die Schubwinkel γ_{III} (Gl. AII-161 bzw. Gl. AII-163) mit jenen für γ_{II} (Gl. AII-134 bzw. Gl. AII-136) zeigt, dass diese identisch sind. Dies resultiert daraus, dass die Stirnplatten wie Einspannungen für die Schubgleitung des Kerns wirken. Auch die dazugehörigen Verformungsfunktionen w_{III} und w_{II} unterscheiden sich nur geringfügig.

Daraus ergibt sich, dass auch der Gleitungsfaktor von System III dem von System II entspricht:

$$f_{\gamma,\text{III}} = f_{\gamma,\text{II}} \quad (\text{AII-164})$$

$$f_{\gamma,\text{III}} = \frac{3 \rho_{\text{S}} \cdot (1 - \nu_{\text{f}}^2) \cdot (1 - \delta^2)}{\bar{\lambda}_{\text{f}}^2 \cdot [4 + 3 \cdot (\rho_{\text{S}}^2 \cdot (1 - \nu_{\text{f}}^2) - 1) \cdot (1 - \delta^2)]} \cdot \left[1 - \frac{1}{\cosh\left(\frac{\lambda}{4}\right)} \right] \quad (\text{AII-165})$$

Auch hier kann die Gleichung für den Sonderfall $t_1 = t_2$ und damit $\delta = 0$ vereinfacht werden:

$$f_{\gamma,\text{III}}(\delta = 0) = \frac{3 \rho_{\text{S}} \cdot (1 - \nu_{\text{f}}^2)}{\bar{\lambda}_{\text{f}}^2 \cdot (1 + 3 \rho_{\text{S}}^2 \cdot (1 - \nu_{\text{f}}^2))} \cdot \left[1 - \frac{1}{\cosh\left(\frac{\lambda}{4}\right)} \right] \quad (\text{AII-166})$$

AII-4.3.3 Ermittlung der Normalspannung $\sigma_{x,III}$ am unteren Rand

Durch Differenzieren der Verformungsfunktionen und Einsetzen in die folgenden Zusammenhänge, ergeben sich für eine Gleichlast q die Schnittgrößen des Sandwich- und des Deckschichtbiegemoments:

$$M_{S,III,q}(\xi) = B_S \cdot (\gamma_{III,q}(\xi)' - w_{III,q}(\xi)'') \quad (\text{AII-167})$$

$$= \frac{B_S}{B} \cdot \frac{q \cdot l^2}{2} \cdot \left[\xi - \xi^2 - \frac{1}{6} + \frac{\cosh(\lambda \xi)}{\lambda} \cdot \left(\coth\left(\frac{\lambda}{2}\right) - \tanh(\lambda \xi) \right) - \frac{2}{\lambda^2} \right] \quad (\text{AII-168})$$

$$M_{1/2,III,q}(\xi) = -B_{1/2} \cdot w_{III,q}(\xi)'' \quad (\text{AII-169})$$

$$= \frac{B_{1/2}}{B} \cdot \frac{q \cdot l^2}{2} \cdot \left[\xi - \xi^2 - \frac{1}{6} - \frac{\cosh(\lambda \xi)}{\alpha \lambda} \cdot \left(\coth\left(\frac{\lambda}{2}\right) - \tanh(\lambda \xi) \right) + \frac{2}{\alpha \lambda^2} \right] \quad (\text{AII-170})$$

Aus diesen wird wiederum die maximale Normalspannung σ_x am äußeren Rand der unteren Deckschicht (f_2) bei $\max z$ ermittelt:

$$\sigma_{III,e}(\xi) = \sigma_{x,III,q}(\xi, \max z) = \frac{M_{S,III,q}(\xi)}{e \cdot b \cdot t_2} + \frac{6 M_{2,III,q}(\xi)}{b \cdot t_2^2} \quad (\text{AII-171})$$

Einsetzen der zugehörigen Schnittgrößen, Auflösen und Umstellen liefert:

$$\sigma_{III,e}(\xi) = \frac{q \cdot l^2}{2 B \cdot b \cdot t_2^2} \cdot \left[\left(B_S \cdot \frac{t_2}{e} - \frac{6 B_2}{\alpha} \right) \cdot \left(\frac{\cosh(\lambda \xi)}{\lambda} \cdot \left(\coth\left(\frac{\lambda}{2}\right) - \tanh(\lambda \xi) \right) - \frac{2}{\lambda^2} \right) + \left(B_S \cdot \frac{t_2}{e} + 6 B_2 \right) \cdot \left(\xi - \xi^2 - \frac{1}{6} \right) \right] \quad (\text{AII-172})$$

Ausklammern von B_S und Einsetzen der folgenden Zusammenhänge:

$$t_2 = t_f \cdot (1 + \delta), \quad \frac{B_2}{B_S} = \alpha_2, \quad \frac{B}{B_S} = (\alpha + 1) \quad \text{und} \quad e = \rho_S \cdot t_f$$

ergibt:

$$\sigma_{III,e}(\xi) = \frac{q \cdot l^2}{2 b \cdot t_f^2 \cdot (1 + \delta)^2 \cdot (\alpha + 1)} \cdot \left[\left(\frac{(1 + \delta)}{\rho_S} - \frac{6 \alpha_2}{\alpha} \right) \cdot \left(\frac{\cosh(\lambda \xi)}{\lambda} \cdot \left(\coth\left(\frac{\lambda}{2}\right) - \tanh(\lambda \xi) \right) - \frac{2}{\lambda^2} \right) + \left(\frac{(1 + \delta)}{\rho_S} + 6 \alpha_2 \right) \cdot \left(\xi - \xi^2 - \frac{1}{6} \right) \right] \quad (\text{AII-173})$$

AII-4.3.4 Herleitung des Steifigkeitsfaktors $f_{k,III}$

Der Steifigkeitsfaktor ergibt sich aus dem Verhältnis der Steifigkeit eines Sandwichelements zu der eines Plattenstreifens gleicher Abmessungen mit starrem Verbund (vgl. auch Abschnitt 7.1.1). Die Steifigkeit kann wiederum als Reziprok der maximalen Verformung in Feldmitte unter einer dort wirkenden Einzellast geschrieben werden. So ergibt sich der Steifigkeitsfaktor wie folgt:

$$f_{k,III} = \frac{k_{III,e}}{k_{III,r}} = \frac{w_{III,r}}{w_{III,e}} = \frac{w_{III,F,r}(\xi = 0,5)}{w_{III,F,e}(\xi = 0,5)} \quad (\text{AII-174})$$

Die Verformungsfunktionen ergeben sich für $\xi = 0,5$ aus Gleichung AII-160 und nach Goris (2012, S. 4.8 f.) zu:

$$w_{III,F,e}(\xi = 0,5) = \frac{F \cdot l^3}{4B} \cdot \left[\frac{1}{48} + \frac{1}{\alpha \lambda^3} \cdot \left(\lambda - 4 \cdot \tanh\left(\frac{\lambda}{4}\right) \right) \right] \quad (\text{AII-175})$$

und

$$w_{III,F,r}(\xi = 0,5) = \frac{F \cdot l^3}{192B_r} \quad (\text{AII-176})$$

Diese werden in Gleichung AII-174 eingesetzt:

$$f_{k,III} = \frac{B}{48B_r} \cdot \left[\frac{1}{48} + \frac{1}{\alpha \lambda^3} \cdot \left(\lambda - 4 \cdot \tanh\left(\frac{\lambda}{4}\right) \right) \right]^{-1} \quad (\text{AII-177})$$

Die Querschnittswerte B und B_r nach Abschnitt AII-2 werden eingesetzt und die Gleichung soweit möglich vereinfacht:

$$f_{k,III} = \frac{4 + 3 \cdot (\rho_S^2 \cdot (1 - \nu_f^2) - 1) \cdot (1 - \delta^2)}{4 + 3 \cdot (\rho_S^2 - 1) \cdot (1 - \delta^2)} \cdot \left[1 + \frac{48}{\alpha \lambda^3} \cdot \left(\lambda - 4 \cdot \tanh\left(\frac{\lambda}{4}\right) \right) \right]^{-1} \quad (\text{AII-178})$$

Für den Sonderfall $t_1 = t_2$ und damit $\delta = 0$ vereinfacht sich die Gleichung weiter zu:

$$f_{k,III}(\delta = 0) = \frac{1 + 3\rho_S^2 \cdot (1 - \nu_f^2)}{1 + 3\rho_S^2} \cdot \left[1 + \frac{48}{\alpha \lambda^3} \cdot \left(\lambda - 4 \cdot \tanh\left(\frac{\lambda}{4}\right) \right) \right]^{-1} \quad (\text{AII-179})$$

AII-4.3.5 Herleitung des Spannungsfaktors $f_{\sigma,III}$

Der Spannungsfaktor ergibt sich aus dem Verhältnis der unteren Randspannung aus einer Gleichlast in einem Sandwichelement und einem Plattenstreifen gleicher Abmessungen mit starrem Verbund (vgl. auch Abschnitt 7.1.1):

$$f_{\sigma,III} = \frac{\sigma_{III,e}(\xi = 0,5)}{\sigma_{III,r}(\xi = 0,5)} \quad (\text{AII-180})$$

Die Spannungen ergeben sich in Feldmitte ($\xi = 0,5$) aus Gleichung AII-173 und unter Verwendung der Querschnittswerte I_r , e_2 und t_2 nach Abschnitt AII-2 zu:

$$\begin{aligned} \sigma_{III,e}(\xi = 0,5) = \frac{q \cdot l^2}{2b \cdot t_f^2 \cdot (1 + \delta)^2 \cdot (\alpha + 1)} \cdot \left[\left(\frac{(1 + \delta)}{\rho_S} - \frac{6\alpha_2}{\alpha} \right) \cdot \frac{(\lambda - 2 \cdot \sinh(\frac{\lambda}{2}))}{\lambda^2 \cdot \sinh(\frac{\lambda}{2})} \right. \\ \left. + \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{(1 + \delta)}{\rho_S} + 6\alpha_2 \right) \right] \quad (\text{AII-181}) \end{aligned}$$

und

$$\sigma_{III,r}(\xi = 0,5) = \frac{M_y}{I_r} \cdot \left(e_2 + \frac{t_2}{2} \right) \quad (\text{AII-182})$$

$$= \frac{q \cdot l^2}{8b \cdot t_f^2} \cdot \frac{\rho_S \cdot (1 - \delta) + \delta + 1}{4 + 3 \cdot (\rho_S^2 - 1) \cdot (1 - \delta^2)} \quad (\text{AII-183})$$

Die Spannungen werden in Gleichung AII-180 eingesetzt und diese soweit möglich vereinfacht:

$$\begin{aligned} f_{\sigma,III} = \frac{96 + 72 \cdot (\rho_S^2 - 1) \cdot (1 - \delta^2)}{(\alpha + 1) \cdot (1 + \delta)^2 \cdot (\rho_S \cdot (1 - \delta) + \delta + 1)} \cdot \left[\frac{(\lambda - 2 \cdot \sinh(\frac{\lambda}{2}))}{\lambda^2 \cdot \sinh(\frac{\lambda}{2})} \cdot \left(\frac{(1 + \delta)}{6\rho_S} - \frac{\alpha_2}{\alpha} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{(1 + \delta)}{6\rho_S} + \alpha_2 \right) \right] \quad (\text{AII-184}) \end{aligned}$$

Für den Sonderfall $t_1 = t_2$ und damit $\delta = 0$ sowie $\alpha = 2\alpha_2$ vereinfacht sich die Gleichung weiter zu:

$$f_{\sigma,III}(\delta = 0) = \frac{12 + 36\rho_S^2}{(\alpha + 1) \cdot (\rho_S + 1)} \cdot \left[\frac{(\lambda - 2 \cdot \sinh(\frac{\lambda}{2}))}{\lambda^2 \cdot \sinh(\frac{\lambda}{2})} \cdot \left(\frac{1}{3\rho_S} - 1 \right) + \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{1}{3\rho_S} + \alpha \right) \right] \quad (\text{AII-185})$$

AII-5 Der Grenzfall der starren Stirnplatten für System II

Für eine praktische Anwendung von System II nach Abschnitt 7.1.1, gilt es die Frage zu klären, wann elastische Stirnplatten (Index ep für engl.: *elastic plates*) als *starr* (Index rp für engl.: *rigid plates*) angenommen werden können. Um dies zu untersuchen, wird eine vereinfachte Betrachtung mithilfe des WGV in der Konvention nach Friemann (1990) durchgeführt, welche auf der vorangegangenen Herleitung der Grenzfallfunktionen für System II aufbaut (s. AII-3.3). Ein gelenkig gelagerter Sandwichbalken mit Stirnplatten, dessen Kernsteifigkeit $G_c \rightarrow 0$ geht, wird bis zu seinen Symmetrieachsen durch ein vereinfachtes Stabwerk abgebildet und mit dem WGV berechnet (vgl. Abb. AII-83). Dabei werden zwei verschiedene Fälle hinsichtlich der Stirnplatten betrachtet: Die elastischen Stirnplatten mit einer variablen Dicke t_{ep} und die starren Stirnplatten. Analog dem in Abschnitt 7.1.1 beschriebenen Vorgehen, wird über die Gesamtsteifigkeit k des Sandwichbalkens aus beiden Fällen untersucht, wie dick die Stirnplatten im Vergleich zu den Deckschichten sein müssen, damit die sich ergebende Gesamtsteifigkeit $k_{ep,f}$ annähernd derjenige im Grenzfall der starren Stirnplatten entspricht $k_{rp,f} = k_{II,f}(\delta = 0)$. Als maßgebendes Kriterium wird dafür festgelegt, dass $k_{f,ep}$ nur um 1% kleiner sein darf als $k_{rp,f}$.

$$f_{k,ep,f} = \frac{k_{ep,f}}{k_{rp,f}} = \frac{w_{rp,f}}{w_{ep,f}} \stackrel{!}{\geq} 0,99 \quad (7.33)$$

Durch Lösung dieses Kriteriums wird ein Verhältnisfaktor ρ_{ep} ermittelt, um den die Stirnplatten dicker sein müssen als die Deckschichten $t_{ep} = t_f \cdot \rho_{ep}$, damit eine Berechnung des Sandwichbalkens mit starren Stirnplatten gerechtfertigt ist. Um die mathematische Handhabung zu vereinfachen, werden für die Untersuchung mehrere Annahmen getroffen:

- Die Steifigkeit des Kerns wird zu $G_c = 0$ gesetzt, sodass ein Verbund rein über die Schubkopplung der Stirnplatten existiert und die Berechnung als Rahmen möglich ist.
- Der Sandwichbalken wird analog zu AII-3.3 zunächst durch ein Rahmenstabwerk aus den Deckschichten und einer Stirnplatte abgebildet (vgl. Abb. AII-83 o.m.). Dabei bleibt die Kopplung der Deckschichten in Dickenrichtung im gesamten Element erhalten.
- Die Nummerierung der Knoten und Stäbe im System erfolgt ebenso wie in AII-3.3 (Stab 1 = Deckschicht oben, Stab 2 = Deckschicht unten, Stab 3 = Stirnplatte).
- Für die Deckschichten wird die gleiche Dicke $t_f = t_1 = t_2 = t_R$ vorausgesetzt ($\delta = 0$) und die untere Deckschicht als Bezugsstab definiert. Damit wird $I_1 = I_2 = I_R$, $A_1 = A_2 = A_R$ und $l_R = l/2$.
- Für die Stirnplatte wird angenommen, dass diese analog zum Kern in Dickenrichtung des Balkens unverformbar ist. Ihre Dehnsteifigkeit wird entsprechen zu $EA_3 \rightarrow \infty$ gesetzt.
- Die Lagerkraft des Sandwichbalkens wird durch die Ausnutzung der Symmetrie als Einwirkung auf das Stabwerk angesetzt. Sie wirkt in der Schwerlinie des Gesamtquerschnitts und wird zu gleichen Teilen von den Deckschichten abgetragen ($I_1 = I_2$).
- Aufgrund der weiterhin bestehenden Kopplung der Deckschichten in Dickenrichtung durch den Kern sind die Effekte aus Theorie 2. Ordnung auf die einzelnen Teile des Stabwerks vernachlässigbar. Entsprechend werden alle Gleichungen des WGV und die Stabkoeffizienten nach Theorie I. Ordnung verwendet ($\alpha = 4$, $\beta = 2$ und $\gamma = 3$).

- Aus den zuvor genannten Vereinfachungen ergibt sich eine zur Schwerlinie des Sandwichbalkens symmetrische Verformung der Deckschichten und eine antimetrische Verformung der elastischen Stirnplatte mit einem Wendepunkt in der Schwerlinie des Balkens (s. Abb. AII-83 o.m.). Unter dieser Voraussetzung kann das System abermals halbiert werden (s. Abb. AII-83 o.r.), sodass sich die Zahl der Stäbe auf zwei und die Zahl der unbekannt Verschiebungsgrößen im WGV auf $n_y = n_\varphi + n_\mu = 1 + 2 = 3$ reduziert (s. Abb. AII-83 u.).

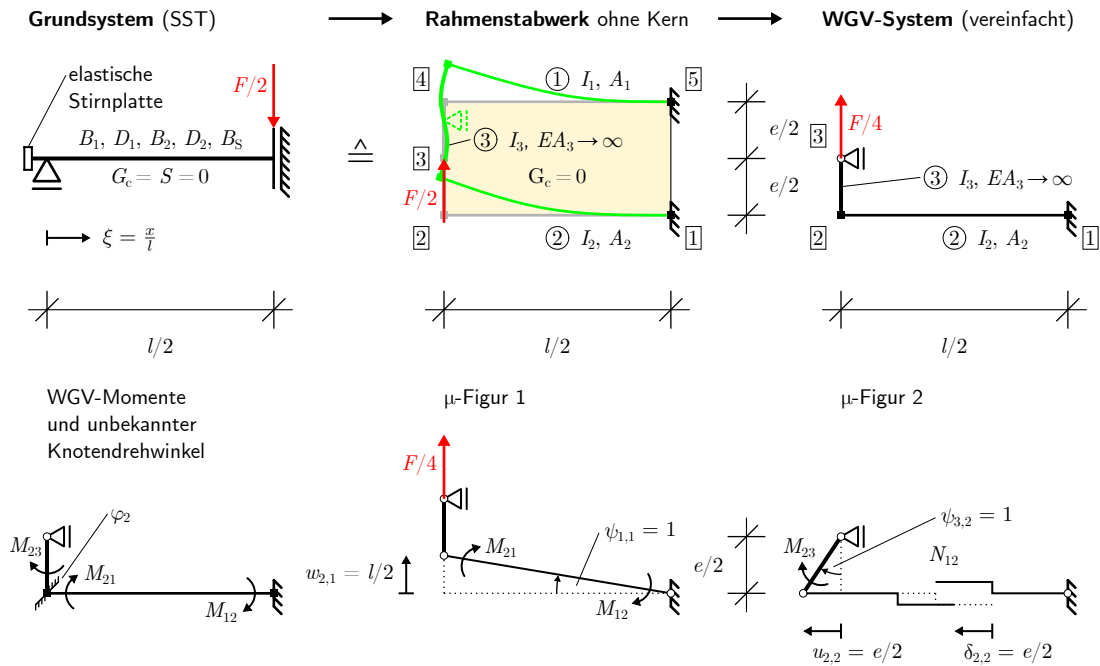


Abbildung AII-83: Das Grundsystem des Sandwichbalkens mit elastischen Stirnplatten ohne Verbund (o.l.), das mechanisch äquivalentes Rahmenstabwerk (o.m.) und das für die Berechnung mit dem WGV weiter vereinfachte Pendant (o.r.) mit den wirkenden Stabendmomenten (u.l.) und seinen beiden Einheits-Verformungszuständen (μ -Figuren) (u.m. und u.r.)

AII-5.1 Die elastischen Stirnplatten

Unbekanntenvektor

Der Vektor der unbekannt Weggrößen der Knoten setzt sich aus den beiden Einheits-Verformungs-Zuständen μ_1 und μ_2 zusammen:

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ w_2 \\ \psi_2 \\ \delta_2 \\ w_3 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \mu_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ l/2 \\ 1 \\ 0 \\ l/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \cdot \begin{pmatrix} e/2 \\ 0 \\ 0 \\ e/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{AII-186})$$

Steifigkeitswerte

Für die Stirnplatte wird der Steifigkeitswert C_3 über $\rho_{ep} \cdot t_f = t_{ep} = t_3$ in Abhängigkeit von der Dicke t_f der Deckschichten ausgedrückt. Die Steifigkeitswerte ergeben sich daraus zu:

$$C_2 = 1 \quad \text{und} \quad C_3 = \frac{I_3}{e} \cdot \frac{l_R}{I_R} = \frac{t_{ep}^3 \cdot l \cdot 2}{t_f^3 \cdot 2 \cdot e} = \frac{\rho_{ep}^3 \cdot \lambda_f}{\rho_S} \quad (\text{AII-187})$$

Grundgleichungen

Die Grundgleichung der Stabnormalkraft N_{12} ergibt sich gemäß der getroffenen Annahmen zu:

$$N_{12} = \frac{A_2 \cdot l_R}{I_R \cdot l_2} \cdot \frac{e}{2} \cdot \hat{\mu}_2 = 6 \cdot \frac{e}{t_f^2} \cdot (1 - \nu_f^2) \cdot \hat{\mu}_2 \quad (\text{AII-188})$$

Die Grundgleichungen der Stabendmomente M_{ik} ergeben sich entsprechend zu:

$$M_{12} = C_2 \cdot (2 \hat{\varphi}_2 - 6 \psi_{2,1} \cdot \hat{\mu}_1) \quad (\text{AII-189})$$

$$M_{21} = C_2 \cdot (4 \hat{\varphi}_2 - 6 \psi_{2,1} \cdot \hat{\mu}_1) \quad (\text{AII-190})$$

$$M_{23} = C_3 \cdot 3 (\hat{\varphi}_2 - \psi_{3,2} \cdot \hat{\mu}_2) \quad (\text{AII-191})$$

Kontengleichung

Die Knotengleichung am Knoten 2 ergibt sich zu:

$$0 = M_{21} + M_{23} \quad (\text{AII-192})$$

$$0 = (4 C_2 + 3 C_3) \cdot \hat{\varphi}_2 - 6 C_2 \cdot \hat{\mu}_1 - 3 C_3 \cdot \hat{\mu}_2 \quad (\text{AII-193})$$

Netzgleichungen

Auch die Netzgleichungen werden direkt für Theorie I. Ordnung aufgestellt. Entsprechend entfallen die Abtriebsterme aus Theorie II. Ordnung. Die Netzgleichung 1 ergibt sich zu:

$$0 = - \left[(M_{12} + M_{21}) \cdot \bar{\psi}_{2,1} + \frac{F}{4} \cdot \bar{w}_{2,1} \right] \quad (\text{AII-194})$$

$$0 = - 6 C_2 \cdot \hat{\varphi}_2 + 12 \cdot C_2 \cdot \hat{\mu}_1 - \frac{F \cdot l}{8} \quad (\text{AII-195})$$

Die Netzgleichung 2 ergibt sich aus der Dehnelastizität der Deckschicht 2 zu:

$$0 = - [M_{23} \cdot \bar{\psi}_{3,2} - N_{12} \cdot \bar{\delta}_{2,2}] \quad (\text{AII-196})$$

$$0 = - 3 C_3 \cdot \hat{\varphi}_2 + 3 C_3 \cdot \hat{\mu}_2 + 3 \cdot \frac{e^2}{t_f^2} \cdot (1 - \nu_f^2) \cdot \hat{\mu}_2$$

$$0 = - 3 C_3 \cdot \hat{\varphi}_2 + 3 \cdot (C_3 + C_S) \cdot \hat{\mu}_2 \quad (\text{AII-197})$$

mit

$$C_S = \rho_S^2 \cdot (1 - \nu_f^2) \quad (\text{AII-198})$$

Systemmatrix

Aus den zuvor gezeigten Knoten- und Netzgleichungen wird unter Einsetzen von $C_2 = 1$ das lineare Gleichungssystem zur Lösung des WGV-Systems zusammengesetzt:

$$\begin{pmatrix} 4 + 3 C_3 & -6 & -3 C_3 \\ -6 & 12 & 0 \\ -3 C_3 & 0 & 3 \cdot (C_3 + C_S) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_2 \\ \hat{\mu}_1 \\ \hat{\mu}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{F \cdot l}{8} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{AII-199})$$

Wie bereits beschrieben, erfolgt die Abgrenzung über die Verformung des Sandwichbalkens, welche der Knotenverschiebung w_2 entspricht. Gemäß dem Unbekanntenvektor AII-186 ergibt sich diese für die elastischen Stirnplatten zu:

$$w_{2,ep} = \frac{l}{2} \cdot \mu_{1,ep} = \frac{l^2}{4 EI_R} \cdot \hat{\mu}_{1,ep} \quad (\text{AII-200})$$

Zur Berechnung von $w_{2,ep}$ wird also nur die Unbekannte $\hat{\mu}_{1,ep}$ benötigt. Diese wird über die Cramersche Regel berechnet, wofür lediglich zwei Determinanten erforderlich sind:

$$\det \mathbf{N}_{ep} = \det \begin{pmatrix} 4 + 3 C_3 & -6 & -3 C_3 \\ -6 & 12 & 0 \\ -3 C_3 & 0 & 3 (C_3 + C_S) \end{pmatrix} \quad (\text{AII-201})$$

$$= 36 \cdot [(C_3 + C_S) + 3 C_3 \cdot C_S] \quad (\text{AII-202})$$

$$\det \hat{\boldsymbol{\mu}}_{1,ep} = \det \begin{pmatrix} 4 + 3 C_3 & 0 & -3 C_3 \\ -6 & \frac{F \cdot l}{8} & 0 \\ -3 C_3 & 0 & 3 (C_3 + C_S) \end{pmatrix} \quad (\text{AII-203})$$

$$= \frac{3}{8} F \cdot l \cdot [4 (C_3 + C_S) + 3 C_3 \cdot C_S] \quad (\text{AII-204})$$

Die weitere Lösung wird im übernächsten Abschnitt AII-5.3 gezeigt, nachdem auch die Determinanten des Falls der starren Stirnplatten berechnet wurden.

AII-5.2 Die starren Stirnplatten

Obwohl die Durchbiegung mit starren Stirnplatten im Grenzfall ohne Verbund $w_{II,f}$ eigentlich bereits bekannt ist (s. Gl. AII-67), wird sie für das symmetrische System an dieser Stelle erneut hergeleitet, da durch die getroffenen Annahmen eine einfachere Lösung möglich ist. Hierfür wird das bisher verwendete System nur leicht verändert. Die Biegesteifigkeit der Stirnplatte wird zu $I_3 \rightarrow \infty$ angenommen, wodurch sich die Zahl der unbekanntem Verformungsgrößen reduziert. Die Verformung der Stirnplatte kann nur noch aus der Nachgiebigkeit der Deckschichten resultieren und nicht mehr aus ihrer eigenen. Die Verdrehung des Knotens 2 entspricht demnach stets der Starrkörperverdrehung der Stirnplatte selbst $\hat{\varphi}_2 = \hat{\mu}_2$. Somit wird $n_\nu = n_\varphi + n_\mu = 0 + 2 = 2$ und das Gleichungssystem besteht nur noch aus den beiden Netzgleichungen.

Netzgleichungen

Da der Steifigkeitswert der starren Stirnplatte $C_3 \rightarrow \infty$ strebt, kann die Grundgleichungen AII-191 des Moments M_{24} nicht mehr zum Aufstellen der Netzgleichung 2 verwendet werden. Stattdessen wird die über das Gleichgewicht am Knoten 2 (Gl. AII-192) bekannte Beziehung $M_{24} = -M_{21}$ eingesetzt. Da die Stirnplatte an der Netzgleichung 1 nicht beteiligt ist, bleibt diese unverändert zu Gleichung AII-194.

Die Netzgleichung 2 ergibt sich neu aufgestellt zu:

$$0 = -[-M_{21} \cdot \bar{\psi}_{3,2} - N_{12} \cdot \bar{\delta}_{2,2}] \quad (\text{AII-205})$$

$$= 4C_2 \cdot \hat{\varphi}_2 - 6C_2 \cdot \hat{\mu}_1 + 3 \cdot \frac{e^2}{t_f^2} \cdot (1 - \nu_f^2) \cdot \hat{\mu}_2$$

$$0 = -6C_2 \cdot \hat{\mu}_1 + 4C_2 + 3C_S \quad (\text{AII-206})$$

mit

$$C_S = \rho_S^2 \cdot (1 - \nu_f^2) \quad (\text{AII-207})$$

Die neue Netzgleichung 2 wird zusammen mit der bereits bekannten Netzgleichung 1 (AII-194) und mit $C_2 = 1$ zur Systemmatrix mit starrer Stirnplatte zusammengesetzt:

$$\begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 4 + 3C_S \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\mu}_1 \\ \hat{\mu}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F \cdot l}{8} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{AII-208})$$

Um die Verformung $w_{2,rp}$ bzw. $\hat{\mu}_{1,rp}$ zu errechnen, werden auch hier die Determinanten gelöst:

$$\det \mathbf{N}_{rp} = \det \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 4 + 3C_S \end{pmatrix} \quad (\text{AII-209})$$

$$= 12 + 36C_S \quad (\text{AII-210})$$

$$\det \hat{\boldsymbol{\mu}}_{1,\text{rp}} = \det \begin{pmatrix} \frac{F \cdot l}{8} & -6 \\ 0 & 4 + 3 C_S \end{pmatrix} \quad (\text{AII-211})$$

$$= \frac{F \cdot l}{8} \cdot (4 + 3 C_S) \quad (\text{AII-212})$$

Ebenso wie die der elastischen Stirnplatten, werden die Determinanten des Grenzfalles der starren Stirnplatten zur Lösung im nächsten Abschnitt weiter verwendet.

AII-5.3 Der Steifigkeits- und der Stirnplattenfaktor zur Abgrenzung zwischen starren und elastischen Stirnplatten

Wie bereits zu Beginn dieses Anhangs erläutert, wird zur Abgrenzung, wann Stirnplatten als starr angenommen werden können, die Steifigkeit k_f bzw. die Durchbiegung w_f des Sandwichbalkens ohne Verbund herangezogen ($G_c \rightarrow 0$). Das Kriterium, dass die Abweichung der beiden Fälle hinsichtlich der Steifigkeit nicht mehr als 1% betragen darf, lässt sich durch folgende Gleichung ausdrücken:

$$f_{k,\text{ep},f} = \frac{k_{\text{ep},f}}{k_{\text{rp},f}} = \frac{w_{\text{rp},f}}{w_{\text{ep},f}} = \frac{\hat{\mu}_{1,\text{rp}}}{\hat{\mu}_{1,\text{ep}}} = \frac{\det \hat{\boldsymbol{\mu}}_{1,\text{rp}}}{\det \mathbf{N}_{\text{rp}}} \cdot \frac{\det \mathbf{N}_{\text{ep}}}{\det \hat{\boldsymbol{\mu}}_{1,\text{ep}}} \geq 0,99 \quad (\text{AII-213})$$

Hier wird ersichtlich, dass auch auf eine Berechnung der Durchbiegungen $w_{\text{ep},f}$ und $w_{\text{rp},f}$ als Zwischenschritt verzichtet und die Berechnung direkt anhand der zuvor ermittelten Determinanten durchgeführt werden kann. Nach Einsetzen der Determinanten und Ersetzen des Steifigkeitswerts C_3 wird nach dem Stirnplattenfaktor $\rho_{\text{ep},1\%}$ umgestellt:

$$0,99 \leq f_{k,\text{ep},f} = \frac{4 + 3 C_S}{12 + 36 C_S} \cdot \frac{36 \cdot (C_3 + C_S) + 108 C_3 \cdot C_S}{12 \cdot (C_3 + C_S) + 9 C_3 \cdot C_S} \quad (\text{AII-214})$$

$$C_3 \geq \frac{\frac{9 C_S^2}{(1-0,99)} - 12 C_S^2 - 4 C_S}{9 C_S^2 + 15 C_S + 4} \quad (\text{AII-215})$$

mit

$$C_3 = \frac{\rho_{\text{ep}}^3 \cdot \lambda_f}{\rho_S} \quad \text{und} \quad C_S = \rho_S^2 \cdot (1 - \nu_f^2) \quad (\text{AII-216})$$

$$\rho_{\text{ep},1\%} \geq \sqrt[3]{\frac{\rho_S \cdot [888 \rho_S^4 \cdot (1 - \nu_f^2)^2 - 4 \rho_S^2 \cdot (1 - \nu_f^2)]}{\lambda_f \cdot [9 \rho_S^4 \cdot (1 - \nu_f^2)^2 + 15 \rho_S^2 \cdot (1 - \nu_f^2) + 4]}} \quad (\text{AII-217})$$

AII-6 Die Faktorflächen aller Systeme in Höhenliniendarstellung

Im Folgenden werden die Funktionsflächen aller in Kapitel 7 eingeführten Faktoren für jedes der drei Systeme in doppelt logarithmischer Höhenliniendarstellung gezeigt. Sie geben die in Anhang AII-4 hergeleiteten Funktionen der Faktoren für stählerne Deckschichten ($\nu_f = 0,3$) mit gleicher Dicke ($\delta = 0$) wieder und gelten entsprechend nur für diese Bedingungen. Bis auf den Massenfaktor sind die Flächen dabei unabhängig vom Kernmaterial, welches erst durch die Bezugsschlankheit Eingang in die Ablesung findet. Einzig der Massenfaktor ist direkt mit dem SPS verknüpft, da seine Faktorflächen neben der von Stahl auch die Rohdichte des PUR enthalten (vgl. Gl. 7.50). Für abweichende Deckschichtdicken oder -materialien müssen die besagten Faktorfunktionen in der entsprechenden Form direkt verwendet und ggf. grafisch aufbereitet werden.

Für die Faktorflächen wurde gezielt der logarithmische Maßstab gewählt, da bekannte faktorielle Sprünge in der Bezugsschlankheit in dieser Art der Darstellung ihre Länge im Diagramm beibehalten. So wird bspw. $\bar{\lambda}_f(G_c) = \sqrt{2} \cdot \bar{\lambda}_f(0,5 \cdot G_c)$ im logarithmischen Maßstab zu $\log(\bar{\lambda}_f(G_c)) - \log(\sqrt{2}) = \log(\bar{\lambda}_f(0,5 \cdot G_c))$. Die Stufe zwischen zwei diskreten Kernsteifigkeiten kann im logarithmischen Maßstab somit als ein Vektor fester Länge dargestellt werden. Dieser lässt sich im Diagramm frei verschieben, um bspw. seine bestmögliche Lage hinsichtlich des Verlusts an Gesamtsteifigkeit in einem Sandwich zu finden. Dies erlaubt wiederum Rückschlüsse auf günstige Geometrieparameter und damit Dimensionen für das Element unter dem gegebenen Steifigkeitsverlust.

AII-6.1 Der gelenkig gelagerte Sandwichbalken (System I)

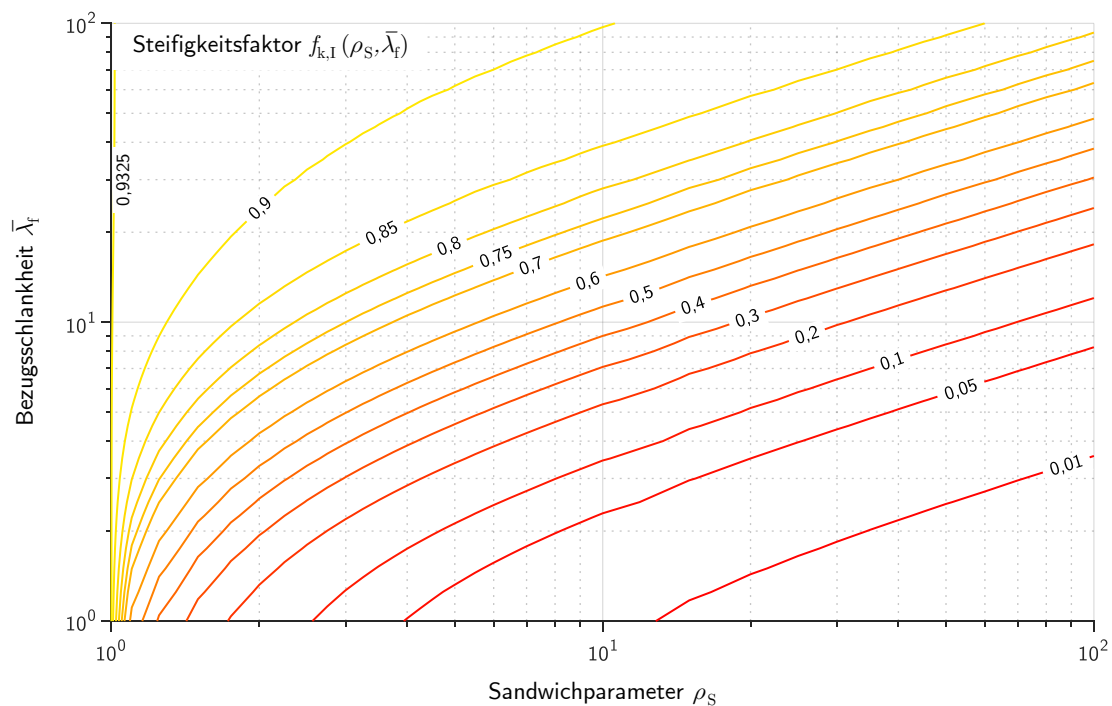


Abbildung AII-84: Höhenliniendarstellung des Steifigkeitsfaktors $f_{k,I}$ für System I mit gleich dicken Deckschichten ($\delta = 0$) unter einer mittigen Einzellast

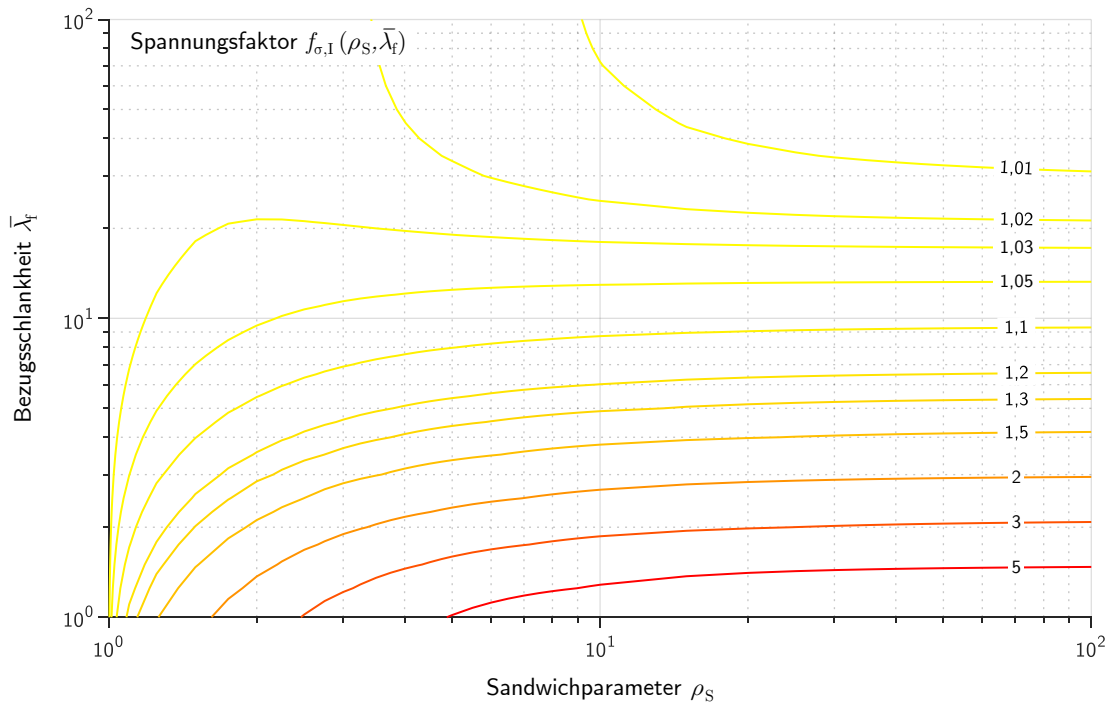


Abbildung AII-85: Höhenliniendarstellung des Spannungsfaktors $f_{\sigma, I}$ für System I mit gleich dicken Deckschichten ($\delta = 0$) unter Gleichlast

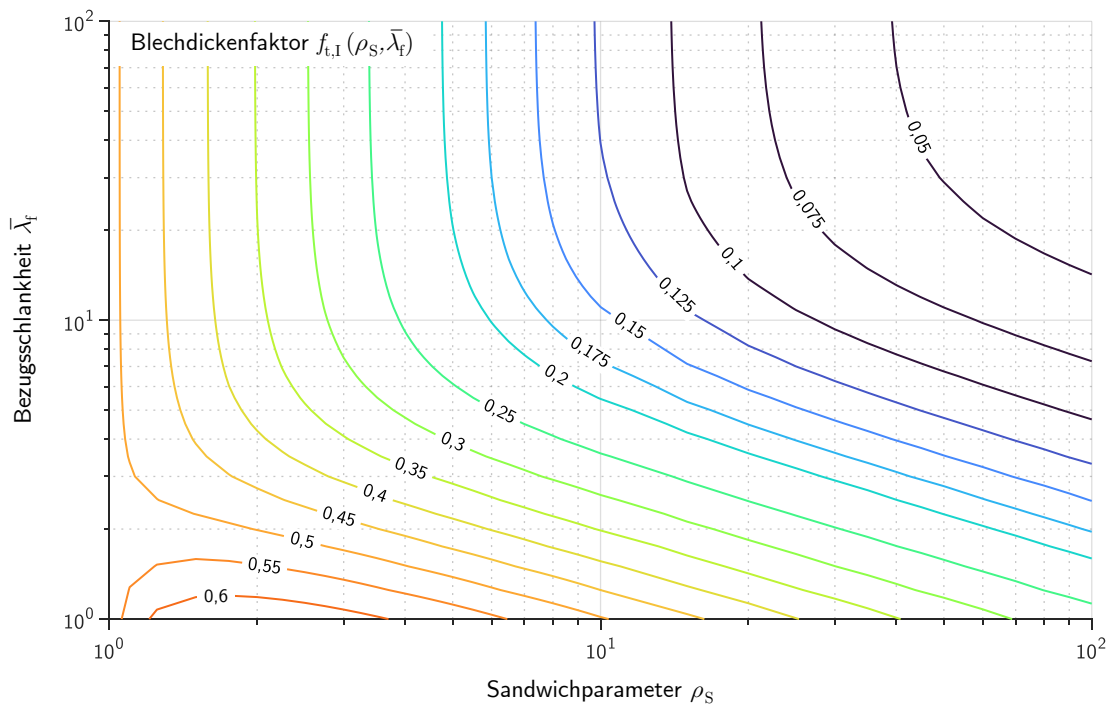


Abbildung AII-86: Höhenliniendarstellung des Blehdickenfaktors $f_{t, I}$ für System I mit gleich dicken Deckschichten ($\delta = 0$) unter einer mittigen Einzellast

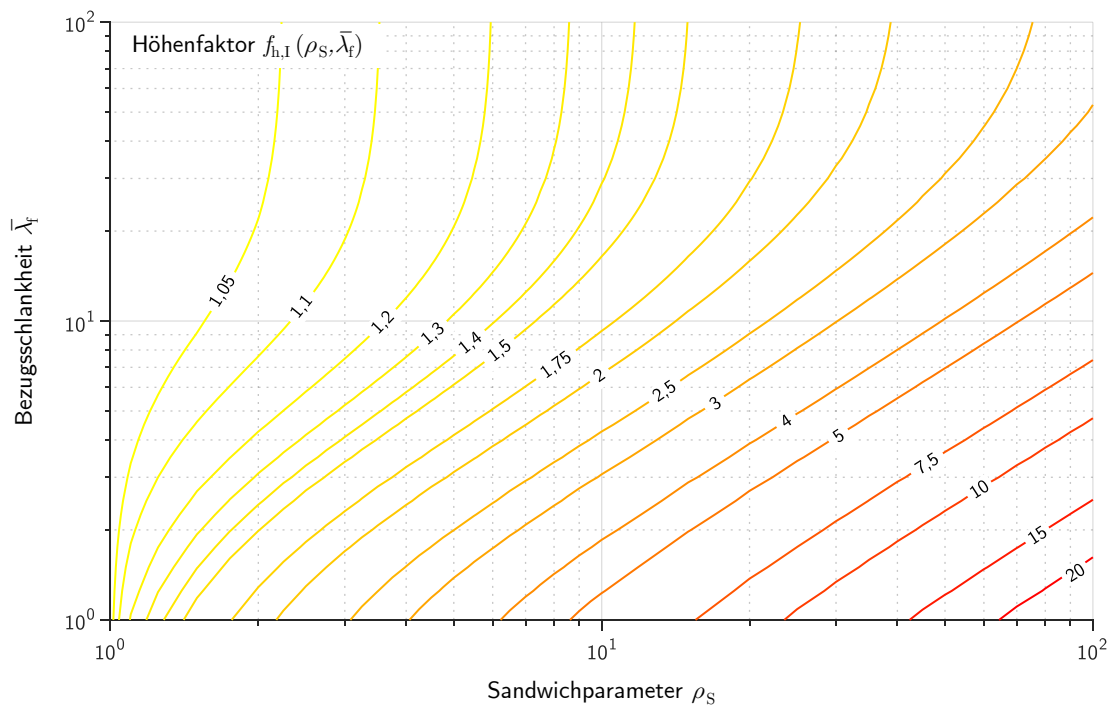


Abbildung AII-87: Höhenliniendarstellung des Höhenfaktors $f_{h,I}$ für System I mit gleich dicken Deckschichten ($\delta = 0$) unter einer mittigen Einzellast

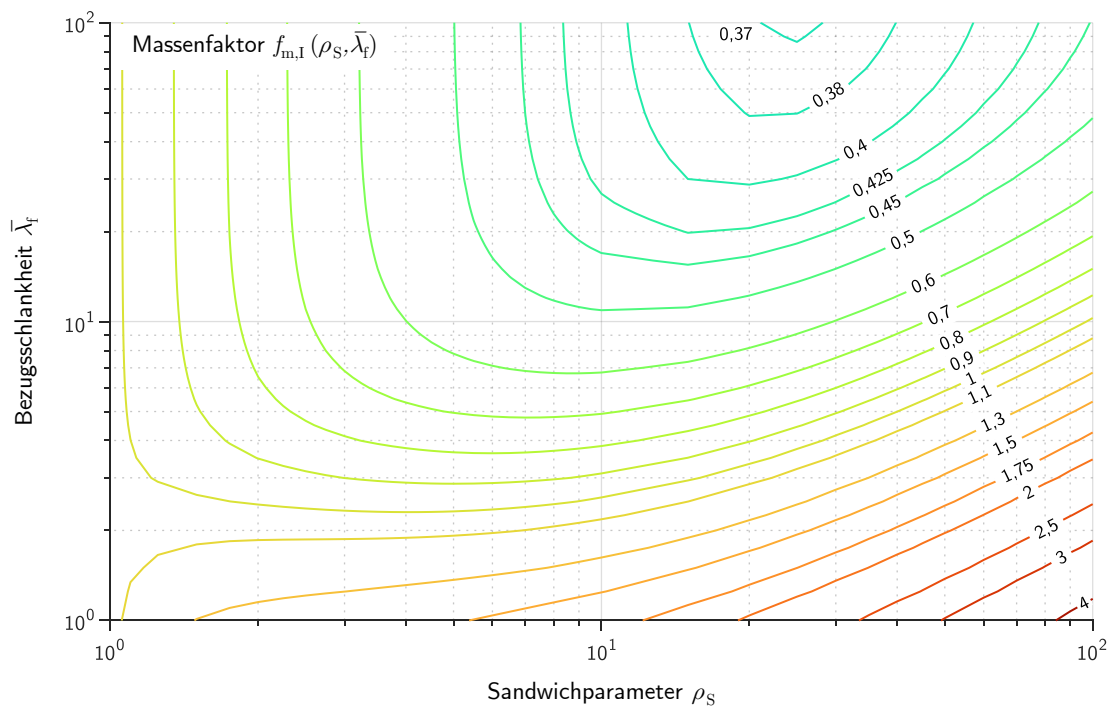


Abbildung AII-88: Höhenliniendarstellung des Massenfaktors $f_{m,I}$ für System I mit gleich dicken stählernen Deckschichten ($\delta = 0$) und einem Kern aus PUR unter einer mittigen Einzellast

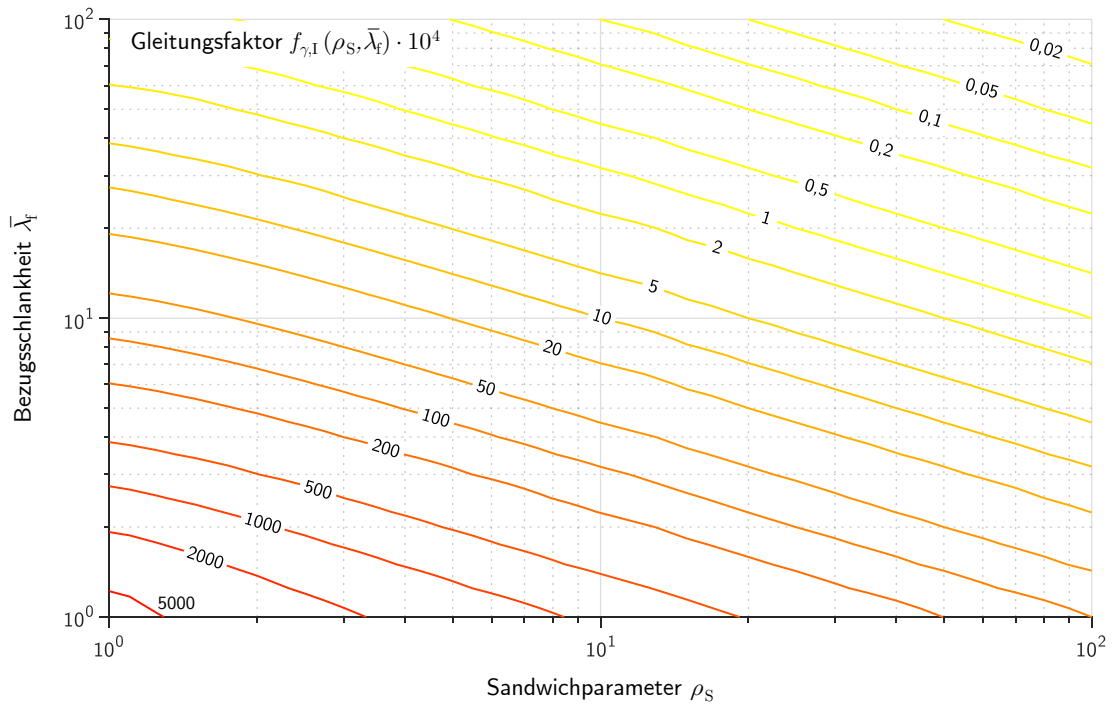


Abbildung AII-89: Höhenliniendarstellung des Gleitfaktors $f_{\gamma, I}$ für System I mit gleich dicken Deckschichten ($\delta = 0$) unter einer mittigen Einzellast

AII-6.2 Der gelenkig gelagerte Sandwichbalken mit Stirnplatten (System II)

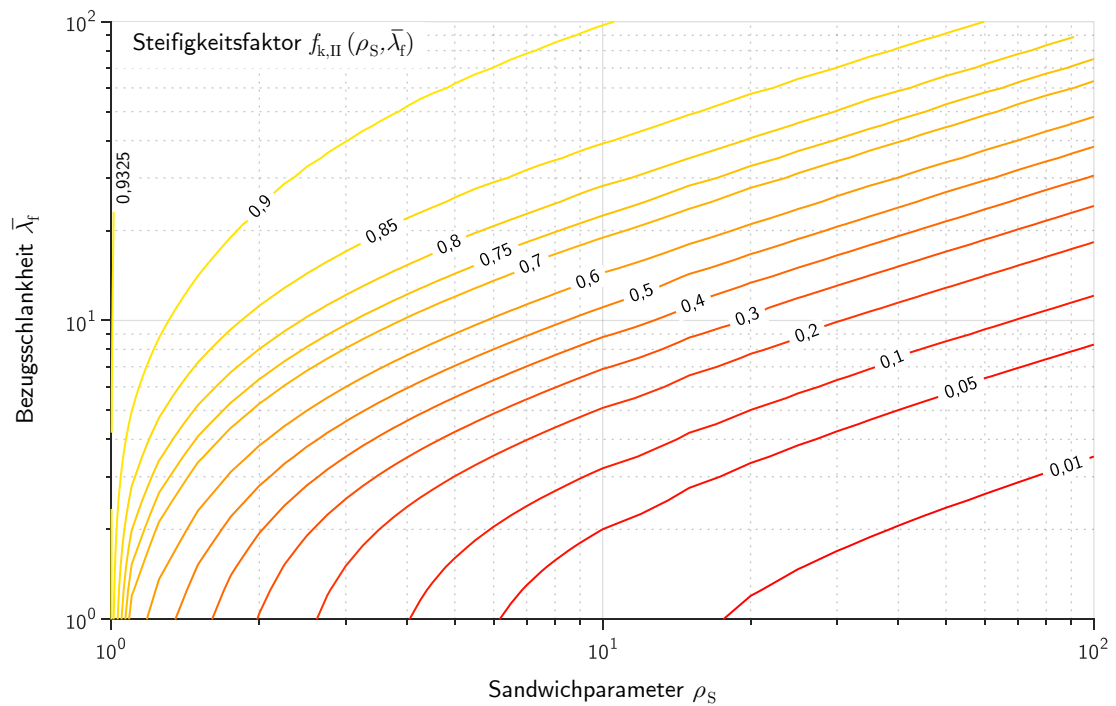


Abbildung AII-90: Höhenliniendarstellung des Steifigkeitsfaktors $f_{k,II}$ für System II mit gleich dicken Deckschichten ($\delta = 0$) unter einer mittigen Einzellast

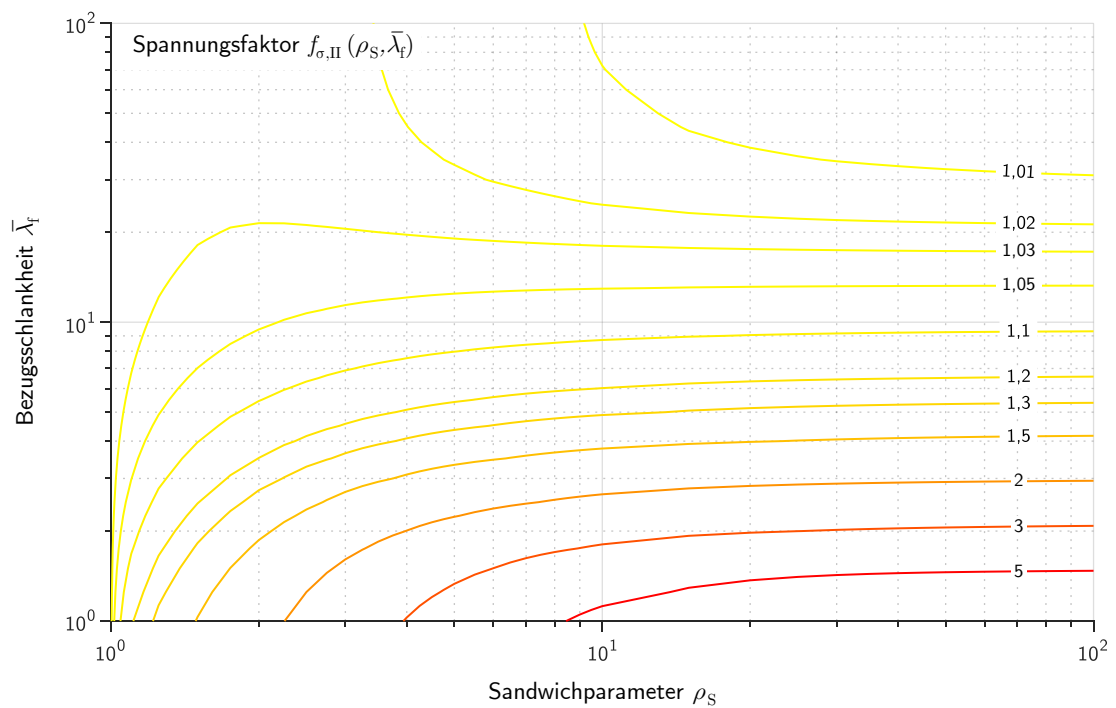


Abbildung AII-91: Höhenliniendarstellung des Spannungsfaktors $f_{\sigma,II}$ für System II mit gleich dicken Deckschichten ($\delta = 0$) unter Gleichlast

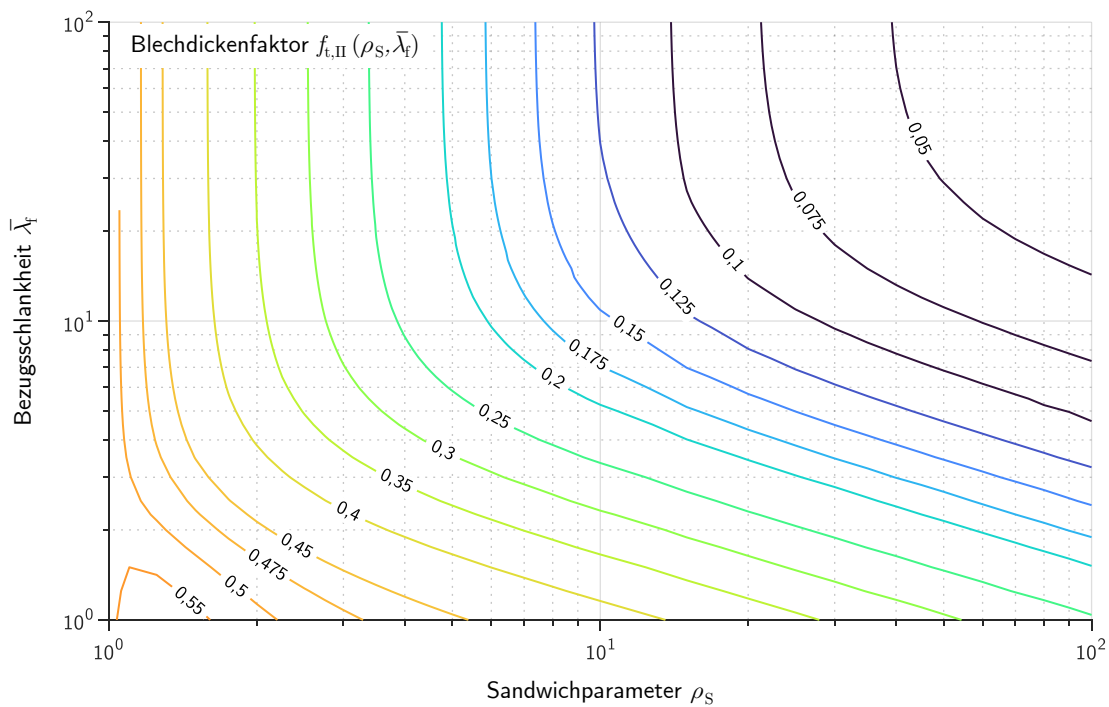


Abbildung AII-92: Höhenliniendarstellung des Blechdickenfaktors $f_{t,II}$ für System II mit gleich dicken Deckschichten ($\delta = 0$) unter einer mittigen Einzellast

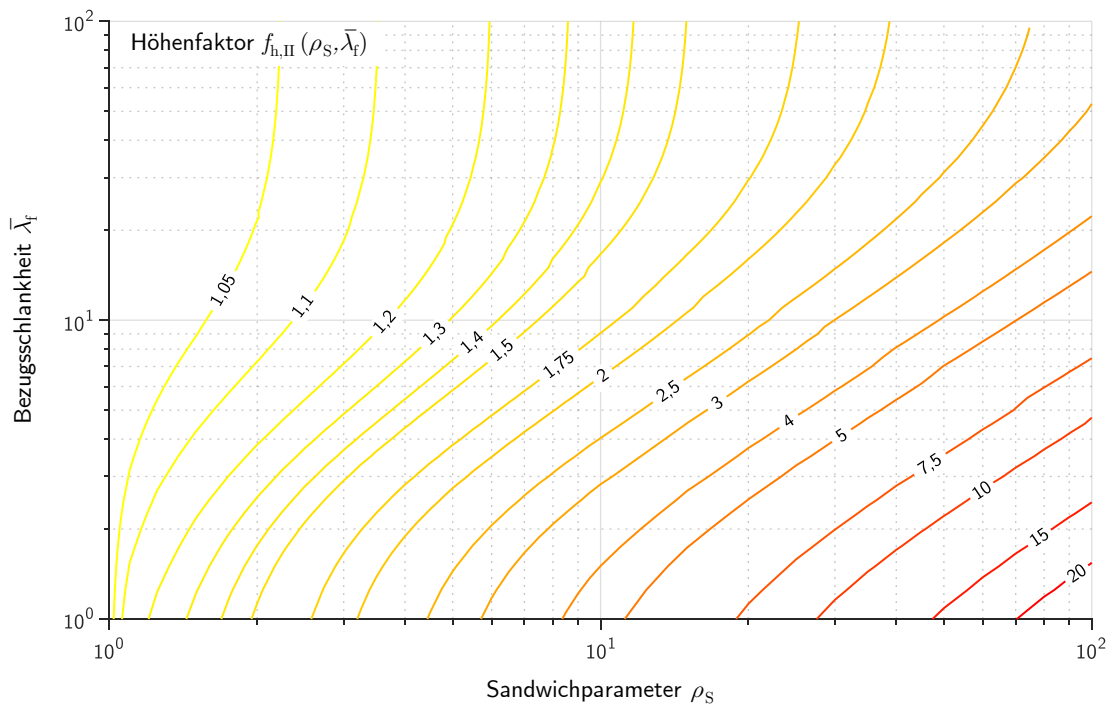


Abbildung AII-93: Höhenliniendarstellung des Höhenfaktors $f_{h,II}$ für System II mit gleich dicken Deckschichten ($\delta = 0$) unter einer mittigen Einzellast

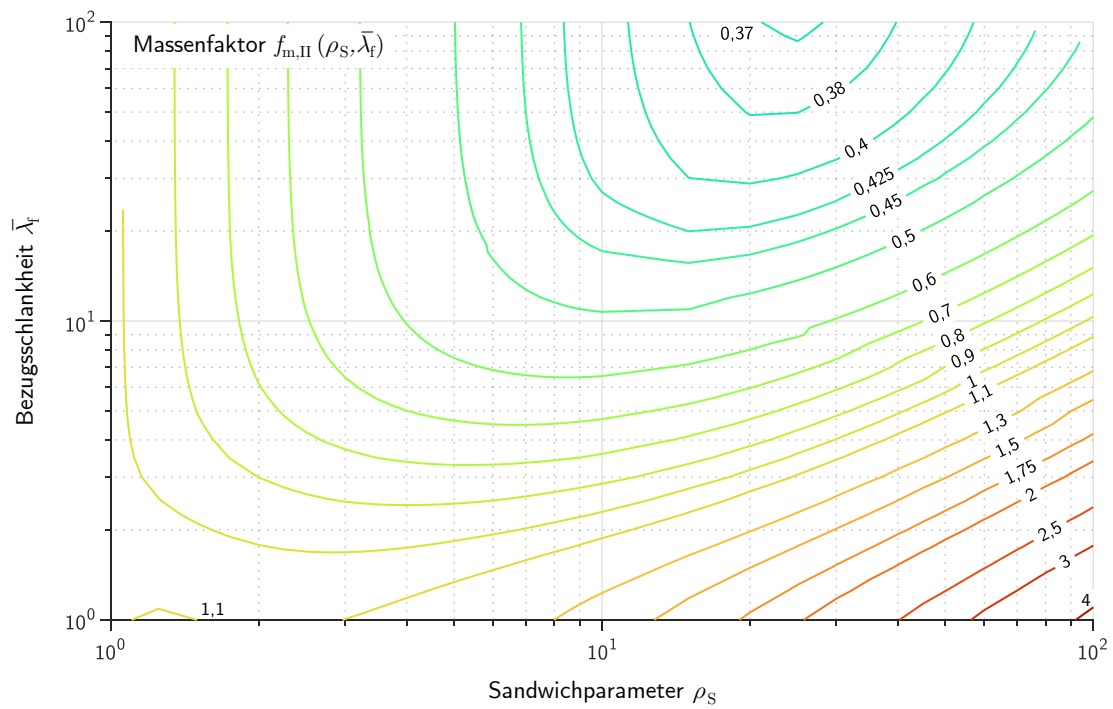


Abbildung AII-94: Höhenliniendarstellung des Massenfaktors $f_{m,II}$ für System II mit gleich dicken stählernen Deckschichten ($\delta = 0$) und einem Kern aus PUR unter einer mittigen Einzellast

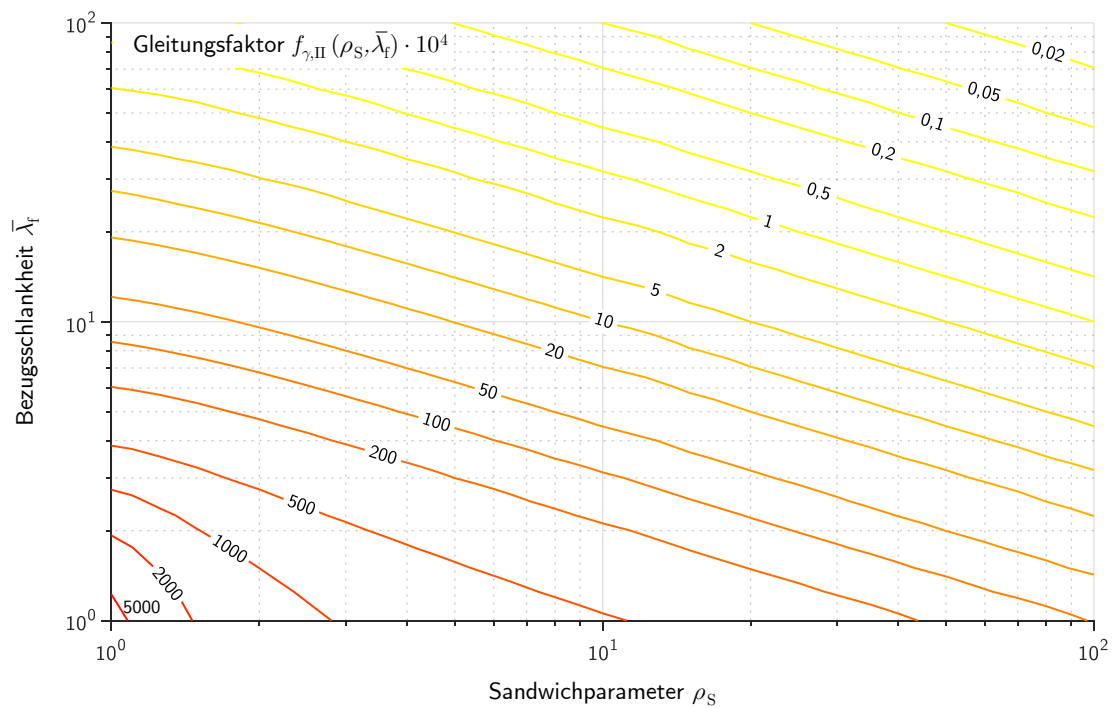


Abbildung AII-95: Höhenliniendarstellung des Gleitfaktors $f_{\gamma,II}$ für System II mit gleich dicken Deckschichten ($\delta = 0$) unter einer mittigen Einzellast

AII-6.3 Der beidseitig eingespannte Sandwichbalken (System III)

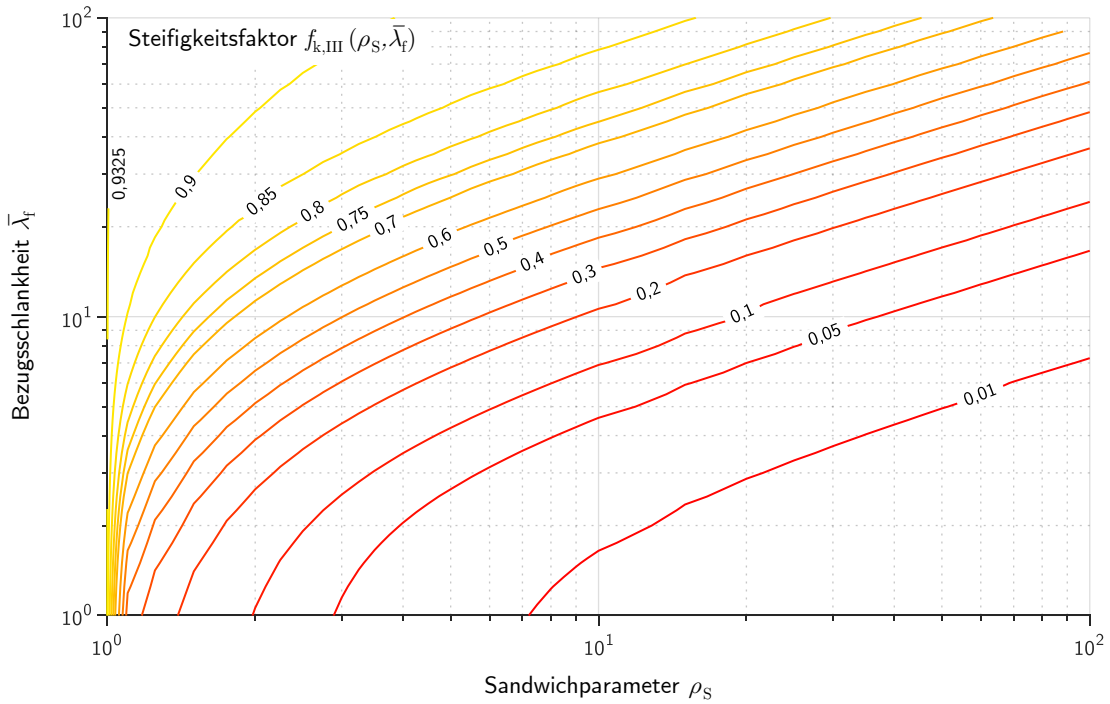


Abbildung AII-96: Höhenliniendarstellung des Steifigkeitsfaktors $f_{k,III}$ für System III mit gleich dicken Deckschichten ($\delta = 0$) unter einer mittigen Einzellast

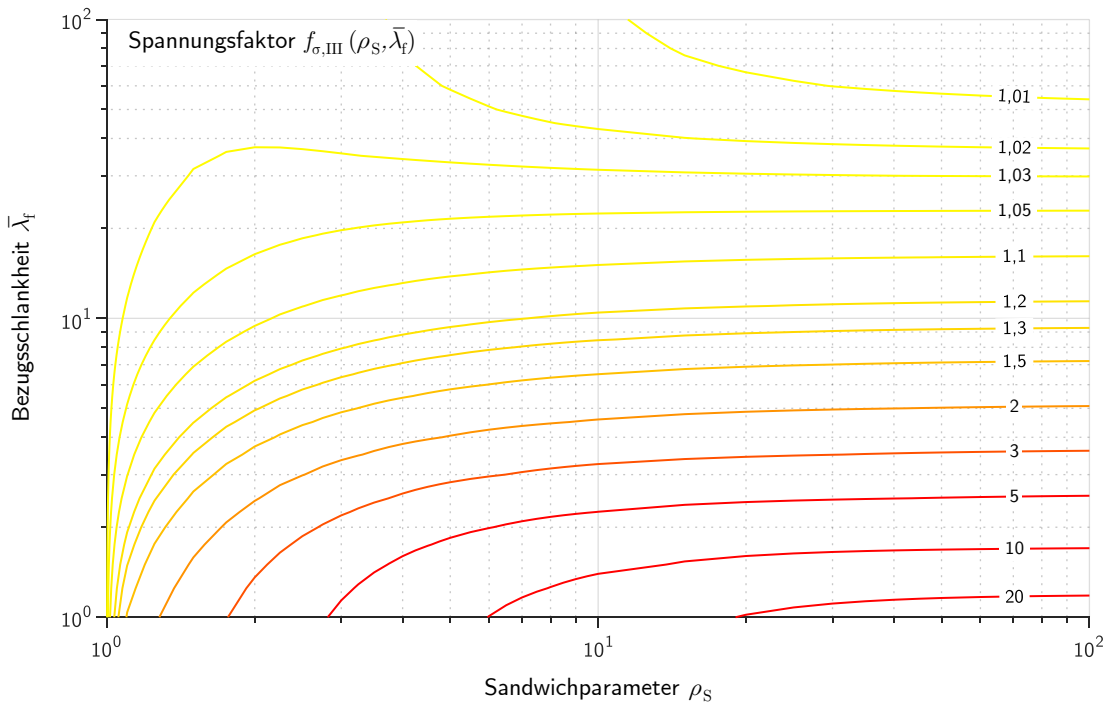


Abbildung AII-97: Höhenliniendarstellung des Spannungsfaktors $f_{\sigma,III}$ für System III mit gleich dicken Deckschichten ($\delta = 0$) unter Gleichlast

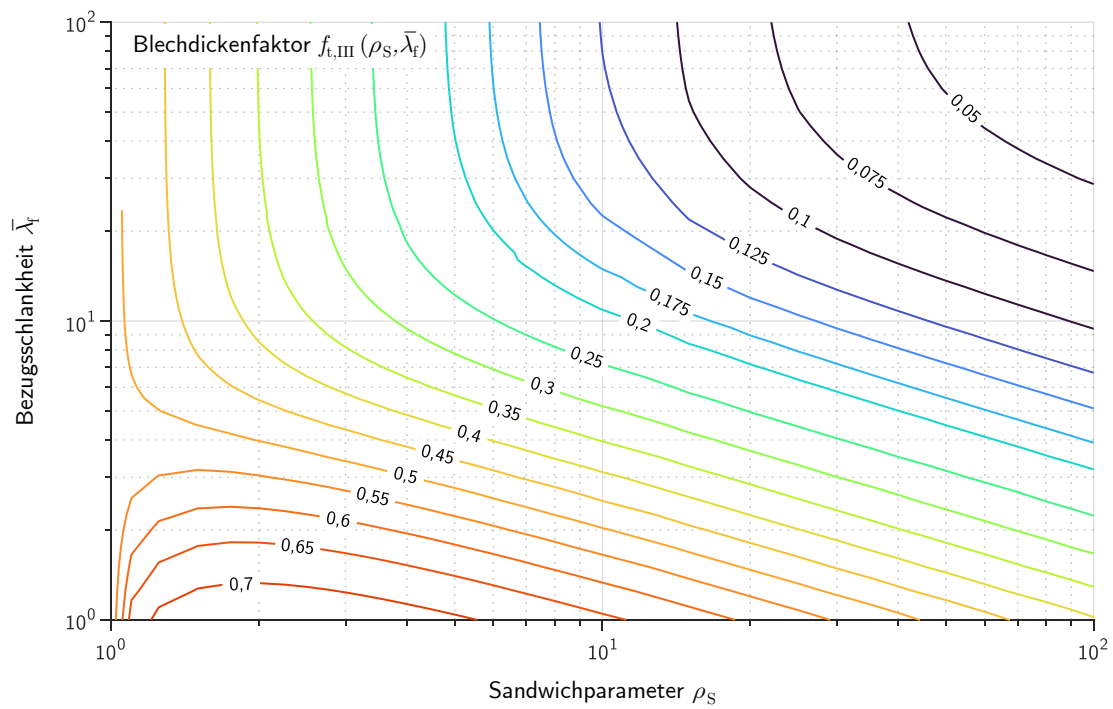


Abbildung AII-98: Höhenliniendarstellung des Blechdickenfaktors $f_{t,III}$ für System III mit gleich dicken Deckschichten ($\delta = 0$) unter einer mittigen Einzellast

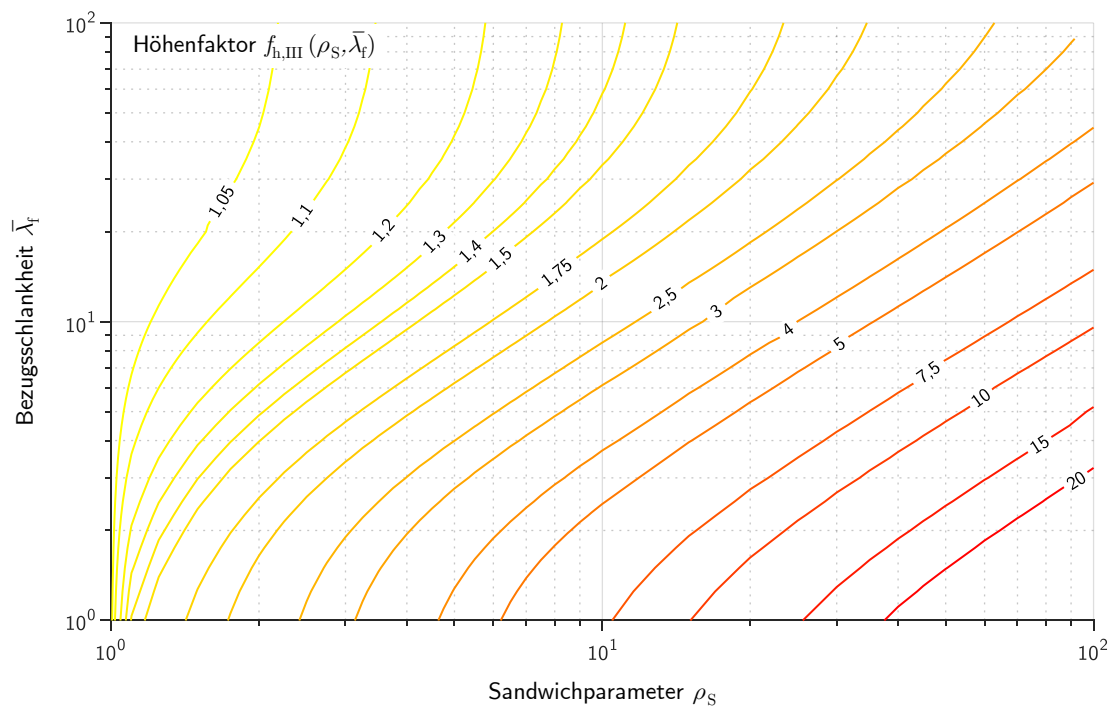


Abbildung AII-99: Höhenliniendarstellung des Höhenfaktors $f_{h,III}$ für System III mit gleich dicken Deckschichten ($\delta = 0$) unter einer mittigen Einzellast

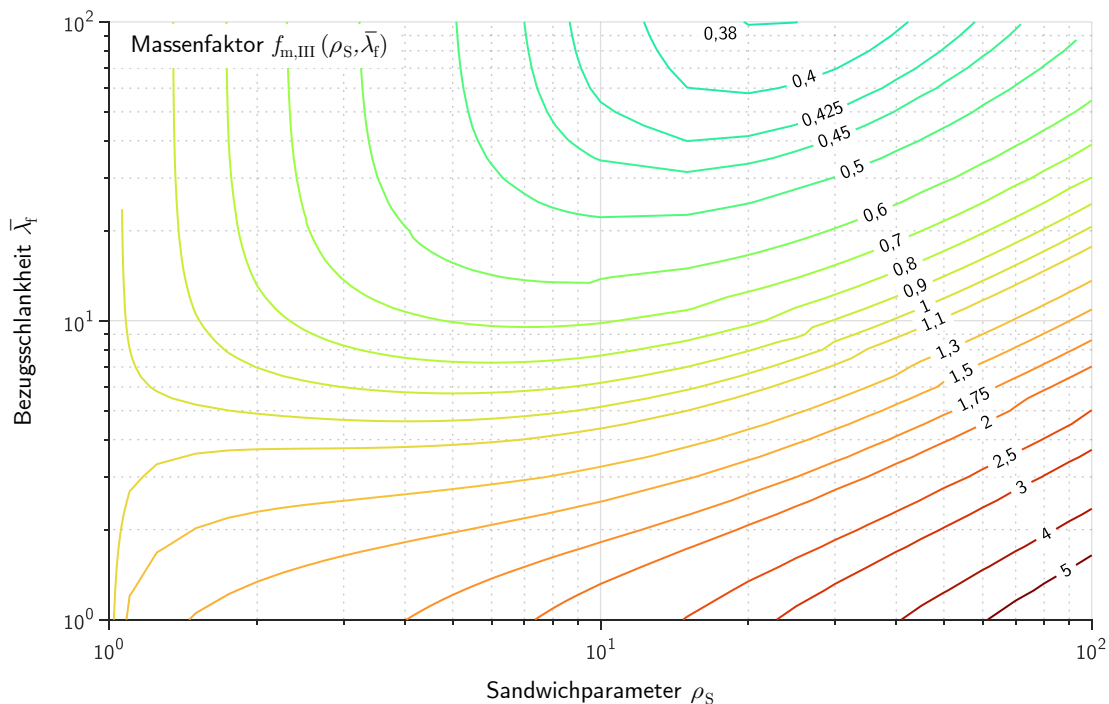


Abbildung AII-100: Höhenliniendarstellung des Massenfaktors $f_{m,III}$ für System III mit gleich dicken stählernen Deckschichten ($\delta = 0$) und einem Kern aus PUR unter einer mittigen Einzellast

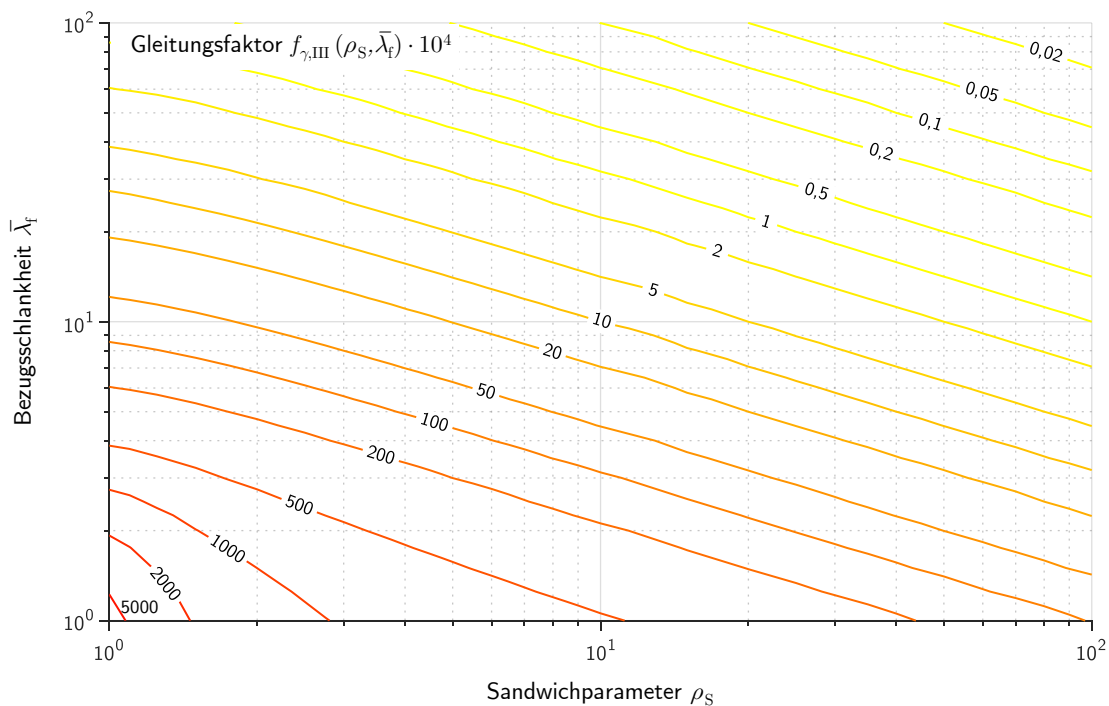


Abbildung AII-101: Höhenliniendarstellung des Gleitungs faktors $f_{\gamma,III}$ für System III mit gleich dicken Deckschichten ($\delta = 0$) unter einer mittigen Einzellast

All-7 Exemplarische Entwürfe verschiedener Varianten von SPS-Fahrbahnen

Für eine gerade Trogbrücke kurzer Spannweite (s. bspw. Abb. 1.1) soll eine Fahrbahn in SPS-Bauweise verwendet werden. Abgesehen von der Fahrbahnplatte wird für die Brücke die Standard-Rahmenplanung nach Ril 804, M9010 angewendet. Gemäß Ril 804, M4101 2.8(5) ist „der Regelabstand von Gleisachse zur seitlichen Schotterbegrenzung von 2,20 m [...] anzustreben.“ Nach den Empfehlungen des VDEI (2019, S. 14) wird die Querspannweite daraus zu 4,40 m angesetzt.¹ Abweichend von den Empfehlungen wird für die stählernen Teile der Fahrbahnplatte die Stahlsorte S235 gemäß Ril 804, M4101 4(2) angenommen, da keine hohe Spannungsauslastung zu erwarten ist.

Allgemein wird von einer Regelfahrbahn mit Schotteroberbau und einer Höhe von 70 cm ausgegangen, deren Eigengewicht unabhängig von der Bauart der Fahrbahnplatte gemäß Ril 804, M2101 2.4(3) bei Regelbreite zu $g_k = 55 \text{ kN/m}$ in Brückenlängsrichtung angenommen werden kann. Die in Querrichtung verteilte Last ergibt sich über die Querspannweite daraus zu $g_{k,2} = 12,5 \text{ kN/m}^2$. Für die Belastung aus Zugverkehr wird das *Lastmodell 71* (Abkürzung: *LM71*) gemäß DIN EN 1991-2, 6.3.2 mit einem Lastklassenbeiwert von $\alpha = 1,0$ angewendet. Maßgebend für die Bemessung der SPS-Fahrbahn wird eine der vier Achslasten von $P_k = 250 \text{ kN}$, die einen Abstand von jeweils 1,60 m aufweisen. Die gleichmäßig verteilte Streckenlast des LM71 von 80 kN/m wird nicht maßgebend und daher nicht betrachtet. Die Teilsicherheitsbeiwerte für die außergewöhnliche Bemessungssituation werden gemäß DIN EN 1990, A.2.3.2 mit $\gamma = 1,0$ angesetzt.

Im Folgenden werden für die zuvor beschriebenen Randbedingungen eine quer- und eine längsorientierte SPS-Fahrbahn nach dem in Abschnitt 7.3.3 beschriebenen Algorithmus entworfen und deren Verformungen und Spannungen in Abhängigkeit von der Zeit und der Temperatur berechnet. Die Ergebnisse der Vordimensionierung werden jeweils durch eine FE-Berechnung an einem Volumenmodell überprüft, welches ähnlich dem Referenzmodell 1 der Voruntersuchung in Abschnitt 6.2.2 erstellt wurde (vgl. Abb. 6.3).

All-7.1 Entwurf einer querorientierten SPS-Fahrbahn

1. Ermitteln des geeigneten Ersatzsystems

Das SPS in der querorientierten Variante spannt über die gesamte Breite der Fahrbahn zwischen den Hauptträgern (vgl. Abb. 1.4) und hat entsprechend der vorherigen Festlegungen eine Spannweite von $l = 4,40 \text{ m}$. Zunächst werden keine Randbauteile berücksichtigt und System I angenommen. Anschließend wird die Ausführung mit starren Stirnplatten anhand von System II überprüft. Für beide Fälle beträgt die Systemzahl $s = 1$.

2. Ermitteln der Belastung

Neben dem bereits definierten Eigengewicht des Oberbaus von $g_{k,2} = 12,5 \text{ kN/m}^2$, wird das Eigengewicht der SPS-Fahrbahn selbst zunächst zu $g_{k,1} \approx 8 \text{ kN/m}^2$ abgeschätzt. Dies entspricht auf der sicheren Seite einer Gesamtdicke der Deckbleche von $2 t_f = 100 \text{ mm}$ und der maximalen Kerndicke von $t_c = 80 \text{ mm}$.

¹Damit liegt die Spannweite im vorliegenden Fall etwa 83 % höher als in der längsten bisher verbauten Variante einer freitragenden SPS-Fahrbahn in der Shenley-Brücke (vgl. Tab. 1.1).

Gemäß DIN EN 1991-2, 6.3.6 dürfen die Achslasten aus Eisenbahnverkehr durch Schienen, Schwellen und Schotter verteilt werden. Da im vorliegenden Beispiel kein expliziter Abstand und keine Art der Schwellen vorgegeben ist, wird die Achsbelastung von $P_k = 250 \text{ kN}$ vereinfacht auf ein querorientiertes SPS-Element der Breite $b = 1,60 \text{ m}$ angesetzt. Dies entspricht einer Verteilung der vier Achslasten über ihre Wirkungslänge im LM71 von $6,40 \text{ m}$ (vgl. DIN EN 1991-2, Bild 6.1). Wird die Verkehrslast auch über die Spannweite des SPS von $l = 4,40 \text{ m}$ verteilt, ergibt sich eine Gleichlast von $p_k = 35,5 \text{ kN/m}^2$.

Um die Vergrößerung der Beanspruchungen aus Verkehr infolge dynamischer Effekte zu berücksichtigen, ist die Verkehrslast gemäß DIN EN 1991-2, 6.4.5 mit dem dynamischen Beiwert Φ zu multiplizieren¹. Dieser hängt von der maßgebenden Länge L_Φ der untersuchten Fahrbahn-Varianten ab (s. a. DIN EN 1991-2, Tab. NA.6.2). Die Berechnung kann unter der Annahme sorgfältig instandgehaltener Gleise ($\Phi = \Phi_2$) und mithilfe der Systemzahl $s = 1$ für das querorientierte SPS über folgende Formel erfolgen:

$$\Phi_2 = \frac{1,44}{\sqrt{2 \cdot l \text{ [in m]} + 4 - 4^s} - 0,2} + 0,82 \leq 1,67 \quad (\text{AII-218})$$

$$= \frac{1,44}{\sqrt{8,8} - 0,2} + 0,82 \quad (\text{AII-219})$$

$$= 1,341 < 1,67 \quad (\text{AII-220})$$

3. Berechnen der erforderlichen Deckblechdicken

Da die Gleichlasten aus Eigengewicht g_k und Verkehr p_k bereits auf die Fläche bezogen sind, kann die Breite b in den Gleichungen 7.58 und 7.59 entfallen und die erforderlichen Blechdicken wie folgend beschrieben ermittelt werden. Aus dem ULS in der außergewöhnlichen Bemessungssituation unter Verkehr und Eigengewicht ergibt sich:

$$t_{f,1} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{(0,008 + 0,0125 + 1,341 \cdot 0,0355) \text{ MPa} \cdot 4400^2 \text{ mm}^2}{235 \text{ MPa}}} = 38 \text{ mm} \quad (\text{AII-221})$$

Aus der Begrenzung der Kriechverformung unter Eigengewicht auf $w \leq l/100$ ergibt sich:

$$t_{f,2} = \sqrt[3]{\frac{3000}{384} \cdot \frac{(0,008 + 0,0125) \text{ MPa} \cdot 4400^3 \text{ mm}^3 \cdot (1 - 0,3^2)}{210\,000 \text{ MPa}}} = 39 \text{ mm} \quad (\text{AII-222})$$

¹Da das Haupttragssystem nicht bekannt ist, wird vorausgesetzt, dass Resonanz ausgeschlossen werden kann.

4. Ermitteln der Steifigkeit des PUR im SPS

Für das PUR werden die unter Punkt 4 in Abschnitt 7.3.3 empfohlenen Steifigkeiten der drei maßgeblichen Zustände verwendet:

$$\text{Z1: } G_c(t_0, \text{RT}) = G_c(160 \text{ s}, 23^\circ\text{C}) = G_c = 270 \text{ MPa} \quad (7.61)$$

$$\text{Z2: } G_c(t_0, \max T) = G_c(160 \text{ s}, 60^\circ\text{C}) = 0,5 \cdot G_c = 135 \text{ MPa} \quad (7.60)$$

$$\text{Z3: } G_c(t_{100}, \text{RT}) = G_c(100 \text{ a}, 23^\circ\text{C}) = 0,1 \cdot G_c = 27 \text{ MPa} \quad (7.62)$$

Wie dort ebenfalls beschrieben, wird für die Vordimensionierung unter Verkehrslast der Zustand Z2 bei kurzzeitig erhöhter Temperatur mit $G_c(t_0, \max T) = 135 \text{ MPa}$ maßgebend.

5. Berechnen der maximalen Deckblechdicke

Aufgrund der zuvor ermittelten erforderlichen Deckblechdicken $t_{f,1}$ und $t_{f,2}$ und der maximalen Kerndicke $t_c \approx 80 \text{ mm}$ ist davon auszugehen, dass der Sandwichparameter $\rho_S = (t_c + t_f)/t_f \leq 5$ ausfallen wird. Demnach wird für die Bezugsschlankheit gemäß Gleichung 7.64 die untere Grenze $\bar{\lambda}_{f,\min} = 3$ angesetzt um die maximale Deckblechdicke zu ermitteln:

$$\max t_f = \frac{4400 \text{ mm}}{3} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 135 \text{ MPa}}{210\,000 \text{ MPa}}} = 53 \text{ mm} \quad (\text{AII-223})$$

6. Identifizieren der erforderlichen Deckblechdicke

Aus den zuvor berechneten Grenzwerten wird der Wert für die Deckblechdicke zu $t_f = 40 \text{ mm}$ festgelegt:

$$38 \text{ mm} < 39 \text{ mm} < t_f = 40 \text{ mm} < 53 \text{ mm} \quad (\text{AII-224})$$

7. Berechnen der erforderlichen Ersatz-Blechdicke

Die maximale Verformung unter Verkehr sollte den Grenzwert $w \leq l/300$ nicht überschreiten. Daraus wird die erforderliche Dicke des Ersatzblechs berechnet:

$$t_{\text{sub}} = \sqrt[3]{\frac{300}{4} \cdot \frac{1,341 \cdot 250\,000 \text{ N} \cdot 4400^2 \text{ mm}^2 \cdot (1 - 0,3^2)}{1600 \text{ mm} \cdot 210\,000 \text{ MPa}}} = 110 \text{ mm} \quad (\text{AII-225})$$

8. Berechnen des Blechdickenfaktors und der Bezugsschlankheit

Aus der Dicke des äquivalenten Blechs t_{sub} und der gewählten Deckblechdicke t_f ergeben sich der Blechdickenfaktor und die Bezugsschlankheit im bemessungsrelevanten Zustand Z2:

$$f_t = \frac{40 \text{ mm}}{110 \text{ mm}} = 0,36 \quad (\text{AII-226})$$

$$\bar{\lambda}_f = \frac{4400 \text{ mm}}{40 \text{ mm}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 135 \text{ MPa}}{210\,000 \text{ MPa}}} = 3,944 \approx 4 > 3 = \bar{\lambda}_{f,\min} \quad (\text{AII-227})$$

AII-7.1.1 Entwurf ohne Stirnplatten (System I)

In den folgenden Schritten wird zunächst ein Entwurf der querorientierten SPS-Fahrbahn ohne den Ansatz von Stirnplatten durchgeführt. Dabei werden zur Ableseungen der Faktoren die Graphen des Anhangs AII-6 verwendet. Zur besseren Anschauung werden zusätzlich Ausschnitte der Ableseungen gesammelt in Abbildung AII-102 dargestellt.

9. Ermitteln des erforderlichen Sandwichparameters

Der erforderliche Sandwichparameter $\min \rho_S$ wird mithilfe des Blechdickenfaktors f_t durch Ableseung an Abbildung AII-86 bestimmt (vgl. Abb. AII-102 o.l.):

$$\min \rho_S = 2,85 \quad (\text{AII-228})$$

10. Festlegen der Kerndicke im SPS-Element

Aus dem erforderlichen Sandwichparameter $\min \rho_S$ ergibt sich die erforderliche Kerndicke $\min t_c$, welche zu der letztendlich verwendeten Kerndicke t_c gewählt wird:

$$t_c = \min t_c = 40 \text{ mm} \cdot (2,85 - 1) = 74 \text{ mm} < 80 \text{ mm} \approx t_{c,\max} \quad (\text{AII-229})$$

11. Überprüfen der bezogenen Gesamthöhe und Masse

Anhand der Abbildungen AII-87 und AII-88 werden die Gesamthöhe und Masse des dimensionierten SPS mit denen des Ersatzblechs gleicher Steifigkeit verglichen, um den Nutzen des Einsatzes der querorientierten SPS-Fahrbahn ohne Stirnplatten zu beurteilen. Wie die Auszüge in Abbildung AII-102 unten zeigen, spart das SPS ca. 18 % Masse ein, erfordert aber eine etwa 39 % größere Elementhöhe im Vergleich zum monolithischen Blech.

12. Ermitteln der Steifigkeits-, Spannungs- und Gleitungsfaktoren

Nach der Vordimensionierung des SPS werden die Steifigkeits-, Spannungs- und Gleitungsfaktoren für die verschiedenen Zustände aus den Abbildungen AII-84, AII-85 und AII-89 ausgelesen (vgl. Abb. AII-102). Dafür werden analog zu Gleichung AII-227 die erforderlichen Bezugsschlankheiten $\bar{\lambda}_f$ der noch nicht betrachteten Zustände berechnet. Die optionalen Steifigkeits- und Spannungsquotienten werden zusammen mit den anderen Ergebnissen in Tabelle AII-28 angegeben.

Tabelle AII-28: Ergebnisse der Ableseungen aller Faktoren und der daraus ermittelten Quotienten

Zustand	t	T	$G_c(t, T)$	$\bar{\lambda}_f(t, T)$	f_k	κ	f_σ	ζ	f_γ
Z1	t_0	RT	270 MPa	5,578	0,57	1	1,14	1	$108 \cdot 10^{-4}$
Z2	t_0	60 °C	135 MPa	3,944	0,42	0,74	1,25	1,10	$215 \cdot 10^{-4}$
Z3	100 a	RT	27 MPa	1,764	0,16	0,28	2,06	1,81	$984 \cdot 10^{-4}$

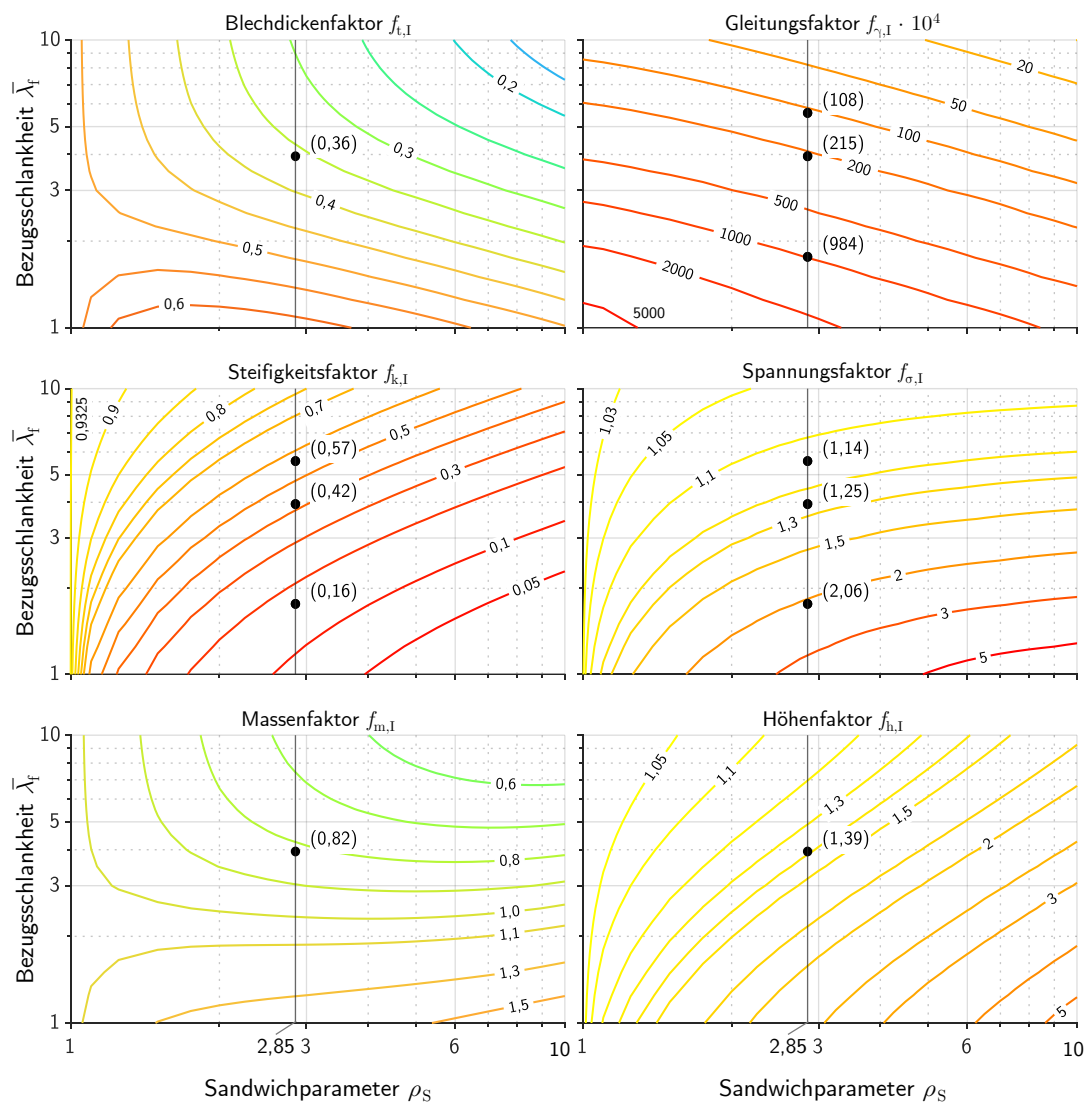


Abbildung AII-102: Höhenliniendarstellung aller Faktoren mit Ablesepunkten für die Vordimensionierung des exemplarischen, querorientierten SPS mit System I (Die Werte nicht bezeichneter Linien ergeben sich aus den Mittelwerten der benachbarten Linien)

13. Berechnen der Referenzwerte von Durchbiegung w_r und Deckblechrandspannung σ_r

Für die angenommenen charakteristischen Belastungen aus Eigengewicht (g_k bzw. G_k) und Verkehr (p_k bzw. P_k) werden lastfallweise in Feldmitte die Durchbiegung w_r und die untere Randspannung σ_r im Grenzfall des starren Verbunds berechnet. Dafür kann die zunächst angenommene Eigenlast des SPS von 8 kN/m^2 anhand der nun bekannten Abmessungen korrigiert werden:

$$\begin{aligned}
 g_{k,1} &= 2 t_f \cdot \gamma_f + t_c \cdot \gamma_c && \text{(AII-230)} \\
 &= 2 \cdot 40 \text{ mm} \cdot 78,5 \cdot 10^{-6} \text{ N/mm}^3 + 74 \text{ mm} \cdot 11,5 \cdot 10^{-6} \text{ N/mm}^3 \\
 &= 0,0071 \text{ MPa}
 \end{aligned}$$

Die gesuchten Größen im starren Verbund ergeben sich zu:

$$w_{G,r} = \frac{1}{8} \cdot \frac{(0,0071 + 0,0125) \text{ MPa} \cdot 4400^4 \text{ mm}^4}{40^3 \text{ mm}^3 \cdot (1 + 3 \cdot 2,85^2)} \cdot \frac{(1 - 0,3^2)}{210\,000 \text{ MPa}} \quad (\text{AII-231})$$

$$= 2,45 \text{ mm}$$

$$\sigma_{g,r} = \frac{3}{8} \cdot \frac{0,0196 \text{ MPa} \cdot 4400^2 \text{ mm}^2}{40^2 \text{ mm}^2} \cdot \frac{(2,85 + 1)}{(1 + 3 \cdot 2,85^2)} \quad (\text{AII-232})$$

$$= 13,50 \text{ MPa}$$

$$w_{P,r} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1,341 \cdot 250\,000 \text{ N} \cdot 4400^3 \text{ mm}^3}{1600 \text{ mm} \cdot 40^3 \text{ mm}^3 \cdot (1 + 3 \cdot 2,85^2)} \cdot \frac{(1 - 0,3^2)}{210\,000 \text{ MPa}} \quad (\text{AII-233})$$

$$= 5,95 \text{ mm}$$

$$\sigma_{p,r} = \frac{3}{8} \cdot \frac{1,341 \cdot 250\,000 \text{ N} \cdot 4400 \text{ mm}}{1600 \text{ mm} \cdot 40^2 \text{ mm}^2} \cdot \frac{(2,85 + 1)}{(1 + 3 \cdot 2,85^2)} \quad (\text{AII-234})$$

$$= 32,78 \text{ MPa}$$

14. Berechnen der Durchsenkungen w_e und Spannungen σ_e

Mithilfe der zuvor berechneten Zustandsgrößen im Grenzfall des starren Verbunds und der abgelesenen Steifigkeits- bzw. Spannungsfaktoren, werden die Durchsenkungen und Randspannungen in Feldmitte nach Gleichung 7.68 bzw. 7.69 lastfallweise für die Zustände Z1 bis Z3 berechnet. Die Ergebnisse sind in Tabelle AII-29 zusammengefasst. Da im Zustand Z4 am Ende der Nutzungsdauer die Lastfälle gemeinsam wirken, werden diese gemäß Gleichung 7.70 überlagert. Exemplarisch wird hier die Berechnung der Gesamtdurchsenkung gezeigt:

$$\begin{aligned} \max w(\text{Z4}) &= w_e(G_k, \text{Z3}) + w_e((G_k + P_k), \text{Z2}) - w_e(G_k, \text{Z1}) \quad (7.70) \\ &= 15,31 \text{ mm} + 5,83 \text{ mm} + 14,17 \text{ mm} - 4,30 \text{ mm} \\ &= 31,01 \text{ mm} \quad (\text{AII-235}) \end{aligned}$$

Die Verformung der querorientierten SPS-Fahrbahn ohne Stirnplatten wird unter Verkehrsbelastung bei 60 °C am Ende der Nutzungsdauer nach 100 a Kriechen unter Eigengewicht rund 31 mm betragen. Dies entspricht einem Verhältnis von etwa $l/142$. Dabei resultieren allein ca. 50 % der Durchsenkung aus Eigengewicht und der sich langsam einstellenden Kriechverformung. Diese kann durch regelmäßige Wartung mit Stopfen des Schotterbetts ausgeglichen werden, sodass im Idealfall für das Gleis nur die kurzfristige Durchsenkung aus Zugüberfahrt von etwa 15,7 mm relevant wird, was einem Verhältnis von $l/280$ entspricht.

Tabelle AII-29: Ergebnisse der Durchsenkungen und Randspannungen aus Eigengewicht (g_k bzw. G_k) und Verkehr (p_k bzw. P_k) in den verschiedenen Zuständen

Zustand	$G_c(t, T)$ MPa	f_k -	$w(G_k)$ mm	$w(P_k)$ mm	f_σ -	$\sigma(g_k)$ MPa	$\sigma(p_k)$ MPa
Starr	$G_c \rightarrow \infty$	1	2,45	5,95	1	13,50	32,78
Z1	270 MPa	0,57	4,30	10,44	1,14	15,39	37,37
Z2	135 MPa	0,42	5,83	14,17	1,25	16,88	40,98
Z3	27 MPa	0,16	15,31	37,19	2,06	27,81	67,53
Z4	Überlagert	-	31,01		-	70,29	

15. Überprüfen der Linearitätsbedingung

Um die Annahme linear-viskoelastischen Verhaltens für das PUR zu überprüfen, wird die maximale Schubgleitung im Kern im maßgeblichen Zustand Z4 überprüft:

$$\max \gamma_c(Z4) = \frac{4400^3 \text{ mm}^3 \cdot 10^{-4}}{210\,000 \text{ MPa} \cdot 40^3 \text{ mm}^3} \cdot \left[0,0196 \text{ MPa} \cdot 984 + \left(0,0196 \text{ MPa} + \frac{1,341 \cdot 250\,000 \text{ N}}{4400 \text{ mm} \cdot 1600 \text{ mm}} \right) \cdot 215 - 0,0196 \text{ MPa} \cdot 108 \right] \quad (\text{AII-236})$$

$$= 0,02 \hat{=} 2\% > 1,6\% \quad (\text{AII-237})$$

Die maximal auftretende Schubgleitung liegt oberhalb des definierten Grenzwerts für den LVE-Bereich des PUR. Somit müsste die Vordimensionierung streng genommen mit der Wahl einer neuen Kerndicke ab Schritt 10 wiederholt werden. Aufgrund der bereits großen Kerndicke von $t_c = 74 \text{ mm}$ und eindeutiger Überschreitung der Linearitätsbedingung ist jedoch damit zu rechnen, dass auch eine Annahme des Maximalmaßes von $t_c = t_{c,\max} = 80 \text{ mm}$ zu keiner deutlichen Änderung führen wird.

In Abschnitt 7.3.2 wurde aus den Ergebnissen der TCL-Versuche (vgl. Anhang AI-6.2) geschlossen, dass auch Schubgleitungen im Kern von bis zu 2% in Ausnahmefällen noch tolerierbar sein können (vgl. Fußnote 1 auf Seite 212). Überdies wird die real auftretende Schubgleitung im Kern geringer ausfallen, da die Belastungen flächig und nicht punktuell auf das Element wirken. Die errechnete Schubgleitung könnte demnach theoretisch akzeptiert werden. Sie zeigt jedoch deutlich, dass die angestrebte Spannweite von $l = 4,40 \text{ m}$ das kriechende SPS unter den angenommenen Randbedingungen bereits an seine Grenzen bringt. Anstatt die Kerndicke zu verändern, werden daher im nächsten Abschnitt Stirnplatten für das SPS vorgesehen und aus System I wird System II. Damit soll zusätzlich der versteifende Effekt der Stirnplatten veranschaulicht werden.

Um die Ergebnisse aus der Vordimensionierung zu überprüfen, wurde das querorientierte SPS ohne Stirnplatten ähnlich zu dem in Abschnitt 6.2.2 gezeigten Verfahren 1 mit Volumenelementen im Programm RFEM von Dlubal modelliert und unter den zuvor gezeigten Lasten (g_k , G_k , p_k und P_k) berechnet. Dabei wurden für jede Belastung je drei Lastfälle für die Zustände Z1 bis Z3 angelegt, in welchen die Steifigkeit des PUR-Kerns angepasst wurde. Der Zustand Z4 ergibt sich aus Überlagerung der drei anderen Zuständen gemäß Gleichung 7.70. Die nachfolgende Tabelle AII-30 zeigt die Ergebnisse der FE-Berechnung im Vergleich zu jenen aus der Vordimensionierung. Abbildung AII-103 zeigt das verwendete FE-Modell und eine qualitative Verformungsfigur zur Plausibilisierung. Der Vergleich der Ergebnisse zeigt eine gute Übereinstimmung zwischen der händischen und der FE-Berechnung. Die größten Abweichungen betragen ca. 5% und zeigen sich bei den Spannungen im Zustand Z3.

Tabelle AII-30: Ergebnisse der händischen Vordimensionierung des Systems I nach dem Algorithmus im Vergleich zu einer Berechnung des dimensionierten SPS-Elements mit RFEM (Dlubal)

Zustand	Vordimensionierung				FE-Berechnung			
	$w(G_k)$ mm	$w(P_k)$ mm	$\sigma(g_k)$ MPa	$\sigma(p_k)$ MPa	$w(G_k)$ mm	$w(P_k)$ mm	$\sigma(g_k)$ MPa	$\sigma(p_k)$ MPa
Z1	4,30	10,44	15,39	37,38	4,35	10,56	14,91	36,17
Z2	5,83	14,17	16,88	40,99	5,86	14,22	16,34	39,64
Z3	15,31	37,19	27,81	67,55	15,35	37,23	26,40	64,04
Z4	31,01		70,29		31,08		67,48	

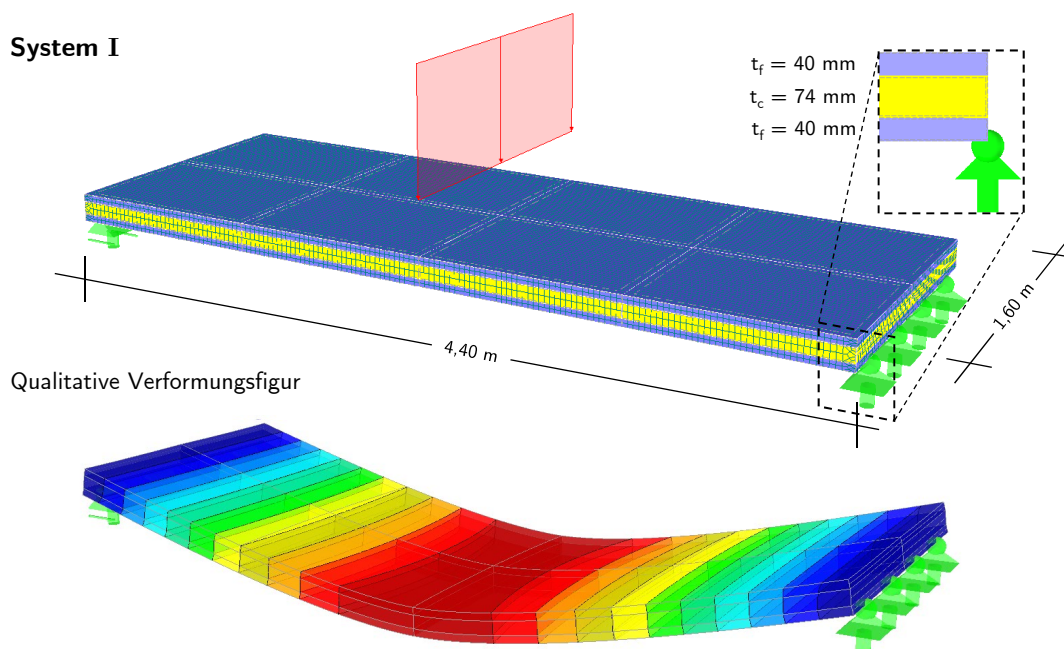


Abbildung AII-103: Darstellung des FE-Modells von System I in RFEM von Dlubal mit den Abmessungen und einer exemplarischen Verformungsfigur zur Plausibilisierung

AII-7.1.2 Entwurf mit Stirnplatten (System II)

Nachdem der querorientierte Entwurf mit System I im Zustand Z4 die Grenze des linear-viskoelastischen Bereichs übersteigt, werden die aus der Herstellung ohnehin erforderlichen Randbauteile des SPS als Stirnplatten angesetzt und über eine erneute Berechnung anhand von System II berücksichtigt. Dabei sind die Schritte 1 bis 8 im Algorithmus der Vordimensionierung identisch mit denen von System I, weshalb die folgenden Berechnungen direkt bei Schritt 9 beginnen. In den darauf folgenden Schritten werden zur Ableitung der Faktoren ebenso die Graphen des Anhangs AII-6 verwendet. Zur besseren Anschauung werden zusätzlich Ausschnitte der Ableitungen gesammelt in Abbildung AII-104 dargestellt.

Zuvor wird jedoch die Dicke der Randbauteile nach Abschnitt 7.2.4 so festgelegt, dass die Annahme von starren Stirnplatten nach der SST gerechtfertigt ist. Da die Deckblechdicke mit $t_f = 40$ mm bereits vergleichsweise groß ist, wird der Stirnplattenfaktor $\rho_{ep} = 1$ und die Stirnplattendicke damit zu $t_{ep} = t_f = 40$ mm gewählt. Auf den Berechnungsgang der Vordimensionierung hat dies zunächst keine Auswirkungen. Erst im späteren Vergleich mit der FEM wird sich zeigen, ob die angenommene Dicke ausreichend ist, damit die Stirnplatten nahezu starre Kopplungen der Deckbleche erzeugen.

9. Ermitteln des erforderlichen Sandwichparameters

Der erforderliche Sandwichparameter $\min \rho_S$ wird mit dem Blechdickenfaktor $f_t = 0,36$ aus Schritt 8 durch Ableitung an Abbildung AII-92 bestimmt (vgl. Abb. AII-104 o.l.):

$$\min \rho_S = 2,6 \quad (\text{AII-238})$$

10. Festlegen der Kerndicke im SPS-Element

Aus dem erforderlichen Sandwichparameter $\min \rho_S$ ergibt sich die erforderliche Kerndicke $\min t_c$:

$$\min t_c = 40 \text{ mm} \cdot (2,6 - 1) = 64 \text{ mm} < 80 \text{ mm} \approx t_{c,\max} \quad (\text{AII-239})$$

Um einen Vergleich zu dem zuvor berechneten System I zu haben, wird die Kerndicke jedoch gleich belassen:

$$t_c = 74 \text{ mm} \quad (\text{AII-240})$$

Damit ergibt sich ebenso der gleiche Sandwichparameter $\rho_S = 2,85$ und das SPS wird steifer als aus dem Ablauf des Algorithmus eigentlich gefordert. Dies zeigt sich darin, dass abermaliges Ablesen an Abbildung AII-92 einen neuen Blechdickenfaktor von $f_t = 0,35$ ergibt. Das äquivalente Ersatzblech hat demnach eine Dicke von $t_{\text{sub}}(\text{II}) = 114$ mm anstatt wie zuvor in Schritt 7 ermittelt $t_{\text{sub}}(\text{I}) = 110$ mm. Dies gilt es im folgenden Schritt zu berücksichtigen, da sich der Höhen- und Massenfaktor auf das Ersatzblech gleicher Steifigkeit mit $t_{\text{sub}}(\text{II})$ beziehen.

11. Überprüfen der bezogenen Gesamthöhe und Masse

Anhand der Abbildungen AII-93 und AII-94 werden Gesamthöhe und Masse des dimensionierten SPS mit denen des Ersatzblechs gleicher Steifigkeit verglichen. Um einen

Vergleich zu dem ursprünglich in Schritt 7 berechneten Ersatzblech mit $t_{\text{sub(I)}}$ ziehen zu können, werden die Faktoren in Abbildung AII-104 mit dem Verhältnis der beiden Blechdicken von $114/110 = 1,039$ multipliziert, woraus sich die gleichen Faktoren wie in Abbildung AII-102 ergeben, da die Masse und die Aufbauhöhe des SPS durch die Stirnplatten rechnerisch nicht verändert werden. Das SPS spart mit dem ursprünglichen Aufbau auch im System II weiterhin ca. 18% Masse ein und erfordert eine rund 39% größere Elementhöhe im Vergleich zu dem monolithischen Blech mit der Dicke $t_{\text{sub(I)}}$. Wie an der minimal erforderlichen Ablesung(*) mit $f_t = 0,36$ in Abbildung AII-104 oben links zu erkennen, könnte die Höhe des Elements durch einen schmaleren Kern mit $\min \rho_S = 2,6$ noch weiter reduziert werden. Im vorliegenden Fall wird, zugunsten der Vergleichbarkeit mit dem System I, davon jedoch kein Gebrauch gemacht.

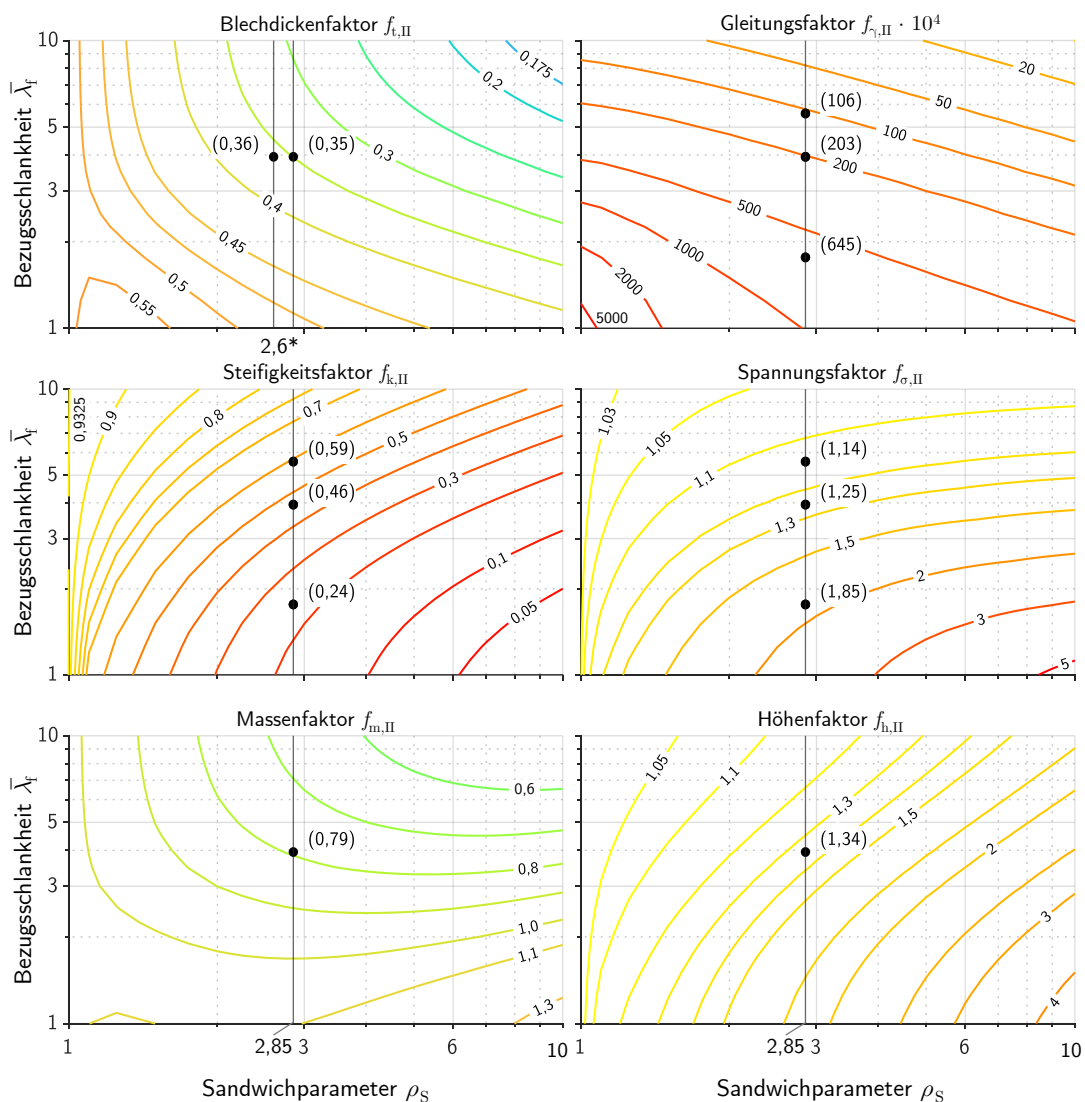


Abbildung AII-104: Höhenliniendarstellung aller Faktoren mit Ablesepunkten für die Vordimensionierung des exemplarischen, querorientierten SPS mit System II (Die Werte nicht bezeichneter Linien ergeben sich aus den Mittelwerten der benachbarten Linien)

12. Ermitteln der Steifigkeits-, Spannungs- und Gleitungsfaktoren

Nachdem die Dimensionen des SPS bereits festgelegt und die Bezugsschlankheiten $\bar{\lambda}_f$ bekannt sind (vgl. Tabelle AII-28), werden die Steifigkeits-, Spannungs- und Gleitungsfaktoren für die verschiedenen Zustände aus den Abbildungen AII-90, AII-91 und AII-95 ausgelesen (vgl. Abb. AII-104). Die optionalen Steifigkeits- und Spannungsquotienten werden zusammen mit den anderen Ergebnissen in Tabelle AII-31 angegeben.

Tabelle AII-31: Ergebnisse der Ablesungen aller Faktoren und der daraus ermittelten Quotienten

Zustand	t	T	$G_c(t, T)$	$\bar{\lambda}_f(t, T)$	f_k	κ	f_σ	ζ	f_γ
Z1	t_0	RT	270 MPa	5,578	0,59	1	1,14	1	$106 \cdot 10^{-4}$
Z2	t_0	60 °C	135 MPa	3,944	0,46	0,78	1,25	1,10	$203 \cdot 10^{-4}$
Z3	100 a	RT	27 MPa	1,764	0,24	0,41	1,85	1,62	$645 \cdot 10^{-4}$

13. Berechnen der Referenzwerte von Durchbiegung w_r und Deckblechrandspannung σ_r

Da die Abmessungen des SPS im vorliegenden Fall die gleichen sind wie im vorherigen Entwurf und die Systeme I und II äußerlich das gleiche statische System haben, bleiben auch die Durchbiegung w_r und die untere Randspannung σ_r im Grenzfall des starren Verbunds unverändert:

$$w_{G,r} = 2,45 \text{ mm} \quad (\text{AII-231})$$

$$\sigma_{g,r} = 13,50 \text{ MPa} \quad (\text{AII-232})$$

$$w_{P,r} = 5,95 \text{ mm} \quad (\text{AII-233})$$

$$\sigma_{p,r} = 32,78 \text{ MPa} \quad (\text{AII-234})$$

14. Berechnen der Durchsenkungen w_e und Spannungen σ_e

Mithilfe der zuvor berechneten Zustandsgrößen im Grenzfall des starren Verbunds und der abgelesenen Steifigkeits- bzw. Spannungsfaktoren, werden die Durchsenkungen und Randspannungen in Feldmitte nach Gleichung 7.68 bzw. 7.69 lastfallweise für die Zustände Z1 bis Z3 berechnet. Die Ergebnisse sind in Tabelle AII-32 zusammengefasst. Da im Zustand Z4 am Ende der Nutzungsdauer die Lastfälle gemeinsam wirken, werden diese gemäß Gleichung 7.70 überlagert. Exemplarisch wird hier die Berechnung der Gesamtdurchsenkung gezeigt:

$$\max w(\text{Z4}) = w_e(G_k, \text{Z3}) + w_e((G_k + P_k), \text{Z2}) - w_e(G_k, \text{Z1}) \quad (7.70)$$

$$= 10,21 \text{ mm} + 5,33 \text{ mm} + 12,93 \text{ mm} - 4,15 \text{ mm}$$

$$= 24,32 \text{ mm} \quad (\text{AII-241})$$

Tabelle AII-32: Ergebnisse der Durchsenkungen und Randspannungen aus Eigengewicht (g_k bzw. G_k) und Verkehr (p_k bzw. P_k) in den verschiedenen Zuständen

Zustand	$G_c(t, T)$ MPa	f_k -	$w(G_k)$ mm	$w(P_k)$ mm	f_σ -	$\sigma(g_k)$ MPa	$\sigma(p_k)$ MPa
Starr	$G_c \rightarrow \infty$	1	2,45	5,95	1	13,50	32,78
Z1	270 MPa	0,59	4,15	10,08	1,14	15,39	37,37
Z2	135 MPa	0,46	5,33	12,93	1,25	16,88	40,98
Z3	27 MPa	0,24	10,21	24,97	1,85	24,98	60,64
Z4	Überlagert	-	24,32		-	67,45	

Die Verformung der querorientierten SPS-Fahrbahn mit Stirnplatten wird unter Verkehrsbelastung bei 60 °C am Ende der Nutzungsdauer nach 100 a Kriechen unter Eigengewicht rund 24 mm betragen. Dies entspricht etwa einem Verhältnis von $l/183$. Der Effekt der Stirnplatten zeigt sich vor allem in den nur ca. 10 mm der Durchsenkung aus Eigengewicht und der Kriechverformung, die im Vergleich zu System I um etwa 33 % geringer ausfallen. Dies hat tendenziell positive Auswirkungen auf die notwendigen Wartungen und das Stopfen des Schotterbetts, welche weniger häufig durchgeführt werden müssen. Im Idealfall wird für das Gleis nur die kurzfristige Durchsenkung aus Zugüberfahrt von etwa 14,11 mm relevant, was einem Verhältnis von $l/311$ entspricht.

15. Überprüfen der Linearitätsbedingung

Um die Annahme linear-viskoelastischen Verhaltens für das PUR zu überprüfen, wird die maximale Schubgleitung im Kern im maßgeblichen Zustand Z4 überprüft:

$$\max \gamma_c(Z4) = \frac{4400^3 \text{ mm}^3 \cdot 10^{-4}}{210\,000 \text{ MPa} \cdot 40^3 \text{ mm}^3} \cdot \left[0,0196 \text{ MPa} \cdot 645 + \left(0,0196 \text{ MPa} + \frac{1,341 \cdot 250\,000 \text{ N}}{4400 \text{ mm} \cdot 1600 \text{ mm}} \right) \cdot 203 - 0,0196 \text{ MPa} \cdot 106 \right] \quad (\text{AII-242})$$

$$= 0,0157 \hat{=} 1,57 \% < 1,6 \% \quad (\text{AII-243})$$

Die maximal auftretende Schubgleitung liegt unterhalb des definierten Grenzwerts für den LVE-Bereich des PUR. Damit wurde erfolgreich eine querorientierte Variante des SPS mit Stirnplatten für die Fahrbahn einer Eisenbahnbrücke mit einer Querspannweite von $l = 4,40 \text{ m}$ vordimensioniert. Das Ergebnis für $\max \gamma_c(Z4)$ zeigt jedoch auch, dass eine weitere Optimierung der Geometrie und damit eine Reduzierung der Kerndicke, sehr wahrscheinlich zum erneuten Überschreiten der Linearitätsgrenze geführt hätte. Dem vorgeschlagenen Berechnungsalgorithmus zufolge, kommt das SPS mit veränderlicher Kernsteifigkeit in diesem Fall bereits an seine Grenzen. Eine Verwendung von Stirnplatten ist bei Spannweiten der hier betrachteten Größenordnung demnach zu empfehlen.

Um die Ergebnisse aus der Vordimensionierung zu überprüfen, wurde auch das querorientierte SPS mit Stirnplatten ähnlich dem in Abschnitt 6.2.2 gezeigten Verfahren 1 mit Volumenelementen in RFEM von Dlubal modelliert und unter den zuvor gezeigten Lasten (g_k , G_k , p_k und P_k) berechnet. Dabei wurden die Stirnplatten analog zu den Deckblechen als linear-elastische Volumina aus Stahl modelliert (vgl. Abb. AII-105), während die Vordimensionierung für das System II auf dem Ansatz starrer Stirnplatten nach der SST beruht. Für jede Belastung wurden je drei Lastfälle für die Zustände Z1 bis Z3 angelegt, in welchen die Steifigkeit des PUR-Kerns angepasst wurde. Der Zustand Z4 ergibt sich aus Überlagerung der drei anderen Zustände gemäß Gleichung 7.70. Die nachfolgende Tabelle AII-33 zeigt die Ergebnisse der FE-Berechnung im Vergleich zu jenen aus der Vordimensionierung. Abbildung AII-105 zeigt das verwendete FE-Modell und eine qualitative Verformungsfigur zur Plausibilisierung.

Tabelle AII-33: Ergebnisse der händischen Vordimensionierung des Systems II nach dem Algorithmus im Vergleich zu einer Berechnung des dimensionierten SPS-Elements mit RFEM (Dlubal)

Zustand	Vordimensionierung				FE-Berechnung			
	$w(G_k)$ mm	$w(P_k)$ mm	$\sigma(g_k)$ MPa	$\sigma(p_k)$ MPa	$w(G_k)$ mm	$w(P_k)$ mm	$\sigma(g_k)$ MPa	$\sigma(p_k)$ MPa
Z1	4,15	10,08	15,39	37,37	4,16	10,10	14,91	36,16
Z2	5,33	12,93	16,88	40,98	5,34	12,94	16,31	39,57
Z3	10,21	24,97	24,98	60,64	10,39	25,21	23,82	57,78
Z4	24,32		67,45		24,50		64,80	

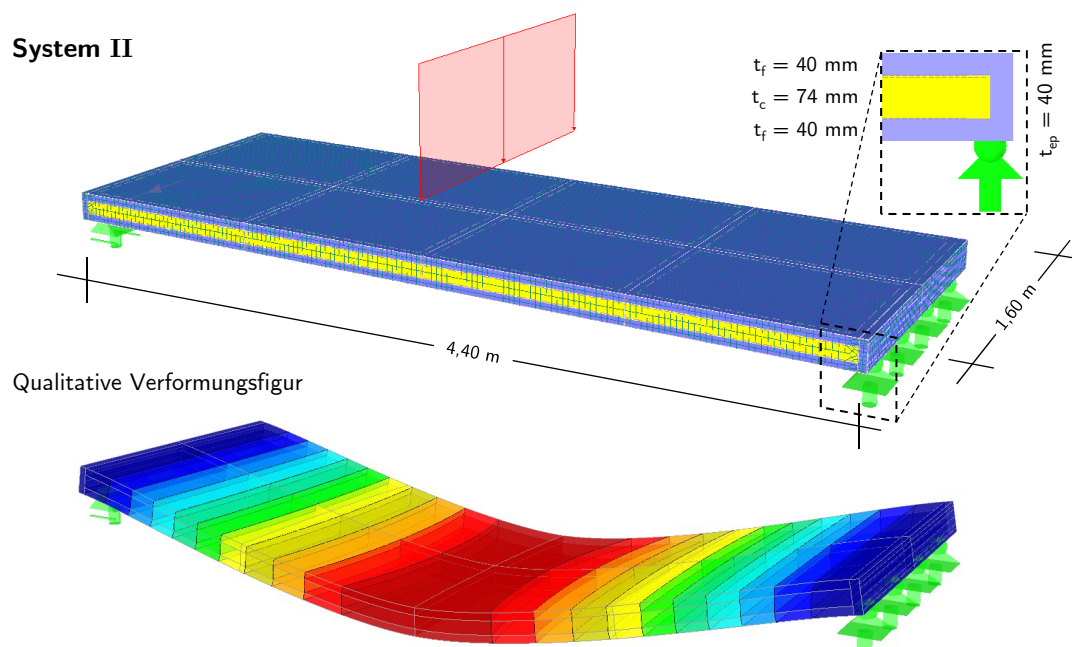


Abbildung AII-105: Darstellung des FE-Modells von System II in RFEM von Dlubal mit den Abmessungen und einer exemplarischen Verformungsfigur zur Plausibilisierung

Der Vergleich der Ergebnisse zeigt eine gute Übereinstimmung zwischen der händischen und der FE-Berechnung. Die größten Abweichungen betragen, wie auch bei System I ohne Stirnplatten, ca. 5% und zeigen sich bei den Spannungen im Zustand Z3. Die eingangs angenommene Dicke von $t_{ep} = t_f = 40$ mm für die elastischen Stirnplatten reicht demnach aus, um eine annähernd starre Kopplung der Deckbleche zu erreichen und das für SPS vorteilhafte Tragverhalten von System II zu aktivieren. Dies deckt sich mit den Interpretationen aus Abschnitt 7.2.4, wonach die Abweichungen zwischen einer elastischen und einer starren Stirnplatte erst für sehr niedrige Kernsteifigkeiten überhaupt zum Tragen kommen, wenn deren Dicke t_{ep} anhand des Kriteriums 7.35 festgelegt wurde.

AII-7.2 Entwurf einer längsorientierten SPS-Fahrbahn (System III)

Im Folgenden wird der Entwurf einer längsorientierten SPS-Fahrbahn anhand des Algorithmus zur Vordimensionierung in Abschnitt 7.3.3 durchgeführt. Dabei werden zur Ableitung der Faktoren die Graphen des Anhangs AII-6 verwendet. Zur besseren Anschauung werden zusätzlich Ausschnitte der Ableitungen gesammelt in Abbildung AII-106 dargestellt.

1. Ermitteln des geeigneten Ersatzsystems

Das SPS in der längsorientierten Variante liegt auf den Querträgern der Fahrbahn und verhält sich unter gleichmäßig verteilten Lasten wie ein Durchlaufträger (vgl. Abb. 1.4). Ein Feld dieses Durchlaufsystems kann unter Voraussetzung gleicher Feldweiten durch das System III abgebildet werden. Im Gegensatz zur Querspannweite kann der Abstand der Querträger und damit die Spannweite des längsorientierten SPS innerhalb der normativen Grenzen frei gestaltet werden. Setzt man die Querträgerabstände für Fahrbahnplatten nach DIN EN 1993-2, C.2.2 voraus, kommen für das SPS Spannweiten zwischen $0,70 \text{ m} \leq l \leq 3,50 \text{ m}$ in Betracht. Im vorliegenden Beispiel wird das Maß zu $l = 1,60 \text{ m}$ gewählt. Die Systemzahl für System III beträgt $s = 0$.

2. Ermitteln der Belastung

Neben dem bereits am Beginn von Abschnitts AII-7 definierten Eigengewicht des Oberbaus von $g_{k,2} = 12,5 \text{ kN/m}^2$, wird das Eigengewicht der SPS-Fahrbahn selbst zunächst zu $g_{k,1} \approx 8 \text{ kN/m}^2$ abgeschätzt. Dies entspricht auf der sicheren Seite einer Gesamtdicke der Deckbleche von $2 t_f = 100 \text{ mm}$ und der maximalen Kerndicke von $t_c = 80 \text{ mm}$.

Gemäß DIN EN 1991-2, 6.3.6 dürfen die Achslasten aus Eisenbahnverkehr durch Schiene, Schwelle und Schotter verteilt werden. Da im vorliegenden Beispiel kein expliziter Abstand und keine Art der Schwellen vorgegeben ist, wird die zuvor bereits definierte Achsbelastung von $P_k = 250 \text{ kN}$ vereinfacht auf ein längsorientiertes SPS-Element der Breite $b = 2,60 \text{ m}$ angesetzt. Dies entspricht einer Verteilung der Achslast durch eine Standard *Betonschwelle B70*, welche zentrisch auf dem Element sitzt. Wird die Verkehrslast auch über die Spannweite des SPS-Elements verteilt ergibt sich eine Gleichlast¹ von $p_k = 60,1 \text{ kN/m}^2$.

Um die Vergrößerung der Beanspruchungen aus Verkehr infolge dynamischer Effekte zu berücksichtigen, ist die Verkehrslast gemäß DIN EN 1991-2, 6.4.5 mit dem dynamischen Beiwert Φ zu multiplizieren.² Dieser hängt von der maßgebenden Länge L_Φ der untersuchten Fahrbahn-Varianten ab (s. a. DIN EN 1991-2, Tab. NA.6.2). Die Berechnung kann unter der Annahme sorgfältig instandgehaltener Gleise ($\Phi = \Phi_2$) und mithilfe der Systemzahl $s = 0$ für das längsorientierte SPS über folgende Formel erfolgen:

$$\Phi_2 = \frac{1,44}{\sqrt{2 \cdot l \text{ [in m]} + 4 - 4^s} - 0,2} + 0,82 \leq 1,67 \quad (\text{AII-244})$$

$$= \frac{1,44}{\sqrt{6,2} - 0,2} + 0,82 \quad (\text{AII-245})$$

$$= 1,449 < 1,67 \quad (\text{AII-246})$$

¹Diese ist im Vergleich zur querorientierten Variante deutlich größer, da auf der sicheren Seite keine Querverteilung der Lasten über die Schwellenbreite hinaus berücksichtigt wird.

²Da das Haupttragssystem nicht bekannt ist, wird vorausgesetzt, dass Resonanz ausgeschlossen werden kann.

3. Berechnen der erforderlichen Deckblechdicken

Da die Gleichlasten aus Eigengewicht g_k und Verkehr p_k bereits auf die Fläche bezogen sind, kann die Breite b in den Gleichungen 7.58 und 7.59 entfallen und die erforderlichen Blechdicken wie folgend beschrieben ermittelt werden. Aus dem ULS in der außergewöhnlichen Bemessungssituation unter Verkehr und Eigengewicht ergibt sich:

$$t_{f,1} = \sqrt{\frac{1}{12} \cdot \frac{(0,008 + 0,0125 + 1,449 \cdot 0,0601) \text{ MPa} \cdot 1600^2 \text{ mm}^2}{235 \text{ MPa}}} = 10 \text{ mm} \quad (\text{AII-247})$$

Aus der Begrenzung der Kriechverformung unter Eigengewicht auf $w \leq l/100$ ergibt sich:

$$t_{f,2} = \sqrt[3]{\frac{600}{384} \cdot \frac{(0,008 + 0,0125) \text{ MPa} \cdot 1600^3 \text{ mm}^3 \cdot (1 - 0,3^2)}{210\,000 \text{ MPa}}} = 8 \text{ mm} \quad (\text{AII-248})$$

4. Ermitteln der Steifigkeit des PUR im SPS

Für das PUR werden die unter Punkt 4 in Abschnitt 7.3.3 empfohlenen Steifigkeiten der drei maßgeblichen Zustände verwendet:

$$\text{Z1:} \quad G_c(t_0, \text{RT}) = G_c(160 \text{ s}, 23^\circ\text{C}) = G_c = 270 \text{ MPa} \quad (7.61)$$

$$\text{Z2:} \quad G_c(t_0, \max T) = G_c(160 \text{ s}, 60^\circ\text{C}) = 0,5 \cdot G_c = 135 \text{ MPa} \quad (7.60)$$

$$\text{Z3:} \quad G_c(t_{100}, \text{RT}) = G_c(100 \text{ a}, 23^\circ\text{C}) = 0,1 \cdot G_c = 27 \text{ MPa} \quad (7.62)$$

Wie dort ebenfalls beschrieben wird für die Vordimensionierung unter Verkehrslast der Zustand Z2 bei kurzzeitig erhöhter Temperatur mit $G_c(t_0, \max T) = 135 \text{ MPa}$ maßgebend.

5. Berechnen der maximalen Deckblechdicke

Für System III beträgt die untere Grenze der Bezugsschlankheit unabhängig vom Sandwichparameter $\bar{\lambda}_{f,\min} = 5$ (vgl. Gl. 7.64). In Abhängigkeit von der maßgebenden Kernsteifigkeit wird daraus die maximale Deckblechdicke ermittelt:

$$\max t_f = \frac{1600 \text{ mm}}{5} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 135 \text{ MPa}}{210\,000 \text{ MPa}}} = 11 \text{ mm} \quad (\text{AII-249})$$

6. Identifizieren der erforderlichen Deckblechdicke

Aus den zuvor berechneten Grenzwerten wird der Wert für die Deckblechdicke zu $t_f = 10 \text{ mm}$ festgelegt:

$$8 \text{ mm} < 10 \text{ mm} \leq t_f = 10 \text{ mm} < 11 \text{ mm} \quad (\text{AII-250})$$

7. Berechnen der erforderlichen Ersatz-Blechdicke

Die maximale Verformung unter Verkehr sollte den Grenzwert $w \leq l/300$ nicht überschreiten. Daraus wird die erforderliche Dicke des Ersatzblechs berechnet:

$$t_{\text{sub}} = \sqrt[3]{\frac{300}{16} \cdot \frac{1,449 \cdot 250\,000 \text{ N} \cdot 1600^2 \text{ mm}^2 \cdot (1 - 0,3^2)}{2600 \text{ mm} \cdot 210\,000 \text{ MPa}}} = 31 \text{ mm} \quad (\text{AII-251})$$

8. Berechnen des Blechdickenfaktors und der Bezugsschlankheit

Aus der Dicke des äquivalenten Blechs t_{sub} und der gewählten Deckblechdicke t_f ergeben sich der Blechdickenfaktor und die Bezugsschlankheit im bemessungsrelevanten Zustand Z2:

$$f_t = \frac{10 \text{ mm}}{31 \text{ mm}} = 0,33 \quad (\text{AII-252})$$

$$\bar{\lambda}_f = \frac{1600 \text{ mm}}{10 \text{ mm}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 135 \text{ MPa}}{210\,000 \text{ MPa}}} = 5,737 \approx 5,7 > 5 = \bar{\lambda}_{f,\text{min}} \quad (\text{AII-253})$$

9. Ermitteln des erforderlichen Sandwichparameters

Der erforderliche Sandwichparameter $\min \rho_S$ wird mithilfe des Blechdickenfaktors f_t durch Ablesung an Abbildung AII-98 bestimmt (vgl. Abb. AII-106 o.l.):

$$\min \rho_S = 6 \quad (\text{AII-254})$$

10. Festlegen der Kerndicke im SPS-Element

Aus dem erforderlichen Sandwichparameter $\min \rho_S$ ergibt sich die erforderliche Kerndicke $\min t_c$, welche zu der letztendlich verwendeten Kerndicke t_c gewählt wird:

$$t_c = \min t_c = 10 \text{ mm} \cdot (6 - 1) = 50 \text{ mm} < 80 \text{ mm} \approx t_{c,\text{max}} \quad (\text{AII-255})$$

11. Überprüfen der bezogenen Gesamthöhe und Masse

Anhand der Abbildungen AII-99 und AII-100 werden die Gesamthöhe und Masse des dimensionierten SPS mit denen des Ersatzblechs gleicher Steifigkeit verglichen, um den Nutzen des Einsatzes der längsorientierten SPS-Fahrbahn zu beurteilen. Wie die Auszüge in Abbildung AII-106 unten zeigen, spart das SPS ca. 10 % Masse ein, erfordert aber eine etwa 130 % größere Elementhöhe im Vergleich zum monolithischen Blech. Wenn die Querträgerstege in die SPS-Fahrbahn integriert werden, sodass das obere Deckblech als Obergurt der Querträger mitwirkt, wird diese große Elementhöhe den Gesamtaufbau der Fahrbahn aber nicht negativ beeinflussen. Erfahrungsgemäß wird für die Querträger eine deutlich größere statische Höhe erforderlich.

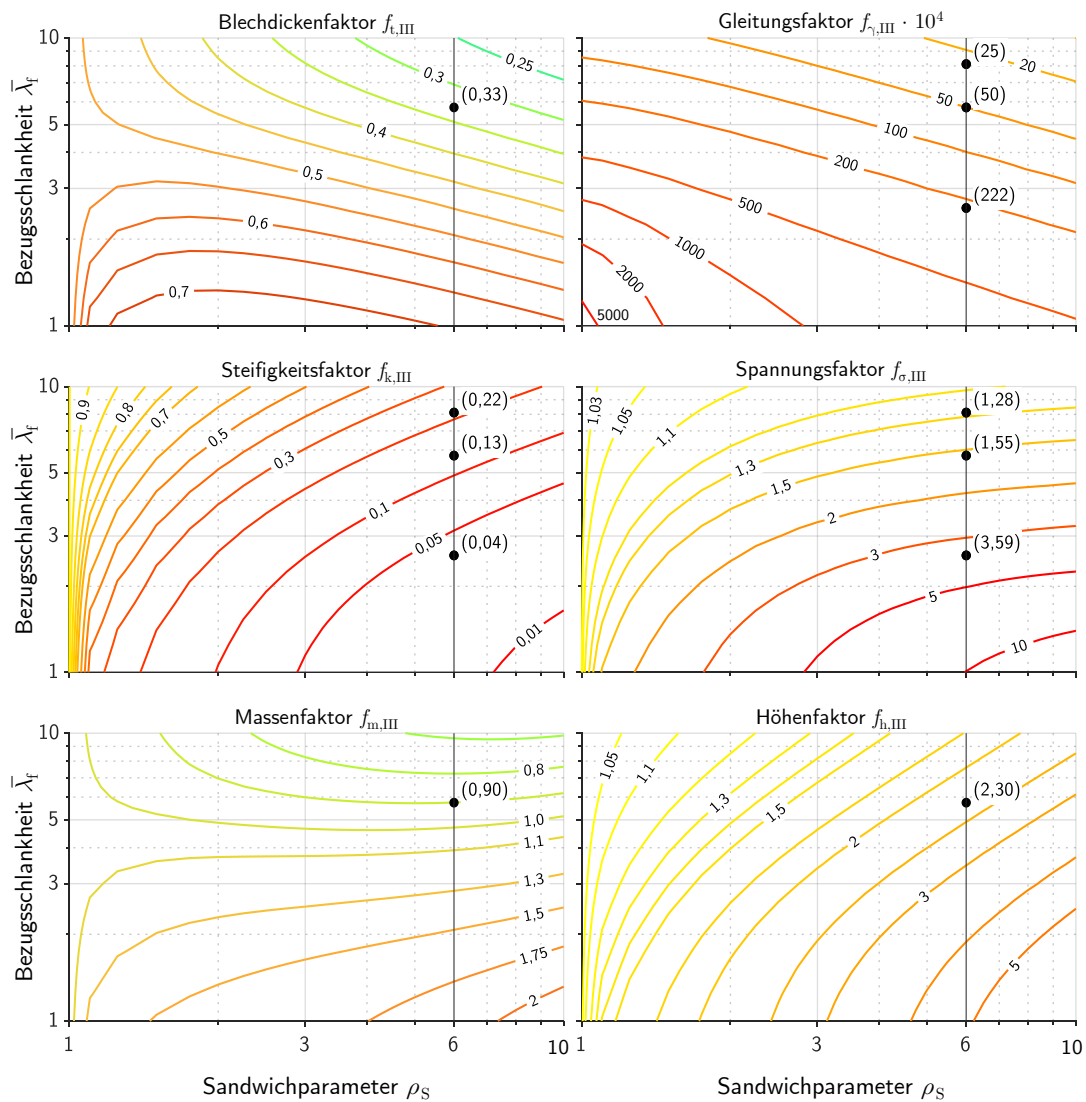


Abbildung AII-106: Höhenliniendarstellung aller Faktoren mit Ablesepunkten für die Vordimensionierung des exemplarischen, längsorientierten SPS mit System III (Die Werte nicht bezeichneter Linien ergeben sich aus den Mittelwerten der benachbarten Linien)

12. Ermitteln der Steifigkeits-, Spannungs- und Gleitungsfaktoren

Nach der Vordimensionierung des SPS werden die Steifigkeits-, Spannungs- und Gleitungsfaktoren für die verschiedenen Zustände aus den Abbildungen AII-96, AII-97 und AII-101 ausgelesen (vgl. Abb. AII-106). Dafür werden analog zu Gleichung AII-253 die erforderlichen Bezugsschlankheiten $\bar{\lambda}_f$ der noch nicht betrachteten Zustände berechnet. Die optionalen Steifigkeits- und Spannungsquotienten werden zusammen mit den anderen Ergebnissen in Tabelle AII-34 angegeben.

13. Berechnen der Referenzwerte von Durchbiegung w_r und Deckblechrandspannung σ_r

Für die angenommenen charakteristischen Belastungen aus Eigengewicht (g_k bzw. G_k) und Verkehr (p_k bzw. P_k) werden lastfallweise in Feldmitte die Durchbiegung w_r und die untere Randspannung σ_r im Grenzfall des starren Verbunds berechnet.

Tabelle AII-34: Ergebnisse der Ablesungen aller Faktoren und der daraus ermittelten Quotienten

Zustand	t	T	$G_c(t, T)$	$\bar{\lambda}_f(t, T)$	f_k	κ	f_σ	ζ	f_γ
Z1	t_0	RT	270 MPa	8,113	0,22	1	1,28	1	$25 \cdot 10^{-4}$
Z2	t_0	60 °C	135 MPa	5,737	0,13	0,59	1,55	1,21	$50 \cdot 10^{-4}$
Z3	100 a	RT	27 MPa	2,566	0,04	0,18	3,59	2,80	$222 \cdot 10^{-4}$

Dafür kann die zunächst angenommene Eigenlast des SPS von 8 kN/m^2 anhand der nun bekannten Abmessungen korrigiert werden:

$$\begin{aligned}
 g_{k,1} &= 2 t_f \cdot \gamma_f + t_c \cdot \gamma_c & (\text{AII-256}) \\
 &= 2 \cdot 10 \text{ mm} \cdot 78,5 \cdot 10^{-6} \text{ N/mm}^3 + 50 \text{ mm} \cdot 11,5 \cdot 10^{-6} \text{ N/mm}^3 \\
 &= 0,0022 \text{ MPa}
 \end{aligned}$$

Die gesuchten Größen im starren Verbund ergeben sich zu:

$$\begin{aligned}
 w_{G,r} &= \frac{1}{32} \cdot \frac{(0,0022 + 0,0125) \text{ MPa} \cdot 1600^4 \text{ mm}^4}{10^3 \text{ mm}^3 \cdot (1 + 3 \cdot 6^2)} \cdot \frac{(1 - 0,3^2)}{210 \text{ 000 MPa}} & (\text{AII-257}) \\
 &= 0,12 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{g,r} &= \frac{1}{8} \cdot \frac{0,0147 \text{ MPa} \cdot 1600^2 \text{ mm}^2}{10^2 \text{ mm}^2} \cdot \frac{(6 + 1)}{(1 + 3 \cdot 6^2)} & (\text{AII-258}) \\
 &= 3,02 \text{ MPa}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w_{P,r} &= \frac{1}{32} \cdot \frac{1,449 \cdot 250 \text{ 000 N} \cdot 1600^3 \text{ mm}^3}{2600 \text{ mm} \cdot 10^3 \text{ mm}^3 \cdot (1 + 3 \cdot 6^2)} \cdot \frac{(1 - 0,3^2)}{210 \text{ 000 MPa}} & (\text{AII-259}) \\
 &= 0,71 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{p,r} &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1,449 \cdot 250 \text{ 000 N} \cdot 1600 \text{ mm}}{2600 \text{ mm} \cdot 10^2 \text{ mm}^2} \cdot \frac{(6 + 1)}{(1 + 3 \cdot 6^2)} & (\text{AII-260}) \\
 &= 17,90 \text{ MPa}
 \end{aligned}$$

14. Berechnen der Durchsenkungen w_e und Spannungen σ_e

Mithilfe der zuvor berechneten Zustandsgrößen im Grenzfall des starren Verbunds und der abgelesenen Steifigkeits- bzw. Spannungsfaktoren, werden die Durchsenkungen und Randspannungen in Feldmitte nach Gleichung 7.68 bzw. 7.69 lastfallweise für die Zustände Z1 bis Z3 berechnet. Die Ergebnisse sind in Tabelle AII-35 zusammengefasst. Da im Zustand Z4 am Ende der Nutzungsdauer die Lastfälle gemeinsam wirken, werden diese gemäß Gleichung 7.70 überlagert.

Exemplarisch wird hier die Berechnung der Gesamtdurchsenkung gezeigt:

$$\begin{aligned}
 \max w(\text{Z4}) &= w_e(G_k, \text{Z3}) + w_e((G_k + P_k), \text{Z2}) - w_e(G_k, \text{Z1}) & (7.70) \\
 &= 3,00 \text{ mm} + 0,92 \text{ mm} + 5,46 \text{ mm} - 0,55 \text{ mm} \\
 &= 8,83 \text{ mm} & (\text{AII-261})
 \end{aligned}$$

Tabelle AII-35: Ergebnisse der Durchsenkungen und Randspannungen aus Eigengewicht (g_k bzw. G_k) und Verkehr (p_k bzw. P_k) in den verschiedenen Zuständen

Zustand	$G_c(t, T)$ MPa	f_k -	$w(G_k)$ mm	$w(P_k)$ mm	f_σ -	$\sigma(g_k)$ MPa	$\sigma(p_k)$ MPa
Starr	$G_c \rightarrow \infty$	1	0,12	0,71	1	3,02	17,90
Z1	270 MPa	0,22	0,55	3,23	1,28	3,87	22,91
Z2	135 MPa	0,13	0,92	5,46	1,55	4,68	27,75
Z3	27 MPa	0,04	3,00	17,75	3,59	10,84	64,26
Z4	Überlagert	-	8,83		-	39,40	

Die Verformung der längsorientierten SPS-Fahrbahn wird unter Verkehrsbelastung bei 60 °C am Ende der Nutzungsdauer nach 100 a Kriechen unter Eigengewicht rund 9 mm betragen. Dies entspricht einem Verhältnis von etwa $l/178$. Dabei resultieren ca. 36 % der Durchsenkung aus Eigengewicht und der sich langsam einstellenden Kriechverformung. Diese kann durch regelmäßige Wartung mit Stopfen des Schotterbetts ausgeglichen werden, sodass im Idealfall für das Gleis nur die kurzfristige Durchsenkung aus Zugüberfahrt von etwa 5,8 mm relevant wird, was einem Verhältnis von $l/276$ entspricht.

15. Überprüfen der Linearitätsbedingung

Um die Annahme linear-viskoelastischen Verhaltens für das PUR zu überprüfen, wird die maximale Schubgleitung im Kern im maßgeblichen Zustand Z4 überprüft:

$$\begin{aligned}
 \max \gamma_c(\text{Z4}) &= \frac{1600^3 \text{ mm}^3 \cdot 10^{-4}}{210\,000 \text{ MPa} \cdot 10^3 \text{ mm}^3} \cdot \left[0,0147 \text{ MPa} \cdot 222 \right. \\
 &\quad \left. + \left(0,0147 \text{ MPa} + \frac{1,449 \cdot 250\,000 \text{ N}}{1600 \text{ mm} \cdot 2600 \text{ mm}} \right) \cdot 50 \right. \\
 &\quad \left. - 0,0147 \text{ MPa} \cdot 25 \right] & (\text{AII-262})
 \end{aligned}$$

$$= 0,0156 \cong 1,56 \% < 1,6 \% \quad (\text{AII-263})$$

Die maximal auftretende Schubgleitung liegt unterhalb des definierten Grenzwerts für den LVE-Bereich des PUR. Damit wurde erfolgreich eine längsorientierte Variante des SPS für die Fahrbahn einer Eisenbahnbrücke mit einem Querträgerabstand von $l = 1,60 \text{ m}$ vordimensioniert.

Um die Ergebnisse aus der Vordimensionierung zu überprüfen, wurde das längsorientierte SPS ähnlich dem in Abschnitt 6.2.2 gezeigten Verfahren 1 mit Volumenelementen in RFEM von Dlubal modelliert und unter den zuvor gezeigten Lasten (g_k , G_k , p_k und P_k) berechnet. Dabei wurden für jede Belastung je drei Lastfälle für die Zustände Z1 bis Z3 angelegt, in welchen die Steifigkeit des PUR-Kerns angepasst wurde. Der Zustand Z4 ergibt sich aus Überlagerung der drei anderen Zustände gemäß Gleichung 7.70. Die nachfolgende Tabelle AII-36 zeigt die Ergebnisse der FE-Berechnung im Vergleich zu jenen aus der Vordimensionierung. Abbildung AII-107 zeigt das verwendete FE-Modell und eine qualitative Verformungsfigur zur Plausibilisierung. Der Vergleich der Ergebnisse zeigt eine gute Übereinstimmung zwischen der händischen und der FE-Berechnung. Die größten Abweichungen betragen ca. 5% und zeigen sich bei den Spannungen im Zustand Z3.

Tabelle AII-36: Ergebnisse der händischen Vordimensionierung des Systems III nach dem Algorithmus im Vergleich zu einer Berechnung des dimensionierten SPS-Elements mit RFEM (Dlubal)

Zustand	Vordimensionierung				FE-Berechnung			
	$w(G_k)$ mm	$w(P_k)$ mm	$\sigma(g_k)$ MPa	$\sigma(p_k)$ MPa	$w(G_k)$ mm	$w(P_k)$ mm	$\sigma(g_k)$ MPa	$\sigma(p_k)$ MPa
Z1	0,55	3,23	3,87	22,91	0,54	3,18	3,76	22,35
Z2	0,93	5,46	4,68	27,75	0,90	5,38	4,54	26,98
Z3	3,00	17,75	10,84	64,26	3,11	18,51	10,42	61,95
Z4	8,83		39,40		8,86		38,18	

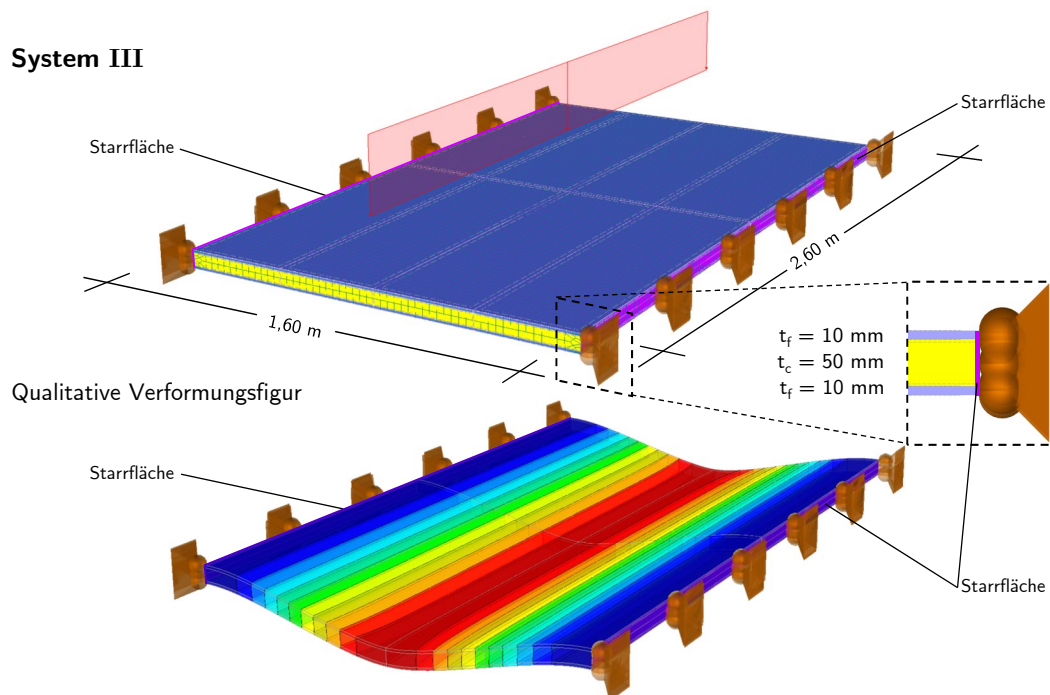


Abbildung AII-107: Darstellung des FE-Modells von System III in RFEM von Dlubal mit den Abmessungen und einer exemplarischen Verformungsfigur zur Plausibilisierung