Modellierung und numerische Simulation der Nachlaufstruktur von Turbomaschinen am Beispiel einer Axialturbinenstufe

Vom Fachbereich Maschinenbau
an der Technischen Universität Darmstadt
zur
Erlangung des Grades eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte

D i s s e r t a t i o n

vorgelegt von

Dipl.-Ing. Bruno Kistner

aus Lohr am Main

Berichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. B. Stoffel
Mitberichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. J. Janicka
Tag der Einreichung:	30. August 1999
Tag der mündlichen Prüfung:	11. Januar 2000

Darmstadt 1999
D 17

Ich versichere an Eides Statt, daß ich die vorliegende Arbeit, mit Ausnahme der genannten Hilfen, selbständig angefertigt habe.

Bruno Kistner Darmstadt, 27.08.1999

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als Doktorand am Fachgebiet Turbomaschinen und Fluidantriebstechnik der Technischen Universität Darmstadt im Rahmen des von der Deutschen Forschungsgemeinschaft unterstützten Graduiertenkollegs „Modellierung und numerische Beschreibung technischer Strömungen“.

An erster Stelle gilt mein Dank Herrn Prof. Dr.-Ing. B. Stoffel, dem Leiter des Fachgebiets Turbomaschinen und Fluidantriebstechnik, für die Anregung zu dieser Arbeit und für die wertvollen Ratschläge und Fachgespräche, sowie seine stete Unterstützung bei ihrer Durchführung.

Herrn Prof. Dr.-Ing. J. Janicka, dem Sprecher des Graduiertenkollegs und Leiter des Fachgebietes Energie- und Kraftwerkstechnik, der den Fortgang der Arbeit jederzeit mit Interesse verfolgt hat, danke ich für die kritische Durchsicht der Arbeit und die Übernahme des Koreferates.

Schließlich gilt mein Dank meinem Studienarbeiter Herrn Jens Thurso und Diplomarbeiter Herrn Stephan Meschkat für ihren Einsatz während ihrer Arbeit. Auch darf ich mich bei beiden für die weiteren Fachgespräche während ihrer Tätigkeit als wissenschaftliche Mitarbeiter am gleichen Fachgebiet bedanken. Mein Dank gilt ebenso allen weiteren Kollegen, die auch durch das soziale Umfeld zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

2 Beschreibung turbulenter Strömungen **4**
2.1 Erhaltungsgleichungen . . . 6
2.2 Statistische Turbulenzmodelle . . . 7
2.2.1 Wirbelviskositätsmodelle . . . 10
2.2.1.1 Eingleichungsmodell nach Spalart und Allmaras . . . 12
2.2.1.2 Standard $k-\varepsilon$ Modell . . . 15
2.2.1.3 Realizable $k-\varepsilon$ Modell . . . 17
2.2.1.4 RNG $k-\varepsilon$ Modell . . . 19
2.2.2 Reynoldsspannungsmodelle . . . 20
2.3 Wandbehandlung . . . 22
2.3.1 Standard-Wandfunktion . . . 23
2.3.2 2-Schichten Modell . . . 24
2.3.3 Low-Re Erweiterung . . . 25

3 Numerisches Lösungsverfahren **27**
3.1 Diskretisierungsverfahren . . . 27
3.1.1 Approximation der Oberflächenintegrale . . . 29
3.1.2 Approximation der Volumenintegrale . . . 31
3.1.3 Zeitdiskretisierung . . . 31
3.2 Lösungsverfahren . . . 33
3.2.1 Druckkorrektur . . . 34
3.2.2 Unterrelaxation . . . 36
3.2.3 Multigrid . . . 36

4 Netzgenerierung **38**
4.1 Netzstruktur . . . 39
4.2 Netzqualität . . . 40

4.3 Lage des Ein- und Ausströmrandes . . . 42
4.4 Interface . . . 44

5 Stationäre Nachlaufströmung 46
5.1 Stand des Wissens . . . 46
5.2 Experimenteller Aufbau . . . 49
5.3 Numerische Modellbildung . . . 52
5.3.1 Netzgenerierung . . . 54
5.3.2 Netzunabhängigkeit . . . 54
5.3.3 Turbulenzmodelle . . . 57
5.4 Ergebnisse . . . 58
5.4.1 Modell A . . . 59
5.4.2 Modell B . . . 68
5.4.3 Schlußfolgerungen . . . 75

6 Instationäre Nachlaufströmung 77
6.1 Stand des Wissens . . . 77
6.2 Experimenteller Aufbau . . . 80
6.3 Numerische Modellbildung . . . 82
6.3.1 Teilungsanpassung . . . 83
6.3.2 Netzgenerierung . . . 86
6.3.3 Netzunabhängigkeit . . . 87
6.3.4 Turbulenzmodelle . . . 87
6.4 Ergebnisse . . . 88
6.4.1 Stationäre Simulation . . . 88
6.4.2 Instationäre Simulation . . . 90
6.4.3 Schlußfolgerungen . . . 99

7 Einflüsse auf instationäre Nachlaufströmungen 101
7.1 Experimenteller Aufbau . . . 102
7.2 Numerische Modellbildung . . . 103
7.2.1 Netzgenerierung . . . 104
7.2.2 Netzunabhängigkeit . . . 104
7.2.3 Turbulenzmodelle . . . 105
7.3 Parameterstudie . . . 105

8 Zusammenfassung 119

Literaturverzeichnis 122

Lateinische Buchstaben

A	Modellgröße
A	Konstante
a	Hilfsgröße
a	Konstante
a	Koeffizient
a	Schallgeschwindigkeit
B	Konstante im logarithmischen Wandgesetz
B	Konstante
B	Breite
C	Konstante
C	Sehnenlänge
C_{ax}	axiale Sehnenlänge
C_p	Druckbeiwert
c	Absolutgeschwindigkeit
c_H	mittlere Förderstromgeschwindigkeit
D_h	hydraulischer Durchmesser
d	Wandabstand
E	Osten/East
F	Funktion
$f, f_1, f_2, f_{v1}, f_{v2}$	Modellfunktion
f	Kraftgröße
G	Produktionsterm
g	Modellgröße
H	Höhe
H	Totalenthalpie
KL	Kato/Launder
KV	Kontrollvolumen

k	turbulente kinetische Energie
k	Iterationsschritt
L	Integrallängenmaß
L	allgemeines Längenmaß
l	Länge
l_m	Mischungsweglänge
Ma	Machzahl
M	Impulsverlust
N	Norden
N	Anzahl
n	Drehzahl
n_i	Normalenvektor
n_e	Nordosten
n_w	Nordwesten
P	mittlerer Druck
P	Punkt
P	Periodendauer
P	mittlerer statischer Druck
P_k	Produktionsrate der turbulenten kinetischen Energie
P_{ij}	Produktionsterm in der Transportgleichung des Reynolds-Spannungs-Tensors
p	Druck
q	Wärmestrom
R	Zusätzlicher Quellterm in der ε-Gleichung des RNG-Modells
$RANS$	Reynolds-Averaged-Navier-Stokes-equations
Re	Reynoldszahl
Re_t	turbulente Reynoldszahl
RNG	Renormalization-Group-Turbulenzmodell
RSM	Reynoldsspannungs-Turbulenzmodell

r	Radius
r	Modellgröße
S	Quellterm
S_j	Kontrollvolumenseite j
S_{ij}	Deformationsgeschwindigkeitstensor
SA	Spalart/Allmaras
s	Strecke
s_e	Südosten
s_w	Südwesten
T	Teilung
T_E	turbulentes Zeitmaß
T_u	Turbulenzgrad
t	Zeitmaß
U	Umfangsposition
U	mittlere Geschwindigkeit in x-Richtung
U	mittlere axiale Geschwindigkeit
U_S	Schergeschwindigkeit
u	Geschwindigkeit
u	Geschwindigkeit in x-Richtung
u	Umfangsgeschwindigkeit
u_τ	Wandschubspannungsgeschwindigkeit
$\overline{u_i u_j}$	Reynoldsspannungstensor
V	Volumen
V	mittlere Geschwindigkeit in y-Richtung
v	Geschwindigkeit in y-Richtung
W	Westen
w	Relativgeschwindigkeit
X	x-Position

x	Koordinate
$Y_{\tilde{\nu}_t}$	Dissipation von $\tilde{\nu}_t$
y	Koordinate
$y+$	dimensionsloser Wandabstand
$2L$	Zwei-Schichten-Formulierung

Griechische Buchstaben

α	Winkel der Absolutgeschwindigkeit zur Umfangsgeschwindigkeit
α	Modellkonstante
Γ	Diffusionskoeffizient
δ	Winkel
δ_{ij}	Kronecker-Delta
ε	Dissipationsrate
ε_{ij}	Dissipationsterm in der Transportgleichung des Reynolds-Spannungs-Tensors
η	Modellgröße
Θ	Impulsverlustdicke
κ	Kármánsche Konstante
μ	molekulare oder dynamische Viskosität
ν	kinematische Viskosität
ν_t	Wirbelviskosität
ξ	Größenverhältnis
ρ	Dichte
σ	Modellkonstante
τ	(Schub-) Spannung
τ	Zeitmaß
Φ	Strömungsgröße
Φ	Potential
ϕ_{ij}	Druck-Scher-Korrelationsterm in der Transportgleichung des Re-Spgs-Tensors
χ	Wirbelviskositätsverhältnis
Ω_{ij}	Rotationstensor
ω	Frequenz
$\bar{\omega}$	reduzierte Frequenz

Indizes

ax	axial
E	Osten
e	Osten
H	hydraulisch
h	hydraulisch
i, j, k, l	Zählindex
KL	Kato/Launder
k	Kolmogorov
max	maximal
min	minimal
n	Norden
n	Zählindex
nb	Nachbarpunkt
P	Punkt
ref	Referenzstelle
s	Süden
t	turbulent
w	Westen
$1, 2, 3, 4$	Bezeichnung für verschiedene Stellen
o	ungestörte Strömung

Symbole

$\bar{}$	gemittelte Größe
$'$	Schwankungsgröße
$'$	Korrekturgröße
$\tilde{}$	modifizierte Größe
*	vorläufige Größe
Δ	Differenz

Kennzahlen

$C = v\frac{\Delta t}{\Delta x}$	Courantzahl
$Ma = \frac{u}{a}$	Machzahl
$Re_C = \frac{\rho C U_o}{\mu}$	Reynoldszahl mit der Profilsehnenlänge gebildet

1 Einleitung

Bei der Auslegung und Konstruktion moderner Verdichter und Turbinen ist ein deutlicher Trend hin zur Gewichtsoptimierung und Größenreduktion erkennbar. Die wesentlichen Ziele bei der heutigen Turbinenentwicklung liegen nicht in der Effizienzsteigerung, sondern in der Reduzierung der Schaufelanzahl und der Erhöhung der Belastung bei gleicher Effizienz. Besonderes Interesse gilt in diesem Zusammenhang bei Flugtriebwerken der Niederdruckturbine. Dieser Triebwerksteil macht ca. 33 % des Gesamtgewichtes aus und verursacht somit hohe Kosten. Betrachtet man hierbei den Wirkungsgrad, der bei modernen Niederdruckturbinen deutlich über 90 % liegt, so beeinflußt ein Prozentpunkt des polytropen Wirkungsgrades nur 0,5 % des Treibstoffverbrauches.

Da in der bisherigen Auslegung der Turbinenstufen lediglich stationäre Entwurfswerkzeuge zur Anwendung kamen, ist es dringend erforderlich, in Zukunft auch die instationären Effekte zu berücksichtigen. Nur auf diese Weise wird es möglich sein, den bereits sehr guten Wirkungsgrad zu verbessern und eine Gewichtsreduzierung durch eine geringere Schaufelanzahl zu realisieren. Hierbei findet das Tool CFD (Computational Fluid Dynamics) immer größere Bedeutung. Es bietet die Möglichkeit, in Verbindung mit experimentellen Untersuchungen die physikalischen Effekte in einer Turbomaschine zu analysieren und zu verstehen. Auf diese Weise wird es möglich, instationäre Strömungsphänomene bereits in der Entwurfsphase zu berücksichtigen und die Maschine optimaler in Gewicht, Wirkungsgrad und Schaufelbelastung auszulegen, als dies mit stationären Berechnungsmethoden durchführbar ist.

Bei der Auslegung einer Turbomaschine muß eine Vielzahl von Einflußgrößen berücksichtigt werden. Ein wichtiges Element hierbei ist die instationäre Wechselwirkung zwischen stehenden und rotierenden Gitterreihen. Diese setzt sich aus der potentialtheoretischen Strömung und dem Nachlauf, der bei der Umströmung einer Schaufel entsteht, zusammen. Wesentlich beeinflußt von der Instationarität werden die Schaufelbelastung, die Stallgrenze, der Wärmeübergang, der Stufenwirkungsgrad und die Akustik.

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein System aus Stator und stromab liegendem Rotor einer Axialturbine betrachtet. Es wird die Nachlaufstruktur detailliert untersucht. Diese setzt sich zum einen aus dem Statornachlauf und zum anderen aus dem Rotornachlauf zusammen. Entschei-

dend hierbei ist es, den Einfluß des Rotors auf den Statornachlauf richtig zu beschreiben, da das rotierende Gitter den kontinuierlichen Nachlauf des Stators zerhackt. Wenn diese Interaktion und der Rotornachlauf richtig beschrieben werden, ergibt sich eine Nachlaufstruktur, die dann in einer realen Maschine auf einen stromab liegenden Stator trifft und mit diesem in Interaktion tritt.
Es wird deutlich, daß die Nachlaufstruktur nicht isoliert ist im Gesamtsystem Turbine. Sie wirkt sich unmittelbar auf andere Strömungsphänomene aus. In diesem Zusammenhang ist besonders die periodische Interaktion einer Profilgrenzschicht mit einem Nachlauf zu nennen. Betrachtet man die Nachlaufstruktur in Zusammenhang mit dessen Grenzschichtinteraktion, ergibt sich der sogenannte *Clocking Effekt*. Dieser wurde experimentell [24] festgestellt und sagt aus, daß der Wirkungsgrad von 1,5 Axialturbinenstufen von der relativen Umfangsposition der beiden Statoren zueinander in der Größenordnung von einem Prozentpunkt beeinflußt werden kann. Hierbei ist es notwendig, daß die beiden Statoren gleiche Teilung aufweisen.
Dieser *Clocking Effekt* wird sowohl numerisch als auch experimentell an dem Fachgebiet Turbomaschinen und Fluidantriebstechnik der TU Darmstadt untersucht. In diesen Zusammenhang ist diese Arbeit einzuordnen. Das Ziel dieser Arbeit war es, in einem ersten Schritt die Nachlaufstruktur numerisch zu untersuchen, wie diese sich für den zweiten Stator darstellt, bevor in einem zweiten Schritt am Fachgebiet die Interaktion des Nachlaufes mit der Grenzschicht des zweiten Stators betrachtet wird. Im Rahmen der numerischen Beschreibung der Nachlaufstruktur wurde auch innerhalb dieser Untersuchungen auf die Einflußparameter Reynoldszahl und Turbulenzgrad eingegangen, sowie auf die Auswirkung einer Betriebspunktänderung. Hierin kann ein wesentlicher Beitrag gesehen werden, die Physik einer Turbinenströmung besser verstehen zu lernen und Erkenntnisse für den Entwurf einer Turbomaschine zu gewinnen.
Um das genannte Ziel zu erreichen, stand für die numerische Untersuchung das kommerzielle CFD-Programmpaket FLUENT [15] zur Verfügung. Dieses stellt ein geeignetes Werkzeug dar. Um damit die Nachlaufstruktur einer Axialturbinenstufe und die Einflußparameter darauf berechnen zu können, mußte in einem ersten Schritt die Modellierung dieses Strömungsproblemes gelöst werden. Da die CFD sich erst in den letzten Jahren immer mehr zu einem ernstzunehmenden Entwicklungswerkzeug im Turbomaschinenbereich entwickelt, konnte nur sehr bedingt auf bereits Bekanntes bei der Modellierung zurückgegriffen werden. Es stellten sich die Fragen:

- nach einer geeigneten Turbulenzmodellierung
- nach einer geeigneten Netzstruktur
- nach einer geeigneten Begrenzung des Strömungsgebietes

Auf der Seite der Turbulenzmodellierung war zu klären, ob ein Ein- oder Zweigleichungmodell nach dem Wirbelviskositätsprinzip oder sogar ein lineares Reynoldspanngungsmodell in

Verbindung mit der Standard-Wandfunktion bzw. einer Zweischichtenformulierung gewählt werden muß. Um diese und andere Fragestellungen zu klären, wurde das Untersuchungsobjekt Turbinenstufe schrittweise angegangen.
In dieser Arbeit werden drei Schritte unterschieden, um das Untersuchungsziel der Einflußfaktoren auf den Nachlauf durch eine Stufe einer Axialturbine zu erreichen:

1. Stationäre Berechnung der Nachlaufströmung eines Einzelprofiles
2. Stationäre Berechnung der Nachlaufströmung eines Schaufelgitters
3. Instationäre Berechnung der Nachlaufentwicklung des Statornachlaufes in der Rotorpassage
4. Simulation von Einflußgrößen auf die Nachlaufstruktur einer Stufe einer Axialturbine

Bei dieser systematischen Vorgehensweise vom Einfachen zum Schwierigen wurde darauf geachtet, für die Teilprobleme experimentelle Daten zur Verfügung zu haben, um eine Aussage über die Qualität der Simulationsdaten treffen zu können. Hierbei wurde auf eine Datenbank der ERCOFTAC (European Research Community On Flow Turbulence And Combustion) und auf experimentelle Ergebnisse, die an der RWTH Aachen gewonnen wurden, zurückgegriffen. Der Zwischenschritt vom Einzelprofil auf das Schaufelgitter ist in Kapitel 6 dokumentiert, das sich vorwiegend mit einem instationärem Strömungsproblem beschäftigt. Er ist aus zwei Gründen dort zu finden. Zum einen können keine großen Erkenntnisse in Bezug auf die Turbulenzmodelle im Vergleich zum Einzelprofil erwartet werden, und zum anderen liegen dem 2. und 3. Schritt die Daten eines Experimentes zugrunde. In diesem wurden stationäre und instationäre Daten aufgenommen.
Für die Untersuchung der Einflußparameter, dem 4. Schritt, wird auf die geometrischen Daten zurückgegriffen, die für den im Aufbau befindlichen Versuchsstand am Fachgebiet Turbomaschinen und Fluidantriebstechnik verwendet werden. Da jedoch von diesem Versuchsstand noch keine experimentellen Daten vorliegen, liefert die numerische Untersuchung Daten, die zu einem späteren Zeitpunkt durch das Experiment validiert werden können. Es wird dieser Vorgehensweise unterstellt, daß die „Kalibrierung“ der Modellierung an den zuvor untersuchten Teilproblemen hinreichend ist, den Trend der Einflüsse Reynoldszahl und Turbulenzgrad richtig vorherzusagen.

2 Beschreibung turbulenter Strömungen

In diesem Kapitel wird ein Überblick der Möglichkeiten gegeben, turbulente Strömungen zu beschreiben und zu berechnen. Hierbei werden die Rechenmodelle näher vorgestellt, die im Rahmen dieser Arbeit verwendet wurden.
Mit dem heutigen Stand des Wissens ist es möglich, die meisten Strömungsphänomene technischer Anwendungen mit Hilfe der Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie zu beschreiben. Diese können jedoch nur für wenige technische Problemstellungen analytisch gelöst werden. Für alle weiteren Strömungsprobleme müssen die beschreibenden Erhaltungsgleichungen numerisch behandelt werden.
Um das ganze Verhalten einer Strömung vollständig beschreiben zu können, müssen auch die kleinsten Schwankungen einer Strömung, die bei technisch relevanten Anwendungen meist turbulent und damit immer stochastisch und instationär sind, durch die Diskretisierung in Raum und Zeit erfaßt werden:

- Die räumliche Schrittweite muß kleiner sein als die kleinsten turbulenten Wirbel und
- die zeitliche Schrittweite muß kleiner sein als die Dauer der kleinsten Schwankungen.

Die kleinsten Turbulenzelemente sind durch das Kolmogorov-Längenmaß l_k gegeben. Die größten dagegen werden durch das Integrallängenmaß L definiert. Das Verhältnis dieser beiden Längenmaße wird durch die turbulente Reynoldszahl wiedergegeben [16]:

$$\frac{L}{l_k} = 3 \cdot Re_t^{\frac{3}{4}} \tag{2.1}$$

Somit ergibt sich eine Knotenanzahl für die räumliche Diskretisierung, die proportional zu $27 \cdot Re_t^{\frac{9}{4}}$ ist.
Neben der räumlichen Diskretisierung muß sich die zeitliche am Kolmogorovschen Mikro-Zeitmaß t_k orientieren. Die turbulente Reynoldszahl kann auch hier eine Beziehung zu einem charakteristischen integralen Zeitmaß t herstellen [16]:

$$\frac{t}{t_k} = 0,3 \cdot Re_t^{\frac{1}{2}} \tag{2.2}$$

Da die turbulenten Größen eine sehr feine Diskretisierung in Ort und Zeit erfordern, ist es bei der heutigen Rechenleistung i.d.R. nicht möglich, die Bewegungsgleichungen für Strömungsprobleme technischer Anwendung direkt zu lösen. Neben dieser direkten numerischen Simulation (DNS) gibt es das Gebiet der Turbulenzmodellierung. Dieses ermöglicht mithilfe von Annahmen eine gröbere Problemdiskretisierung und ermöglicht somit die Berechnung technischer Strömungsprobleme mit den heutigen Ressourcen an Rechnerhardware.
Innerhalb der Modellierung turbulenter Strömungen müssen verschiedene Ansätze unterschieden werden. Die bekanntesten hierbei sind:

- Statistische Turbulenzmodelle
- **L**arge **E**ddy **S**imulation (LES)
- Pdf-Verfahren

Werden die Erhaltungsgleichungen, die eine Strömung beschreiben, zeitlich gemittelt, ergibt sich ein in der Zeit mittleres Gleichungssystem. Dieses ist nicht geschlossen. Der Informationsverlust, der durch die zeitliche Mittelung hervorgerufen wird, äußert sich im Auftreten der unbekannten Zweifachkorrelation turbulenter Schwankungsgrößen $\overline{u_i u_j}$. Diese Unbekannte wird als Reynoldsspannungstensor bezeichnet. Je nach dem, wie dieser Tensor berechnet wird lassen sich die **statistischen Turbulenzmodelle** klassifizieren:

- Wirbelviskositätsmodelle
- Reynoldsspannungsmodelle

Diese Art der Berechnung strömungstechnischer Problemstellungen ist zur Zeit am weitesten verbreitet, was sich durch die benötigte Hardwareleistung begründen läßt. Statitische Turbulenzmodelle erfordern im Bereich der Turbulenzmodelle den geringsten Hardwareeinsatz und laufen meist numerisch stabil. In der Hierarchie der Turbulenzmodellierung sind die statistischen Modelle jedoch klar unterhalb der Grobstruktur-Simulation einzuordnen.

Eine andere Systematik liegt der **Large Eddy Simulation** zugrunde. Die Navier-Stokes-Gleichungen werden in einem ersten Schritt tiefpaßgefiltert. Somit ergibt sich ein Gleichungssystem mit weniger Freiheitsgraden, was eine gröbere Diskretisierung als bei der DNS zuläßt. Modelliert werden müssen nun die Unbekannten, die bei der Filterung herausgefallen sind.

Hierbei wird überwiegend ein sehr einfaches statistisches Turbulenzmodell verwendet. Daß diese Art der Modellierung erfolgversprechend ist, wird mit dem Argument begründet, daß die turbulente Feinstruktur weniger anisotrop und von den Randbedingungen des Problems unabhängiger sei als die turbulente Grobstruktur [16]. Auf eben dieser Annahme der Isotropie der kleinen Skalen beruhen die statistischen Modelle. Der Vorteil der LES durch eine bessere Beschreibung der Physik wird durch eine höhere Hardwareanforderung gegenüber den statistischen Modellen überschattet. Hierin ist der wesentliche Grund zu sehen, daß die LES noch nicht im industriellen Einsatz ist. Dies wird sich aber mit der Leistungssteigerung der Hardware ändern.

Eine weitere Klasse der Turbulenzmodelle stellen die **pdf-Verfahren** dar. Diese wurden von POPE [46] und DOPAZO et al. [10] entwickelt. Pdf-Verfahren beruhen auf der Lösung der Transportgleichung der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (**P**robability **D**ensity **F**unction - PDF). Der große Vorteil einer pdf-Methode ist, daß konvektive und Quellterme im Gleichungssystem geschlossen auftreten. Diese Tatsache macht die Implementierung weiterer Gleichungen für unbekannte Skalare einfach und spiegelt sich in dem Sachverhalt wieder, daß pdf-Verfahren häufig eine Anwendung bei reagierenden Strömungen finden. Es werden jedoch Modelle benötigt für die Terme, die den molekularen Transport wiedergeben [32].

2.1 Erhaltungsgleichungen

Die Erhaltungsgleichungen für die Masse (2.3), den Impuls (2.4) und die Energie (2.5) zur Beschreibung von Strömungsvorgängen können in der Eulerschen Beschreibungsweise dargestellt werden:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + S_i \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial \rho H}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i H}{\partial x_j} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \tau_{ij} u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho u_i S_i \tag{2.5}$$

wobei die Dichte des Fluids mit ρ, die Geschwindigkeit in i-Richtung mit u_i, mit t die Zeit und mit x_i die Raumkoordinate in i-Richtung, der statische Druck mit p, der Quellterm der Volumenkräfte in i-Richtung mit S_i, die Totalenthalpie mit H und der Wärmstromvektor mit q_i bezeichnet wird.
Für Newtonische Fluide lautet der Spannungstensor τ_{ij}:

$$\tau_{ij} = \left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right] - \frac{2}{3}\mu\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\delta_{ij} \tag{2.6}$$

mit der molekularen Viskosität μ.
Für inkompressible Fluide lassen sich diese Erhaltungsgleichungen vereinfachen. Die Annahme der Inkompressibilität ist bei Gasen gerechtfertigt, solange die Strömungsgeschwindigkeit klein ist im Vergleich zur Schallgeschwindigkeit, d.h. $Ma << 1$. Weiterhin kann das obige Gleichungssystem durch das Weglassen der Energieerhaltung (2.5) vereinfacht werden, wenn die Temperatur nicht als Variable in einem Strömungsproblem auftritt. Es ergibt sich ein vereinfachtes System partieller Differentialgleichungen unter der Annahme konstanter Dichte ρ und konstanter Viskosität μ:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu\,\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{\rho}\,S_i \tag{2.8}$$

Das Gleichungssystem (2.7) und (2.8) beschreibt alle inkompressiblen Strömungen vollständig, bei denen die Stoffeigenschaften von der Temperatur unabhängig sind. Es können sowohl laminare als auch turbulente Strömungen sein. Der Übergang von der einen Strömungsform zur anderen wird durch eine kritische Reynoldszahl Re_{krit} gekennzeichnet. Die Reynoldszahl ist definiert als

$$Re = \frac{u \cdot L}{\nu} \tag{2.9}$$

mit u als charakteristischer Geschwindigkeit, L als charakteristischer Länge und ν als kinematischer Viskosität. Diese dimensionslose Kennzahl beschreibt das Verhältnis von Trägheits- zu Zähigkeitskräften. Unterhalb einer kritischen Reynoldszahl Re_{krit}, die z.B. für eine Rohrströmung bei 2.300 liegt [56], dominieren die viskosen Kräfte, und die Strömung wird als laminar bezeichnet. Nimmt die Reynoldszahl größere Werte an und wird der Einfluß der Trägheitskräfte stärker, so bezeichnet man den Charakter der Strömung als turbulent. Turbulente Strömungen sind immer dreidimensional, instationär, dissipativ, rotationsbehaftet und weisen stochastisches Verhalten auf [26].

2.2 Statistische Turbulenzmodelle

Im Rahmen dieser Arbeit wurden statistische Turbulenzmodelle verwendet. Aus diesem Grund soll im folgenden näher auf diese Klasse der Turbulenzmodelle eingegangen werden. Der

Grundgedanke beruht auf der Tatsache, daß als Ergebnis einer Strömungsberechnung meist nur der zeitliche Mittelwert der gesuchten Größe von Interesse ist. Aus diesem Grunde werden alle Größen aufgeteilt in einen zeitlichen Mittelwert und die dazugehörige Schwankungsgröße.

$$\Phi = \overline{\Phi} + \Phi' \tag{2.10}$$

Diese Aufteilung der Strömungsgrößen, in Gleichung (2.10) für eine beliebige Größe Φ gezeigt, wurde bereits 1895 von REYNOLDS vorgeschlagen. Dementsprechend spricht man auch von der Reynoldsschen Mittelung. Der Aufspaltung des Momentanwertes Φ in Mittelwert $\overline{\Phi}$ und Schwankungswert Φ' liegt das Postulat von REYNOLDS zugrunde, daß statistische Mittelwerte existieren. Turbulente Strömungen weisen häufig stochastisch stationären Charakter auf, wodurch die statistische Mittelung in der Zeit oder in den homogenen Richtungen durchgeführt werden kann[16].

$$\bar{\Phi} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{\tau-T/2}^{\tau+T/2} \Phi(\tau)\, d\tau \tag{2.11}$$

Trifft obige Voraussetzung nicht zu, dann ist $\overline{\Phi}$ aus Gleichung (2.10) als Ensemble- oder Scharmittelung zu definieren. Dies entspricht einer Mittelung über zahlreiche Wiederholungen desselben Experiments unter gleichen äußeren Bedingungen [16].
Werden die Strömungsgrößen aus den Gleichungen (2.7) und (2.8) der Reynoldsschen Mittelungen unterworfen, kann das Gleichungssystem überführt werden in die Form

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i u_j) &= \frac{\partial}{\rho \partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \left(\frac{2}{3}\mu \frac{\partial u_l}{\partial x_l}\delta_{ij}\right)\right] - \frac{\partial p}{\rho \partial x_i} \\ &\quad + \frac{\partial}{\rho \partial x_j}(-\rho \overline{u_i' u_j'}) \end{aligned} \tag{2.13}$$

Hierbei handelt es sich nun um ein zeitlich gemitteltes System partieller Differentialgleichungen. Zur übersichtlicheren Darstellung wurden die Mittelungsstriche in (2.12) und (2.13) weggelassen. Dies wird auch im folgenden so gehandhabt werden.
Die Struktur des Gleichungssystems ist identisch mit dem der Momentanwerte. Es tritt lediglich die zusätzliche Unbekannte $\overline{u_i' u_j'}$ auf. Diese Korrelation der Schwankungswerte wird als Reynoldsspannungstensor bezeichnet. In diesem liegt die Information, die durch die zeitliche Mittelung den Momentanwerten entzogen wurde. Das Gleichungssystem (2.12) und (2.13) ist

nicht geschlossen, da der Reynoldsspannungstensor bestimmt werden muß. Dies wird allgemein als Schließungsproblematik der Turbulenz bezeichnet. Um dieses Problem zu lösen, gibt es verschiedene Ansätze:

- Modellierung des unbekannten Tensors $\overline{u_i' u_j'}$
- Bestimmung einer Erhaltungsgleichung für den Reynoldsspannungstensor

Wird der Reynoldsspannungstensor direkt unter Verwendung des Wirbelviskositätsprinzips nach BOUSSINESQ [4] modelliert, spricht man von **Wirbelviskositätsmodellen**, auf die noch näher eingegangen wird. Es ist jedoch möglich, aus den Navier-Stokes Gleichungen eine exakte Erhaltungsgleichung für die wiederum unbekannte Korrelation $\overline{u_i' u_j'}$ herzuleiten. In dieser treten dann unbekannte Terme höherer Ordnung auf, für die wiederum exakte Erhaltungsgleichungen aufgestellt werden können. Diese Vorgehensweise läßt sich beliebig fortsetzen und führt zu unbekannten Termen immer höherer Ordnung. Die sich so ergebende Hierarchie von partiellen Differentialgleichungen muß an einer Stelle abgebrochen werden. Von **Reynoldsspannungsmodellen** spricht man, wenn die unbekannten Terme ab zweiter Ordnung modelliert werden. Die Hierarchie der statistischen Modelle läßt sich nach JONES [59] in folgender Übersicht zusammenfassen:

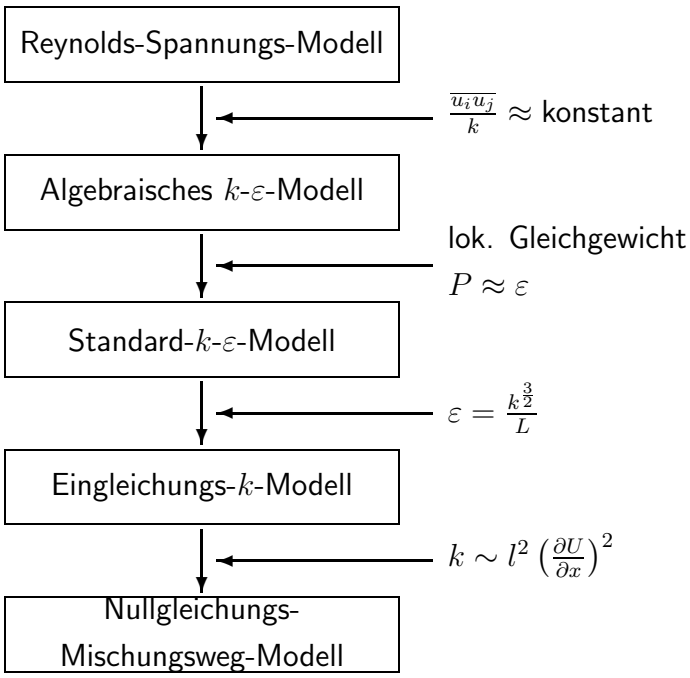

Abb. 2.1: Hierarchie der Modellierungsebenen nach JONES

2.2.1 Wirbelviskositätsmodelle

Wirbelviskositätsmodelle lösen das Schließungsproblem der Turbulenz durch eine direkte Modellierung des Reynoldsspannungstensors. Sie basieren hierbei auf der Annahme der Analogie zwischen den viskosen und den turbulenten Spannungen. Diese findet ihren Ausdruck in der Formulierung, die bereits 1877 von BOUSSINESQ aufgestellt wurde. Er geht davon aus, daß die Reynoldsspannungen sich analog zu den viskosen Spannungen proportional zu der Scherrate bestimmen lassen. Hierfür wird eine turbulente Viskosität μ_t eingeführt. Diese ist jedoch im Gegensatz zu ihrem viskosen Analogon keine Stoffgröße, sondern ist eine im Strömungsfeld Veränderliche. Der Wirbelviskositäts- oder auch Gradientenflußansatz kann allgemein formuliert werden.

$$-\rho\overline{u_i' u_j'} = \mu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3}\rho k \delta_{ij} \tag{2.14}$$

Die turbulente kinetische Energie wird mit k bezeichnet und ist nach Gleichung (2.15) definiert.

$$k = \frac{1}{2}\left(\overline{u_i' u_i'}\right) \tag{2.15}$$

Unter Verwendung des Gradientenflußansatzes zur Modellierung des Reynoldsspannungstensors ergibt sich die turbulente Viskosität als weitere Unbekannte. Diese wird auf der Annahme der Gleichgewichtsturbulenz bestimmt, d.h. sowohl ein charakteristisches Zeitmaß als auch ein charakteristisches Längenmaß ist ausreichend zur Beschreibung der turbulenten Detailstruktur. Es kommt hinzu, daß die Isotropie der kleinen Skalen vorausgesetzt wird.
Eine Einteilung der Wirbelviskositätsmodelle kann vorgenommen werden nach der Anzahl der zu den gemittelten Navier-Stokes Gleichungen hinzukommenden, partiellen Differentialgleichungen:

- Nullgleichungsmodell
- Eingleichungsmodell
- Zweigleichungsmodell

Neben den Wirbelviskositätsmodellen, die auf der Annahme von BOUSSINESQ beruhen und damit nur lineare Terme zur Berechnung des Reynoldsspannungstensors berücksichtigen, gibt es auch nichtlineare Wirbelviskositätsmodelle. Wie der Name schon verdeutlicht, verwenden diese Turbulenzmodelle auch Terme höherer Ordnung. Da derartige Modelle in dieser Arbeit nicht für Berechnungen benutzt wurden, sei an dieser Stelle auf BAUER [1] verwiesen, der in seiner Dissertation einen guten Überblick dieser nichtlinearen Turbulenzmodelle bietet.

Innerhalb der Klasse der Wirbelviskositätsmodelle beschreiben die **Nullgleichungsmodelle** die unterste Hierarchieebene. Die unbekannte Wirbelviskosität μ_t wird durch bekannte Größen der gemittelten Impulsgleichungen bestimmt, ohne daß eine weitere partielle Differentialgleichung gelöst wird. Um diese Berechnungsansätze für die Reynoldsspannung herzuleiten, gibt es verschiedene Entwicklungsmethoden, z.B. Dimensionsanalyse und phänomenologische Betrachtungen [26].
Das bekannteste Nullgleichungsmodell ist sicherlich der Prandtl'sche Mischungsweganssatz. Die Größe μ_t wird direkt in Beziehung gesetzt zu denen des Hauptströmungsfeldes.

$$\mu_t = \rho l_m^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \tag{2.16}$$

Es muß nun der Mischungsweg l_m empirisch bestimmt werden. Die Mischungsweghypothese ist wie die Nullgleichungsmodelle im allgemeinen ein sehr einfaches und damit wirtschaftliches Turbulenzmodell. Es müssen keine weiteren Differentialgleichungen gelöst werden. Für einfache Scherströmungen kann diese Modellart sehr erfolgreich eingesetzt werden. Der Nachteil ist aber der notwendige empirische Input, der strömungsabhängig ist. Ebenso fehlt die Berücksichtigung des Transportes von Turbulenz. Daher ist die Hypothese von Prandtl nur gültig, wenn die Turbulenz im lokalen Gleichgewicht ist [49], und nur in Ausnahmefällen in der Praxis einsetzbar.
Erstmals 1945 postulierte PRANDTL ein Turbulenzmodell, in dem die turbulente Viskosität von der turbulenten kinetischen Energie k abhängt. Er schlug eine zusätzliche partielle Differentialgleichung für k vor. Dies charakterisiert alle **Eingleichungsmodelle**, die den Turbulenztransport durch eine zusätzliche Transportgleichung für den lokalen Geschwindigkeitsmaßstab berücksichtigen. Gegenüber den Nullgleichungsmodellen werden die Reynoldsspannungen durch die „Strömungsvergangenheit“ beeinflußt. Bei dieser Klasse von Turbulenzmodellen wird zwar eine zusätzliche Transportgleichung für k gelöst, um das turbulente Zeitmaß T_E nach Gleichung (2.17) zu bestimmen, wird jedoch noch die Mischungslänge l benötigt, die empirisch ermittelt werden muß.

$$T_E = \frac{l}{\sqrt{k}} \tag{2.17}$$

Zweigleichungsmodelle lösen zwei weitere Transportgleichungen. Sie sind innerhalb der Turbulenzmodellierung die niedrigste Hierarchieebene, auf der das turbulente Zeit- und ein chararkteristisches Längenmaß im gesamten Strömungsfeld von den Strömungsgrößen berechnet werden. Es wird wie bereits bei den Eingleichungsmodellen eine Transportgleichung für k gelöst, um den Geschwindigkeitsmaßstab $\sqrt{k}$ zu erhalten. Durch das Aufstellen einer wei-

teren partiellen Differentialgleichung ist es möglich, das turbulente Zeit- und Längenmaß zu bestimmen.
Die zweite Gleichung kann z.B. für die charakteristische Frequenz ω der energietragenden, großskaligen Schwankungsbewegungen aufgestellt werden. Am bekanntesten ist aber, die zweite Gleichung für die Dissipationsrate ε der kinetische Turbulenzenergie zu lösen. Es ergibt sich das $k-\varepsilon$ Modell. Die Zeit- und Längenmaße werden berechnet wie folgt:

$$l = \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon} \tag{2.18}$$

$$T_E = \frac{k}{\varepsilon} \tag{2.19}$$

Aus dieser Gesamtheit der Wirbelviskositätsmodelle wurden diejenigen für diese Arbeit ausgewählt, die für die Problemstellung der Profilnachlaufsimulation am erfolgsversprechensten sind:

- Eingleichungsmodell nach Spalart und Allmaras
- Standard $k-\varepsilon$ Modell
- Realizeable $k-\varepsilon$ Modell
- RNG $k-\varepsilon$ Modell

Neben den Zweigleichungsmodellen wurde auch ein Eingleichungsmodell ausgesucht, da dieses bereits erfolgreich für Turbomaschinenströmungen angewendet wurde [62].

2.2.1.1 Eingleichungsmodell nach Spalart und Allmaras

Das Eingleichungsmodell von Spalart und Allmaras [55], im weiteren wird es auch kurz als SA-Modell bezeichnet, wurde 1992 veröffentlicht. Es ist damit eines der neuesten Eingleichungsmodelle. Da es für aerodynamische Strömungen entwickelt wurde, verspricht es gute Ergebnisse für die Beschreibung der Innenströmung einer Turbinenstufe.
Als zusätzliche Gleichung neben den gemittelten Impulsgleichungen wird eine Transportgleichung für eine modifizierte Form $\tilde{\nu}_t$ der turbulenten kinematischen Viskosität ν_t gelöst. Der Zusammenhang beider Größen ist in nachstehender Gleichung beschrieben:

$$\nu_t = \tilde{\nu}_t f_1 \tag{2.20}$$

Hierbei bezeichnet f_1 eine Dämpfungsfunktion. Diese stellt sicher, daß die Modifikation der turbulenten Viskosität nur außerhalb der wandnahen Schicht, die durch die Viskosität dominiert ist, wirksam wird. Die Dämpfungsfunktion ist gegeben als

$$f_1 = \frac{\left(\frac{\tilde{\nu}_t}{\nu_t}\right)^3}{\left(\frac{\tilde{\nu}_t}{\nu_t}\right)^3 + C_{v1}^3} \tag{2.21}$$

C_{v1} ist eine Modellkonstante. Für die turbulente Viskosität $\tilde{\nu}_t$ wurde von Spalart und Allmaras die Transportgleichung (2.22) für den inkompressiblen Fall aufgestellt:

$$\frac{D\tilde{\nu}_t}{Dt} = G_{\tilde{\nu}_t} + \frac{1}{\sigma_{\tilde{\nu}_t}}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{(\nu + \tilde{\nu}_t)\frac{\partial \tilde{\nu}_t}{\partial x_j}\right\} + C_{b2}\left(\frac{\partial \tilde{\nu}_t}{\partial x_j}\right)^2\right] - Y_{\tilde{\nu}_t} \tag{2.22}$$

Mit $G_{\tilde{\nu}_t}$ wird die Produktion von $\tilde{\nu}_t$ und mit $Y_{\tilde{\nu}_t}$ die Dissipation eben dieser im wandnahen Bereich aufgrund von Einflüssen der Wandversperrung und der viskosen Dämpfung bezeichnet. $\sigma_{\tilde{\nu}_t}$ und C_{b2} sind weitere Modellkonstanten.
Der Produktionsterm $G_{\tilde{\nu}_t}$ wird nach Gleichung (2.23) modelliert.

$$G_{\tilde{\nu}_t} = C_{b1}\tilde{S}\tilde{\nu}_t \tag{2.23}$$

Die Größe C_{b1} ist eine weitere Konstante und $\tilde{S}$ wird durch Gleichung (2.24) beschrieben.

$$\tilde{S} = S + \frac{\tilde{\nu}_t}{\kappa^2 d^2} f_{v2} \tag{2.24}$$

Mit d wird der Wandabstand bezeichnet, und κ ist die von Kármán Konstante. Die Funktion f_{v2} wird nach Gleichung (2.25) bestimmt, mit χ als Verhältnis von $\tilde{\nu}_t$ zu ν_t.

$$f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}} \tag{2.25}$$

Nach Spalart und Allmaras wird die Größe S aus dem Rotationstensor bestimmt. Da dies dazu führen kann, daß die Produktion der eddy viscosity zu groß berechnet wird, wurde in dieser Arbeit eine Modifikation verwendet, die von Dacles-Mariani, Zilliac, Chow und Bradshaw [6] vorgeschlagen wurde. Diese berücksichtigt neben dem Rotationstensor Ω_{ij} auch den Deformationsgeschwindigkeitstensor S_{ij}.

Mit

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \tag{2.26}$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \tag{2.27}$$

ergibt sich für S nach [6]

$$S = \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}} + 2,0 \cdot \min(0, \sqrt{S_{ij}S_{ij}} - \sqrt{\Omega_{ij}\Omega_{ij}}) \tag{2.28}$$

Die Dissipation der Wirbelviskosität $Y_{\tilde{\nu}_t}$ wird nach Gleichung (2.29) modelliert.

$$Y_{\tilde{\nu}_t} = C_{w1} f_w \left(\frac{\tilde{\nu}_t}{d}\right)^2 \tag{2.29}$$

Hierbei wird die Funktion f_w nach untenstehenden Gleichungen bestimmt.

$$f_w = g\left[\frac{1 + C_{w3}^6}{g^6 + C_{w3}^6}\right]^{\frac{1}{6}} \tag{2.30}$$

$$g = r + C_{w2}(r^6 - r) \tag{2.31}$$

$$r = \frac{\tilde{\nu}_t}{\tilde{S}\kappa^2 d^2} \tag{2.32}$$

C_{w1}, C_{w2} und C_{w3} sind weitere Modellkonstanten. In nachfolgender Zusammenstellung wird eine Übersicht aller Modellkonstanten des Eingleichungsmodells nach Spalart und Allmaras gegeben.

$$\sigma_{b1} = 0,1335 \qquad \sigma_{b2} = 0,622 \qquad \sigma_{\tilde{\mu}_t} = \frac{2}{3}$$

$$C_{w1} = \frac{C_{b1}}{\kappa^2} + (1 + \frac{C_{b2}}{\sigma_{\tilde{\nu}_t}}) \qquad C_{w2} = 0,3 \qquad C_{w3} = 2,0$$

$$C_{v1} = 7,1 \qquad \kappa = 0,41$$

Diese Modellierung nach Spalart und Allmaras läßt eine Berechnung des Strömungsfeldes bis zur Wand zu. Sie ist nicht eingeschränkt auf Strömungsbereiche mit hohen Reynoldszahlen. Da dieses Modell auch für niedrige Reynoldszahlen gültig ist, kann von einer low-Re Version des Eingleichungsmodells gesprochen werden.

2.2.1.2 Standard $k-\varepsilon$ Modell

Das $k-\varepsilon$ Modell ist das bekannteste Zweigleichungsmodell, und es ist das meist genutzte im kommerziellen Bereich. Gründe hierfür liegen sicherlich im Kosten-Nutzen Vergleich. Hierbei sind unter Kosten die Rechenzeit und die Hardwareanforderungen zu sehen, und als Nutzen kann die Qualität der Rechenergebnisse bezeichnet werden. Hinzu kommt eine hohe numerische Stabilität dieses Modells, die nicht unterschätzt werden darf, wenn Turbulenzmodelle beurteilt werden.
Das Standard $k-\varepsilon$ Modell, so wie es von LAUNDER und SPALDING [35] vorgeschlagen wurde, ist ein halbempirisches Turbulenzmodell, das eine Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie und eine für deren Dissipation löst. Bei der Modellierung einzelner Terme wird angenommen, daß eine voll turbulente Strömung vorliegt und Einflüsse der molekularen Viskosität vernachlässigbar sind. Somit kann dieses Modell, so wie es hier vorgestellt wird, im wandnahen Bereich nicht sinnvoll eingesetzt werden.
Die beiden zusätzlichen Transportgleichungen neben den gemittelten Impulsgleichungen stellen sich für den inkompressiblen Fall wie folgt dar:

$$\frac{\partial k}{\partial t}+u_i\frac{\partial k}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\nu+\frac{\nu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_i}\right]+P_k-\varepsilon \tag{2.33}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+u_i\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\nu+\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}\right]+C_{1\varepsilon}\frac{\varepsilon}{k}P_k-C_{2\varepsilon}\frac{\varepsilon^2}{k} \tag{2.34}$$

Mit P_k wird die Produktionsrate der turbulenten kinetischen Energie bezeichnet, und $C_{1\varepsilon}$, $C_{2\varepsilon}$, σ_k, σ_ε sind Modellkonstanten. Die Produktion wird unter der Annahme von BOUSSINESQ nach Gleichung (2.35) modelliert.

$$P_k=2\nu_t S_{ij}S_{ij} \tag{2.35}$$

Hierbei ist S_{ij} nach Gleichung (2.26) definiert.
Aus den oben beschriebenen Gleichungen kann nun die turbulente Viskosität mit der Modellkonstanten C_μ bestimmt werden und zur Bestimmung des Reynoldsspannungstensors unter der Annahme von BOUSSINESQ verwendet werden.

$$\nu_t=C_\mu\,\frac{k^2}{\varepsilon} \tag{2.36}$$

Die Werte der Modellkonstanten sind experimentell bestimmt worden.

$$\sigma_k = 1,0 \qquad \sigma_\varepsilon = 1,3 \qquad C_\mu = 0,09$$

$$C_{1\varepsilon} = 1,44 \qquad C_{2\varepsilon} = 1,92$$

Eine bekannte Schwäche dieses Modells ist die Überproduktion turbulenter kinetischer Energie in einer Staupunktströmung. Diese beruht auf der Tatsache, daß die Strömung im Bereich eines Staupunktes nicht mehr von der Scherung dominiert ist, wofür das $k-\varepsilon$ Modell kalibriert ist. Die Dominanz der Normalkomponenten des Reynoldsstresstensors wird nicht physikalisch richtig wiedergegeben. Diese Unzulänglichkeit dieses Turbulenzmodells ist von hoher Relevanz bei der Berechnung einer Turbinenstufe. Eine Modifikation des Produktionsterms P_k, die von KATO und LAUNDER [29] vorgeschlagen wurde, verhindert dies.
Der exakte Produktionsterm P_{exakt} der turbulenten kinetischen Energie k lautet:

$$P_{exakt} = -\overline{u_i' u_j'} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tag{2.37}$$

Mit der Annahme von Boussinesq ergibt sich ein Produktionsterm P_k so, wie es das $k-\varepsilon$ Modell vorschlägt:

$$P_k = 2\nu_t S_{ij} S_{ij} \tag{2.38}$$

Die Änderung von KATO und LAUNDER bezieht den Rotationstensor Ω_{ij}, wie er in Gleichung (2.27) definiert ist, in der Bestimmung des Produktionstermes von k mit ein:

$$P_{KL} = \nu_t \sqrt{2S_{ij}} \sqrt{2\Omega_{ij}} \tag{2.39}$$

Im Bereich der Hauptströmung rufen die beiden unterschiedlich modellierten Produktionsterme von k keine verschiedenen Ergebnisse hervor. Anders jedoch im Bereich eines Staupunktes. Nach [56] ist das Potential Φ einer stationären ebenen Staupunktströmung:

$$\Phi = \frac{a}{2}(x^2 - y^2) \tag{2.40}$$

Daraus ergibt sich:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad S_{ij} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \Omega_{ij} = 0 \tag{2.41}$$

Mit diesen Ergebnissen können nun die verschiedenen Produktionsterme von k ausgewertet werden:

$$P_{exakt} = \overline{u_i' u_j'} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = a[\overline{v'v'} - \overline{u'u'}] \tag{2.42}$$

$$P_k = \nu_t a^2 \tag{2.43}$$

$$P_{KL} = 0 \tag{2.44}$$

Mit der Annahme, daß die Anisotropie des Reynoldsstresstensors klein ist, ist die Kato-Launder Modifikation sicherlich dem Standard $k-\varepsilon$ Produktionsterm überlegen.

2.2.1.3 Realizable $k-\varepsilon$ Modell

Ein weiteres Zweigleichungsmodell ist das realizable $k-\varepsilon$ Modell nach Shih et al. [53]. Dieses ist aus dem Standard Modell entwickelt worden und löst die identische Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie k (2.33). Als Weiterentwicklung wird eine neue Transportgleichung für die Dissipation ε eingeführt, und die Wirbelviskosität μ_t wird mit C_μ berechnet. Daher ist C_μ eine Variable und keine Konstante wie im Standard $k-\varepsilon$ Modell.
Mit diesen beiden Modelländerungen sollen zwei bekannte Unzulänglichkeiten des Standard Modells behoben werden:

- Die neu modellierte ε-Gleichung führt zu einer deutlichen Verbesserung der Berechnung der Ausbreitungsrate eines runden Freistrahles [53].
- Mit dem Einführen der Größe C_μ als Variable wird sichergestellt, daß die turbulenten Normalspannungen nicht negativ werden können. Dies führt zu einer Erhöhung der Verläßlichkeit bzw. der Übereinstimmung mit der Physik des Turbulenzmodelles. Ausgedrückt wird dieser Sachverhalt durch den Zusatz *realizable* in der Bezeichnung realizable $k-\varepsilon$ Modell.

Die modifizierte Transportgleichung für ε ist in Gleichung (2.45) gegeben.

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}\right] + C_1 \varepsilon \sqrt{2 S_{ij} S_{ij}} - C_2 \frac{\varepsilon^2}{k + \sqrt{\nu\varepsilon}} \tag{2.45}$$

mit

$$C_1 = \max\left[0,43, \frac{\eta}{\eta+5}\right], \eta = \frac{k\sqrt{2S_{ij}S_{ij}}}{\varepsilon}$$

Die zweite Modellverbesserung verhindert den Fehler, daß turbulente Normalspannungen negativ berechnet werden. Nach dem Standard $k-\varepsilon$ Modell wird z.B.

$$\overline{u'^2} = \frac{2}{3}k - 2\nu_t\frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.46}$$

berechnet. Es ist unmittelbar einsichtig, daß die Normalspannung $\overline{u^2}$, die per Definition positiv ist, negativ werden kann sobald der Gradient $\frac{\partial u}{\partial x}$ eine gewisse Grenze überschreitet. Dieser ist in der Ungleichung (2.47) beschrieben.

$$\frac{k}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial x} \geq \frac{1}{3C_\mu} \tag{2.47}$$

Damit sichergestellt ist, daß diese Ungleichung erfüllt ist, wird ν_t weiterhin wie im Standard $k-\varepsilon$ Modell bestimmt mit der Änderung, daß C_μ nun eine variable Größe ist.

$$\nu_t = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \tag{2.48}$$

$$C_\mu = \frac{1}{4,04 + A\frac{U^* k}{\varepsilon}} \tag{2.49}$$

Hierbei ist

$$A = \frac{1}{3}\arccos\left(\sqrt{6}\ \frac{S_{ij}S_{jk}S_{ki}}{\sqrt{S_{ij}S_{ij}}}\right)$$

$$U^* = \sqrt{S_{ij}S_{ij} + (\Omega_{ij} - 2\epsilon_{ijk}\omega_k)(\Omega_{ij} - 2\epsilon_{ijk}\omega_k)}$$

Es ist ersichtlich, daß die Größe C_μ nun eine Funktion der Scherung, Rotation und der Turbulenz ist. Es kann gezeigt werden, daß diese Modifikation sich positiv auswirkt auf die Produktion von k im Staupunkt einer Profilumströmung. Da die Physik der Strömung in diesem Punkt besser beschrieben wird, d.h. negative turbulente Normalspannungen vermieden werden, tritt die Schwäche des Standard $k-\varepsilon$ Modells mit der Überproduktion nicht auf.
Die Modellkonstanten sind bestimmt zu folgenden Werten:

$$\sigma_k = 1,0 \qquad \sigma_\varepsilon = 1,2 \qquad C_2 = 1,9$$

2.2.1.4 RNG $k-\varepsilon$ Modell

Das Renormalization Group (RNG) $k-\varepsilon$ Modell von YAKHOT und ORSZAG [64] ist ebenfalls ein Zweigleichungsmodell, das eine Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie als auch für die Dissipation ε löst. Als Ausgangspunkt für die Modellentwicklung dienen jedoch nicht die reynoldsgemittelten Navier-Stokes Gleichungen, sondern die der Momentanwerte. Aus diesen werden die Bewegungsgleichungen mittels der RNG-Theorie für das RNG $k-\varepsilon$ Modell hergeleitet. Die Grundidee hierbei ist, von den Bewegungsgleichungen der Momentanwerte iterativ enge Frequenzbänder abzuspalten um neue Gleichungen für die verbleibenden Variablen zu erhalten. Es wird diesem Vorgehen zugrunde gelegt, daß die Annahme der Gleichförmigkeit der kleinen Skalen zulässig ist, d.h. ein Zeit- und ein Längenmaß reichen aus, um die kleinen Skalen im gesamten Strömungsfeld zu beschreiben. Als weitere grundlegende Annahme kommt hinzu, daß die Skalierbarkeit gegeben sein muß. Einen tieferen Einblick in die RNG-Theorie bietet [40].
Als Transportgleichungen für die turbulenten Größen k und ε ergeben sich nach oben beschriebener Vorgehensweise für den Fall konstanter Dichte folgende Gleichungen.

$$\frac{\partial k}{\partial t}+u_i\frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\alpha_k\left(\nu_t+\nu\right)\frac{\partial k}{\partial x_i}\right]+\nu_t S^2-\varepsilon \tag{2.50}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+u_i\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\alpha_\varepsilon\left(\nu_t+\nu\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}\right]+C_{1\varepsilon}\frac{\varepsilon}{k}\nu_t S^2-C_{2\varepsilon}\frac{\varepsilon^2}{k}-R \tag{2.51}$$

$C_{1\varepsilon}$, $C_{2\varepsilon}$, α_k und α_ε sind Modellkonstanten. S ist hierbei die 2-fache zweite Invariante des Deformationsgeschwindigkeitstensors S_{ij} aus Gleichung (2.26).

$$S=2S_{ij}S_{ij} \tag{2.52}$$

Die eddy viscosity ν_t wird identisch zum Standard $k-\varepsilon$ Modell nach Gleichung (2.36) bestimmt mit C_μ als weiterer Modellkonstanten. Beim Vergleich mit dem Standard $k-\varepsilon$ Modell fällt eine sehr große Ähnlichkeit beider Turbulenzmodelle auf, die sich aus zwei verschiedenen Ansätzen ergeben haben. Der Hauptunterschied liegt in dem in Gleichung (2.51) zusätzlich auftauchenden Quellterm R.

$$R = \frac{C_\mu\rho\left(\frac{Sk}{\varepsilon}\right)^3\left(1-\frac{Sk}{4{,}38\,\varepsilon}\right)}{1+0.012\left(\frac{Sk}{\varepsilon}\right)^3}\frac{\varepsilon^2}{k} \tag{2.53}$$

Der Einfluß dieses weiteren Quelltermes R in der ε-Gleichung kann veranschaulicht werden, wenn dieser in die Größe $C_{2\varepsilon}$ mit aufgenommen wird, so daß gleich zum Standard $k-\varepsilon$ Modell nur noch ein Dissipationsterm existiert.

$$\begin{aligned} C_{2\varepsilon}\frac{\varepsilon^2}{k} + R &= C^*_{2\varepsilon}\frac{\varepsilon^2}{k} \\ C^*_{2\varepsilon} &= C_{2\varepsilon} + \frac{C_\mu \rho\,(\frac{Sk}{\varepsilon})^3\,(1-\frac{Sk}{4{,}38\,\varepsilon})}{1+0.012\,(\frac{Sk}{\varepsilon})^3} \end{aligned} \tag{2.54}$$

Es ist somit anschaulich, daß der Dissipationsterm in Gleichung (2.51) neben den Größen k und ε auch von der Scherrate beeinflußt wird. Dies hat eine höhere Empfindlichkeit auf Stromlinienkrümmung im Vergleich zum Standard-Modell zur Folge. Eine Überlegenheit des RNG-Modelles läßt sich aber aus der Theorie nicht ableiten. Diese ist lediglich durch die Ergebnisse aus ihrer Anwendung abgesichert [40], und diese zeigen, daß in manchen Fällen das eine Modell besser ist und bei anderen Strömungsverhältnissen das andere. Siehe hierzu z.B. [37].
Die Modellkonstanten werden nicht experimentell bestimmt, sondern lassen sich ebenfalls aus der RNG-Theorie ableiten. Sie sind im folgenden zusammengestellt.

$$C_\mu = 0,0845 \qquad C_{1\varepsilon} = 1,42 \qquad C_{2\varepsilon} = 1,68$$

$$\alpha_k = 1,393 \qquad \alpha_\varepsilon = 1,393$$

2.2.2 Reynoldsspannungsmodelle

Reynoldsspannungsmodelle (RSM) basieren im Gegensatz zu den Wirbelviskositätsmodellen nicht auf der Annahme von BOUSSINESQ zur Bestimmung des Reynoldsspannungstensors. Das Schließungsproblem der Turbulenz wird auf einer höheren Ebene gelöst. Es wird aus den Navier-Stokes Gleichungen eine Transportgleichung für den unbekannten Reynoldsspannungstensor abgeleitet. Diese hat folgende exakte Form:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\overline{u_i' u_j'}) + u_k\,\frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{u_i' u_j'}) =}_{\text{Konvektiver Transport}}$$

$$\underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_k}\left[(\overline{u_i' u_j' u_k'}) + \overline{\frac{p'}{\rho}(\delta_{kj}u_i' + \delta_{ik}u_j')} - \nu\frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{u_i' u_j'})\right]}_{\text{Diffusiver Transport}}$$

$$\underbrace{-\left[\overline{u_i' u_k'}\ \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \overline{u_j' u_k'}\ \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right]}_{P_{ij}\ =\ \text{Produktion}} \tag{2.55}$$

$$\underbrace{+\overline{\frac{p'}{\rho}\left[\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right]}}_{\Pi_{ij}\ =\ \text{Druck-Scher-Korrelation}} \qquad \underbrace{-\ 2\nu\overline{\left[\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\ \frac{\partial u_j'}{\partial x_k}\right]}}_{\varepsilon_{ij}\ =\ \text{Dissipation}}$$

Es tauchen nun die unbekannten Terme der Dissipation ε_{ij}, der Druck-Scher-Korrelation Π_{ij} und des turbulenten Transportes C_{ijk} auf. Als turbulenter Transport ist hierbei definiert:

$$C_{ijk} = \overline{u_i' u_j' u_k'} + \overline{p' u_i'}\delta_{jk} + \overline{p' u_j'}\delta_{ik} \tag{2.56}$$

Auf welche Weise diese drei Terme modelliert werden, klassifiziert die einzelnen Reynoldsspannungsmodelle. Eine wesentliche Unterscheidung hierbei ist die Modellierungsart der Druck-Scher-Korrelation. Diese kann mit nur linearen oder aber auch mit nichtlinearen Termen durchgeführt werden. Dementsprechend wird von einem linearen bzw. nichtlinearen RSM gesprochen. Durch das Miteinbeziehen nichtlinearer Terme wird eine höhere Modellgenauigkeit erreicht. Dies führt auf der anderen Seite aber zu einem höheren numerischen Aufwand.
RSM sind aufgrund der höheren Modellierungsebene den Wirbelviskositätsmodellen überlegen. Sie bilden die Physik besser ab. Im Gegensatz zu den Null-, Ein- und Zweigleichungsmodellen können die RSM anisotrope Turbulenzstrukturen erfassen.
Aus der Vielzahl der existierenden Reynoldsspannungsmodelle wird im folgenden auf die Modellierung der drei unbekannten Terme eingegangen, die im Rahmen dieser Arbeit verwendet wurden. Als Annahme bei der Modellierung werden Strömungsgebiete hoher Reynoldszahlen vorausgesetzt. Die entwickelten Berechnungsmöglichkeiten für die drei oben genannten unbekannten Terme sind deshalb nicht in Wandnähe gültig.
Im Term für den diffusiven oder auch turbulenten Transport in Gleichung (2.55) werden die Drucktransportterme vernachlässigt, da sie fernab fester Wände von untergeordneter Bedeutung sind. Die verbleibenden Terme werden nach Daly und Harlow [7] entsprechend einem tensoriellen Gradientenflußansatz modelliert. In dem benutzten CFD-Code ist eine vereinfachte Form davon nach einem Vorschlag von Launder, Reece und Rodi [34] in Gleichung (2.57) implementiert.

$$-\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\overline{(u_i' u_j' u_k')} + \overline{\frac{p'}{\rho}(\delta_{kj} u_i' + \delta_{ik} u_j')} - \nu\frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{u_i' u_j'})\right] = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}\ \frac{\partial(\overline{u_i' u_j'})}{\partial x_k}\right) \tag{2.57}$$

Die Druck-Scher-Korrelation Π_{ij} wird in einen Return-Term oder auch Slow-Term, der die Rückkehr zur Isotropie beschreibt, und einen Rapid-Term, der die Interaktion zwischen den mittleren Strömungsgrößen und den turbulenten Größen beschreibt, aufgeteilt.
Die Druck-Scher-Korrelation kann nach [34] modelliert werden. Die entsprechende Gleichung ist in (2.58) gegeben mit $P = \frac{1}{2} P_{ii}$, der halben Spur des Produktionsterms P_{ij}.

$$\overline{\frac{p'}{\rho}\left[\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right]} = -C_1 \frac{\varepsilon}{k}\left[\overline{u_i' u_j'} - \frac{2}{3}\delta_{ij} k\right] - C_2\left[P_{ij} - \frac{2}{3}\delta_{ij} P - S_{ij}\right] \tag{2.58}$$

Da bei der Modellierung der Druck-Scher-Korrelation keine Terme höherer Ordnung als eins verwendet werden, kann hier von einem linearen RSM gesprochen werden.
Um den Term der Dissipation ε_{ij} modellieren zu können, wird die Annahme lokaler Isotropie getroffen. Für den Dissipationsterm ergibt sich somit vereinfacht die Gleichung (2.59). ε wird aus der Transportgleichung (2.34) des Standard $k - \varepsilon$ Modells berechnet.

$$2\nu \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\ \frac{\partial u_j'}{\partial x_k}} = \frac{2}{3}\delta_{ij}\varepsilon \tag{2.59}$$

Die Modellkonstanten sind nachstehend aufgeführt:

$$C_1 = 1,8 \qquad C_2 = 0,6$$

2.3 Wandbehandlung

Dem wandnahen Bereich kommt im Rahmen der Turbulenzmodellierung eine große Bedeutung zu. Die Strömung in Wandnähe ist gekennzeichnet durch einen großen Geschwindigkeitsgradienten, bedingt durch die Haftbedingung an der Wand und besonders durch den Übergang von hohen Reynoldszahlen in der Kernströmung, in der die Reibung im Vergleich zur Turbulenz vernachlässigt werden kann, zu kleinen Reynoldszahlen in unmittelbarer Wandnähe, in der die Reibung eine wesentliche Rolle spielt. Dieser Übergangsbereich der Strömung von der Wand zum Kern wird als Grenzschicht bezeichnet. Diese muß geeignet modelliert werden, um Aussagen über entscheidende Strömungsphänomene wie Ablösung, Transition, Relaminarisierung u.a. treffen zu können.

Bei den oben beschriebenen Turbulenzmodellen wurde bei der Modellierung der unbekannten Terme immer die Voraussetzung großer Reynoldszahlen getroffen. Lediglich das Eingleichungsmodell nach SPALART und ALLMARAS verzichtete auf diese Vereinfachung. Da die genannten Turbulenzmodelle in ihrer beschriebenen Form nicht im wandnahen Bereich gültig sind, muß dieses Strömungsgebiet eine andere Modellierung erfahren. Die wichtigsten hierbei sind:

- Wandfunktion
- 2-Schichten Modell
- Low-Re Erweiterung

2.3.1 Standard-Wandfunktion

Um die Grenzschicht mit ihren großen Gradienten auflösen zu können, muß die Knotendichte des numerischen Rechennetzes entsprechend groß sein. Ebenfalls muß bei der Modellierung auf Effekte niedriger Reynoldszahlen, sog. low-Re Effekte, eingegangen werden. Dies kann mit der Verwendung einer Wandfunktion vermieden werden,die eine Verbindung zwischen der Strömungsgeschwindigkeit und der Wandschubspannung herstellt. Es wird der Strömungsbereich in unmittelbarer Wandnähe überbrückt und somit das rechenintensive Gebiet vermieden. Werden für eine ebene, stationäre Strömung die Annahmen

- abhängige Variablen ändern sich nur langsam in Strömungsrichtung
- keine Wandkrümmung
- kein Druckgradient längs der Wand

vorausgesetzt, kann ein universelles logarithmisches Wandgesetz aus den gemittelten Impulsgleichungen abgeleitet werden, das für turbulente Strömungen den wandnahen Bereich abbildet.

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B \tag{2.60}$$

Hierbei bezeichnet $u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$ die Wandschubspannungsgeschwindigkeit, u die mittlere Strömungsgeschwindigkeit parallel zur Wand und $y^+ = \frac{u_\tau}{\nu} y$ den dimensionslosen Wandabstand. Eine ausführliche Herleitung und die Angabe der üblichen Werte für die Konstanten von $\kappa \approx 0,4$ und $B \approx 5$ können in [56] nachgelesen werden. Das reale Geschwindigkeitsprofil setzt sich aus einer viskosen Unterschicht, einem Übergangsbereich und dem logarithmischen Bereich zusammen.

Um die Turbulenzgrößen k und ε z.B. beim Standard $k-\varepsilon$ Modell an der wandnächsten Gitterzelle bestimmen zu können, werden zwei Annahmen getroffen:

- Produktion von k = Dissipation von k
- $\tau = \tau_w$ in der ganzen wandnahen Schicht

Es ergeben sich somit als Gleichungen für die turbulente kinetische Energie und die Dissipation:

$$k = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}} \tag{2.61}$$

$$\varepsilon = \frac{u_\tau^3}{\kappa y} \tag{2.62}$$

Um die Gültigkeit dieser Wandfunktion zu gewährleisten, muß die wandnächste Gitterzelle im logarithmischen Bereich des Geschwindigkeitsprofiles liegen. Dies ist für einen y^+-Wert größer 11.225 sichergestellt.
Im Rahmen dieser Arbeit wurde keine andere als die Standard-Wandfunktion verwendet. Deshalb wird darauf verzichtet, auf Modifikationen z.B. zur Berücksichtigung des Druckgradienten einzugehen. Die Standard-Wandfunktion wird sehr häufig bei Strömungsberechnungen eingesetzt. Sie reduziert erheblich die Netzauflösung im wandnahen Bereich und liefert trotz ihrer Modelleinfachheit oft hinreichend gute Ergebnisse.

2.3.2 2-Schichten Modell

Neben der Verwendung einer Wandfunktion in Wandnähe gibt es die Möglichkeit, diesen Strömungsbereich als seperate Zone anzusehen. Es kann dann in der Hauptströmung ein Turbulenzmodell angewendet werden, das für große Reynoldszahlen gilt, und im wandnahen Bereich wird ein einfaches Modell eingesetzt, das low-Re Effekte berücksichtigt, aber nicht die feine Rechennetzauflösung benötigt, das z.B. ein Zweigleichungsmodell, das für low-Re Effekte erweitert ist, benötigen würde, da die Gradienten von ε in eben diesem Strömungsgebiet sehr groß sind.
Einen solchen Weg bietet das Eingleichungsmodell von Wolfshtein [63] an. Hier wird neben den gemittelten Impulsgleichungen eine weitere Gleichung für die turbulente kinetische Energie gelöst, wie sie in Gleichung (2.33) gegeben ist. Die Änderung nach Wolfshtein wird in Gleichung (2.63) für die turbulente Viskosität deutlich.

$$\nu_t = C_\mu \sqrt{k} l_\mu \tag{2.63}$$

Die Dissipation ε wird über einen algebraischen Zusammenhang nach Gleichung (2.64) bestimmt und muß nicht durch ein sehr feines Rechennetz aufgelöst werden.

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{k^{\frac{3}{2}}}{l_\epsilon} \\ \text{mit} \quad l_\mu &= c_l y \left[1 - \exp\left(-\frac{Re_y}{A_\mu}\right)\right] \\ l_\epsilon &= c_l y \left[1 - \exp\left(-\frac{Re_y}{A_\epsilon}\right)\right] \\ c_l &= \kappa C_\mu^{-\frac{3}{4}} \\ A_\mu &= 70 \\ A_\epsilon &= 2c_l \end{aligned} \tag{2.64}$$

Dieses Eingleichungsmodell kann nun in Wandnähe zur Berechnung aller Strömungsgrößen eingesetzt werden, und in der Hauptströmung kann ein Turbulenzmodell für große Reynoldszahlen verwendet werden. Als Parameter zum Umschalten von einem auf das andere Turbulenzmodell bietet sich z.B. eine auf dem Wandabstand basierende turbulente Reynoldszahl $Re_y = \frac{\sqrt{k}}{\nu_t} y$ an. Es kann somit von einem 2-Schichten Modell gesprochen werden, das alle Vorteile eines höherwertigen Modells nutzt, die wandnahe Schicht auflöst, jedoch durch die Verwendung eines Eingleichungsmodells keine zu feine Diskretisierung im Wandbereich erfordert. 2-Schichten Modelle stellen somit eine Mittellösung dar zwischen der Wandfunktion, in der die Grenzschicht überhaupt nicht aufgelöst wird, und den sog. low-Re Modellen, die die Grenzschicht mit all ihren Gradienten auflösen.

2.3.3 Low-Re Erweiterung

Viele statistische Modelle sind aufgrund ihrer Modellierung nicht in der Lage, die viskose Dämpfung in der Grenzschicht, speziell in der viskosen Unterschicht, wiederzugeben. Eine gute Übersicht hierzu bieten [62] und [41]. Um dieses Defizit auszugleichen, ist das Einführen von Dämpfungsfunktionen eine geeignete Möglichkeit. Auf diese Weise werden wanddämpfende Effekte und die der molekularen Viskosität berücksichtigt. Dämpfungsfunktionen erweitern die Turbulenzmodelle für Strömungsgebiete niedriger Reynoldszahlen.
Diese Art der Wandbehandlung bietet den Vorteil, hochwertige statistische Modelle bis hin zur Wand verwenden zu können. Für den Bereich kleiner Reynoldszahlen erweiterte Modelle, sog. Low-Re Modelle, sind in der Lage, Grenzschichtphänomene wie Transition, Ablösung u.a. zu berechnen. Der Nachteil besteht in der Notwendigkeit, den sehr großen Gradienten von ε in Wandnähe auflösen zu müssen, sobald ein Zweigleichungsmodell oder höherwertigeres Modell

benutzt wird. Die hohe Netzauflösung im Wandbereich steigert die Rechenzeit gegenüber der Verwendung einer Wandfunktion auf ca. das Doppelte.
Das in Kapitel 2.2.1.1 beschriebene Eingleichungsmodell besitzt eine oben beschriebene Low-Re Erweiterung, erfordert jedoch keine höhere Netzauflösung der Grenzschicht als ein 2-Schichtenmodell, da die zusätzliche Transportgleichung für die modifizierte turbulente Viskosität $\tilde{\nu}_t$ gelöst wird.

3 Numerisches Lösungsverfahren

In Kapitel 2 wurde gezeigt, daß die meisten Strömungsphänomene mit einem System aus partiellen Differentialgleichungen beschrieben werden können. Diese müssen jedoch bis auf Ausnahmefälle numerisch gelöst werden. Neben der Turbulenzmodellierung, die den Input für die Numerik darstellt, ist die verwendete Numerik ein wesentlicher Einflußfaktor auf die Qualität der Rechenergebnisse. Hierunter ist die Diskretisierung des Gleichungssystems zu verstehen sowie die iterative Lösung desselben. In beiden Lösungsschritten, der Diskretisierung und der iterativen Lösung, stecken neben der Turbulenzmodellierung mögliche Fehlerquellen bei der Berechnung von Strömungsproblemen.
Aus diesem Grund spielt das numerische Lösungsverfahren eine wichtige Rolle und muß bei der Interpretation der Rechenergebnisse berücksichtigt werden. Für diese Arbeit wurde der kommerzielle CFD-Code FLUENT [15] in der Version 5.0 verwendet. In diesem Kapitel werden die numerischen Methoden vorgestellt, die von FLUENT verwendet werden und für das Verständnis der erzielten Ergebnisse wichtig sind.

3.1 Diskretisierungsverfahren

Der erste Schritt, das System partieller Differentialgleichungen, das sich aus der Turbulenzmodellierung ergibt, zu lösen, ist die Diskretisierung. Ziel dieses Lösungsschrittes ist es, das Gleichungssystem in ein System algebraischer Gleichungen für diskrete Punkte in Raum und Zeit zu überführen. Hierfür wird die reale Strömungsgeometrie durch ein numerisches Gitter diskretisiert (Abbildung: 3.1).
Für die nun bekannten Punkte des Problemgebietes werden die kontinuierlichen Bewegungsgleichungen diskretisiert. Neben Spektral-, Randelement-Methoden u.a. sind die bedeutensten Methoden:

- Finite-Differenzen-Verfahren
- Finite-Elemente-Verfahren
- Finite-Volumen-Verfahren

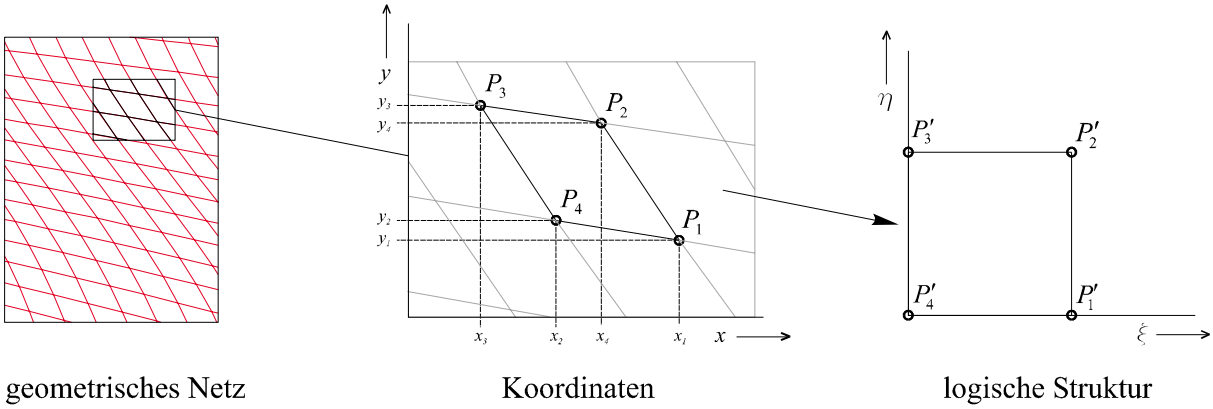

Abb. 3.1: Diskretisierung des geometrischen Problemgebietes

Die **Finite-Differenzen-Methode** ist die älteste Methode für die numerische Lösung von partiellen Differentialgleichungen. Sie wird EULER zugeordnet. Er soll diese Methode im 18. Jahrhundert eingeführt haben [13]. Die Bewegungsgleichungen werden in ihrer differentiellen Form herangezogen, und die benötigten Ableitungen werden zusammen mit dem Abstand als Differenzenquotient benachbarter Netzwerte ersetzt. Das Ergebnis ist eine algebraische Gleichung für jeden Netzpunkt, in der die gesuchte Variable an diesem und einer bestimmten Anzahl von benachbarten Punkten als Unbekannte auftaucht. Um die erste oder zweite Ableitung der Variablen zu approximieren, wird eine Taloyrreihenentwicklung oder ein Polynom-Fitting eingesetzt. Ein großer Nachteil dieser Methode ist, daß sie nicht konservativ ist.

Bei der **Finiten-Elemente-Methode** wird das Problemgebiet in diskrete, finite Elemente zerlegt. Entlang der diskreten Rechenpunkte werden für die zu berechnenden Werte konstante örtliche Formfunktionen angesetzt. Die gesuchte Verteilung der gesuchten Größe wird als Linearkombination der gewichteten Formfunktionen approximiert. Die konstanten Koeffizienten zur Gewichtung der Formfunktionen werden nun so bestimmt, daß der Fehler beim Einsetzen der approximierten Verteilung in die exakte Bestimmungsgleichung minimal wird. Die betrachteten Abweichungen werden als Residuen bezeichnet, und das System der Minimierungsgleichungen der Residuen selbst, z.B. nach dem Galerkin-Verfahren, bestimmt die unbekannten Koeffizienten der Approximation. Die Berechnung der diskreten Werte der Größe selbst wird also mit der Finiten-Elemente-Methode auf die Bestimmung der Koeffizienten als Lösung des Gleichungssystems der Minimierungsgleichungen reduziert.

Ausführlicher soll in diesem Abschnitt auf die **Finite-Volumen-Methode** eingegangen werden. Diese wird von dem verwendeten CFD-Code FLUENT eingesetzt.

Die zu diskretisierenden Erhaltungsgleichungen lassen sich nach JANICKA [26] alle in die allgemeine Form, die in Gleichung (3.1) für die Größe Φ dargestellt ist, überführen.

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho\Phi)}_{\text{Instationärer Term}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i \Phi)}_{\text{Konvektion}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right)}_{\text{Diffusion}} + \underbrace{S_\Phi}_{\text{Quelle}} \tag{3.1}$$

Die Größe Γ_Φ ist ein allgemeiner Diffusionskoeffizient. Im folgenden wird der instationäre Term weggelassen, da auf diesen in Kapitel 3.1.3 näher eingegangen wird.
Das Problemgebiet wird zunächst in eine diskrete Zahl von kontinuierlichen Kontrollvolumina unterteilt. Als Lösungsbasis dienen die Bewegungsgleichungen in ihrer integralen Form. Um zu dieser, ausgehend von Gleichung (3.1), zu gelangen, wird die differentielle Form zunächst integriert und dann mit Hilfe des Gaußschen Satzes von einem Volumenintegral in ein Oberflächenintegral für die konvektiven und diffusiven Terme überführt. Es ergibt sich Gleichung (3.2).

$$\int_S \left(\rho u_i \Phi - \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right) n_i dS = \int_V f dV \tag{3.2}$$

S ist die Oberfläche des Kontrollvolumens, dS ist ein Oberflächenelement, und n_i ist der Einheitsnormalenvektor auf die Kontrollvolumenoberfläche. Die Größe V steht für ein beliebiges Kontrollvolumen. Bei der weiteren Lösung von Gleichung (3.2) wird zwischen dem Oberflächen- und dem Volumenintegral unterschieden.

3.1.1 Approximation der Oberflächenintegrale

Die Gesamtoberfläche eines Kontrollvolumens (KV) um den Punkt P wird in Teilflächen unterteilt, deren Mittelpunkte im zweidimensionalen Fall mit n,s,w und e wie die Himmelsrichtungen bezeichnet werden. Die Teilflächen sind z.B. bei rechteckigen KV die vier Kanten. In Bild 3.2 ist ein solches dargestellt. Das gesuchte Integral setzt sich aus der Summe der Teilflüsse über die KV-Seiten S_j zusammen.
Die Approximation der Oberflächenintegrale wird in zwei Schritten durchgeführt [13]:

1. Approximation der Integrale (konvektiver und diffusiver Fluß) durch Werte auf der KV-Seite

2. Approximation der Variablenwerte auf der KV-Seite durch Werte im KV-Zentrum

Zur Durchführung des ersten Schrittes wird der Mittelwertsatz der Integralrechnung angewendet.

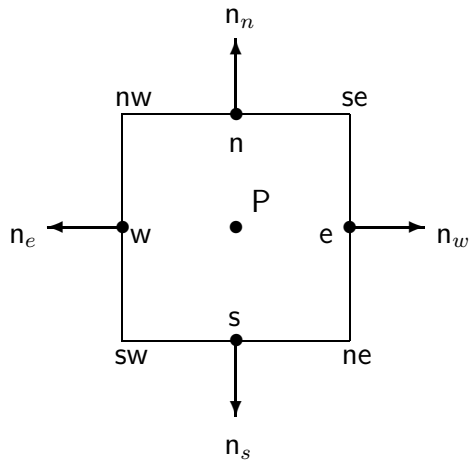

Abb. 3.2: Rechteck als Beispiel eines Kontrollvolumens

$$\int_S \left(\rho u_i \Phi - \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right) n_i dS_j = \sum_j \left(\rho u_i \Phi_{jm} - \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\bigg|_{jm}\right) n_i \delta S_j \tag{3.3}$$

Die Gleichung (3.3) ist exakt. Die erste Näherung wird gemacht bei der Bestimmung von Φ_m, dem geeigneten Mittelwert auf der KV-Seite S_j mit der Länge δS_j. Hierfür stehen die Mittelpunktsregel und bei Einbeziehung der Ränder (nw, ne, sw, se) der KV-Seite die Trapez- und die Simpsonsche Regel zur Verfügung. Von der Ordnung 2 sind die Mittelpunkts- und die Trapezregel. Die Regel von Simpson ist von 3. Ordnung. Nach der Mittelpunktsregel, die von FLUENT implementiert ist, ergibt sich für (3.3):

$$\sum_j \left(\rho u_i \Phi_m - \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\bigg|_{jm}\right) n_i \delta S_j \approx \sum_j \rho u_i n_i \Phi_j \delta S_j - \sum_j \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\bigg|_j n_i \delta S_j \tag{3.4}$$

Im zweiten Schritt müssen nun die unbekannten Größen auf dem KV-Rand bestimmt werden. Hierfür werden die Werte aus den KV-Zentren herangezogen. Es werden Verfahren für die konvektiven und diffusiven Flüsse unterschieden.

FLUENT bietet die Option, die **konvektiven Flüsse** nach dem first- oder second-order upwind, power law bzw. QUICK (Quadratic Upwind Interpolation for Convective Kinematics) - Verfahren zu bestimmen. Das einfachste Verfahren, das in der Literatur genannt wird, ist das Zentraldifferenzenverfahren (CDS). Dieses berechnet die Größe Φ auf der KV-Seite S_j durch lineare Interpolation zwischen den Werten in den benachbarten Knoten P und z.B. E für die Ostseite. Da ein großer Nachteil dieses Verfahrens ist, daß es zur numerischen Oszillation neigt, werden von FLUENT Upwind-Methoden verwendet. Die Grundidee dieser Verfahren ist,

daß die notwendige Interpolation in Abhängigkeit zur Richtung des Geschwindigkeitsvektors gesetzt wird. Der Abbruchfehler der jeweiligen Methode ist ein Maß für die Genauigkeit. Die Diskretisierungsordnungen sind:

first-order upwind	$\rightarrow$ 1. Ordnung
second-order upwind	$\rightarrow$ 2. Ordnung
QUICK	$\rightarrow$ 2. Ordnung
power law (Mischverfahren)	$\rightarrow$ 1. oder 2. Ordnung

Eine ausführlichere Beschreibung dieser Diskretisierungsverfahren ist in [13] gegeben.
Die **diffusiven Flüsse** werden in FLUENT immer von 2. Ordnung genau berechnet mit Hilfe des Zentraldifferenzenverfahrens. Man erhält im Falle kartesischer Gitter für die unbekannte Ableitung am KV-Rand, z.B. der Ostseite, folgenden Ausdruck:

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right|_e = \frac{\Phi_E - \Phi_P}{x_E - x_P} \tag{3.5}$$

Mit x sind hierbei die x-Koordinaten der Punkte P und E bzw. des KV-Seitenmittelpunktes e bezeichnet.

3.1.2 Approximation der Volumenintegrale

Neben den Oberflächenintegralen für die Diffusion und Konvektion muß noch ein Volumenintegral approximiert werden. Hierfür stehen wiederum eine Reihe von Approximationen zur Auswahl. Die einfachste hierbei ist die Mittelpunktsregel. Diese geht davon aus, daß der Wert von f im Mittelpunkt des KV, d.h. f_P, einen Mittelwert des KV darstellt. Dies läßt sich durch folgende Gleichung beschreiben:

$$\int_V f dV \approx f_P \delta V \tag{3.6}$$

Um die Rechengenauigkeit zu erhöhen, müssen neben dem KV-Mittelpunkt weitere Punkte auf dem KV-Rand in die Approximation miteinbezogen werden. Je nach dem, welche zusätzlichen Punkte und mit welcher Gewichtung diese in die Berechnung mit eingehen, spricht man von der Trapez- oder Simpsonregel.

3.1.3 Zeitdiskretisierung

Die Zeit kann als zusätzliche Dimension bei der Berechnung von instationären Strömungsproblemen angesehen werden. Sie muß ebenso wie die Raumkoordinaten diskretisiert werden. Der

entscheidene Unterschied zwischen räumlichen und zeitlichen Koordinaten ist die Wirkungsweise. Raumkoordinaten können im gesamten Strömungsfeld, d.h. vorwärts und rückwärts, Auswirkungen haben, zumindest bei elliptischen Problemen. Dagegen wirkt sich eine zeitliche Änderung nur in der Zukunft aus. Bei der Zeitdiskretisierung handelt es sich deshalb immer um eine Extrapolation. Zu diskretisieren ist der Term:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\Phi) \tag{3.7}$$

Es handelt sich hierbei lediglich um die erste Ableitung und ist somit ein parabolisches Problem. Bevor die Zeitdiskretisierung durchgeführt werden kann, muß die Diskretisierung im Ort, wie sie oben beschrieben wurde, umgesetzt werden. Als erster Schritt wird das zu berechnende Zeitintervall $[t_o, T]$ in einzelne Teilintervalle aufgeteilt:

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t_n \tag{3.8}$$

Bei den Verfahren, die Größe $\Phi(t_{n+1})$ zu bestimmen, gibt es zwei wesentliche Unterscheidungsmerkmale [51]:

- Ein- oder Mehrschrittverfahren
- explizites oder implizites Verfahren

Der Grundgedanke dieser beiden Unterschiede wird deutlich bei der Betrachtung, welche Zeitebenen benötigt werden, die neue gesuchte Zeitebene zu berechnen.

Einschrittverfahren $\rightarrow \Phi(t_{n+1}) = f(\Phi(t_{n+1}), \Phi(t_n))$
Mehrschrittverfahren $\rightarrow \Phi(t_{n+1}) = f(\Phi(t_{n+1}), \Phi(t_n), \Phi(t_{n-1}), ...)$

Implizites Verfahren $\rightarrow \Phi(t_{n+1}) = f(\Phi(t_{n+1}), \Phi(t_n), \Phi(t_{n-1}), ...)$
Explizites Verfahren $\rightarrow \Phi(t_{n+1}) = f(\Phi(t_n), \Phi(t_{n-1}), \Phi(t_{n-2}), ...)$

Diese beiden Unterscheidungsmerkmale sind beliebig miteinander kombinierbar. Eine Übersicht der verschiedenen Verfahren bietet [51]. Es sollen an dieser Stelle sowohl das explizite Eulerverfahren und das implizite Euler- als auch das Three-Point-Backward Verfahren vorgestellt werden, die von FLUENT eingesetzt werden.
Das **explizite Eulerverfahren** ist das einfachste von FLUENT verwendete Zeitdiskretisierungsverfahren. Die neuen Variablenwerte zum Zeitschritt t_{n+1} können direkt, explizit aus den vergangenen bestimmt werden. Die Berechnungsvorschrift ist in Gleichung (3.9) gegeben.

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right|_n \approx \frac{\Phi^{n+1} - \Phi^n}{\Delta t_n} = F(\Phi^n) \tag{3.9}$$

Der Superskript steht hierbei für den Zeitschritt. Die Funktion F ergibt sich in Zusammenhang mit der örtlichen Diskretisierung aus Gleichung (3.1). Bei diesem wie bei allen expliziten Verfahren kann die Zeitschrittweite Δt nicht beliebig gewählt werden. Aus Stabilitätsgründen muß die Courantzahl C kleiner 1 gewählt werden [51].

$$C = v\frac{\Delta t}{\Delta x} \tag{3.10}$$

Mit der Geschwindigkeit v wird die Größe Φ verteilt. Bei dem expliziten Eulerverfahren darf pro Zeitschritt die Verteilung von Φ maximal eine Gitterzelle weitertransportiert werden. Deshalb muß $C \leq 1$ gelten.

Implizite Verfahren besitzen diese Zeitschritteinschränkung nicht. Das **implizite Eulerverfahren** ist eine Einschrittmethode und von 1. Ordnung genau. Die Berechnungsvorschrift lautet:

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right|_n \approx \frac{\Phi^{n+1} - \Phi^n}{\Delta t_n} = F(\Phi^{n+1}) \tag{3.11}$$

Ein implizites Mehrschrittverfahren ist die **Three-Point-Backward Methode**. Sie ist von 2. Ordnung genau und in Gleichung (3.12) durch einen formelmäßigen Zusammenhang gegeben.

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right|_n \approx \frac{3\Phi^{n+1} - 4\Phi^n + \Phi^{n-1}}{2\Delta t_n} = F(\Phi^{n+1}) \tag{3.12}$$

Implizite Verfahren haben den Vorteil, daß bei der Wahl der Zeitschrittweite nicht auf die Stabilität der numerischen Methode geachtet werden muß. Lediglich die gewünschte Genauigkeit übt Einfluß auf die Zeitschrittweite aus. Als Nachteil ist in diesem Zusammenhang der höhere Speicherplatzbedarf gegenüber expliziten Verfahren zu nennen. Dieser aber überwiegt nicht den Vorteil der numerischen Stabilität.

3.2 Lösungsverfahren

Als Ergebnis der Diskretisierung erhält man für jedes Kontrollvolumen eine Gleichung der Form (3.13).

$$a_P \Phi_P = \sum_{nb} a_{nb} \Phi_{nb} + b_P \tag{3.13}$$

P steht für den KV-Mittelpunkt, a und b sind Koeffizienten, die sich aus der Diskretisierung ergeben, und der Index nb läuft über alle Nachbarpunkte, die nach der jeweiligen Diskretisierungsmethode in die Berechnung miteinbezogen werden. Als globales Gleichungssystem für das gesamte Strömungsgebiet, diskretisiert durch ein numerisches Gitter mit N Kontrollvolumina, ergibt sich ein lineares Gleichungssystem der Form:

$$a_P^i \Phi_P^i = \sum_{nb} a_{nb}^i \Phi_{nb}^i + b_P^i \qquad \text{für alle } i = 1,...,N \tag{3.14}$$

Zur Lösung eines solchen linearen, diskreten Gleichungssystemes gibt es eine Vielzahl von mathematischen Verfahren [14]. Es lassen sich grundsätzlich

- direkte
- iterative

Methoden unterscheiden. Ein direktes Lösungsverfahren scheidet aufgrund des hohen Aufwandes, der proportional zu $(N-1)!$ ist (N ist die KV-Anzahl), aus. Stellvertretend für die Klasse der iterativen Methoden sollen hier das Gauß-Seidel-, das Jacobi- und das ILU-Verfahren genannt werden. Diese sind in FLUENT implementiert.

3.2.1 Druckkorrektur

Im Gleichungssystem, das ein Strömungsproblem beschreibt, fehlt eine unabhängige Gleichung für den Druck. Dessen Gradient taucht in den Impulsgleichungen auf, aber für inkompressible Strömungen nicht in der Kontinuitätsgleichung. Man spricht in diesem Fall von einem gekoppelten Gleichungssystem. Anders ist dies bei kompressiblen Strömungen. In diesem Fall kann die variable Dichte aus der Kontinuitätsgleichung bestimmt werden, mit deren Hilfe dann über eine weitere Gleichung der Druck berechnet werden kann. Es ergibt sich ein entkoppeltes Gleichungssystem.
Die Druckbestimmung für inkompressible Problemstellungen kann mit Hilfe einer künstlichen Kompressibilität oder durch ein sog. Druckkorrekturverfahren gelöst werden. Der grundsätzliche Gedanke hierbei besteht darin, in einem ersten Schritt die Geschwindigkeitskomponenten aus den Impulsgleichungen zu bestimmen. Diese werden dann zusammen mit dem Druck über eine Druckkorrektur korrigiert, so daß die Kontinuitätsgleichung erfüllt ist. Dies ist ein iterativer

Prozeß, bis sowohl Impulsgleichungen als auch Kontinuitätsgleichung erfüllt sind. Von FLUENT werden das SIMPLE-, SIMPLEC- und das PISO-Verfahren als Druckkorrektur-Methode zur Auswahl angeboten.
Das **SIMPLE**-Verfahren (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations) von PATANKAR [43] kann in folgende Schritte aufgeteilt werden zur Bestimmung des Geschwindigkeitsfeldes u_i^{k+1} und Druckfeldes p^{k+1} zum Iterationsschritt $k+1$:

(1) Lösen der Impulsgleichungen mit einem geschätzten Druckfeld p^* oder dem vom Iterationsschritt $k \rightarrow$ Geschwindigkeitsfeld u_i^*

(2) Einsetzen des berechneten Geschwindigkeitsfeldes u_i^* in die Kontinuitätsgleichung $\rightarrow$ Massenquelle in der Kontinuitätsgleichung

(3) Definition von Korrekturen $u_i^{'} = u_i^{k+1} - u_i^*$, $p^{'} = p^{k+1} - p^*$

(4) Aus den Impulsgleichungen mit dem geschätzten Druckfeld, der Gleichung für die Massenquelle und den Impulsgleichungen zur Berechnung der Größen zum Iterationsschritt k kann eine Beziehung der Geschwindigkeitskorrekturen $u_i^{'}$ und $p^{'}$ hergestellt werden. Hierbei werden Geschwindigkeitskorrekturen in den Nachbarpunkten von P vernachlässigt.

(5) Dieser Zusammenhang wird in die Gleichung für die Massenquelle eingesetzt $\rightarrow p^{'}$

(6) Mit der bekannten Druckkorrektur kann $u_i^{'}$ bestimmt werden.

(7) Im letzten Schritt werden nun die angenäherten Größen u_i^{k+1} und p^{k+1} berechnet.

Diese oben genannten Schritte müssen solange durchgeführt werden bis die Korrekturgrößen für Druck und Geschwindigkeit näherungsweise Null sind. Eine von mehreren Modifikationen des SIMPLE-Algorithmus ist die **SIMPLEC** (SIMPLE Consistent)-Methode. Der Vorteil von diesem Verfahren besteht darin, daß keine Unterrelaxation für den Druck benötigt wird und somit die Konvergenz sich erhöht.
Ein weiteres Druckkorrekturverfahren ist der sog. **PISO**-Algorithmus (Pressure-Implicit with Splitting of Operators). Er ist eine Weiterentwicklung des SIMPLE-Verfahrens. Eine Schwäche des SIMPLE ist, daß nach dem einmaligen Lösen der Druckkorrekturgleichung die Impulsbilanz noch nicht erfüllt ist. Um diesen Iterationsprozeß effizienter zu gestalten, werden zwei Korrekturen eingeführt:

- Neighbor Correction
- Skewness Correction

Für weitere Einzelheiten zu den beschriebenen Verfahren siehe [13].

3.2.2 Unterrelaxation

Eine entscheidende Rolle bei der Berechnung von Strömungsproblemen spielt die Stabilität des verwendeten numerischen Werkzeuges. Um die Stabilität der oben beschriebenen Verfahren zu erhöhen, ist es sinnvoll, eine sogenannte Unterrelaxation einzuführen.
Bei iterativen Lösungsalgorithmen können Instabilitäten auftreten, wenn die Änderung der jeweiligen Größe von einem Iterationsschritt zum anderen nicht beschränkt wird. Dieses Limitieren der Größenänderung zwischen zwei Iterationsschritten wird als Unterrelaxation bezeichnet.

$$\Phi^{k+1} = \Phi^k + \alpha\Delta\Phi \tag{3.15}$$

Die Größe α wird als Unterrelaxationsfaktor bezeichnet.

3.2.3 Multigrid

Im Bereich der CFD ist die benötigte Zeit für eine Berechnung und damit die Effizienz der numerischen Verfahren von hoher Bedeutung. Aus diesem Grund sind Methoden wichtig, die die herkömmlichen Lösungsalgorithmen der linearen Gleichungssysteme beschleunigen können. Neben konjungierten Gradientenverfahren ist das Mehrgitterverfahren ein weitverbreitetes und von FLUENT implementiertes Verfahren.
Bevor ein Mehrgitterverfahren angewendet werden kann, werden ausgehend von dem erstellten feinen numerischen Netz durch Vergrößerung der KV gröbere Netze erzeugt. Dies beruht auf dem Grundgedanken, daß ein iteratives Lösungsverfahren die Fehlerkomponenten einer Näherungslösung sehr effizient eliminiert, deren Wellenlängen der Gittermaschenweite entsprechen. Dies trifft aber nicht für sehr langwellige Fehler zu. Um diese zu kompensieren, werden viele Iterationsschritte benötigt. Genau hier setzt das Mehrgitterverfahren an. Durch mehrere Gittermaschenweiten der verschiedenen Netzebenen werden die Fehler in ihrem gesamten Frequenzspektrum schneller eliminiert.
Auf welche Weise nun die unterschiedlichen Netzebenen miteinander verbunden werden, wie und wieviele Netzebenen erzeugt werden können, kann sehr verschieden realisiert werden. FLUENT hat ein algebraisches Mehrgitterverfahren (AMG) und ein sogenanntes full-approximation storage (FAS) realisiert.
Das **AMG**-Verfahren wird als algebraisch bezeichnet, da keine geometrisch gröberen Netze ausgehend von dem feinen Berechnungsnetz erzeugt werden. Dies hat den Vorteil, daß keine gröberen Netzebenen generiert oder gespeichert werden müssen, und ebenso entfällt es, Fluß- oder Quellterme für die groben Netzebenen zu entwickeln. Besonders für unstrukturierte Netze wirken sich diese Vorteile stark aus. Die notwendigen Gleichungen für die einzelnen Netzebenen werden rein algebraisch erzeugt.

Anders sieht dies bei dem **FAS**-Verfahren aus. Hier wird eine Anzahl, die frei wählbar ist, unterschiedlicher Netzebenen erzeugt. Für jede einzelne von ihnen werden die diskreten Bewegungsgleichungen abgeleitet und müssen neben den Geometriedaten des Netzes abgespeichert werden.
Wie die Parameter der beiden Mehrgitterverfahren definiert sind, um die erzielten Lösungen von einer Netzebene auf die andere zu übertragen, kann in [15] nachgelesen werden. Hier wird auch ausführlich erklärt, in welcher Reihenfolge die verschiedenen Netzebenen je nach Verfahren gelöst werden. Möglich sind z.B. V- und W-Zyklen. In Bild 3.3 ist ein W-Zyklus dargestellt.

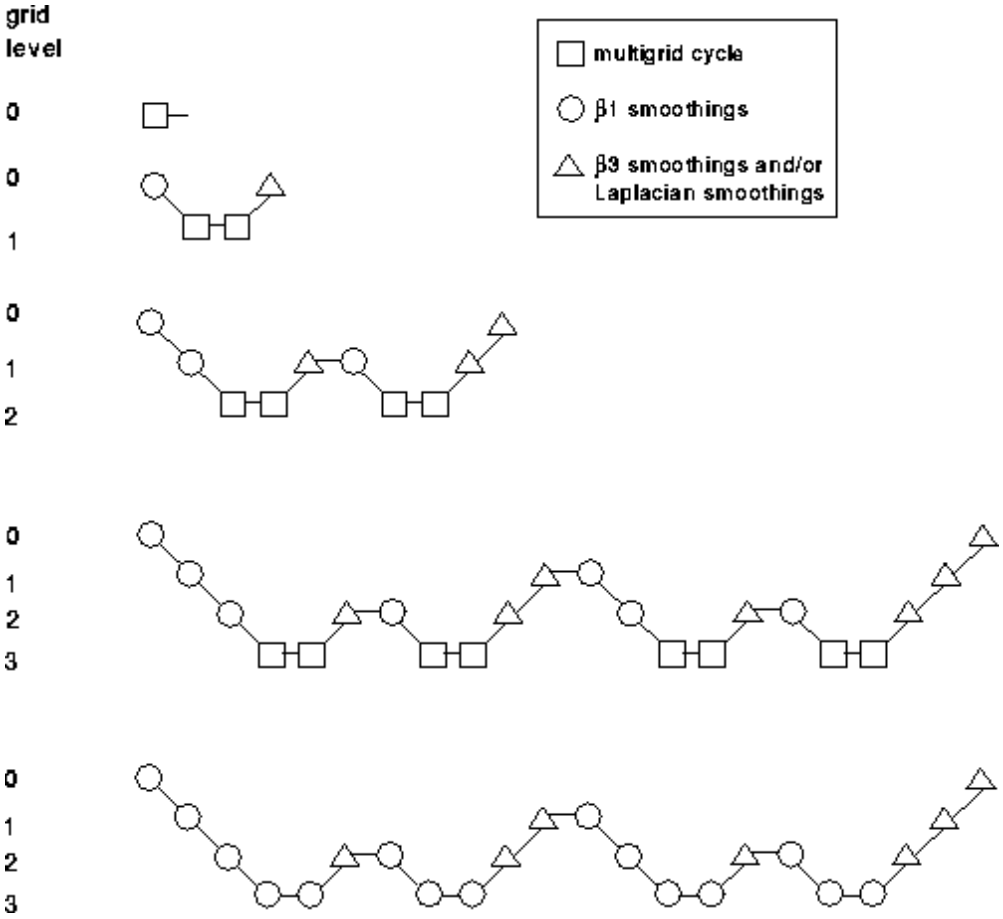

Abb. 3.3: W-Zyklus, Multigrid-Verfahren aus [15]

Die Parameter β werden zum Glätten der Lösung auf den unterschiedlichen Netzebenen verwendet.

4 Netzgenerierung

Die Grundlage für jede numerische Strömungsberechnung ist die geometrische Diskretisierung des Problemgebietes. Das Rechennetz beeinflußt neben der Turbulenzmodellierung und der Genauigkeit des Diskretisierungsverfahrens in Raum und Zeit die Qualität der erzielbaren Ergebnisse. Aus diesem Grund werden einige grundlegende Sachverhalte zum Themengebiet Netzgenerierung aufgezeigt.
Bei der Netzgenerierung muß bereits auf das zu erwartende Strömungsergebnis als auch auf den CFD-Code eingegangen werden. Dies soll im folgenden erläutert werden. Die CFD-Codes können im Hinblick auf das Rechennetz in zwei Klassen eingeteilt werden:

- strukturierter Code
- unstrukturierter Code

Dementsprechend muß auf die logische Anordnung der einzelnen Gitterzellen geachtet werden. Ein strukturierter Code verlangt ein strukturiertes Netz. Dieses ist durch eine regelmäßige Anordnung der Gitterpunkte gekennzeichnet. Es gibt somit Richtungen, entlang derer die Anzahl der Gitterpunkte gleich ist. Im zweidimensionalen Fall bedeutet dies, daß die Gitterpunkte durch die Zähler i und j eindeutig beschrieben werden können und sich benachbarte Punkte um 1 im Zähler unterscheiden. Dies hat als Nachteil zur Folge, daß die geometrische Lage der Gitterpunkte eingeschränkt ist, da eine gewisse Struktur eingehalten werden muß.
FLUENT 5.0 ist ein unstrukturierter Code. Es gibt somit keine Beschränkung in der Gestaltung der Netzstruktur, und die Gitterpunkte müssen keiner Ordnung folgen. Dies hat den Vorteil, daß die Wahl der Gitterzellentypen uneingeschränkt ist, diese beliebig miteinander kombinierbar sind und die Flexibilität der Netzgenerierung in Bezug auf komplexe Geometrien gegenüber strukturierten Netzen erheblich höher ist. Bei sehr aufwendigen Geometrien schließt sich sogar die Verwendung strukturierter Netze aus. Auch im Hinblick auf eine Automatisierung der sehr zeitintensiven Netzgenerierung bietet der unstrukturierte Netztyp erhebliche Vorteile. Der Nachteil ist im erhöhten Speicherbedarf zu sehen, da die Nachbarschaftbeziehungen zu benachbarten Gitterzellen mittels aufwendiger Datenstrukturen gespeichert werden müssen.

Unabhängig von dem Netztyp gibt es unterschiedliche Gitterelemente. Die wichtigsten sind im zweidimensionalen Fall Dreiecke und quadrilaterale Elemente. Im Rahmen dieser Arbeit wurden für die Simulationen ausschließlich quadrilaterale Kontrollvolumina verwendet. Der Grund hierfür ist in der höheren Konvergenzgeschwindigkeit zu sehen, auch wenn der Aufwand steigt, ein gutes Netz zu generieren. Dieser Sachverhalt wurde durch eine Voruntersuchung abgeklärt. Hierfür wurde eine stationäre Einzelprofilumströmung sowohl mit ca. 30.000 quadrilateralen Zellen als auch mit ca. 21.000 unstrukturiert angeordneten Tetraederelementen berechnet. Die beiden Rechnungen wurden nach Erreichen der gleichen Ergebnisqualität beendet. Das Konvergenzverhalten ist nachstehenden FLUENT-Plots der Residuenverläufe zu entnehmen, wobei rechts Tetraeder- und links quadrilaterale Elemente verwendet wurden.

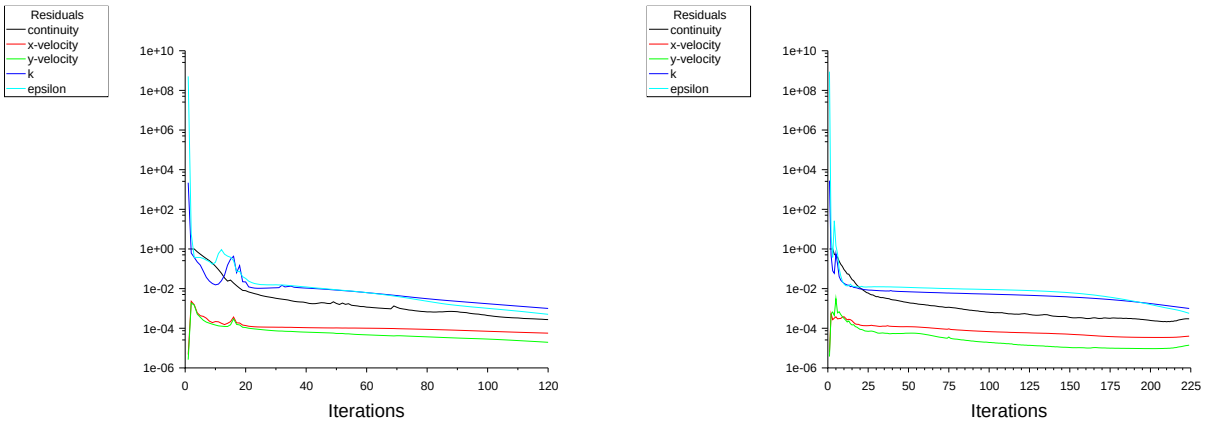

Abb. 4.1: Konvergenzgeschwindigkeit dargestellt durch den Residuenverlauf

Es zeigt sich bei dem Vergleich dieser beiden Elementtypen, daß die Anzahl der benötigten Iterationen sich um den Faktor 2 unterscheidet. Ein weiterer Vorteil ergibt sich bei der Verwendung von quadrilateralen Zellen, wenn die Netzgenerierung betrachtet wird. Es ist ein wesentlich größerer Einfluß auf eine definierte Knotenverteilung möglich, und es kann das Netz exakt auf das Strömungsproblem abgestimmt werden. Demgegenüber läuft bei der Verwendung von Tetraedern die Netzgenerierung automatisch ab, was den Zeitaufwand einerseits minimiert, sich aber andererseits negativ auf die Netzqualität auswirkt.

4.1 Netzstruktur

Durch die Verwendung des unstrukturierten Lösers von FLUENT kann der Netzelementtyp frei gewählt werden, aber auch die allgemeine Struktur. Für die Berechnung von Profilumströmungen mit Hilfe von rechteckigen Netzelementen werden grundsätzlich drei Strukturarten unterschieden:

- H-Netz
- C-Netz
- O-Netz

Die drei unterschiedlichen Großbuchstaben sind für sich aussagefähig genug, und in Abbildung 4.2 sind sie durch eine Skizze veranschaulicht.

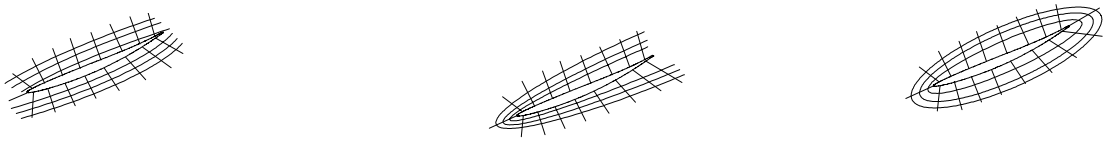

Abb. 4.2: H-Netz C-Netz O-Netz

Die drei Netzstrukturen können frei wählbar miteinander kombiniert werden. Das einfach zu generierende H-Netz hat eine Schwäche im Profilvorderkantenbereich. Hier wird die Geometrie schlechter als in den beiden anderen Varianten wiedergegeben. Da dieser Strömungsbereich für Turbomaschinenberechnungen aber sehr entscheidend ist, sollte dieser Netztyp auf das Kernströmungsgebiet beschränkt bleiben.
Das C-Netz hat den Vorteil, daß im Nachlaufbereich des Profiles weiterhin eine gute Auflösung gegeben ist. Dies setzt allerdings voraus, daß die Ausbreitungsrichtung des Profilnachlaufes bekannt und stationär ist.
Für den instationären Fall verbleibt somit im profilnahen Bereich das O-Netz. Es bietet eine hohe Auflösung des Strömungsgeschehens in der Grenzschicht und vermeidet unnötige Zellen stromab des Profiles. Es ruft auch keine unnötigen Probleme am Interface zweier relativ zueinander bewegten Rechengitter hervor, wie später zu sehen ist.

4.2 Netzqualität

Aus Kapitel 3 lassen sich die drei folgenden Kriterien ableiten, nach denen die Güte eines Rechengitters beruteilt werden kann:

- Skewness
- Aspect Ratio
- Expansionsrate

Die **Skewness** ist ein Maß für die Verzerrung der einzelnen Kontrollvolumina, bzw. für die Orthogonalität. Die Winkel eines Kontrollvolumens sollten möglichst nahe dem rechten Winkel sein, da die konvektiven und diffusiven Flüsse bei Finite-Volumen-Verfahren als Skalarprodukte des entsprechenden Flußvektors mit dem Oberflächenvektor bestimmt werden. Aus diesem Grund ist es auch sinnvoll das Rechennetz in Strömungsrichtung zu orientieren.
Unter dem **Aspect Ratio** wird das Seitenverhältnis eines Netzelementes verstanden. Dieses Maß übt Einfluß aus auf die Konditionierung des diskretisierten Gleichungssystems, was sich wiederum auf die Effizienz der Lösungsalgorithmen auswirkt. Deshalb sollte der Wert 0,1 nicht unter- bzw. der Wert 10 nicht überschritten werden.
Die **Expansionsrate** kennzeichnet die Volumenänderung von einem Kontrollvolumen zu einem benachbarten. Die Expansionsrate beeinflußt den Abbruchfehler eines Diskretisierungsverfahrens und wirkt sich somit unmittelbar auf die Qualität der Rechenergebnisse aus. Es ist darauf zu achten, daß ein Verhältnis von 0,5 bzw. 10 eingehalten wird.
Neben den oben genannten Kriterien, die zur Beurteilung eines numerischen Rechennetzes geeignet sind, lassen sich weitere Kriterien aus der Numerik, den Turbulenzmodellen und der Art des Strömungsproblemes ableiten, die das Rechennetz erfüllen muß. Die wichtigsten Punkte bei der Berechnung einer einstufigen Turbine sind:

- Abstand der wandnächsten Gitterzelle zur Wand
- Abstand des Rechengebietrandes vor dem 1. Gitter bzw. nach dem 2. Gitter
- Lage und Netzgestaltung am Interface zwischen zwei benachbarten Rechennetzen einer instationären Rechnung

Der Abstand der wandnächsten Gitterzelle von einer die Strömung begrenzenden Wand muß im Hinblick auf die Wandbehandlung durch die Turbulenzmodellierung gewählt werden. Es lassen sich y^+-Werte (Definition siehe Kapitel 2.3.1) als Maß für den Wandabstand angeben. Bei der Verwendung der low-Re Erweiterung des Eingleichungsmodelles nach SPALART und ALLMARAS sowie für das Eingleichungsmodell nach WOLFSHTEIN sollte gelten:

$$y^+ \approx 1 \tag{4.1}$$

Bei der Wandbehandlung durch die Standard-Wandfunktion muß sichergestellt sein, daß die wandnächste Gitterzelle im logarithmischen Bereich liegt. Deshalb muß sichergestellt sein, daß die Beziehung (4.2) erfüllt ist.

$$y^+ \geq 11,225 \tag{4.2}$$

Der Abstand der wandnächsten Gitterzelle kann a priori nicht exakt bestimmt werden, da in die Berechnung von y^+ die Wandschubspannung mit eingeht. Dies stellt somit einen iterativen Prozeß dar.
Da bei den beiden weiter oben genannten Punkten numerische Aspekte berücksichtigt werden müssen, werden diese jeweils in einem seperaten Kapitel betrachtet.

4.3 Lage des Ein- und Ausströmrandes

Aufgrund der Eigenschaften des zu lösenden Gleichungssystems kann die Lage des Ein- bzw. Austrittsrandes nicht beliebig gewählt werden.
Gleichungssysteme partieller Differentialgleichungen können allgemein in drei Klassen unterteilt werden. Dies sind elliptische, parabolische und hyperbolische Gleichungssysteme. Die 3 verschiedenen Typen der partiellen Dgln beschreiben verschiedene physikalische Phänomene:

- elliptisch $\rightarrow$ Gleichgewichtszustand
- parabolisch $\rightarrow$ Diffusionsvorgänge
- hyperbolisch $\rightarrow$ gerichtete Ausbreitungszustände (Schwingungen, Wellen, ...)

Je nach dem, welchen Charakter ein Gleichungssystem besitzt, müssen die Randbedingungen formuliert werden. Dies hat Rückwirkungen auf die Lage eben dieser.
Im Rahmen dieser Arbeit wurden stationäre und instationäre, aber immer inkompressible Strömungsprobleme untersucht. Ein stationäres, inkompressibles Problem zeichnet sich durch seinen elliptischen Charakter aus, das instationäre, inkompressible dagegen weist eine Mischung aus elliptischem und parabolischem Verhalten auf. Der elliptische Charakter hierbei ist darauf zurückzuführen, daß sich Information im Raum sowohl in als auch gegen die Strömungsrichtung ausbreitet. Der parabolische Einfluß ergibt sich aus der Tatsache, daß in der Zeit die Information nur in eine Richtung, die der Zukunft, gelangt.
Das elliptische Verhalten muß bei der Wahl der Lage des Rechengebietsrandes stromauf von einem Profil beachtet werden. Da sich die Information über das Profil, bzw. jede Änderung, auch gegen die Strömungsrichtung ausbreiten kann, muß diese Informationsausbreitung entweder am Einströmrand kompensiert werden oder dieser soweit von der Änderungs-/Störquelle der Profilvorderkante stromauf liegen, daß dissipative Effekte die Störung ausgeglichen haben. Hierbei wurde von der Annahme ausgegangen, daß die Randbedingung am Einströmrand konstant gehalten wird. Wird eine aus dem Strömungsgebiet kommende Störung am Rechenrand nicht reflektiert, sondern kompensiert, spricht man von einer nichtreflektierenden Randbedingung. Der mathematische Grundgedanke, der bei einer solchen Randbedingung umgesetzt

ist, basiert auf einem Charakteristikenverfahren. Dies setzt allerdings einen hyperbolischen Gleichungscharakter voraus.
Aus diesem Grund wurde bei der Berechnung der im folgenden dargestellten Probleme die zweite Möglichkeit, den Einströmrand weit genug vor die Profilvorderkante zu legen, gewählt. Die gleiche Überlegung gilt auch für den Ausströmrand.
Im Rahmen von Voruntersuchungen wurde am Beispiel eines Axialpumpenlaufrades die Lage des Einströmrandes bestimmt. Hierbei wurde der Abstand a von der Profilvorderkante zum Einströmrand variiert (vgl. Abb. 4.3). Es wurde a entlang dem Winkel δ gemessen, der den Winkel zwischen der Horizontalen und der Profilsehne l bildet.

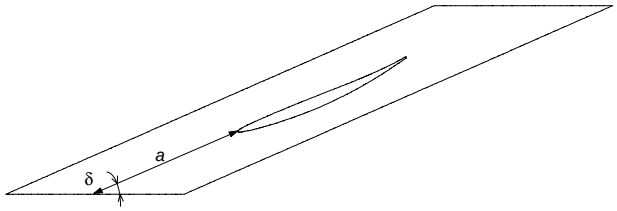

Abb. 4.3: Schematische Darstellung des Problemgebietes

Bei der Betrachtung des stationären Strömungsfeldes in Abhängigkeit des Abstandes a zeigen sich sehr deutliche Unterschiede, die auf die oben angesprochenen Rückwirkungen und Restriktionen der Eintrittsrandbedingung zurückgeführt werden können. Im Falle a/l=1,0 sind sehr deutlich Verzerrungen und Deformationen der in Abbildung 4.4 exemplarisch spezifizierten Iso-Linie der Geschwindigkeit zu erkennen.

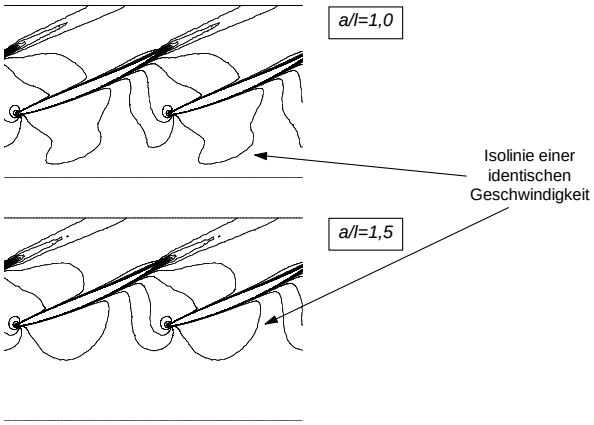

Abb. 4.4: Konturen der Geschwindigkeit für a/l=1,0 und a/l=1,5

Für Werte im Bereich $a/l \geq$ 1,5 können die oben beschriebenen Effekte nicht beobachtet

werden, so daß für alle weiteren Rechnungen der Einströmrand mindestens 1,5 Sehnenlängen in Strömungsrichtung vor der Profilvorderkante zu liegen kommt.

4.4 Interface

Bei der instationären Berechnung einer Turbinenstufe werden zwei separate Rechennetze erforderlich. Eines, das den stationären Stator diskretisiert, und eines, das die Bewegung des Rotors ermöglicht. Es kommt somit im Rahmen einer instationären Berechnung einer solchen Problemstellung zu einer Relativbewegung zweier Rechennetze, deren Berührebene als Interface bezeichnet wird.
Im Rahmen der Finite-Volumen-Verfahren gibt es verschiedene numerische Methoden, die jeweiligen Flüsse über das Interface hinweg zu berechnen. Von FLUENT werden hierfür drei unterschiedliche Möglichkeiten angeboten, die das Interfaceproblem verdeutlichen:

- Rotierendes Bezugssystem
- Mischungsebenenmodell
- Sliding Mesh Modell

Die Berechnung einer instationären Stator-Rotor Interaktion mit einem **rotierenden Bezugssystem** ist die einfachste der drei genannten Möglichkeiten. Es handelt sich hierbei um eine stationäre Näherung (d.h. die beiden Rechengitter haben keine Relativbewegung), in der sich die einzelnen Kontrollvolumina aufgrund verschiedener Bezugssysteme mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten bewegen. Diese Vereinfachung ist zulässig, wenn die Stator-Rotor Interaktion sehr gering ist und die Strömung am Interface gleichförmig ist.
Das **Mischungsebenenmodell** bildet die Physik besser ab. Die grundsätzliche Idee hierbei ist es, zunächst für beide Rechennetze für sich eine stationäre Lösung zu berechnen. In einem nächsten Schritt werden dann die stationär erhaltenen Größen am Interface, d.h. Statoraustritt und Rotoreintritt, über den Umfang gemittelt, um dann als Randbedingung für eine weitere stationäre Rechnung der beiden Fluidzonen zu dienen. Dies ist ein iterativer Prozeß, bis eine Konvergenz erreicht ist. Um dieses Modell anwenden zu können, muß ebenfalls eine schwache Interaktion vorausgesetzt werden. Es bietet jedoch die Möglichkeit, mit einem erheblich geringeren Aufwand als das Sliding Mesh Modell einen ersten Überblick des Strömungsfeldes zu erhalten.
Das **Sliding Mesh Modell** ist das hochwertigste Modell der drei genannten. Es ermöglicht eine voll instationäre Simulation. Es werden bei diesem Modell die Flüsse über das Interface hinweg von einem Kontrollvolumen zum anderen berechnet, so daß die Interaktion der beiden benachbarten Fluidzonen voll berücksichtigt wird. Hierfür ist es nicht notwendig, daß die

Gitterpunkte der beiden Interfaceseiten für jeden Zeitschritt aufeinander zu liegen kommen, da ein Interpolationsverfahren verwendet wird.

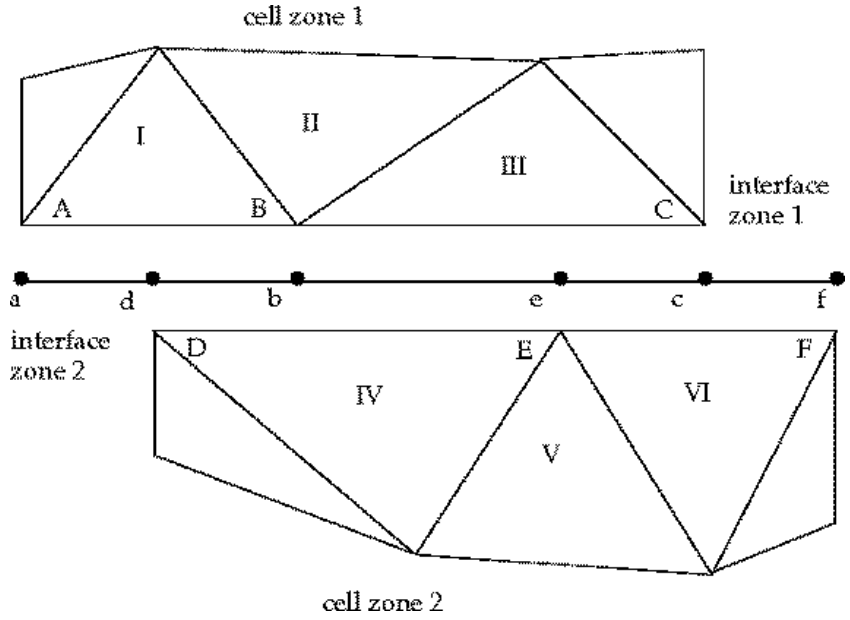

Abb. 4.5: Sliding Mesh Interface aus FLUENT [15]

In Abbildung 4.5 ist ein Interfaceausschnitt zweier benachbarter Gitter, bestehend aus Tetraedern, dargestellt. Die Interface-Zonen bestehen zum einen aus den Kontrollvolumenrändern (Faces) A-B und B-C und zum anderen aus D-E und E-F. Die Überschneidungen dieser Zonen rufen die Faces a-d, d-b, b-e, etc. hervor. Die Faces, die in dem Gebiet liegen, wo sich die beiden Gitterzonen überschneiden, werden zu einem netzinneren Gebiet zusammengefaßt, während die anderen (a-d und c-f) als periodische Zone aufgefaßt werden. Um z.B. den Fluß über das Interface in das Kontrollvolumen (KV) IV zu berechnen, wird das Face D-E vernachlässigt. Dafür werden die Faces d-b und b-e verwendet, um die notwendigen Informationen von den KV I und III in das KV IV zu übertragen. Hierbei werden Interpolationsverfahren angewendet. Um die Fehlerquelle eines Interfaces möglichst gering zu halten, sollten bei der Netzgenerierung drei Punkte beachtet werden:

- gleiche Knotenverteilung auf beiden Interfaceseiten
- äquidistante Knotenverteilung entlang des Interfaces
- Verwendung von rechtwinkligen Netzelementen

Da das Sliding Mesh Modell das einzige Modell ist, das die Stator-Rotor Interaktion in Bezug auf die Nachlaufuntersuchung in ausreichendem Maße beschreibt, wurde es für alle durchgeführten instationären Rechnungen eingesetzt.

5 Stationäre Nachlaufströmung

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse vorgestellt, die bei der Berechnung einer stationären Nachlaufströmung erzielt wurden. Zur Validierung der numerischen Ergebnisse stand eine experimentelle Untersuchung von zwei Einzelprofilen im Windkanal zur Verfügung [39]. Auf der Basis des Vergleiches zwischen experimentellen und numerischen Resultaten kann eine erste Vorauswahl in Bezug auf die geeigneten Turbulenzmodelle getroffen werden. Dieser Vorgehensweise liegt die Annahme zugrunde, daß ein stationäres Problem geringere Anforderungen an die numerische Simulation stellt als das endgültig zu untersuchende instationäre Strömungsproblem einer 1-stufigen Turbine.

5.1 Stand des Wissens

Der Nachlauf ist im Bereich der Turbomaschinen ein bereits oft untersuchtes Teilproblem, speziell im stationären Fall. Es werden i.a. zwei Bereiche unterschieden, wobei wake synonym zu Nachlauf verwendet wird. Diese sind

- der near wake und
- der far wake.

In Ausnahmefällen wird zusätzlich noch ein sogenannter Hinterkantenbereich klassifiziert. Bei unterschiedlichen Autoren werden zur genauen örtlichen Trennlinie dieser beiden Bereiche verschiedene Angaben gemacht. ZACCARIA und LAKSHMINARAYANA [65] sprechen vom far wake Bereich ab ca. 20 % der Sehnenlänge stromab der Profilhinterkante. PATEL und SCHEURER [42] dagegen ziehen die Grenze anhand der Impulsverlustdicke Θ. Für den Wakebereich, der weniger als das 350-fache der Impulsverlustdicke von der Hinterkante entfernt liegt, sprechen sie vom near wake Gebiet.
Neben der örtlichen Unterscheidung des Profilnachlaufes in zwei Zonen muß unterschieden werden, ob der Nachlauf von einem **Einzelprofil** oder von einem stationären **Schaufelgitter** betrachtet wird. RAJ und LAKSHMINARAYANA treffen hierzu in [48] eine Aussage. Der wesentliche Unterschied ist, daß es bei einer Gitterströmung zu einer gegenseitigen Beeinflussung

der einzelnen Profilnachläufe kommt und somit keine eindeutige Freistromgeschwindigkeit angegeben werden kann. Es wird auch festgestellt, daß der Gitternachlauf immer asymmetrisch ist, was aus der Belastung der Schaufeln und den Gedächtniseffekten der Strömung resultiert. Ein zu vernachlässigender Faktor hingegen ist der zusätzlich auftretende Druckgradient von Druck- zu Saugseite eines Schaufelgitters.
Übereinstimmend werden der Nachlaufströmung in den verschiedenen Distanzen zur Profilhinterkante die gleichen Eigenschaften zugeschrieben. Im near wake tritt die größte Defektgeschwindigkeit auf, und die Profilform hat den stärksten Einfluß. Hinzu kommmt, daß die aerodynamische Belastung der umströmten Schaufel sich in diesem Bereich markant auswirkt. Der Nachlauf hat nach [65] auf der Saugseite eine größere Ausdehnung als auf der Druckseite. Die Unterschiede zwischen Saug- und Druckseite werden jedoch immer stärker ausgeglichen, bis sie im far wake nicht mehr festzustellen sind. Stromab des near wakes, der vor allem durch die Vermischung der beiden Grenzschichten beeinflußt wird, tritt die Interaktion des Nachlaufes mit der freien Außenströmung in den Vordergrund.
Für den far wake Bereich kann mit hoher Genauigkeit eine analytische Lösung für das Geschwindigkeitsprofil angegeben werden. In JANICKA [26] und [57] ist dies für den zweidimensionalen Fall getan. Hierbei wird neben der Zweidimensionalität eine langsame Entwicklung der Strömung in ihrer Vorzugsrichtung und das Fehlen fester Wände vorausgesetzt. Aufgrund der getroffenen Annahmen können nun die einzelnen Terme der Impulsgleichungen abgeschätzt werden. Es ergeben sich zwei vereinfachte Formen der beiden Impulsgleichungen. Für die Querstromrichtung ergibt sich:

$$\frac{P}{\rho} + \overline{v'}^2 \quad = \quad \frac{P_o}{\rho} \tag{5.1}$$

P_o ist hierbei der Druck in der Umgebung des turbulenten Feldes. Für die Hauptstromrichtung erhält man:

$$U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{u'v'}) \quad = \quad 0 \tag{5.2}$$

oder auch:

$$\frac{\partial U(U-U_o)}{\partial x} + \frac{\partial V(U-U_o)}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{u'v'}) \quad = \quad 0 \tag{5.3}$$

Mit U_o wird hierbei die freie Außenstromgeschwindigkeit bezeichnet. Wird nun über y integriert, so ergibt sich:

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty} U(U-U_o)dy \quad = \quad 0 \tag{5.4}$$

Daraus folgt, daß der Integrand konstant ist. Als Impulsverlust M wird definiert:

$$\rho \int_{-\infty}^{\infty} U(U - U_o)dy \quad = \quad M \tag{5.5}$$

Aus der Größe M läßt sich eine weitere Größe θ bestimmen, die als Impuls(-Verlust)-Dicke bezeichnet wird.

$$M \quad = \quad -\rho U_o^2 \theta \tag{5.6}$$

Die Impulsgleichung läßt sich bei Nachlaufströmungen weiter vereinfachen, wenn angenommen wird, daß der U-Konvektionsterm bei weitem den V-Konvektionsterm überwiegt:

$$U_o \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}(\overline{u'v'}) \quad = \quad 0 \tag{5.7}$$

Aus der Dimensionsanalyse läßt sich ableiten, daß gelten muß:

$$\frac{(U_o - U(y))}{U_s} \quad = \quad f(\frac{y}{l}) \quad = \quad f(\xi) \tag{5.8}$$

Mit U_o wird die ungestörte Hauptströmungsgeschwindigkeit, mit U_S die maximale Schergeschwindigkeit und mit U die Variable bezeichnet. U_o ist eine bekannte Größe, U ist eine Funktion der Querkomponente y und U_S eine Funktion der Ausbreitungsrichtung x. l ist ein typisches turbulentes Längenmaß und wird in Nachlaufströmungen gleich der Halbwertsbreite gesetzt.
Überlegungen der Dimensionsanalyse führen zu dem Ergebnis:

$$U_S \quad = \quad Ax^{-\frac{1}{2}} \tag{5.9}$$

$$l \quad = \quad Bx^{\frac{1}{2}} \tag{5.10}$$

Die Konstanten A und B lassen sich in Abhängigkeit von θ bestimmen:

$$A \quad = \quad 1.58 U_o \theta^{\frac{1}{2}} \tag{5.11}$$

$$B \quad = \quad 0.252 \theta^{\frac{1}{2}} \tag{5.12}$$

Einige Untersuchungen haben sich damit beschäftigt, einen analytischen Zusammenhang für die Beschreibung des Profilnachlaufes anzugeben. So formulieren z.B. [48] und [65] aufgrund

experimenteller Untersuchungen einen algebraischen Zusammenhang für die Nachlaufentwicklung. Sie unterscheiden hierbei jedoch auch den near and far wake. RAJ und LAKSHMINARAYANA [48] gehen sogar soweit zu sagen, daß ein Einzelprofilnachlauf und der eines Schaufelgitters mithilfe der gleichen Beziehung beschrieben werden kann. Da in diesen hergeleiteten Formeln aber auch am Experiment skalierte Konstanten enthalten sind, muß die Allgemeingültigkeit für verschiedene Profilformen, besonders im near wake Bereich, in Frage gestellt werden. Neben den experimentellen Untersuchungen wurden auch Turbulenzmodelle auf ihre Vorhersageeigenschaften für den Nachlauf getestet. In [42] werden verschiedene Aussagen über das Standard $k-\varepsilon$ Modell getroffen. Die Kernaussage hierbei ist, daß dieses Turbulenzmodell die asymptotische Ausbreitungsrate nicht richtig wiedergeben kann. Ebenfalls werden Schwierigkeiten darin gesehen, die realitätsnahe Form der Geschwindigkeits- und Turbulenzprofile zu beschreiben. Eine weitere interessante Information dieser Untersuchung ist die notwendige Netzauflösung im Nachlaufbereich. Diese wurde bei der Überprüfung der Netzunabhängigkeit im weiteren immer berücksichtigt.
Von CHEN und LESCHZINER [5] wurden nichtlineare Wirbelviskositätsmodelle und ein Modell zweiter Ordnung in Bezug auf das Nachlaufverhalten untersucht. Bei den Wirbelviskositätsmodellen wurde nicht der Produktionsterm für die turbulente kinetische Energie k, der sich nach BOUSSINESQ ergibt, verwendet, sondern eine Modifikation nach SCHMIDT und PATANKAR. Ihre Ergebnisse lassen sich wie folgt zusammenfassen. Für einfache Probleme, d.h. keine Ablösung, schwache Oberflächenkrümmungen und mäßigen Druckgradienten, sind alle untersuchten Modelle vergleichbar und ergeben gute Ergebnisse. Für komplexere Problemstellungen jedoch fallen die Wirbelviskositätsmodelle deutlich ab, und das RSM zeigt klare Vorteile. Auch dieses aber zeigt Schwachstellen, wenn die Grenzschicht auf Transition hin untersucht wird.
Von SANZ et al. [50] wurde sowohl das Eingleichungsmodell von SPALART und ALLMARAS als auch das low-Re $k-\varepsilon$ Modell von BISWAS und FUKUYAMA [2] näher betrachtet. Er kommt zu dem Schluß, daß beide Modelle die Ausbreitungsrate und den Nachlaufabfall zu gering vorhersagen. Auch kann festgestellt werden, daß die Defizitgeschwindigkeit, die im wesentlich vom Druckgradienten, der Turbulenzintensität, der Krümmung und von viskosen Effekten beeinflußt wird, immer zu groß berechnet wird. Eine leichte Überlegenheit wird dem Eingleichungsmodell eingeräumt.

5.2 Experimenteller Aufbau

Als Vergleichsdaten zur Verifikation der Simulationsergebnisse wurden die experimentellen Ergebnisse von NAKAYAMA [39] verwendet, die von der Datenbank der ERCOFTAC bereitgestellt werden. Bevor näher auf die Strömungsberechnung und deren Ergebnisbewertung eingegangen wird, soll in einem ersten Schritt der experimentelle Aufbau vorgestellt werden.

Die experimentellen Untersuchungen eines konventionellen und eines superkritischen Profils wurden in einem Unterschall-Windkanal in Long Beach, USA, durchgeführt. Die Abmessungen des Windkanals geschlossener Bauart, der in einer Skizze in Abbildung 5.1 dargestellt ist, sind mit folgenden Werten angegeben:

- Höhe H = 965,2 mm
- Länge L = 3048,0 mm
- Breite B = 1371,6 mm

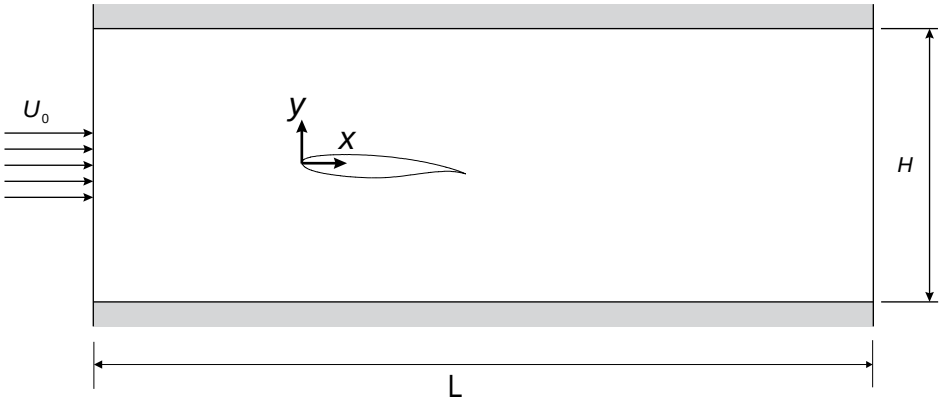

Abb. 5.1: Prinzipskizze des Windkanalexperimentes

In den Experimenten unter Normalbedingungen, d.h. Standardatmosphäre, wurde die Anlage mit einer konstanten Geschwindigkeit von $U_o = 30,48 m/s$ betrieben. Die Machzahl liegt bei ca. $0,1$. Die Strömung kann somit als inkompressibel bezeichnet werden. Es ergibt sich eine Reynoldszahl, bezogen auf die Sehnenlänge C, von:

$$Re_C = \frac{\rho C U_o}{\mu} \approx 1,2 \cdot 10^6 \tag{5.13}$$

Die Abschätzung für den nach Gleichung (5.14)definierten Turbulenzgrad der freien Windkanalströmung ist mit $0,02\%$ angegeben.

$$\mathrm{Tu} = \frac{1}{U_o}\sqrt{\frac{1}{3}(\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2})} \approx 0,02\% \tag{5.14}$$

Die beiden untersuchten Modellprofile, die in den weiteren Ausführungen mit Modell A bzw. Modell B bezeichnet werden sollen, weisen die gleiche Sehnenlänge C von $609,60$ mm auf. Es handelt sich bei Modell A um ein konventionelles mit einer relativen Dicke von 10 % und bei Modell B um ein superkritisches Profil mit einer relativen Dicke von 14 %. Beide sind in Abbildung 5.2 dargestellt.

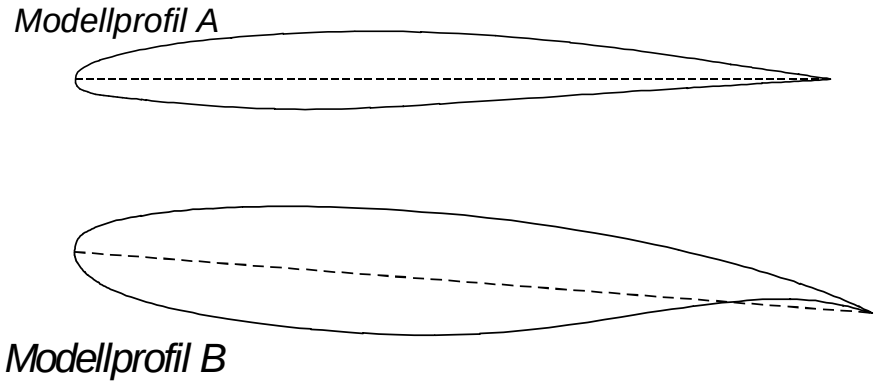

Abb. 5.2: Modellprofile A und B mit eingezeichneten Profilsehnen

Beide Modelle weisen einen sehr ähnlichen eingeschlossenen Hinterkantenwinkel von $10,18°$ bzw. $10,05°$ auf. Die Dicke der zugehörigen Hinterkanten beträgt $0,6$ mm respektive $0,18$ mm. Der Anstellwinkel des Modellprofiles A betrug im Experiment $0°$ Grad und der des Modelles B $4°$.
Um einen definierten Ort der Transition zu erhalten, wurde bei beiden Profilen jeweils an der Ober- und der Unterseite ein Stolperdraht angebracht:

- Auf der Profiloberseite befand sich ein Draht von 1,3 mm Durchmesser bei x/l = 0,16.
- Auf der Profilunterseite befand sich ein Draht von 0,5 mm Durchmesser bei x/l = 0,05.

Als superkritisch wird ein Profil bezeichnet, das sich durch einen stoßfreien Übergang vom trans- in den subsonischen Bereich der Oberflächengeschwindigkeit auszeichnet. Erreicht wurde dieser Fortschritt, der sehr verbreitet in der zivilen Luftfahrt genutzt wird, durch das Entwicklungswerkzeug CFD. Aufgrund seiner Formgebung ist dieses Modell B als Einzelprofil ein sehr interessanter Untersuchungsgegenstand. Es unterscheidet sich markant von Modell A und ruft ein anderes Strömungsfeld hervor. Es stellt grundsätzlich höhere Anforderungen an die Turbulenzmodellierung aufgrund der Änderung der Krümmungsrichtung, ausgeprägter Stromlinienkrümmung und eines stärkeren Druckgradienten.
Zur richtigen Interpretation der Meßdaten ist es wichtig, einiges über die verwendete Meßtechnik zu wissen. Der statische Druck wurde sowohl in der Grenzschicht als auch in den Profil-

nachläufen mit statischen Drucksonden konventioneller Bauart aufgenommen. In den Grenzschichten und in unmittelbarer Nähe der Profilhinterkanten wurden abgeflachte Pitot-Rohre zur Bestimmung des Totaldruckes eingesetzt, während die entfernten Bereiche der Nachläufe, der sog. far wakes, mit kreisförmigen Pitot-Rohren ausgemessen wurden. Messungen der Wandschubspannungen konnten mit Preston-Rohren durchgeführt werden, alle sonstigen turbulenten Größen wie Geschwindigkeit und Reynoldsspannungen wurden aus der Datenauswertung von Hitzdraht-Sonden gewonnen. Durch stichprobenhafte Messungen konnte für alle relevanten Größen der angestrebte, zweidimensionale Charakter der Strömung nachgewiesen werden.
Die einzelnen Meßebenen liegen senkrecht zur Strömungsrichtung und sind durch die Angabe der x-Koordinate eindeutig bestimmt. Aus der Vielzahl der Meßebenen wurden die wichtigsten herausgegriffen, um einen Vergleich mit der numerischen Simulation zu erhalten. Hierbei wurde die x-Koordinate mit der Sehnenlänge C entdimensioniert, und der Koordinatenursprung liegt in der jeweiligen Profilvorderkante.
Wie durch Auswertung der experimentellen Daten für den statischen Druck und den Totaldruck gezeigt werden konnte, ergibt sich für den resultierenden Druckkoeffizienten ein Meßfehler von maximal 3%. Die Genauigkeit der Meßwerte für die turbulenten Spannungen kann zu 5 % der lokal gemessenen Maximalwerte abgeschätzt werden.

5.3 Numerische Modellbildung

Um eine experimentelle Untersuchung nachrechnen zu können, müssen zunächst einige Annahmen bzw. Vereinfachungen getroffen werden, um die Problemstellung in der Simulation nachbilden zu können.

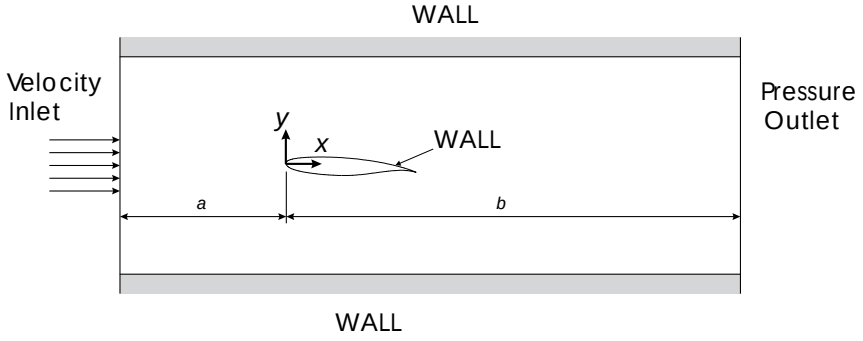

Abb. 5.3: Geometrische Umsetzung der Meßstrecke für die Simulation

Durch die experimentell nachgewiesene Zweidimensionalität der Strömung ist die Beschränkung der Rechnung auf nur zwei Dimensionen gerechtfertigt. Auch die Verwendung eines stationären und inkompressiblen Lösers stellt keine Einschränkung dar, da die Machzahl bei $0,1$ liegt und es sich um ein stationäres Strömungsfeld handelt. Die Rechteckgeometrie der Windkanalmeßstrecke wird auf ein rechtwinkliges Rechengebiet abgebildet, das nach den Ergebnissen aus Kapitel 4.3 $a = 1,5$ Sehnenlängen vor der Profilvorderkante beginnt und $b = 6$ Sehnenlängen stromab der Profilvorderkante endet, da die letzte Meßebene 3 Sehnenlängen nach dieser liegt. Dies ist in Abbildung 5.3 dargestellt.
Als Eintrittrandbedingung wird die Geschwindigkeit als Rechteckprofil mit dem gemessenen Wert von $U_o = 30,48$ m/s vorgegeben. Am Austritt wird der statische Druck konstant gehalten. Nach oben und unten begrenzt eine reibungsbehaftete Wand, an der die Haftbedingung gilt, das Rechengebiet. Die an der Profiloberfläche befindlichen Stolperdrähte werden in der numerischen Simultion nicht berücksichtigt. Da diese sich sehr nahe der Profilvorderkante befinden und von dieser Stelle an die Grenzschicht turbulent ist, stellt die Verwendung der Wandfunktion, die von der Profilvorderkante an die Grenzschicht als turbulent modelliert, in erster Näherung keine wesentliche Fehlerquelle für den interessierenden Profilnachlauf dar.
Als Randbedingungen für die turbulenten Größen werden am Eintritt die Werte für den Turbulenzgrad $T_u = 0.02\%$ und den hydraulischen Durchmesser D_H vorgegeben. Aus diesen beiden Werten können in guter Näherung die je nach Turbulenzmodell notwendigen Größen berechnet werden. Veranschaulicht sei dies nachfolgend am Beispiel eines Zweigleichungsmodelles für k und ε:
Die turbulente kinetische Energie kann direkt aus dem Turbulenzgrad bestimmt werden. Es gilt folgende Beziehung:

$$k = \frac{3}{2}(U_o T_u)^2 \tag{5.15}$$

In einem weiteren Schritt kann nun unter Hinzuziehung der empirischen Konstante C_ε und der turbulenten Länge l die Dissipationsrate angegeben werden:

$$\varepsilon = C_\varepsilon \frac{k^{\frac{3}{2}}}{l} \tag{5.16}$$

Für die Länge l wird die aus der Praxis stammende Beziehung zwischen l und dem hydraulischen Durchmesser D_H für Kanalströmungen ausgenutzt,die in Gleichung (5.17) angegeben ist.

$$l \approx 0,07 \cdot D_H \tag{5.17}$$

Da in der Zeit keine Änderung der Strömung gemessen wurde, sind die Randbedingungen der Simulation als konstant angenommen worden.

5.3.1 Netzgenerierung

Aus den in Kapitel 4 beschriebenen Gründen wurden als Netzelemente quadrilaterale Zellen ausgewählt. Als Netzstruktur wurde für die numerischen Simulationen eine C/H Kombination verwendet, die in Bild 5.4 veranschaulicht ist. Diese gewährleistet eine hohe Auflösungsmöglichkeit der Grenzschicht und gleichzeitig des Profilnachlaufes. Dies ist aufgrund des stationären Charakters der Strömung sinnvoll, da die Ausbreitungsrichtung des wakes bekannt ist.

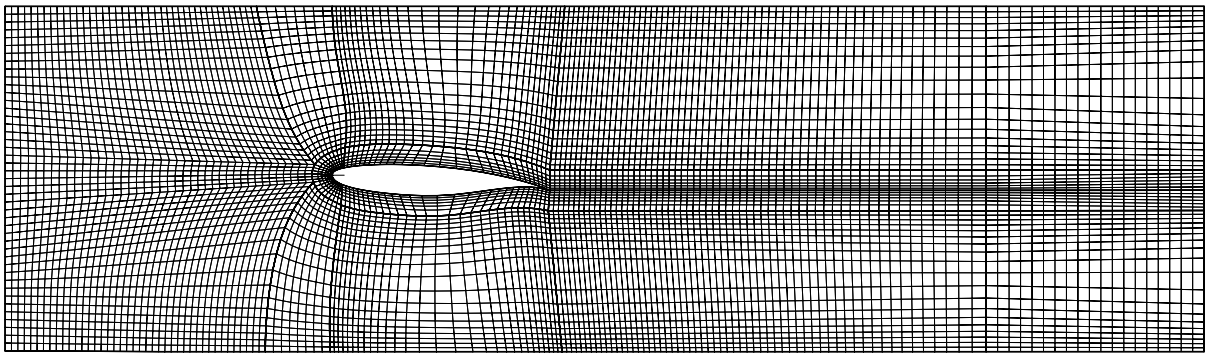

Abb. 5.4: Netzstruktur für Modell A und B

Für jedes der beiden Modelle wurden jeweils zwei Netze erstellt. Eines für die Wandauflösung durch die Standard-Wandfunktion und ein feineres im wandnahen Bereich für die Verwendung einer low-Re Erweiterung oder des Eingleichungsmodelles nach WOLFSHTEIN. Hierbei wurde auf die y^+-Werte geachtet. Diese lagen bei dem gröberen Netz bei Werten von ca. 50 und bei der feineren Wandauflösung bei 1.
Die Anzahl der notwendigen Kontrollvolumina wurde durch den Nachweis der Netzunabhängigkeit der Lösung bestimmt. Eine beispielhafte Diskretisierung des Strömungsgebietes durch ein Netz ist in Abbildung 5.4 dargestellt, wobei allerdings eine reduzierte Zellenzahl zu sehen ist, um eine Übersichtlichkeit zu gewährleisten.

5.3.2 Netzunabhängigkeit

Um die Qualität einer Strömungssimulation in Abhängigkeit des Turbulenzmodelles beurteilen zu können, muß sichergestellt sein, daß das erzielte Rechenergebnis unabhängig von dem verwendeten Rechennetz, d.h. der örtlichen Diskretisierung, ist.
Um diese Netzunabhängigkeit sicherzustellen, wurden Netze mit verschiedenen Feinheitsgraden, d.h. Knotenpunktanzahlen, verwendet. Damit das Ergebnis der unterschiedlichen Rechennetze untereinander verglichen werden kann, wurden zwei Größen betrachtet. Dies ist zum einen der C_p-Verlauf als arithmetisch gemittelte Größe über der Profiloberfläche und zum

anderen das Geschwindigkeitsprofil an der Stelle X/C=1,80. Hierbei bezeichnet C die Sehnenlänge und X die Position stromab der Profilhinterkante. Der Druckkoeffizient C_p ist nach Gleichung (5.18) definiert. Als Referenzstelle wird die ungestörte Anströmung herangezogen mit der Absolutgeschwindigkeit c_{ref} und dem Druck p_{ref}.

$$C_p = \frac{p_{stat} - p_{ref}}{\frac{1}{2}\rho c_{ref}^2} \tag{5.18}$$

Diese Untersuchung wurde getrennt durchgeführt für Modell A und B. Für jedes der beiden Modelle wurden zwei Rechennetze angestrebt, die eine diskretisierungsunabhängige Lösung sicherstellen. Die beiden Netztypen unterscheiden sich, wie oben beschrieben, nur in der Auflösung des wandnahen Bereiches. Für beide Netzarten konnte das H-Netz für die Kernströmung aufgrund der gewählten C/H-Netztopologie konstant gelassen werden, und nur das C-Netz an der Profiloberfläche mußte in Abhängigkeit der Wandbehandlung verändert werden. Es konnte davon ausgegangen werden, daß nach der Überprüfung der Netzunabhängigkeit der C/H-Kombination für die Standard-Wandfunktion eine Erhöhung der Netzdichte im Bereich des C-Netzes ausreicht, um die Netzunabhängigkeit sicherzustellen.
Die Netzunabhängigkeitskontrolle wurde nicht für jedes Turbulenzmodell getrennt durchgeführt. Es kann davon ausgegangen werden, daß ein Zweigleichungsmodell ausreichende Erkenntnisse über die Netzgestaltung liefert für alle Zweigleichungs- und Eingleichungsmodelle. Um den Anforderungen des RSM gerecht zu werden, wurde die Netzunabhängigkeitsuntersuchung mit dem Standard $k-\varepsilon$ Modell sehr konservativ betrieben.

Modell A

Für die Wandauflösung mit der Standard-Wandfunktion wurden Netze mit

- 15.000 Zellen
- 28.000 Zellen
- 45.000 Zellen
- 60.000 Zellen

verwendet. Der gemittelte C_p-Wert ist in nachstehender Tabelle für die unterschiedliche Netzfeinheit aufgelistet.

Anzahl Kontrollvol.	15.000 Zellen	28.000 Zellen	45.000 Zellen	60.000 Zellen
C_p	-0,1437	-0,1638	-0,2039	-0,2049

Neben diesem Mittelwert wurde der Geschwindigkeitsverlauf als weiteres Beurteilungskriterium genutzt. Dieser ist eine lokale Größe, die für den Nachlauf sehr charakteristisch ist. In Bild 5.5 werden die vier berechneten Axialgeschwindigkeitsverläufe an derselben Position stromab des Profiles dargestellt. Aus dem Vergleich der Geschwindigkeitsverläufe und den berechneten C_p-Werten kann abgeleitet werden, daß das Rechennetz mit 45.000 Zellen eine ausreichend feine Diskretisierung des Problemgebietes gewährleistet. Bei der Netzerstellung und der Verfeinerung wurde darauf geachtet, daß der y^+-Wert nicht unter die Grenze von 11,225 sinkt. Es wurden für die Standard-Wandfunktion Werte von ca. 50 realisiert. Ausgehend von diesem Netz wurde ein feineres Netz im Bereich der C-Struktur erstellt für die Verwendung der höherwertigen Turbulenzmodelle im Wandbereich. Hierbei wurden y^+-Werte von 1 eingehalten.

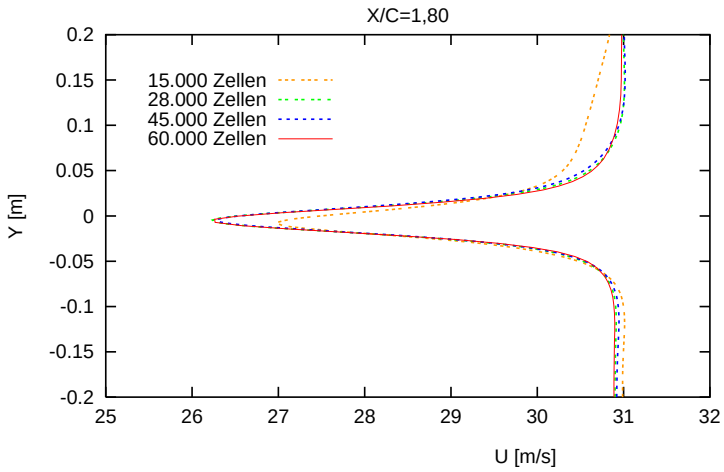

Abb. 5.5: Vergleich der Axialgeschwindigkeiten von Modell A für X/C=1,80

Modell B

Für die Wandauflösung mit der Standard-Wandfunktion wurden Netze mit

- 15.000 Zellen
- 28.000 Zellen
- 45.000 Zellen
- 60.000 Zellen
- 75.000 Zellen

verwendet. Der gemittelte C_p-Wert ist in nachstehender Tabelle für die unterschiedlichen Netzfeinheiten aufgelistet.

Anzahl Kontrollvol.	15.000	28.000	45.000	60.000	75.000
C_p	-0,3118	-0,3117	-0,3117	-0,3116	-0,3117

Aus oben genannten C_p-Werten ist ersichtlich, daß keine Aussage über die Netzunabhängigkeit aus diesem Mittelwert abgeleitet werden kann. In Ergänzung zu diesem Wert wurde wie bei Modell A der Verlauf der Axialgeschwindigkeit an der Stelle X/C=1,80 betrachtet. Das sich daraus ergebende Bild ist in Abbildung 5.6 dargestellt. Aus dem Vergleich der Geschwindigkeitsverläufe kann abgeleitet werden, daß das Rechennetz mit 60.000 Zellen eine ausreichend feine Diskretisierung des Problemgebietes gewährleistet. Bei der Netzerstellung und der Verfeinerung wurde darauf geachtet, daß der y^+-Wert nicht unter die Grenze von 11,225 sinkt. Es wurden für die Standard-Wandfunktion Werte von ca. 50 realisiert. Ausgehend von diesem Netz wurde ein feineres Netz im Bereich der C-Struktur erstellt für die Verwendung der höherwertigen Turbulenzmodelle im Wandbereich. Hierbei wurden y^+-Werte von 1 eingehalten.

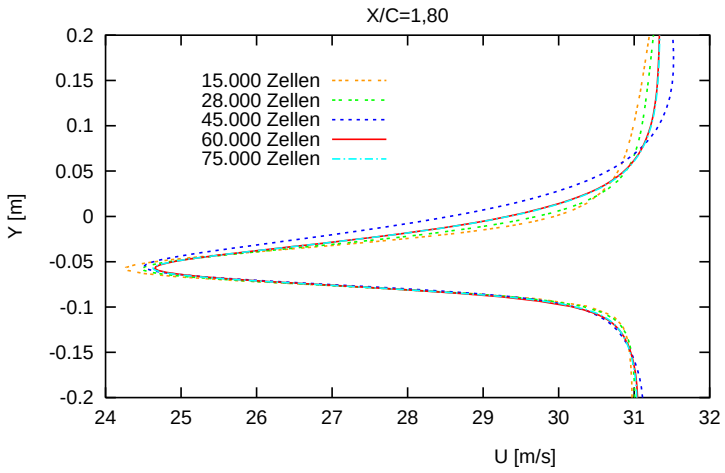

Abb. 5.6: Vergleich der Axialgeschwindigkeiten von Modell B für X/C=1,80

5.3.3 Turbulenzmodelle

In Bezug auf die Berechnung der Nachlaufströmung des stationären Testfalles wurden alle Turbulenzmodelle, die in Kapitel 2 vorgestellt wurden, getestet. Jedes der hier eingesetzten Turbulenzmodelle wurde mit zwei verschiedenen Wandauflösungen kombiniert. Dies ist zum einen die Standard-Wandfunktion und zum anderen das Eingleichungsmodell nach WOLFSHTEIN bzw. die low-Re Erweiterung des SA-Modelles. Beide genaueren Wandbehandlungen werden im folgenden als Zweischichtenmodell bezeichnet. Eine Übersicht der Turbulenzkombinationen ist in nachstehender Tabelle gegeben.

	Eingleich.-Modell	Zweigleichungs-Modell				Modell 2. Ordnung
	Spalart Allmaras	Stand. $k-\epsilon$	$k-\epsilon$ Modell + KL	realizable $k-\epsilon$	RNG $k-\epsilon$	lineares RSM
Stand. Wandfktion	x	x	x	x	x	x
1 Gl.-Modell von Wolfshtein		x	x	x	x	x
low Re-Version von Sp.-All.	x					

5.4 Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der einzelnen numerischen Simulationen mit den unterschiedlichen Turbulenzmodellen untereinander und den experimentellen Daten verglichen. Für den Vergleich Rechnung mit Messung wurden zwei Größen herausgegriffen, die charakteristisch sind und sich für die Beurteilung der Simulationsergebnisse eignen. Dies ist die axiale Geschwindigkeit U, die repräsentativ für gemittelte Strömungsgrößen steht, und für die turbulenten Schwankungsgrößen wurde die turbulente kinetische Energie k ausgewählt.
Die charakteristischen Größen eines Nachlaufprofiles sind in Abbildung 5.7 veranschaulicht.

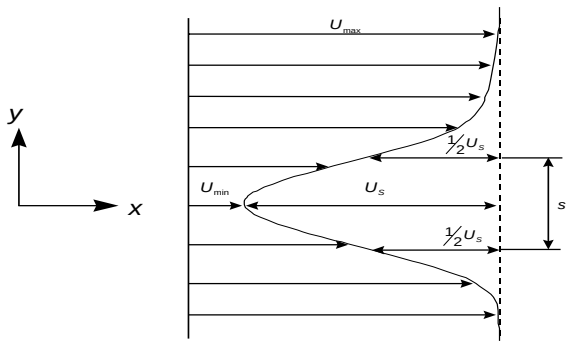

Abb. 5.7: Charakteristische Geschwindigkeiten eines Profilnachlaufes

Mit U_{min} wird die Minimalgeschwindigkeit, mit U_S das maximale Geschwindigkeitsdefizit und mit U_{max} die Maximalgeschwindigkeit bezeichnet, die im Idealfall gleich der freien Außenstromgeschwindigkeit ist. Mit s wird eine typische Breite der Nachlaufdelle angegeben.
Da das Strömungsfeld nur in diskreten Meßebenen experimentell bestimmt ist, muß ein Vergleich genau an diesen Positionen erfolgen. Für den wake wurden hierfür die Stellen X/C=1,05, 1,40 und 1,80 ausgewählt. Um die Ergebnisse im Profilnachlaufbereich aber hinreichend exakt beurteilen zu können, werden die Stellen X/C=0,593, 0,893, 0,940 und 0,970 für Modell A und X/C=0,693, 0,893, 0,949 und 0,970 für Modell B jeweils auf der Profiloberseite hinzugezogen. Auf diese Weise wird die Grenzschicht als Entstehungsquelle des Nachlaufes berücksichtigt.
Um neben den Größen U und k an den diskreten Stellen weitere Beurteilungskriterien zu haben, wurden der Verlauf der minimalen Geschwindigkeit einer Ebene senkrecht zur Strömungsrichtung und der Verlauf der Impulsverlustdicke θ im Nachlaufbereich betrachtet.
Im folgenden werden nun die oben genannten Vergleichspositionen getrennt für Modell A und B vorgestellt.

5.4.1 Modell A

Das Modell A zeichnet sich dadurch aus, daß es ein konventionelles Profil ist und keinen Anstellwinkel im Windkanal besitzt. Aufgrund der Profilgeometrie ist ein weitgehend symmetrischer Nachlauf zu erwarten, da keine ausgeprägte Druck- und Saugseite zu erkennen ist. Auch die Oberflächenkrümmung fällt sehr gering aus. Dieses Strömungsproblem stellt somit einen für eine Profilströmung einfachen Fall dar.
In einem ersten Schritt sollen die Ergebnisse der verschiedenen Turbulenzmodelle für die Axialgeschwindigkeit im Nachlauf betrachtet werden. Diese wurde für die folgenden Darstellungen mit der ungestörten Anströmgeschwindigkeit U_o entdimensioniert. Auf der Ordinate ist die Koordinate senkrecht zur Strömungsrichtung aufgetragen, die mit der Sehnenlänge C entdimensioniert ist. Der Nullpunkt dieser Koordinate liegt auf der Höhe der Profilhinterkante.
Bei den in Abbildung 5.8 dargestellten Ergebnissen wurde die Wandfunktion für die wandnahe Zone verwendet. In dieser und allen folgenden Darstellungen werden keine Ergebnisse des RNG $k-\varepsilon$ Modelles aufgeführt. Diese sind qualitativ mit denen des Standard $k-\varepsilon$ Modelles vergleichbar und können deshalb aus Gründen der Übersichtlichkeit weggelassen werden.
Beim Vergleich der einzelnen Turbulenzmodelle fällt das Standard $k-\varepsilon$ Modell auf. Es beschreibt den Übergang der Minimalgeschwindigkeit im wake zur freien Außenströmung sehr schlecht. Alle anderen Modelle weisen diese Schwäche nicht auf, sie unterscheiden sich jedoch im Hinblick auf alle Nachlaufdellentiefen. Das RSM gibt unabhängig von der x-Position immer eine zu große Minimalgeschwindigkeit wieder. Alle übrigen weichen weniger von den experimentellen Werten ab und können den Nachlauf gut wiedergeben.

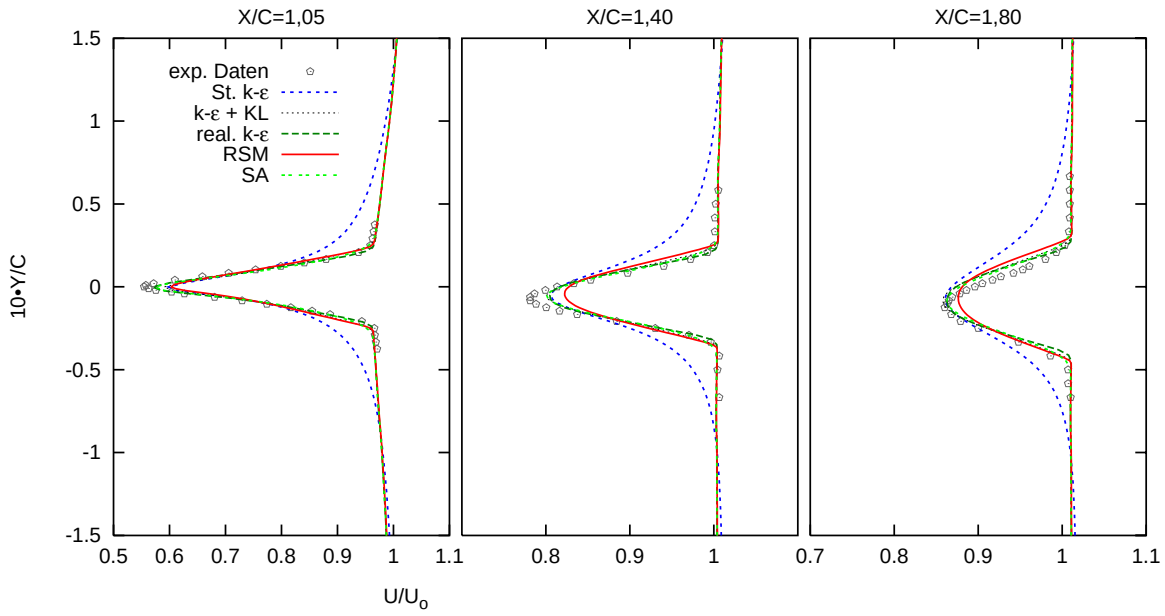

Abb. 5.8: Geschwindigkeitsverlauf im Nachlaufbereich von Modell A, Wandfunktion

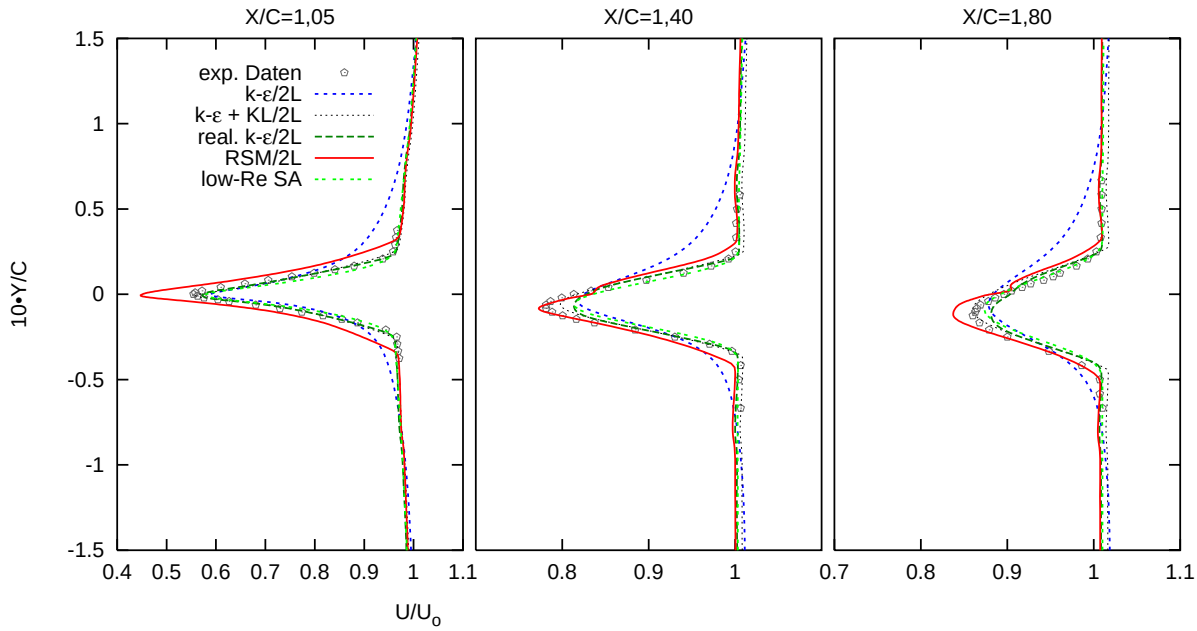

Abb. 5.9: Geschwindigkeitsverlauf im Nachlaufbereich von Modell A, 2-Schichtenmodell

Alle Turbulenzmodelle sind in der Lage, die richtige Position des Geschwindigkeitsdefekts in y-Richtung vorherzusagen.
In Abbildung 5.9 sind die berechneten Geschwindigkeitsprofile im Nachlaufbereich an den drei ausgewählten Meßpositionen dargestellt, die mit dem Zweischichtenmodell erzielt wurden.
Durch die verbesserte Wandbehandlung der Turbulenzmodelle ergibt sich kein wesentlich anderes Bild. Weiterhin wird die Lage des wakes richtig vorhergesagt. Das Standard $k-\varepsilon$ Modell gibt wieder eine zu große Breite des Nachlaufes wieder. Bei der Berechnung der Minimalgeschwindigkeit hebt sich das RSM Modell von den anderen ab. Es ermittelt an der Position X/C=1,05 eine zu kleine Minimalgeschwindigkeit, was eine Folge der Grenzschichtbehandlung sein muß, bevor für die Position X/C=1,40 eine gute Übereinstimmung mit den Meßdaten erreicht wird. Alle anderen Turbulenzmodelle unterscheiden sich nur sehr marginal. Die Wakebreite wird sehr exakt bestimmt, und die Nachlaufdellentiefe wird recht gut getroffen, qualitativ wird der Nachlauf für die drei ausgewählten Positionen somit gut beschrieben.
In den Abbildungen 5.10 und 5.11 sind nun die Entwicklung der Minimalgeschwindigkeit und der Impulsverlustdicke dargestellt. Diese wurde mit der Sehnenlänge C entdimensioniert. Als weitere Vergleichsgröße wurde die Minimalgeschwindigkeit, die sich aus der am Anfang dieses Kapitels beschriebenen analytischen Lösung ergibt, herangezogen.

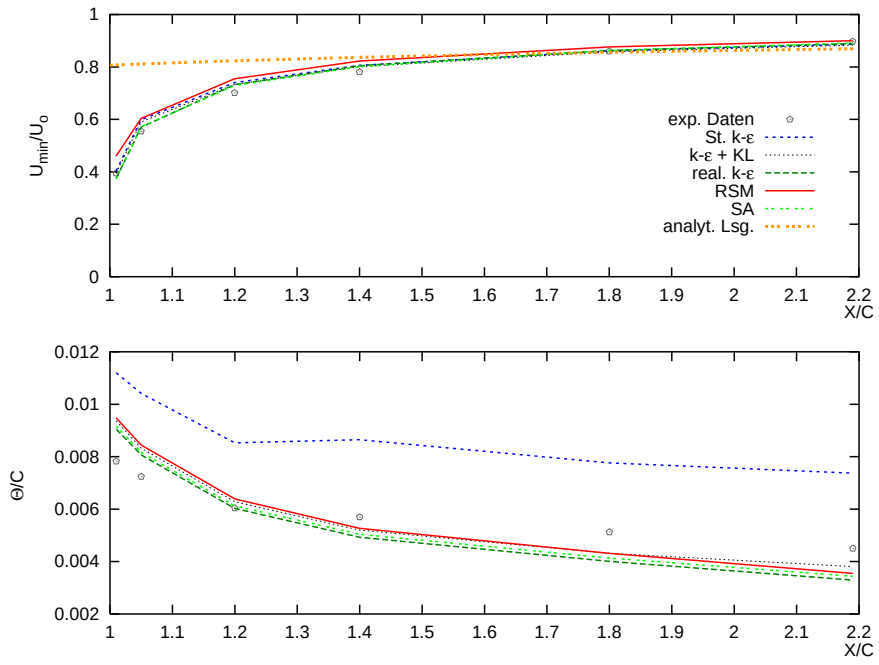

Abb. 5.10: Minimalgeschwindigkeit und Impulsverlustdicke, Modell A, Wandfunktion

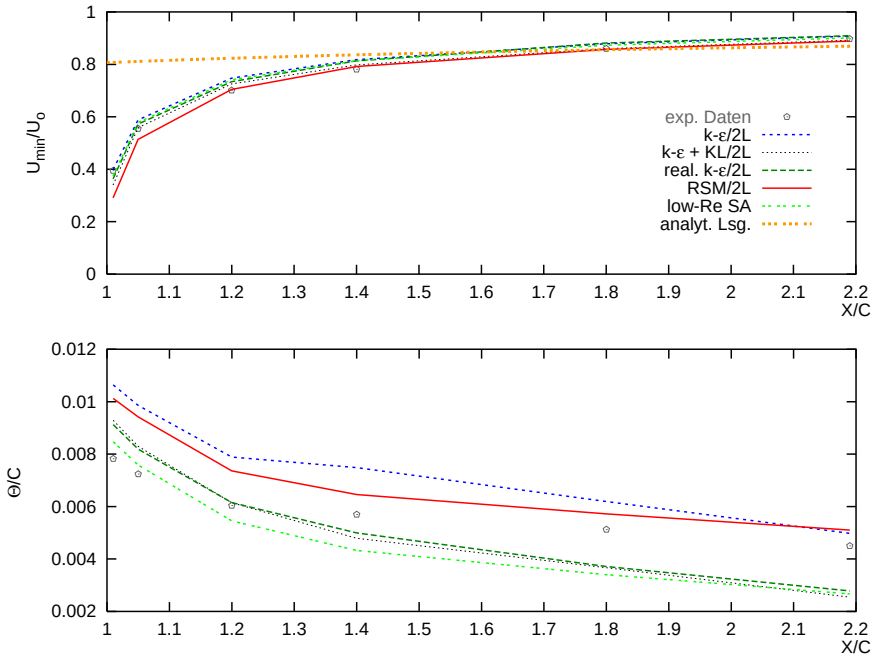

Abb. 5.11: Minimalgeschwindigkeit und Impulsverlustdicke, Modell A, 2-Schichtenmodell

Für die Verwendung der Standard-Wandfunktion gilt, daß die Minimalgeschwindigkeit über den gesamten Nachlaufbereich sehr gut wiedergegeben wird und im far wake Bereich, für den die analytische Lösung entwickelt wurde, gut mit dieser übereinstimmt. Ein etwas anderes Bild ergibt sich bei der Betrachtung der Impulsverlustdicke. Diese wird in Abhängigkeit der Lauflänge des wakes zu groß bzw. zu klein errechnet. Jedoch stimmt der qualitative Verlauf auch dieser Größe mit den experimentellen Daten gut überein.
Für die Zweischichtenmodelle ergibt sich bei der Beurteilung der berechneten Entwicklung der Minimalgeschwindigkeit keine Verbesserung gegenüber der Wandfunktion. Eine größere Differenzierung ist erkenntlich, beurteilt man die ermittelte Impulsverlustdicke.
Diese Größe wird von allen Turbulenzmodellen in ihrem Verlauf richtig beschrieben, wobei das Standard $k-\epsilon$ und das RSM Modell immer einen zu großen Wert ermitteln und alle anderen tendenziell einen zu kleinen.
Beim Vergleich der beiden verwendeten Modellierungsarten des wandnahen Bereiches fällt kein entscheidender Unterschied für die Berechnung des Nachlaufprofiles auf. Dieser Sachverhalt erklärt sich, wenn die Entstehungsursache der Nachlaufdelle, die Grenzschicht, untersucht wird.
In den Abbildungen 5.12 und 5.13 sind die Geschwindigkeitsprofile auf der Profiloberfläche an vier diskreten Meßpositionen im wandnahen Bereich dargestellt. Die Geschwindigkeit ist hierbei mit der Schubspannungsgeschwindigkeit u_τ entdimensioniert und über dem dimen-

sionslosen Wandabstand y^+ aufgetragen. In diesen Abbildungen ist als zusätzliche Größe das logarithmische Wandgesetz mit dargestellt. Es wird sofort deutlich, daß die experimentellen Daten für $y^+ \leq 100$ eine gute Übereinstimmung mit diesem zeigen. Hieraus erklärt sich, daß die verbesserte Wandbehandlung durch das Zweischichtenmodell keinen Vorteil gegenüber der Wandfunktion hat, die für dieses Strömungsproblem ihre Gültigkeit weitgehend behält.

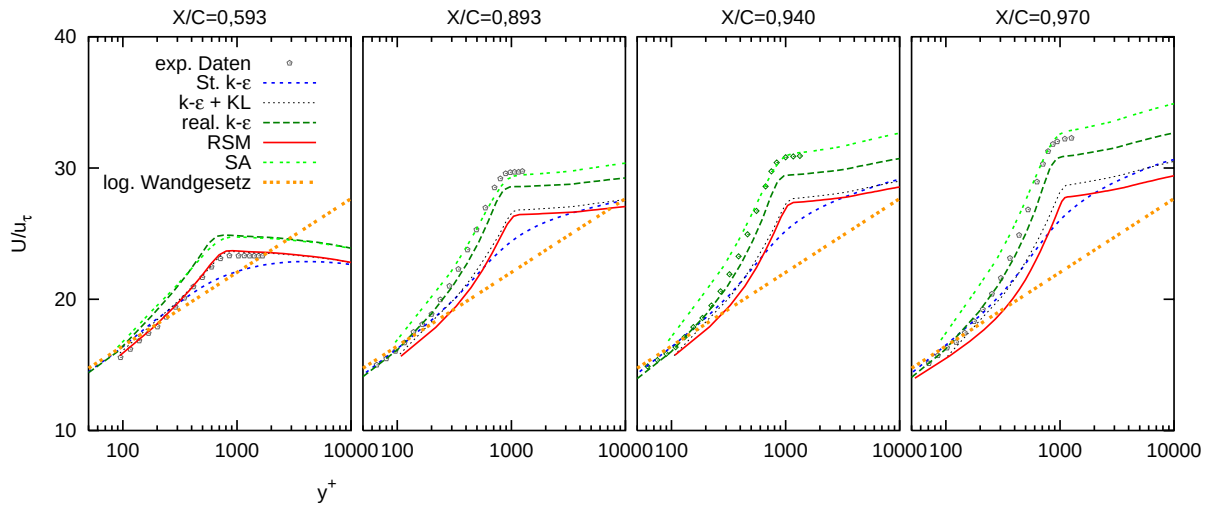

Abb. 5.12: Geschwindigkeitsverlauf in der Grenzschicht, Modell A, Wandfunktion

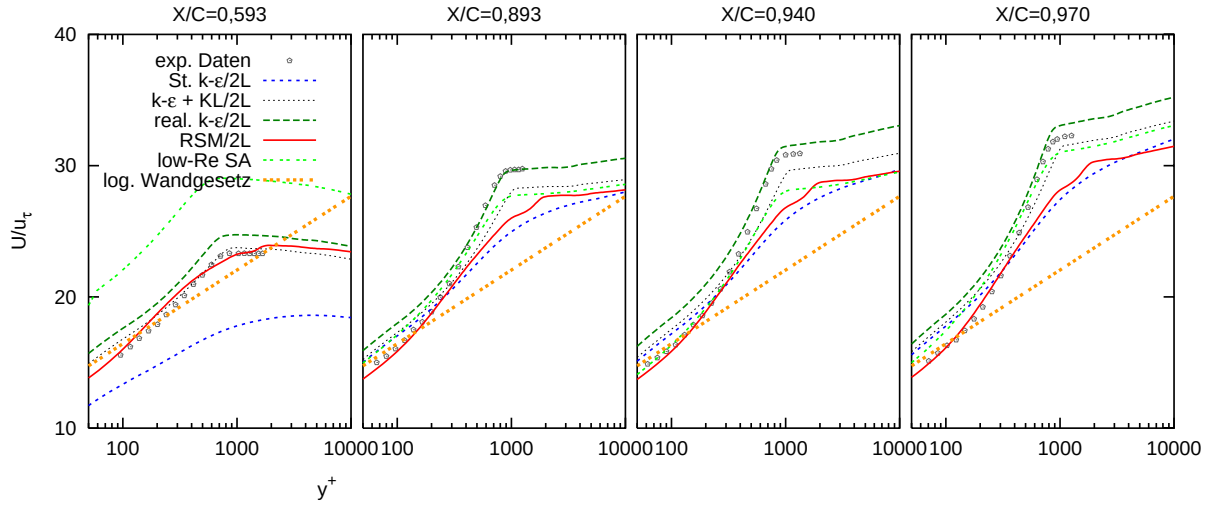

Abb. 5.13: Geschwindigkeitsverlauf in der Grenzschicht, Modell A, 2-Schichtenmodell

Aus den Geschwindigkeitsprofilen im wandnahen Bereich ist die schlechte Wakebeschreibung des Standard $k - \varepsilon$ Modelles bereits ersichtlich. Dieses beschreibt einen falschen Übergang

der Grenzschicht zur freien Außenströmung. Dieser Sachverhalt wirkt sich dann, wie oben beschrieben, auf den Profilnachlauf aus. Die Ursache für diese Schwäche wird an späterer Stelle im Zusammenhang mit der Betrachtung der turbulenten kinetischen Energie aufgezeigt. Alle anderen Modelle geben den Übergang zur Hauptströmung qualitativ gut wieder. Das SA Modell zeichnet sich durch eine hohe quantitative Güte in Zusammenhang mit der Wandfunktion aus, ebenso das realizable $k-\varepsilon$ Modell, das auch in der Zweischichtenformulierung die hochwertigsten Ergebnisse liefert.

Um eine fundierte Aussage über die Ergebnisgüte der einzelnen Turbulenzmodelle in Bezug auf einen Profilnachlauf treffen zu können, müssen auch turbulente Größen miteinbezogen werden. In den Abbildungen 5.14 und 5.15 ist in den Meßebenen, an denen bereits die Geschwindigkeitsprofile vorgestellt wurden, nun auch die turbulente kinetische Energie dargestellt.

Bevor näher auf die Ergebnisinterpretation eingegangen werden kann, muß aufgezeigt werden, welche Größen dargestellt sind. Auf der Ordinate ist, wie in obigen Abbildungen auch, die y-Koordinate mit der Sehnenlänge entdimensioniert aufgetragen. Als Abszissenwert ist die turbulente kinetische Energie geteilt durch das Quadrat der ungestörten Anströmgeschwindigkeit dargestellt.

Aus den experimentellen Daten läßt sich unmittelbar die Größe k berechnen unter der Annahme, daß die beiden Schwankungsgößen quer zur Hauptströmungsrichtung von gleicher Größenordnung sind. Alle Turbulenzmodelle mit Ausnahme des SA Modelles errechnen unmittelbar einen Wert für k. Das SA Modell löst keine Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie und stellt deshalb k nicht explizit zur Verfügung. Die Prandtlsche Mischungsweghypothese in Verbindung mit dem Ansatz von BOUSSINESQ führt zu folgender Beziehung:

$$k = \mu_t \frac{\Omega}{\rho\sqrt{C_\mu}} \qquad \text{mit} \qquad \Omega = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)} \tag{5.19}$$

Aus der Literatur, so z.B. [50], geht hervor, daß diese Formulierung für k brauchbare Ergebnisse für die Wakeränder ergibt, jedoch sehr schlechte im Wakezentrum und in der freien Außenströmung. Dies begründet sich in der Tatsache, daß die Formulierung nach PRANDTL nur für den inneren Bereich einer turbulenten Grenzschicht gilt, in dem die Scherspannungen ähnlich denen in den Wakerändern sind.

Eine andere Berechnungsvorschrift für die turbulente kinetische Energie mit Größen, die vom SA Modell bestimmt werden, ist folgende:

$$k = a \cdot \nu_t |\omega| \tag{5.20}$$

Mit ω wird hierbei die Vorticity bezeichnet, und a ist eine Konstante. Diese Formulierung weist jedoch die gleiche Schwäche im Kernbereich des Nachlaufes auf. Auch muß der Faktor a nach [12] je nach Strömungsproblem frei gewählt werden. Eine Allgemeingültigkeit schließt sich somit aus.
Da beide Berechnungsvorschriften (5.19) und (5.20) für k keine qualitativ gute Wiedergabe aus den vom SA Modell bestimmten Größen gewährleisten, wird die Größe μ_t des SA Modelles als turbulente Größe qualitativ mit der turbulenten kinetischen Energie der anderen Turbulenzmodelle verglichen. Mit μ_t kann eine Aussage über die Turbulenzeigenschaft eines Nachlaufes in Bezug auf die Intensität und die Ausdehnungsbreite getroffen werden.
In den Abbildungen 5.14 und 5.15 ist für das SA Modell die Größe μ_t dargestellt, multipliziert mit dem Faktor 4,000, um die Darstellung in einem Graphen zu gewährleisten. Dies wird auch in allen weiteren Abbildungen so gehandhabt.

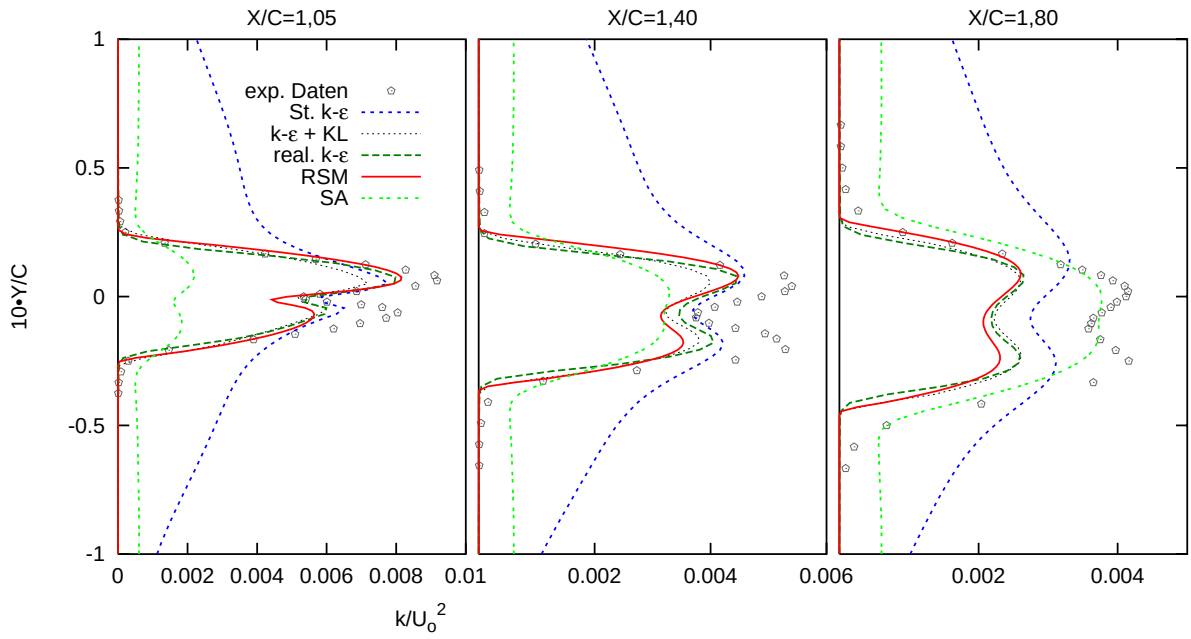

Abb. 5.14: Profil der turb. kinet. Energie im Nachlaufbereich von Modell A, Wandfunktion

Die Turbulenzprofile werden durch die Art der Wandbehandlung im wesentlichen nicht beeinflußt. Diese Tatsache ist analog zu der Interpretation der Geschwindigkeitsergebnisse. Beurteilt man in einem ersten Schritt die Breite des Turbulenzprofiles, so wird diese unabhängig von dem Abstand von der Profilhinterkante sehr gut wiedergegeben, auch vom SA Modell, jedoch nicht vom Standard $k-\varepsilon$ Modell. Dieses beschreibt einen viel zu geringen Abfall des Turbulenzmaximums zur Außenstromturbulenz. Die anderen Turbulenzmodelle unterscheiden sich bei der genauen Betrachtung des Profilmaximums. Jedoch haben alle gemeinsam, das

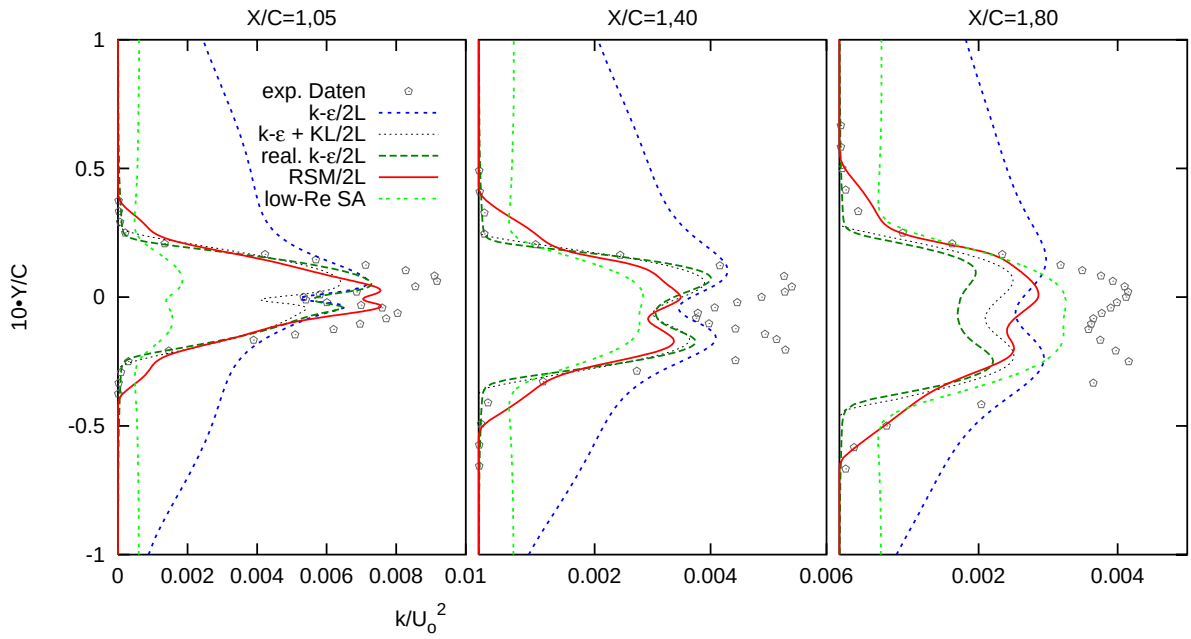

Abb. 5.15: Profil der turb. kinet. Energie im Nachlaufbereich von Modell A, 2-Schichtenmodell

Maximum zu klein aber an der richtigen y-Position vorherzusagen. Bei der Verwendung der Zweischichtenformulierung treten die Unterschiede am deutlichsten an der Position X/C=1,80 auf. Das realizable $k-\varepsilon$ Modell schneidet am schlechtesten, das RSM Modell am besten ab, und das $k-\varepsilon$ Modell mit der Kato-Launder Modifikation reiht sich zwischen beiden ein.

Analog zur Auswertung der Geschwindigkeit ist in den beiden Abbildungen 5.16 und 5.17 die turbulente kinetische Energie an vier diskreten Positionen im wandnahen Bereich dargestellt. Hierfür ist k im Verhältnis zum Quadrat der Schubspannungsgeschwindigkeit u_τ dargestellt. Auf der Abszisse ist weiterhin der dimensionslose Wandabstand y^+ aufgetragen. Wie zu erwarten, ergibt sich in Abhängigkeit der Wandbehandlung keine große Ergebnisveränderung, lediglich bei der Zweischichtenformulierung ist ein glatterer Verlauf der Kurven zu erkennen. Dies ist auf die größere Anzahl von Netzpunkten im wandnahen Bereich zurückzuführen. Das RSM Modell weist Schwächen auf, wenn es mit dem Eingleichungsmodell von WOLFSHTEIN kombiniert wird. Die beiden modifizierten $k-\varepsilon$ Modelle weisen gute Verläufe für k in der Grenzschicht auf, und das SA Modell kann ebenfalls den gemessenen Verlauf qualitativ wiedergeben.

Aus den bisherigen Ergebnissen geht hervor, daß die schlechte Nachlaufberechnung des Standard $k-\varepsilon$ Modelles seine Ursachen bereits in der Grenzschicht hat. Nun muß geklärt werden, woher diese Schwäche kommt. Die Grenzschicht beginnt an der Vorderkante, und dieser Bereich ist durch eine Staupunktströmung gekennzeichnet. Eben hierfür ist eine Schwachstelle

des Standard $k-\varepsilon$ Modelles bekannt. Es wird eine zu große Produktion von k berechnet.

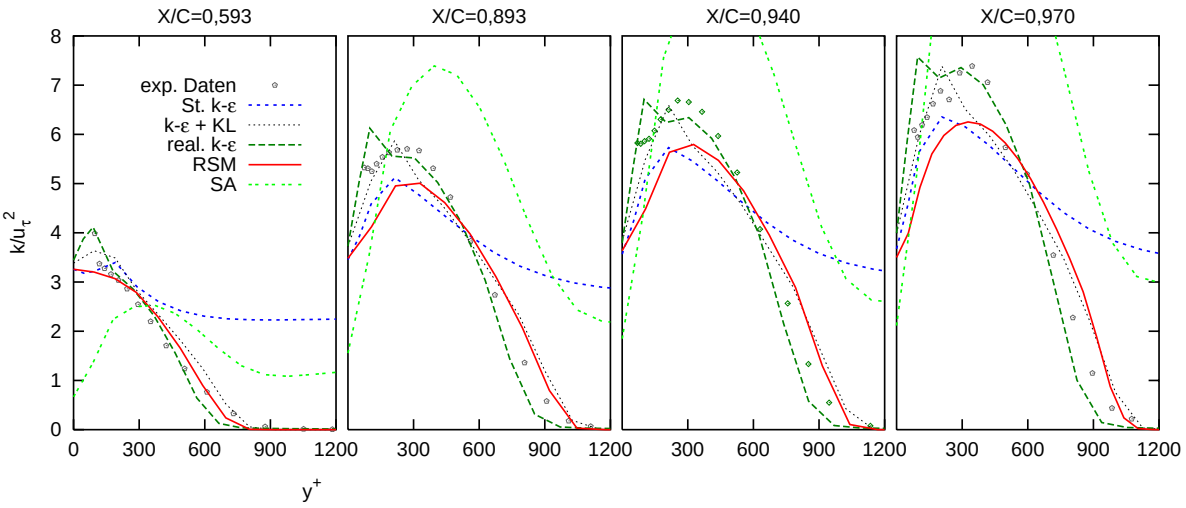

Abb. 5.16: Profil der turb. kinet. Energie in der Grenzschicht, Modell A, Wandfunktion

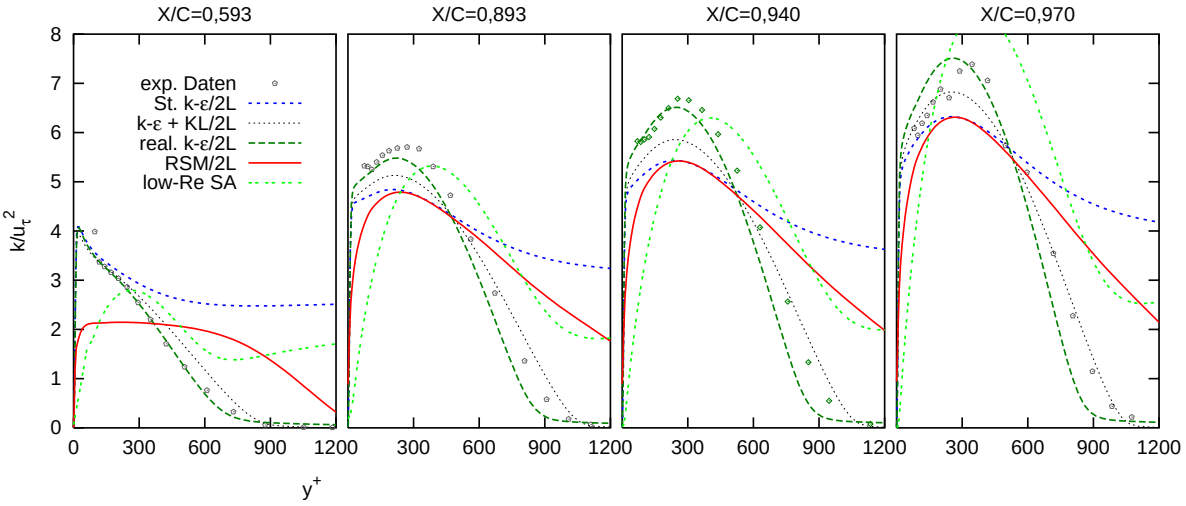

Abb. 5.17: Profil der turb. kinet. Energie in der Grenzschicht, Modell A, 2-Schichtenmodell

Alle anderen Modelle weisen diese Schwäche nicht auf. Wie die Abbildungen 5.18 und 5.19 zeigen, tritt eine erhöhte Produktion von k im Staupunkt beim Standard $k-\varepsilon$ Modell auf im Vergleich z.B. mit dem um die Kato-Launder Modifikation erweiterten $k-\varepsilon$ Modelles. Offensichtlich ist dieser Modellfehler nicht auf den Vorderkantenbereich beschränkt, sondern wirkt

sich im gesamten wandnahen Bereich des Profiles aus und beeinflußt hiermit die Berechnung des Nachlaufes.

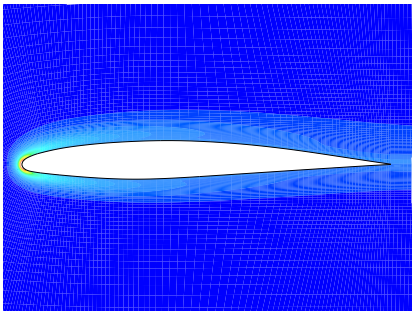

Abb. 5.18: Konturenplot von k / Standard $k-\varepsilon$ Modell

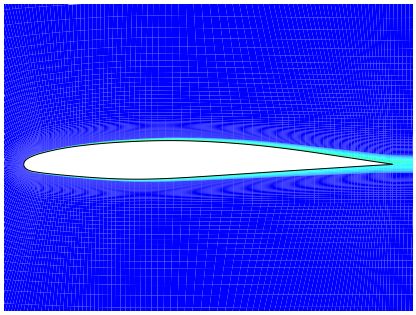

Abb. 5.19: Konturenplot von k / $k-\varepsilon$ Modell mit KL-Modifikation

5.4.2 Modell B

Das Modell B zeichnet sich als superkritisches Profil durch eine stärkere Oberflächenkrümmung aus. Hinzu kommt, daß es mit einem Anstellwinkel von 4° im Windkanal vermessen wurde. Es stellt größere Anforderungen an die Turbulenzmodellierung. Besonders die Strömung im Hinterkantenbereich ist bei superkritischen Profilen hinreichend komplex. Die wesentlichen Einflußfaktoren hierbei sind der Druckgradient in Strömungsrichtung und die Druckänderung sowohl über die Grenzschicht als auch über den near wake hinweg.
Bei der Ergebnisauswertung wurden aus Gründen der Vergleichbarkeit die gleichen Darstellungsformen wie bei Modell A gewählt. Bevor auf die turbulente Größe k eingegangen wird, soll die Axialgeschwindigkeit näher betrachtet werden. In den Abbildungen 5.20 und 5.21 sind die Ergebnisse der einzelnen Turbulenzmodelle gemeinsam mit den experimentellen Daten und getrennt nach der Art der Wandbehandlung dargestellt.
Es fällt deutlich auf, daß das Standard $k-\varepsilon$ Modell auch bei dieser Profilumströmung das Geschwindigkeitsprofil im Nachlauf nicht beschreiben kann. Neben der falschen Berechnung im Übergangsbereich des wakes zur Hauptströmung kann auch die Lage der Minimalgeschwindigkeit in der jeweiligen Meßebene und damit die Ausbreitungsrichtung der Nachlaufdelle nicht richtig wiedergegeben werden.
Alle anderen Turbulenzmodelle liegen sehr ähnlich bei der Beschreibung der Nachlaufdelle. Die Lage wird auch noch im far wake Bereich richtig wiedergegeben, was eine sehr wichtige Eigenschaft ist. Sieht man sich die Meßergebnisse in der Ebene X/C=1,05 näher an, so fällt druckseitig ein nicht glatter Verlauf auf. Dieser Knick liegt bei U/U_o= 0,8. Dieser wird

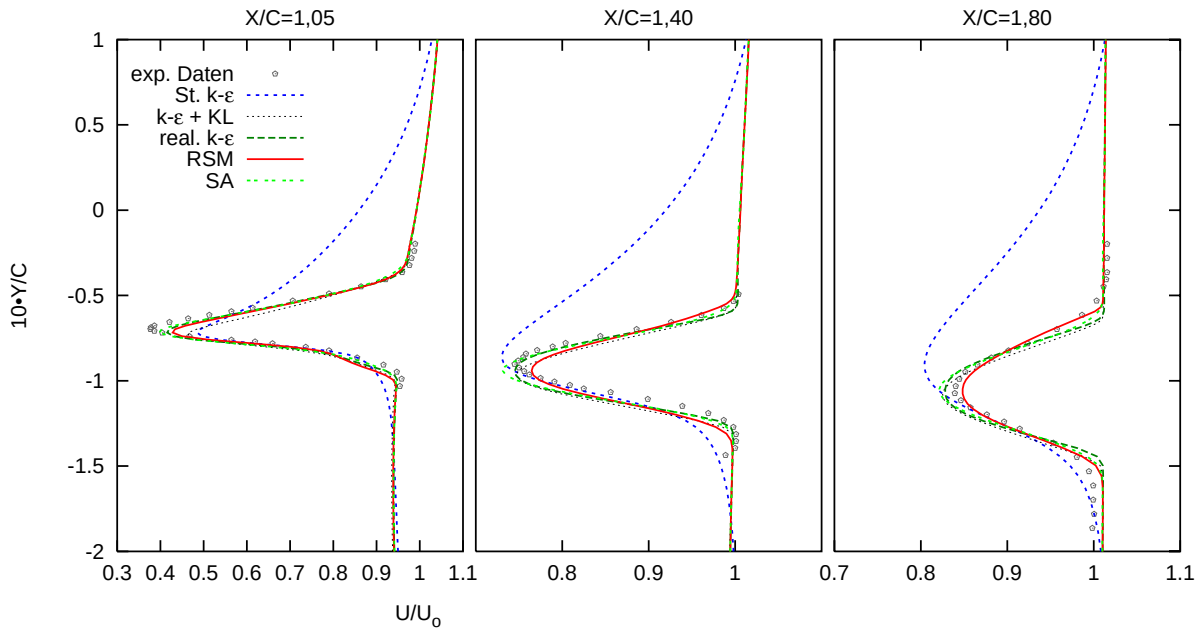

Abb. 5.20: Geschwindigkeitsverlauf im Nachlaufbereich von Modell B, Wandfunktion

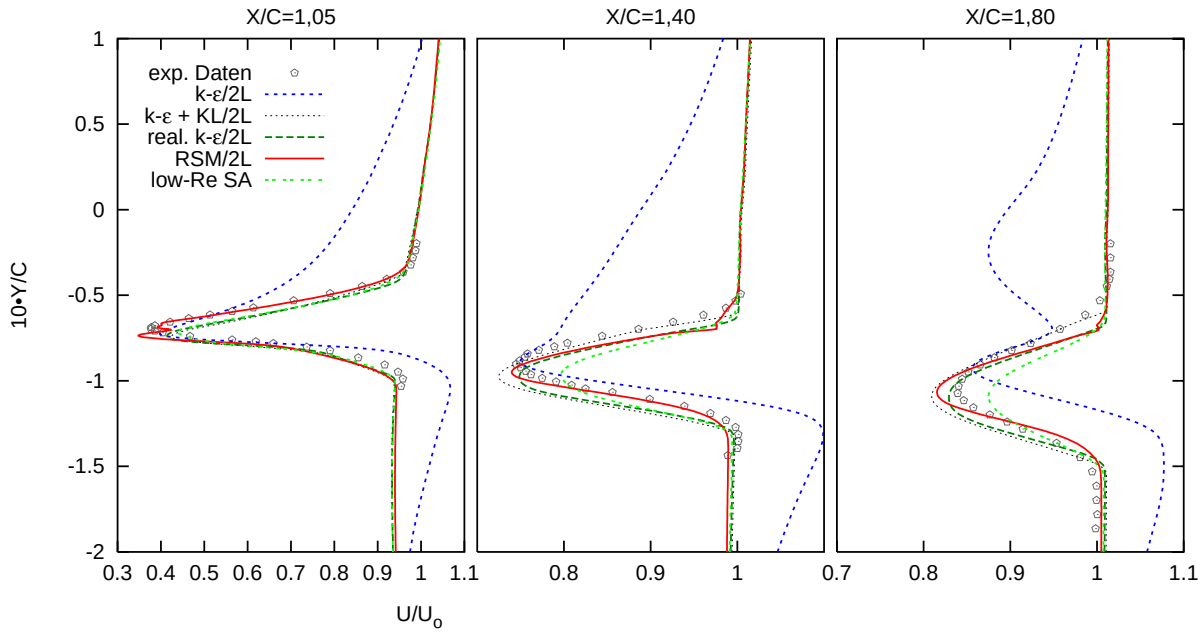

Abb. 5.21: Geschwindigkeitsverlauf im Nachlaufbereich von Modell B, 2-Schichtenmodell

mit Ausnahme des Standard $k-\varepsilon$ Modelles immer richtig erfaßt. Kleine Unterschiede ergeben sich, betrachtet man die Nachlaufdellenbreite und -tiefe. Bezieht man die Abbildungen 5.22 und 5.23 mit in die Ergebnisinterpretation ein, so werden diese Unterschiede größer bei der Zweischichtenformulierung.
Der Einsatz der Zweischichtenformulierung bewirkt keine wesentliche Veränderung und damit keine entscheidende Verbesserung bei der Simulation der Nachlaufdelle in Bezug auf die Geschwindigkeitsverteilung. Auffällig ist neben dem Versagen des Standard $k-\varepsilon$ Modelles, daß das SA Modell eine gegenläufige Tendenz zu den verbleibenden Turbulenzmodellen vorhersagt in Bezug auf die Entwicklung der Minimalgeschwindigkeit. Es errechnet unabhängig vom Abstand von der Profilhinterkante immer eine zu kleine Defizitgeschwindigkeit. Dies steht im Gegensatz zu den anderen Modellen, die eine zu große Defizitgeschwindigkeit vorhersagen. Dies ist auch sehr klar in der Abbildung 5.23 zu erkennen.
Aus dieser geht auch hervor, daß für den far wake Bereich die analytische Lösung gut mit den berechneten und gemessenen Werten übereinstimmt. Analog läßt sich diese Tatsache für die mit der Wandfunktion ermittelten Werte finden, veranschaulicht in Abbildung 5.22.

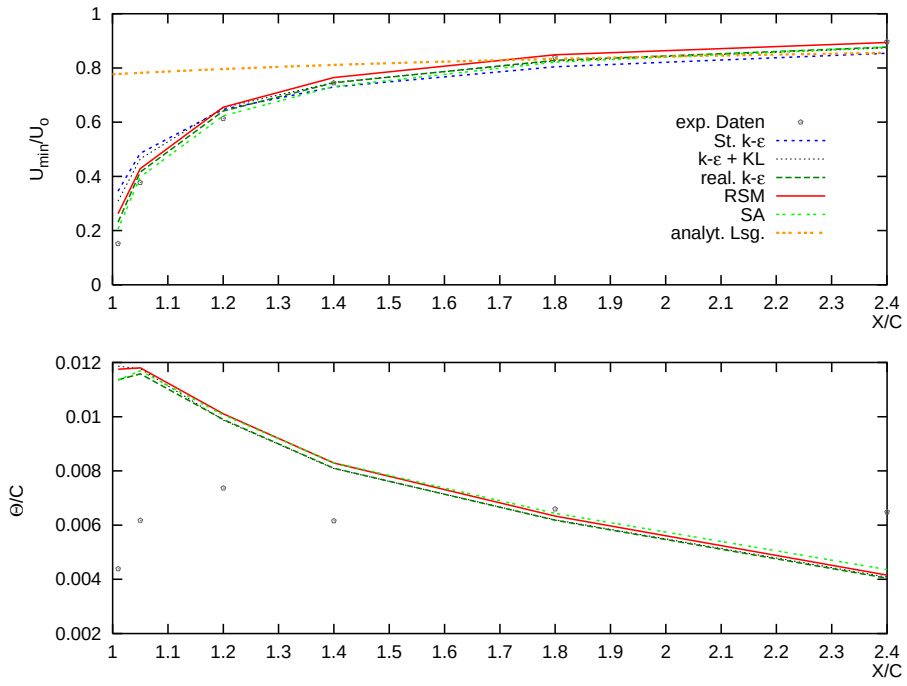

Abb. 5.22: Minimalgeschwindigkeit und Impulsverlustdicke, Modell B, Wandfunktion

Die Impulsverlustdicke ist die Größe, die für dieses Strömungsproblem nur sehr ungenau durch die numerische Simulation bestimmt werden kann. Dies geht aus der Ergebnisbetrachtung der Abbildungen 5.22 und 5.23 hervor. Besonders der Hinterkantenbereich wird falsch beschrieben,

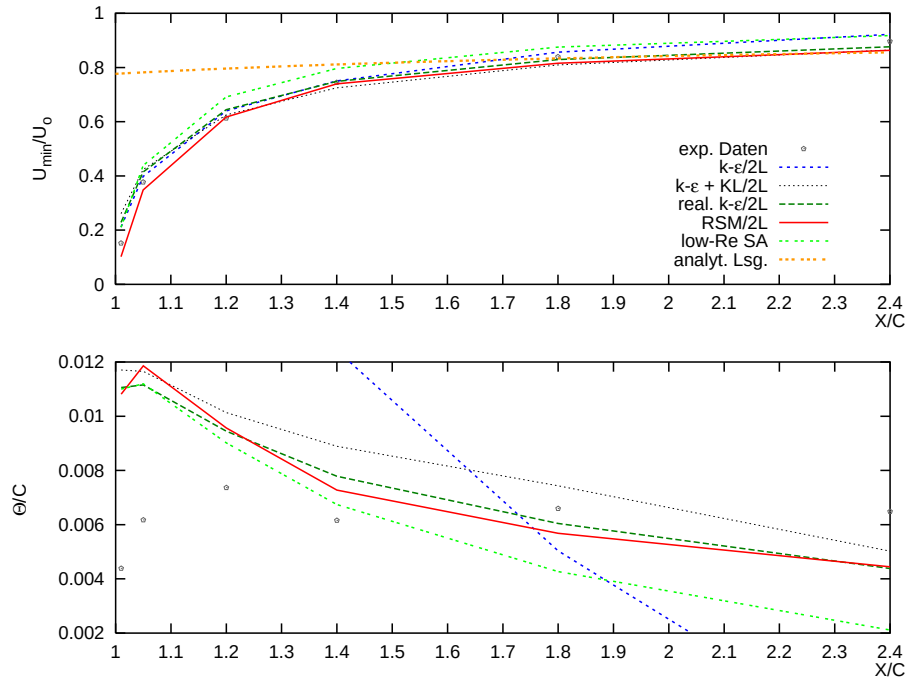

Abb. 5.23: Minimalgeschwindigkeit und Impulsverlustdicke, Modell B, 2-Schichtenmodell

was auf die oben genannten Schwierigkeiten für die Turbulenzmodelle zurückzuführen ist. Im weiteren Verlauf sind leichte Verbesserungen der Zweischichtenformulierung gegenüber der Standard Wandfunktion zu erkennen. Das RSM Modell als hochwertigstes und das realizable $k-\varepsilon$ Modell geben die Impulsverlustdicke am exaktesten wieder.

Zum besseren Verständnis der Geschwindigkeitsverläufe im Nachlaufbereich müssen die Geschwindigkeitsprofile im wandnahen Bereich hinzugezogen werden. Diese sind für vier ausgewählte Meßebenen auf der Profiloberseite in den Abbildungen 5.24 und 5.25 getrennt nach der Wandauflösung dargestellt. Im Gegensatz zu Modell A wird deutlich, daß die experimentellen Daten nicht auf dem logarithmischen Wandgesetz zu liegen kommen. Eine Wandfunktion zur Überbrückung des wandnahen Bereiches ist damit nur eine sehr grobe Näherung. Das Standard $k-\varepsilon$ Modell hat aufgrund seiner Schwäche an der Profilvorderkante mit der Realität nicht viel zu tun. Durch die Kato-Launder Modifikation kann die Grenzschicht jedoch in erster Näherung gut beschrieben werden. Sehr gut mit den experimentellen Daten stimmt das SA Modell trotz Verwendung der Wandfunktion überein.

Ähnliche Aussagen können getroffen werden bei der Interpretation der Ergebnisse der Zweischichtenmodelle. Das realizable $k-\varepsilon$ Modell hat eine hohe Übereinstimmung mit dem Experiment. Ebenfalls das RSM Modell weist 3% vor der Hinterkante sehr gute Ergebnisse

auf. Keines der Modelle kann aber über die Profillänge die Grenzschichtentwicklung exakt wiedergeben.

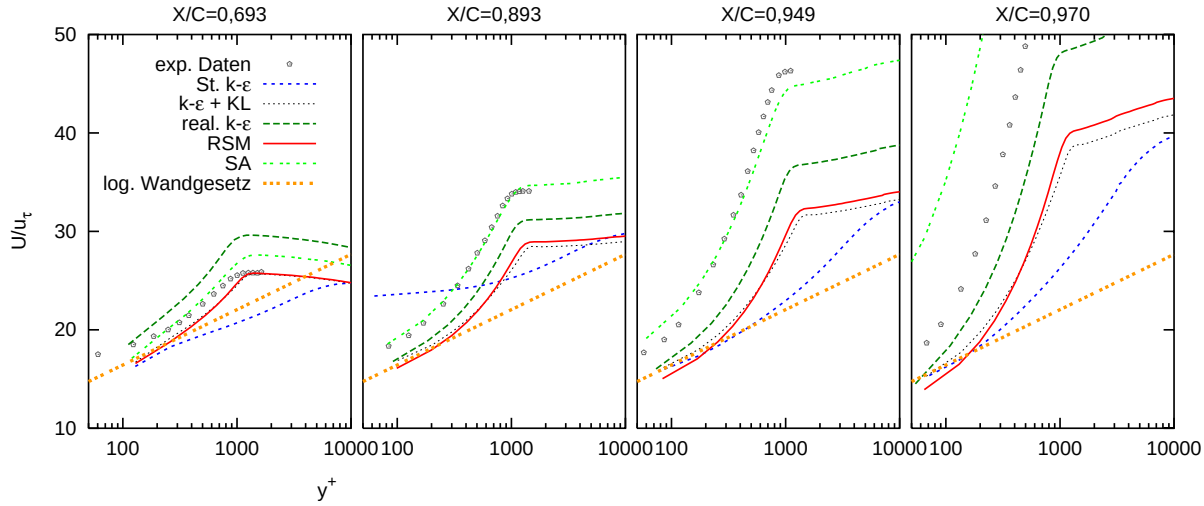

Abb. 5.24: Geschwindigkeitsverlauf in der Grenzschicht, Modell B, Wandfunktion

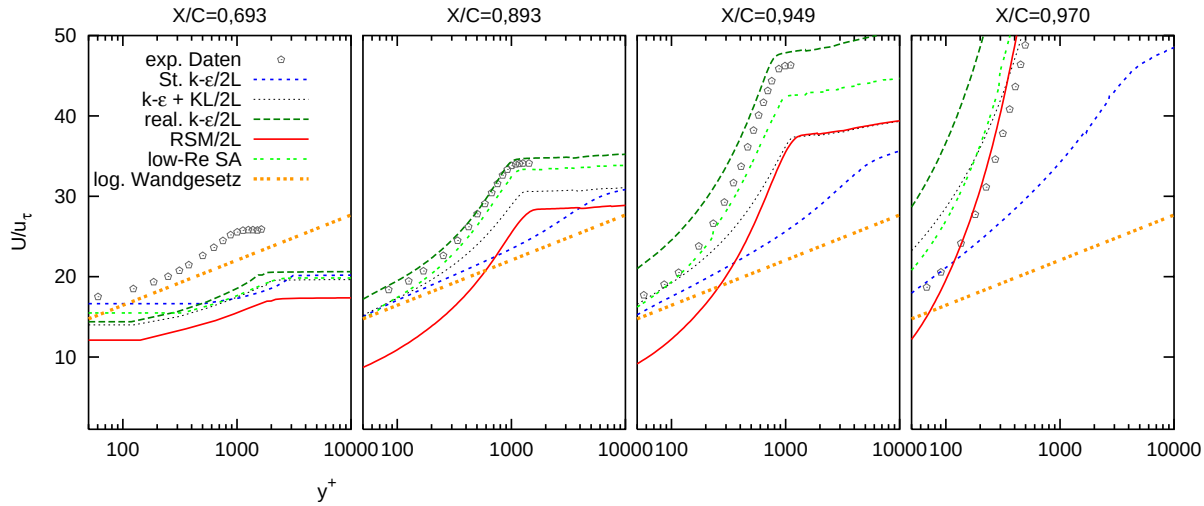

Abb. 5.25: Geschwindigkeitsverlauf in der Grenzschicht, Modell B, 2-Schichtenmodell

Zur vollständigen Auswertung der Ergebnisse muß sich nun die Diskussion der turbulenten kinetischen Energie anschließen. Im Nachlaufbereich ist eine Verteilung von k in drei diskreten Meßebenen in den Abbildungen 5.26 und 5.27 dargestellt. Auf das Standard $k-\epsilon$ Modell wird hier nicht mehr eingegangen. Die Begründung für das Modellversagen wurden in Zusammenhang mit Modell A diskutiert.
Alle Modelle geben die richtige Lage der Turbulenzverteilung im Nachlaufbereich wieder. Dies ist eine unmittelbare Folge aus der richtig berechneten Minimalgeschwindigkeitslage und der

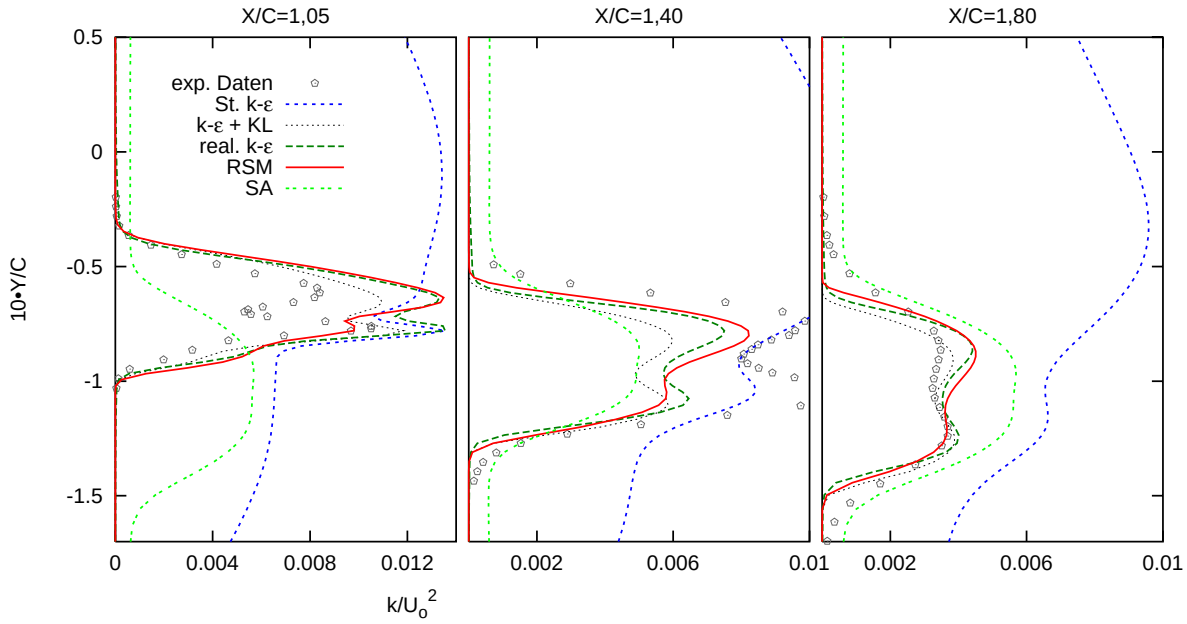

Abb. 5.26: Profil der turb. kinet. Energie im Nachlaufbereich von Modell B, Wandfunktion

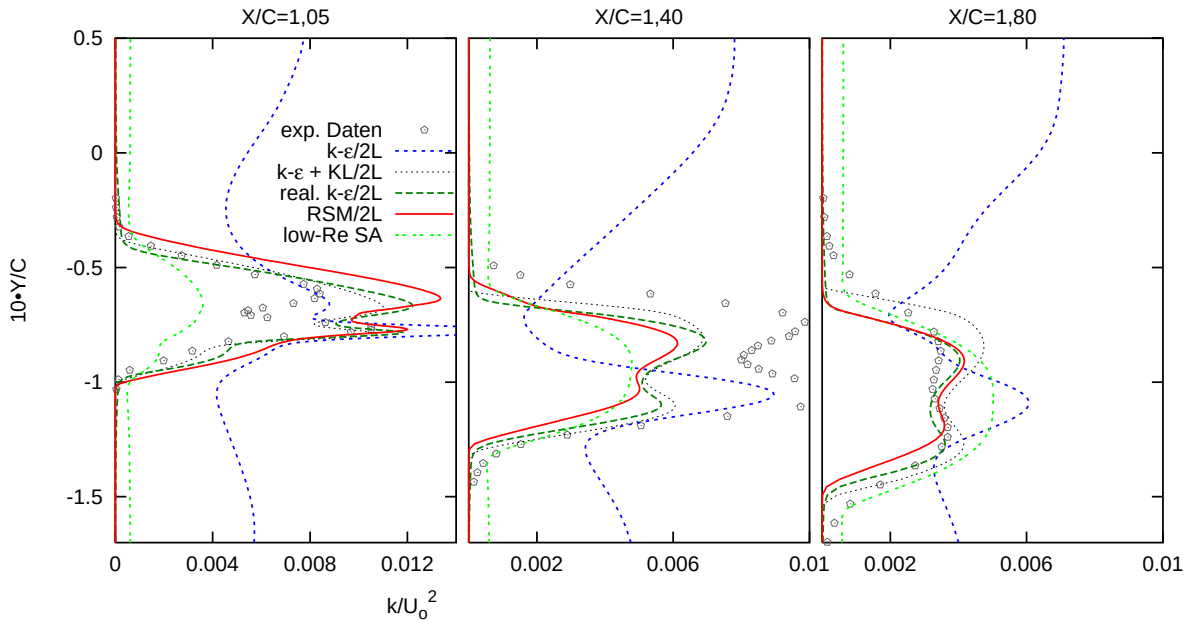

Abb. 5.27: Profil der turb. kinet. Energie im Nachlaufbereich von Modell B, 2-Schichtenmodell

Kopplung über die Formulierung von BOUSSINESQ. Die k-Profilbreite wird noch für die erste Meßposition gut simuliert und der Übergang zur Freistromturbulenz sehr gut angegeben. Für alle weiter stromab liegenden Positionen wird dies immer schlechter. Die experimentellen Daten geben einen sanfteren Übergangsbereich an, so daß die Turbulenzbreite des wakes etwas größer ausfällt.
Sehr unzureichend wird hingegen das Maximum von k berechnet. Hier weisen alle verwendeten Turbulenzmodelle eine Schwäche auf. Es kann hierbei auch kein eindeutiger Einfluß der Wandauflösung festgestellt werden. Alle Modelle weisen den charakteristischen Verlauf von k mit den zwei Maxima auf und stimmen gut mit den experimentellen Daten an der Position X/C=1,80 überein. Dies ist jedoch als zufällig anzusehen, wenn man die beiden anderen dargestellten Meßebenen in die Überlegungen mit einbezieht.
Für die Ergebnisinterpretation der k-Profile im wake muß die k-Verteilung in der Grenzschicht berücksichtigt werden. Eine Darstellung dieser ist in den Abbildungen 5.28 und 5.29 zu finden. Der typische Verlauf der turbulenten kinetischen Energie, gekennzeichnet durch den quadratischen Anstieg an der Wand bis zum Maximum und einen sich daran anschließenden Abfall auf den Freistromwert, wird von allen Turbulenzmodellen bis auf die bereits bekannte Ausnahme wiedergegeben.

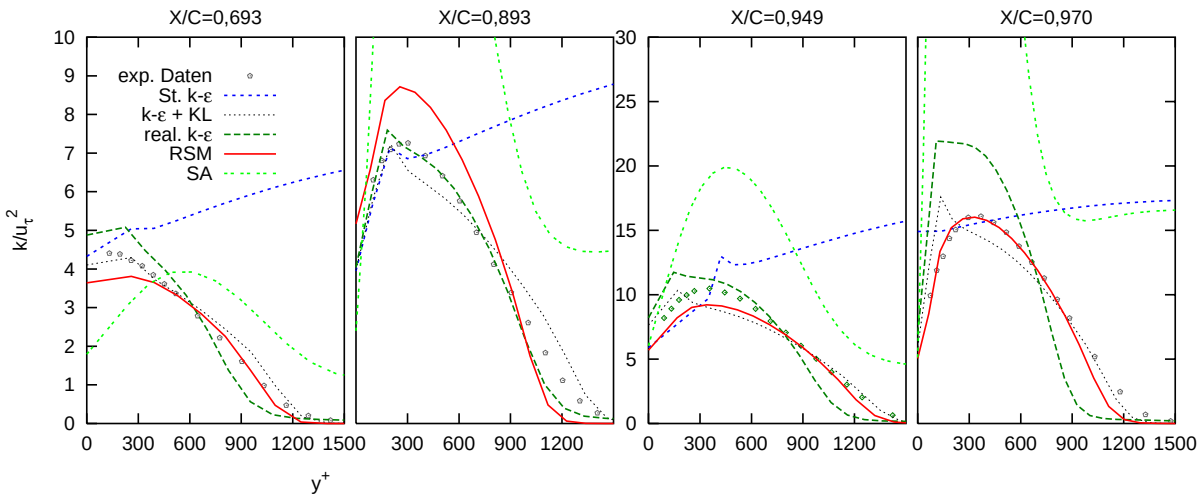

Abb. 5.28: Profil der turb. kinet. Energie in der Grenzschicht, Modell B, Wandfunktion

Über die gesamte Profiloberfläche betrachtet gibt das $k-\varepsilon$ Modell mit der Kato-Launder Modifikation die besten k-Profile wieder. Kein Modell ist jedoch mit der Standard-Wandfunktion in der Lage, die turbulente kinetische Energie in der wandnahen Zone richtig zu beschreiben. Bei der Verwendung der Zweischichtenformulierung zeigen alle Modelle in der letzten Meßebene ein viel zu großes Maximum verbunden mit einem zu steilen Abfall auf den Freistromwert. Aus

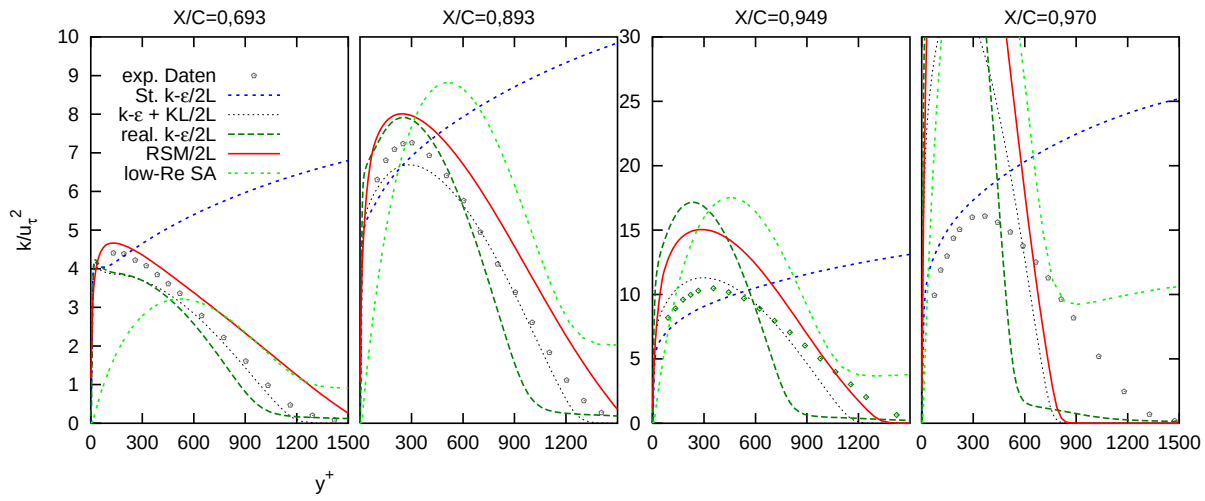

Abb. 5.29: Profil der turb. kinet. Energie in der Grenzschicht, Modell B, 2-Schichtenmodell

diesem Grund wird auch an der Position X/C=1,05 ein zu großes Maximum berechnet. Besser sieht dies in den Meßebenen stromauf aus, wo sich besonders das $k-\varepsilon$ Modell durch ein sehr gutes Ergebnis auszeichnet.

5.4.3 Schlußfolgerungen

Das Ziel dieses Untersuchungsabschnittes war es, die oben genannten Turbulenzmodelle für eine stationäre Profilumströmung im Hinblick auf die Nachlaufdelle zu testen. Hierfür wurden die Strömungsfelder um zwei sehr unterschiedliche Modellprofile als Kriterium herangezogen. Ein sehr offensichtliches Ergebnis ist das Versagen des Standard $k-\varepsilon$ Modelles in fast allen Bereichen. Dieser Sachverhalt konnte auf die bekannte Modellschwäche für eine Staupunktströmung zurückgeführt werden. Eine einfache Ergänzung des Standard Modelles nach dem Vorschlag von KATO und LAUNDER macht es jedoch wieder vergleichbar mit allen anderen getesteten Turbulenzmodellen.

Das RSM Modell ist das hochwertigste Turbulenzmodell, das untersucht wurde. Aus diesem Grund hätte man auch die größte Übereinstimmung mit den experimentellen Daten erwarten sollen. Dies kann bei der Ergebnisauswertung jedoch nicht festgestellt werden. Ein entscheidender Grund hierfür ist die Art der Wandbehandlung. Wird die Wandfunktion verwendet, so kann nicht erwartet werden, daß ein hochwertiges Turbulenzmodell die Fehler dieser groben Vereinfachung kompensieren kann. Ähnlich ist dies zu sehen, wenn die Zweischichtenformulierung angewendet wird. Der Grenzschichtbereich wird dann bei der Verwendung des RSM Modelles exakt gleich zu den anderen Modellen simuliert. Gerade da die Grenzschicht die

Entstehungsquelle einer Nachlaufdelle ist, muß diese und deren Modellierung bei der Ergebnisinterpretation berücksichtigt werden.
Da die Beschreibung der Grenzschicht eine entscheidende Rolle für die Nachlaufsimulation spielt, sollte die Zweischichtenformulierung der einfachen Modellbildung durch die Standard-Wandfunktion entscheidend überlegen sein. Dies kann anhand der beiden vorgestellten Testfälle nicht bestätigt werden. Der Mehraufwand durch die erhöhte Rechenzeit kann durch die Ergebnisgüte nicht gerechtfertigt werden. Es muß hierbei jedoch zwischen dem Eingleichungsmodell nach WOLFSHTEIN und der low Re-Version vom SA Modell unterschieden werden. Da das Eingleichungsmodell zwar den erhöhten Rechenaufwand bedeutet, aber die Grenzschicht nur sehr ungenau wiedergeben kann, d.h. keine Transition oder ähnliche Grenzschichtphänomene ausreichend berücksicht, wird diese Art der Turbulenzmodellierung für die weiteren Untersuchungen nicht weiter angewendet. Die low Re-Version des SA Modelles verspricht aber, für weitere Testfälle instationärer Art eine gute Alternative zur Wandfunktion zu sein.
Allgemein kann festgestellt werden, daß die Nachlaufdelle qualitativ gut beschrieben werden kann. Dies bezieht sich auf die Geschwindigkeitsverteilung und das Profil der turbulenten kinetischen Energie. Die Lage der Minimalgeschwindigkeit in y-Richtung und somit die des wakes wird sehr gut wiedergegeben, was auch auf die Nachlaufbreite zutrifft. Lediglich die Maximalwerte der Geschwindigkeit und von k werden mit größeren Abweichungen berechnet.

6 Instationäre Nachlaufströmung

Auf den Ergebnissen von Kapitel 5 aufbauend werden im Folgenden numerische Untersuchungen zur instationären Nachlaufströmung vorgestellt. In diesem Abschnitt werden ebenso wie im stationären Fall die berechneten Resultate mit experimentellen Daten verglichen, um eine Aussage über die Güte der Turbulenzmodelle zu erhalten. Ziel dieser Teiluntersuchung war es, das bestgeeignete Turbulenzmodell für die numerische Simulation einer 1-stufigen Turbine zu finden und die Unzulänglichkeiten in der Strömungsvorhersage kennenzulernen.
Da das vorliegende instationäre Experiment [60] auch stationäre Daten für eine Gitterströmung bereitstellt, werden in einer Voruntersuchung die stationären Daten von Experiment und Simulation verglichen. Auf diese Weise wird der Schritt vom Einzelprofil aus Kapitel 5 zu einer Kaskade vollzogen, bevor eine instationäre Gitterströmung näher betrachtet wird.

6.1 Stand des Wissens

In den letzten Jahren gewannen instationäre Effekte eine immer größere Bedeutung und wurden in zahlreichen Forschungsvorhaben genauer untersucht. Hierbei sind experimentelle und numerische Ergebnisse nebeneinander zu sehen, die sich sinnvoll ergänzen und somit ein Gesamtbild der instationären Interaktion zweier benachbarter Schaufelreihen einer axialen Turbomaschinen aufzeigen.
Die aufeinanderfolgende Anordnung von stehenden und rotierenden Schaufelgittern bewirkt ein hohes Maß an Instationarität in einer Turbomaschine [20], [45]. Dadurch werden das Grenzschichtverhalten und sich daraus ergebende Effekte, wie Verlust und Wärmeübergang, wesentlich beeinflußt. Bei inkompressiblen Strömungen ist die wesentliche Ursache für instationäre Effekte neben potentialtheoretischen Effekten der Profilnachlauf. Dring et al. [11] haben nachgewiesen, daß beide Phänomene sich in den meisten Fällen überlagern. Im Gegensatz zum Potentialeinfluß, der sehr schnell abklingt, ist die Auswirkung eines Nachlaufs noch mehrere Sehnenlängen stromab nachzuweisen. Das Strömungsgebiet des Nachlaufes ist durch eine hohe Turbulenz charakterisiert [27]. Dies ist ein weiterer instationärer Einflußfaktor.
Meyer [38] führte eines der ersten Experimente durch, um die Interaktion von Nachläufen mit

einem stromab liegenden Turbomaschinengitter zu untersuchen. Er stellte fest, daß bei ihrem konvektiven Transport durch das Gitter die kontinuierlichen Nachläufe in einzelne diskrete Segmente unterteilt werden. Dieser Sachverhalt ist in Bild 6.1 veranschaulicht.

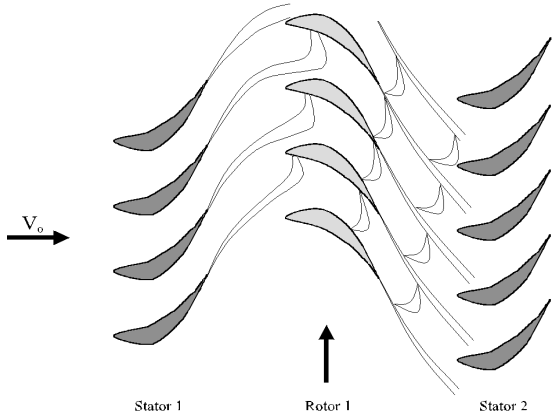

Abb. 6.1: Skizze der Wakestruktur in einer Axialturbinenstufe

Nach HODSON [19] unterscheidet sich die Strömung eines Einzelprofiles deutlich von der durch ein Turbomaschinengitter. SMITH [54] stellt fest, daß aufgrund der Zirkulation der Schaufeln die Wakesegmente in einer Gitterpassage deformiert werden. Dieses Phänomen tritt besonders deutlich auf in Axialturbinen. KERREBROCK und MIKOLAJCZAK [30] haben gezeigt, daß die geringere Geschwindigkeit im Nachlauf zu einem Slip-Effekt führt (dargestellt in Abbildung 6.2), der eine Querströmung innerhalb einer Schaufelpassage bewirkt. Die gepulsten Wakesegmente in einer Rotorpassage werden sowohl an der Saug- als auch an der Druckseite deformiert [38].

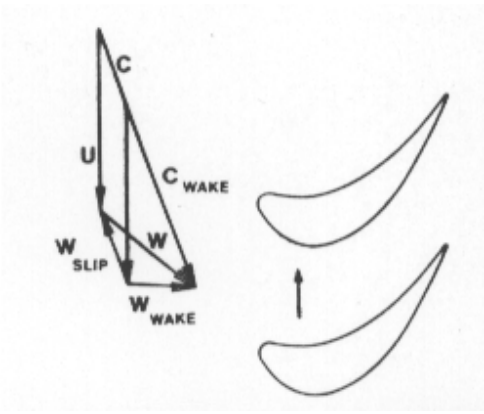

Abb. 6.2: Slip-Geschwindigkeit aus [3]

Analog zu KERREBROCK und MIKOLAJCZAK [30] sind das Experiment und die daraus re-

sultierenden Ergebnisse von BINDER et al. [3] zu sehen. HODSON bestätigt dies, indem er eine einfache Kinematik der Interaktion des Nachlaufes der stehenden Schaufelreihe mit der stromab rotierenden Kaskade formuliert. Die diskreten Nachlaufpulse weisen ein Verhalten auf wie ein negativer Freistrahl auf die Profiloberfläche, wenn sie mit der freien Außenströmung transportiert werden. Sobald der Nachlauf auf die Profilvorderkante trifft, bewirkt die Geschwindigkeitsverteilung aufgrund des negativen Jets eine Verzerrung der Konturen konstanter Vorticity. Weiterhin stellte MEYER fest, daß der negative Jet eine Querströmung von der Druck- zur Saugseite innerhalb des Nachlaufes bewirkt. Es werden auf diese Weise Fluktuationen in der Profilgrenzschicht hervorgerufen. Mit diesem Phänomen beschäftigten sich auch bereits HODSON [21], HODSON und ADDISON [18], sowie PAXON und MAYLE [44] sehr intensiv.

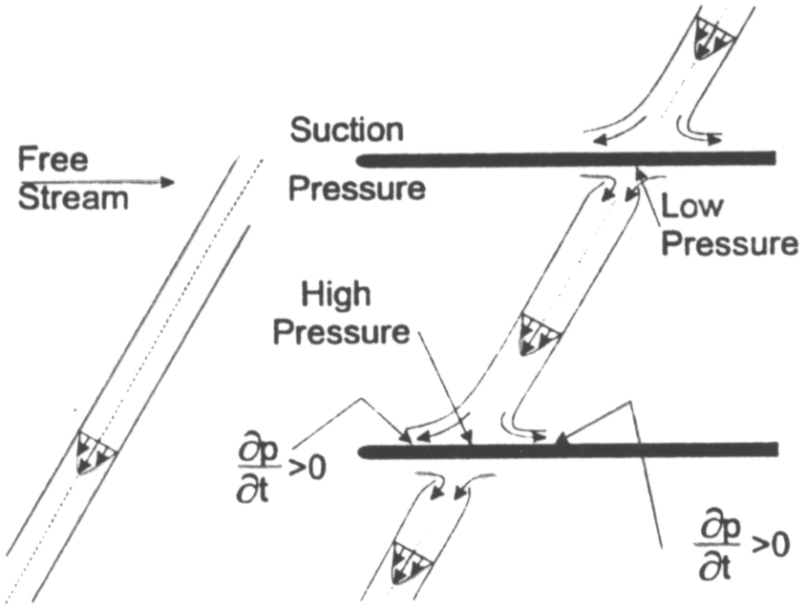

Abb. 6.3: Wake als negativer Jet dargestellt aus [19]

Diese einfache kinematische Erklärung des Nachlaufverhaltens in einer Passage wurde von HODSON [22] 1985 experimentell bestätigt. Er untersuchte die Rotorpassage einer Axialturbine mit Hilfe von Hitzdrahtsonden. Ebenfalls die numerischen Vorhersagen von HODSON [23], GILES [17], RAI [47], KORAKIANITIS [31] und DAWES [8] bestätigen die kinematische Theorie für den Nachlauftransport durch ein stromab liegendes Turbomaschinengitter, unabhängig davon ob es sich um eine Turbine oder einen Verdichter handelt. Diese kinematische Erklärung der Interaktion zwischen wake und Schaufel ist äquivalent zu der Slipgeschwindigkeit von KERREBROCK und MIKOLAJCZAK.

JOSLYN et al. [27] zeigen auf, daß die Austrittströmung eines Rotors im Mittelschnitt einer Turbine sich sehr stark ändert, sobald sie mit den Statornachläufen periodisch interagiert. Instationäre Messungen an einer Turbomaschinenstufe wurden auch durchgeführt von HUNTER [25], SHARMA et al. [52], sowie von JOSLYN und DRING [28]. Sie stellten beträchtliche Änderungen der Strömungswinkel, der Geschwindigkeits- und Druckverteilung fest in Abhängigkeit der Stator-Rotor Position. BINDER et al. [3] haben eine plötzliche Zunahme der turbulenten kinetischen Energie festgestellt, wenn der Rotor den Passagenwirbel des stromauf liegenden Stators zerhackt. Alle hier genannten experimentellen Untersuchungen wurden angestrengt, um die instationären Strömungsphänomene besser zu verstehen. Nach DENTON [9] sind einige Verlustmechanismen eindeutig verstanden. In vielen Fällen fehlt jedoch das Verständnis.
Um diese Lücke im Verständnis für instationäre Strömungseffekte schneller zu schließen, wurden in den letzten Jahren auch zunehmend numerische Berechnungen durchgeführt. Hier sind z.B. CHEN und LESCHZINER [5], MAGAGNATO [36], KRYSINSKI et al. [33], WALRAEVENS et al. [61] und VOLMAR et al. [58] zu nennen.

6.2 Experimenteller Aufbau

Am Institut für Strahlantriebe und Turboarbeitsmaschinen der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen wurden eineinhalb Turbinenstufen experimentell untersucht [60]. Aus den Messungen mit stehendem Rotor liegen die Geschwindigkeiten und Strömungswinkel in den Ebenen stromab der drei Schaufelgitter vor. Für den Betrieb mit 3.500 U/min sind weiterhin neben den instationären Meßgrößen in den oben genannten Meßebenen die instationären Geschwindigkeiten und Strömungswinkel der zweiten Statorpassage bekannt.

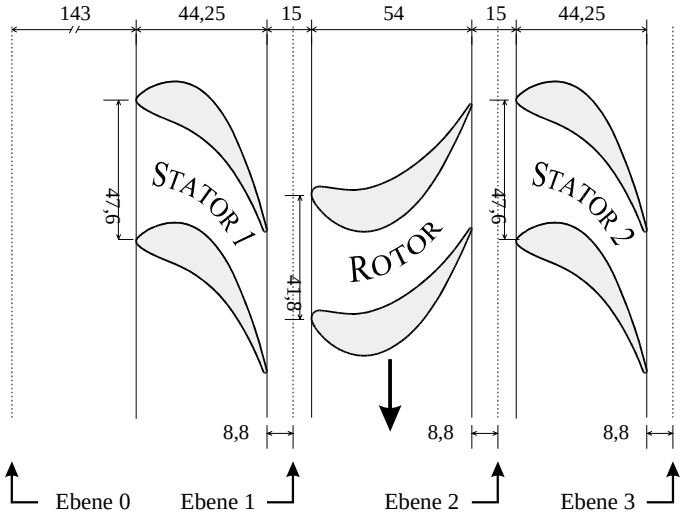

Abb. 6.4: Gitterabmessungen und Meßebenen

Der Naben- und der Gehäusedurchmesser ist für die drei Gitter konstant gehalten und beträgt am Außendurchmesser 600mm, am Innendurchmesser 490mm. Die Abmessungen der Gitter im Mittelschnitt sind in Bild 6.4 dargestellt.

Die beiden Statorreihen sind identisch und bestehen aus 36 ungeschränkten Schaufeln mit Traupelprofilen mit einer Sehnenlänge von 62 mm. Die Schaufeln stehen mit den Hinterkanten senkrecht auf Tangenten von Nabe und Gehäuse. Der Rotor ist mit 41 ungeschränkten Schaufeln modifizierter VKI-Profile mit einer Sehnenlänge von 60 mm bestückt, deren Schwerpunktlinie senkrecht zur Tangente von Nabe und Gehäuse steht. Die Schaufelprofile aller drei Gitter sind über dem Radius unverändert. Der axiale Abstand der Schaufelreihen beträgt jeweils 15mm, und die Meßebenen liegen jeweils 8,8mm stromab der Profilhinterkante.

Die Meßdaten mit stehendem Rotor entstammen Messungen mit Gesamtmassenströmen von 7 kg/s bzw. 8 kg/s. Somit ergibt sich mit der Rotorsehenlänge C für den kleineren Massenstrom eine Reynoldszahl $Re_C = 1,9 \cdot 10^5$. Bei den Messungen mit dem kleineren Massenstrom ist der zweite Stator gegenüber dem ersten Stator um drei Grad des Umfangswinkels in die gedachte Laufrichtung des Rotors verdreht. Bei den Messungen mit dem größeren Massenstrom beträgt die Verdrehung des zweiten Stators zwei Grad entgegen der gedachten Drehrichtung des Rotors. Die Hinterkante der betrachteten Rotorschaufel steht bei den Messungen mit stehendem Rotor in axialer Richtung immer in gleicher Höhe mit der Hinterkante der Statorschaufel, die der betrachteten Meßebene am nächsten ist.

Die Strömungsgeschwindigkeiten sind mit Fünfloch-Drucksonden und Dreifach-Hitzdrahtsonden in einem Meßraster konstanter Radien- und Umfangswinkelpositionen aufgenommen. Die Verteilung der Meßpunkte gestaltet sich wie in Bild 6.5.

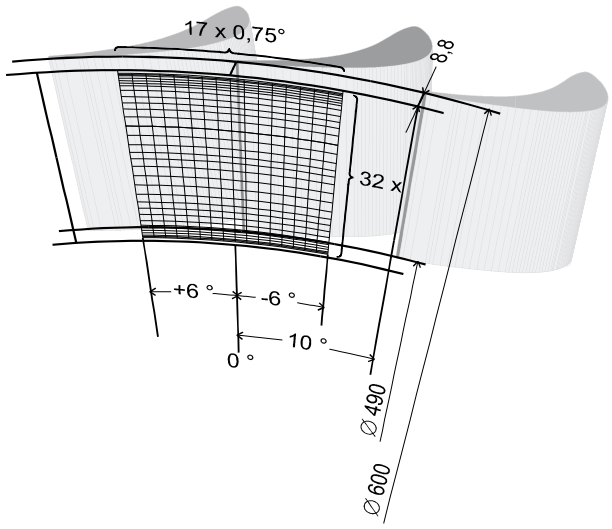

Abb. 6.5: Lage der Meßpunkte innerhalb einer Meßebene

In der Meßebene befinden sich die Meßpunkte bei konstanten Umfangswinkeln auf ungleichmäßig verteilten Radien. Jeweils von der Hinterkante der vermessenen Schaufel aus wird meist in $0,75°$-Schritten ein Winkelbereich von $\pm 6°$ erfaßt. Dies ist etwas mehr als eine Statorteilung. Die Radialpositionen sind im Naben und Gehäusebereich enger gestaffelt, reichen aber aus meßtechnischen Gründen nicht bis an die Wand heran. Die unterschiedliche Meßpunktanzahl ergibt sich aus einer differierenden Anzahl von Radialpositionen. Bei dem kleineren Massenstrom sind das 38 Punkte, beim größeren 32. Für den Winkel γ, den die Strömung gegenüber der Drehachse einnimmt, werden nur 20 Radialpositionen herangezogen.
Für die instationäre Messung wurde der Massenstrom immer konstant bei 8 kg/s gehalten.

6.3 Numerische Modellbildung

Um den Rechenaufwand in realisierbaren Größen zu halten, wurde das dreidimensionale Problem auf ein zweidimensionales, den Mittelschnitt, abgebildet. Weiterhin wurde es als inkompressibel betrachtet, was jedoch keine unzulässige Vereinfachung der Realität darstellt.
Das Rechengebiet beginnt in axialer Richtung 1,5 Sehnenlängen vor der ersten Profilvorderkante und endet 3 Sehnenlängen stromab der letzten Profilhinterkante.
Als Eintrittsrandbedingung wurde ein rechtwinkliges Geschwindigkeitsprofil gewählt, das sich aus dem jeweiligen Massenstrom ergibt. Diese Randbedingung wird von FLUENT als *velocity inlet* bezeichnet. Ein *pressure outlet* stellt die Randbedingung am Ausströmrand dar, d.h. es wird an dieser Stelle der Druck konstant gehalten. Als Randbedingung für die turbulenten Größen werden am *velocity inlet* wie in Kapitel 5 der Turbulenzgrad von 0,1 % und der hydraulische Durchmesser D_H vorgegeben. Dieser kann gut über eine Gitterteilung abgeschätzt werden.
Diese Randbedingungen wurden stationär vorgegeben, auch bei einer instationären Simulation. Die Profiloberflächen wurden als Wände definiert, an denen die Haftbedingung erfüllt wird. Die Mittelschnittebene wurde für die Berechnung in eine Ebene abgewickelt und jeweils nur eine Teilung pro Gitter diskretisiert. In Umfangsrichtung wurde deshalb eine periodische Randbedingung definiert, vgl. Abbildung 6.6.
Als einzige Änderung zu den Default-Einstellungen in FLUENT wurde für die Diskretisierung der konvektiven Flüsse das second-order upwind Verfahren eingestellt.
Bei der instationären Berechnung der Stator-Rotor Kombination wird die Realität durch jeweils eine Teilung der beiden Profilreihen nicht richtig modelliert, da zum einen Stator und Rotor ein unterschiedliches Teilungsverhältnis aufweisen und zum anderen aber das Interface die gleiche räumliche Ausdehnung in Umfangsrichtung haben muß. Auf dieses Problem wird in Abschnitt 6.3.1 näher eingegangen werden.

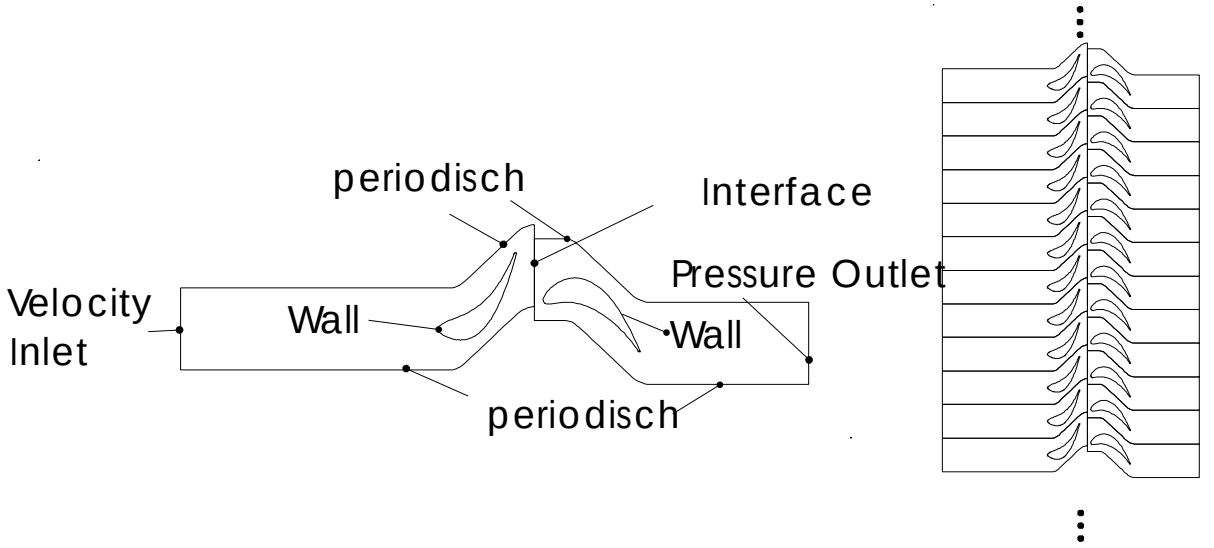

Abb. 6.6: Numerische Modellbildung

6.3.1 Teilungsanpassung

Um die Realität, die durch ungleiche Teilungen von Stator und Rotor gekennzeichnet ist, auf ein numerisches Modell mit gleicher Teilung abzubilden, gibt es verschiedene Möglichkeiten. Alle Untersuchungen sind in dem Zusammenhang zu sehen, daß die Nachlaufstruktur des Stators am Rotoraustritt der Forschungsgegenstand ist. Aus diesem Grund ist es zwingend notwendig, die Rotorgeometrie als feste Größe zu sehen und den stromauf liegenden Stator so zu gestalten, daß er die gleiche Teilung besitzt und gleichzeitig eine weitgehend identische Rotorzuströmung gewährleistet.
Da die ursprüngliche Statorteilung bei 47,6 mm liegt, muß diese nun auf die Rotorteilung von 41,8 mm im Mittelschnitt reduziert werden. In Bild 6.7 sind zwei Varianten der Teilungsanpassung dargestellt.

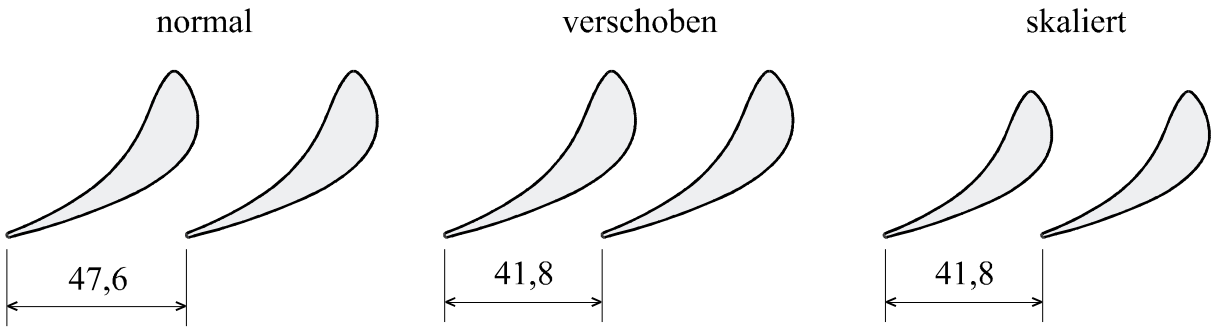

Abb. 6.7: Möglichkeiten der Teilungsanpassung

Das Bild 6.7 zeigt im Vergleich zur Orginalkonfiguration zwei Statorvarianten, deren Teilung ohne Profilformänderung an die Rotorteilung angepaßt ist. Im mittleren Fall sind die Schaufeln dichter aneinandergerückt, rechts ist die Statorreihe mit dem entsprechenden Faktor skaliert. Die Unterschiede sind in diesem Bild kaum zu erkennen, wirken sich aber in einer numerischen Simulation sehr deutlich aus. Zu erkennen ist dies in der Abbildung 6.8. Hierfür wurde eine stationäre Rechnung durchgeführt für nur eine Statorteilung. In diesem Zusammenhang wurden alle Rechnungen mit dem um die Kato-Launder Modifikation erweiterten $k-\varepsilon$ Modell durchgeführt. Da in einem ersten Schritt die Möglichkeiten der numerischen Modellabbildung untersucht werden sollten, sind keine experimentellen Daten mit dargestellt.

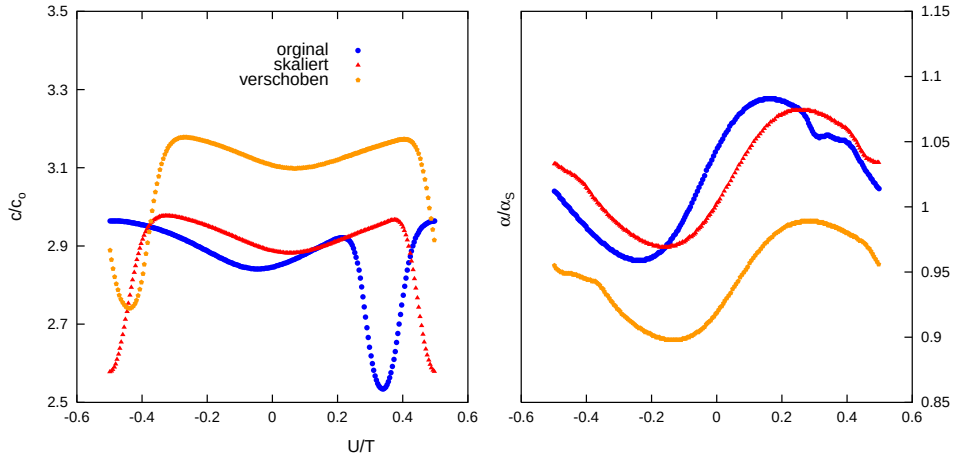

Abb. 6.8: Auswirkungen der Teilungsanpassung

Diese Rechnungen wurden alle mit der gleichen Zuströmgeschwindigkeit am *velocity inlet* durchgeführt. Dies gewährleistet für eine folgende instationäre Rechnung mit der realen Drehzahl des Rotors einen konstanten Massenstrom. Es wird lediglich die Frequenz der gepulsten Nachlaufdellen verändert, mit der sie die Rotorpassage passieren.
Im Falle des verschobenen Profils steigt die Absolutgeschwindigkeit c, dargestellt im Verhältnis zur Geschwindigkeit c_o der ungestörten Zuströmung, stark an, während der Abströmwinkel α, der mit dem Schaufelhinterkantenwinkel α_S entdimensioniert dargestellt ist, kleiner wird. Beim Aneinanderrücken der Profile ändert sich die Geometrie der Passage und es kommt zu zwei überlagerten Effekten: Das Verhältnis von Austrittsquerschnitt zu Eintrittsquerschnitt wird kleiner, wodurch die Strömung stärker beschleunigt wird, und der Abströmwinkel wird kleiner, weil die Strömung besser geführt wird und sich die Fehlumlenkung infolge der geänderten Geometrie etwas verringert. Wenn die Profile weiter angenähert werden, kommt es sogar zu einem konvergent/divergenten Verlauf in der Passage, ein typischer Turbinencharakter ist dann nicht mehr gegeben. Die Verschiebung der Geschwindigkeitsminima in Laufrichtung des Rotors geht

mit der Verringerung des Abströmwinkels einher. Weil der betrachtete Strömungsquerschnitt entsprechend der Ebene 1 hinter der Abströmkante liegt, durchzieht die Nachlaufdelle durch die stärkere Umlenkung eine andere Umfangsposition. Die Formänderung der Passage und der ausgeprägte Einfluß auf die Strömung machen die Teilungsanpassung durch die Schaufelverschiebung unbrauchbar.

Bei der Skalierung des Stators ändert sich an den Absolutwerten von Geschwindigkeit und Abströmwinkel nur wenig. Das verkürzte Profil führt zu einem verminderten Wandreibungseinfluß und damit zu einer geringfügig schwächer ausgeprägten Nachlaufdelle und zu kleineren Schwankungen des Winkels α. Durch den veränderten Abstand der Meßebene in Relation zu der skalierten Profilsehne kommt es zu einer Verschiebung in Umfangsrichtung.

Aus diesen Gründen wurde für alle instationären Rechnungen die Skalierung des Stators zur Teilungsanpassung gewählt. Um die Fehler dieser numerischen Modellbildung noch weiter abzuschätzen, wurde eine Kombination aus 5 Stator- und 6 Rotorschaufeln simuliert. Das Ergebnis dieser Rechnung im Vergleich zu einer Berechnung mit skaliertem Stator ist in Abbildung 6.9 dargestellt.

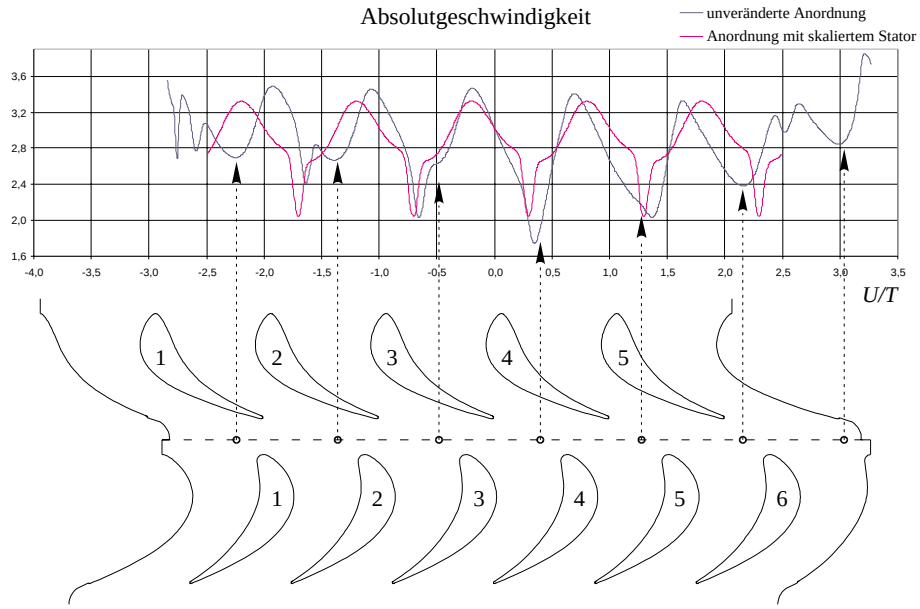

Abb. 6.9: Vergleich der realen Geometrie mit dem skalierten Modell

Da die 36 Stator- und die 41 Rotorschaufeln keinen gemeinsamen Teiler aufweisen, wurden bei obiger Simulation kleine Fehler an den Rändern des Interfaces gemacht. Wird jedoch die Teilung von Statorschaufel 3 zu 4 zur Auswertung herangezogen, kann festgestellt werden, daß die Geometrieskalierung eine gute Übereinstimmung mit der Berechnung der realen Geometrie aufweist.

6.3.2 Netzgenerierung

Die Vorgehensweise der Netzgenerierung wurde bereits in Kapitel 5 vorgestellt. Für eine instationäre Rechnung kommt nun die Netzgestaltung am Interface und an den periodischen Rändern hinzu. Hierbei ist auch die Frage nach der Lage des Interfaces und der periodischen Ränder zu klären. Es werden zwei getrennte Netze erstellt, eines für den Stator und eines für den Rotor. Diese werden für die Simulation über das Interface miteinander gekoppelt. Die gesamte Vorgehensweise zur Netzgenerierung ist in Abbildung 6.10 veranschaulicht.

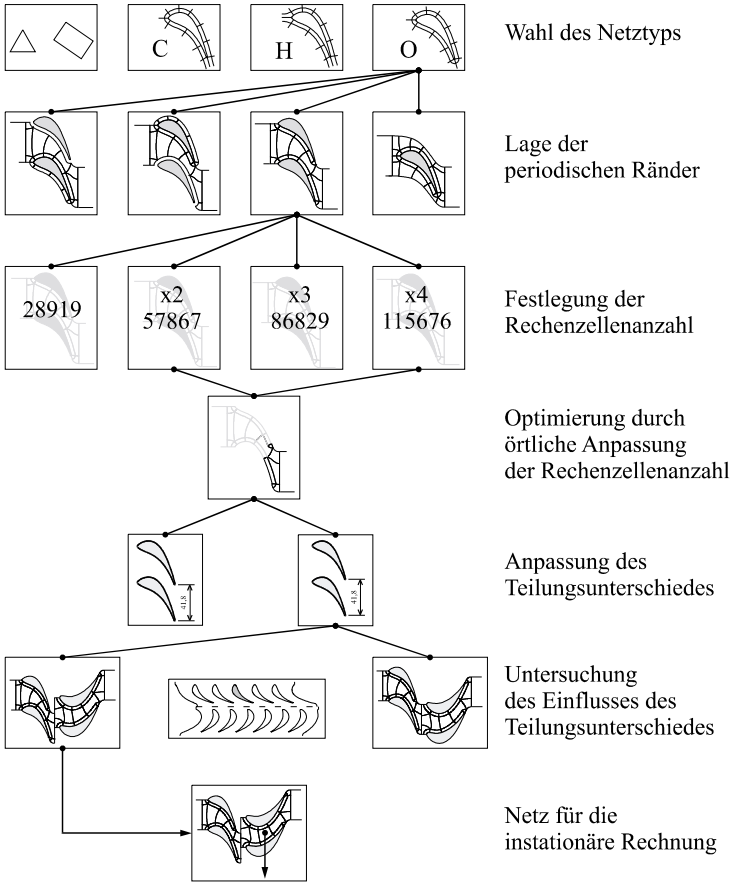

Abb. 6.10: Netzgenerierung für eine instationäre Gitterrechnung

Als Netzstruktur wurde ein O/H-Netz ausgewählt, da im instationären Fall die genaue Lage des Nachlaufes im voraus nicht bekannt ist. Pro Schaufelreihe wurden zwei unterschiedliche Netze erzeugt. Diese weisen im Bereich des O-Netzes eine verschiedene Zellanzahl auf, so daß für die verschiedenen Wandauflösungen die y^+-Werte von 1 bzw. 50 erreicht werden. Das Interface zwischen Stator- und Rotornetz kommt idealerweise beim halben Axialabstand der Gitterreihen zu liegen.

6.3.3 Netzunabhängigkeit

Die Netzgenerierung erfolgte getrennt für den Stator und den Rotor. Es kann davon ausgegangen werden, daß es zur Darstellung der Netzunabhängigkeit ausreicht, diese für den Stator nachzuweisen und dann auf den Rotor zu schließen. Aus diesem Grund wurden vier Statornetze erstellt, die für die Verwendung der Wandfunktion geeignet sind. Um die Rechenergebnisse beurteilen zu können, werden sie an der Meßebene 1 in Bezug auf die Absolutgeschwindigkeit untereinander verglichen (Abbildung 6.11).

Die Simulationen wurden mit dem $k - \varepsilon$ Modell mit der Kato-Launder Modifikation durchgeführt. Es ist deutlich zu erkennen, daß im Bereich der Minimalgeschwindigkeit noch keine Netzunabhängigkeit erreicht ist. Der Kernbereich der Strömung weist jedoch ab einer Kontrollvolumenanzahl von 58.000 keine markante Netzabhängigkeit auf. Die Überlegung, daß die Netzunabhängigkeit nicht für die einzelnen Turbulenzmodelle getrennt gezeigt werden muß, wird dem vorherigen Kapitel entsprechend angestellt.

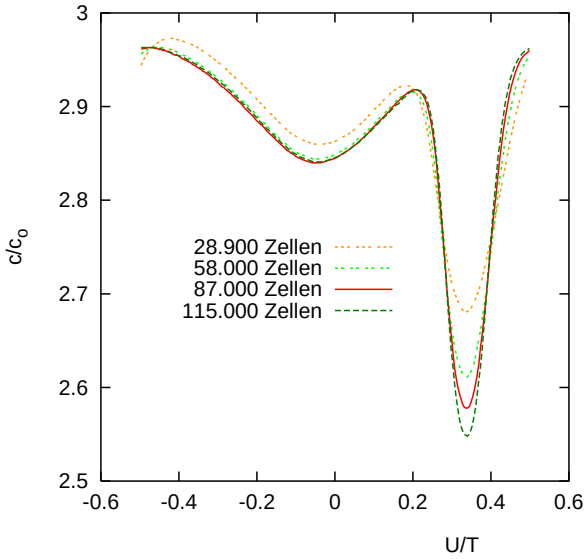

Abb. 6.11: Vergleich der Absolutgeschwindigkeit in der Ebene 1

Um die Rechenzeit für eine instationäre Simulation in einem durchführbaren Rahmen zu halten, wurde das Netz mit 87.000 Zellen verwendet. Damit wird festgestellt, daß die Netzunabhängigkeit in keinem realisierbarem Rahmen sichergestellt werden kann, jedoch wird die Güte von qualitativen Ergebnisinterpretationen gewährleistet. Für die Simulation mit der low-Re Erweiterung des SA Modelles wurde das Netz im O-Bereich verfeinert, um y^+-Werte von 1 sicherzustellen. Diese so gewonnene Netzstruktur wurde auch auf den Rotor übertragen. Für eine instationäre Simulation mit Wandfunktion wurde ein Gesamtnetz mit 165.000 Zellen verwendet und für die höhere Wandauflösung ein Netz mit 210.000 Zellen.

6.3.4 Turbulenzmodelle

Die für diesen Testfall eingesetzten Turbulenzmodelle wurden aufgrund der Ergebnisse des stationären Testfalles aus Kapitel 5 auf diejenigen reduziert, die in nachstehender Tabelle aufgeführt sind. Das Eingleichungsmodell von WOLFSHTEIN findet keine Anwendung mehr, da der zeitliche Mehraufwand bei einer instationären Rechnung gegenüber der Wandfunktion

erheblich ist, aber keine deutlich besseren Ergebnisse zu erwarten sind. Die low-Re Erweiterung des SA Modelles dagegen verspricht den höheren numerischen Aufwand zu rechtfertigen.

	Eingleich.-Modell	Zweigleichungs-Modell		Modell 2. Ordnung
	Spalart Allmaras	$k-\epsilon$ Modell + KL	realizable $k-\epsilon$	lineares RSM
Stand. Wandfktion	x	x	x	x
low Re-Version von Sp.-All.	x			

6.4 Ergebnisse

Im Rahmen dieses Testfalles wurden stationäre Simulationen für den 1. Stator und instationäre Rechnungen für die Kombination Stator-Rotor durchgeführt. Ein instationäres Problem ist durch 2 Zeitskalen geprägt. Dies ist zum einen die *Disturbance Time* und zum anderen die *Convection Time* [19]. Ist die Zeitskala aufgrund der Konvektion sehr klein, dann erscheint die Änderung der Strömung zu jedem Augenblick sehr langsam. Unter diesen Umständen spricht man von einem quasistationären Verhalten.
Bezogen auf eine Turbinenstufe ergibt sich für die reduzierte Frequenz $\overline{\omega}$:

$$\overline{\omega} = \frac{\omega C_{ax}}{c_{ax}} \tag{6.1}$$

Hierbei ist C_{ax} die axiale Sehnenlänge der Rotorschaufeln und c_{ax} die axiale Strömungsgeschwindigkeit. Die Größe der Frequenz ist ein Maß für den Einfluß der instationären Effekte im Vergleich zu den quasistationären Effekten. Für $\overline{\omega} \gg 1$ nehmen die instationären Effekte an Bedeutung zu. Für $\overline{\omega} \approx 1$ ist die Bedeutung von quasistationären und instationären Effekten etwa von gleicher Größenordnung. Typischerweise spricht man ab $\overline{\omega} \geq 2\pi$ von einem durch instationäre Effekte dominierten Vorgang. Für den hier vorliegenden Testfall ergibt sich ein $\overline{\omega}$ von 14. Somit ist eine instationäre Betrachtung des Problems notwendig.
Bevor instationäre Ergebnisse diskutiert werden, soll kurz auf stationäre Simulationsresultate eingegangen werden.

6.4.1 Stationäre Simulation

Zum Vergleich mit numerischen Daten stehen im stationären Fall experimentelle Ergebnisse in der Meßebene 1, d.h. stromab des 1. Stators, zur Verfügung. Da jedoch in dieser Ebene

keine turbulenten Größen gemessen wurden, wird der Vergleich Experiment-Simulation anhand der Absolutgeschwindigkeit c und des Strömungswinkels α durchgeführt. Die entsprechenden Werte hierfür sind in der Abbildung 6.12 dargestellt. Die einzelnen Daten sind wie oben bereits erwähnt entdimensioniert.

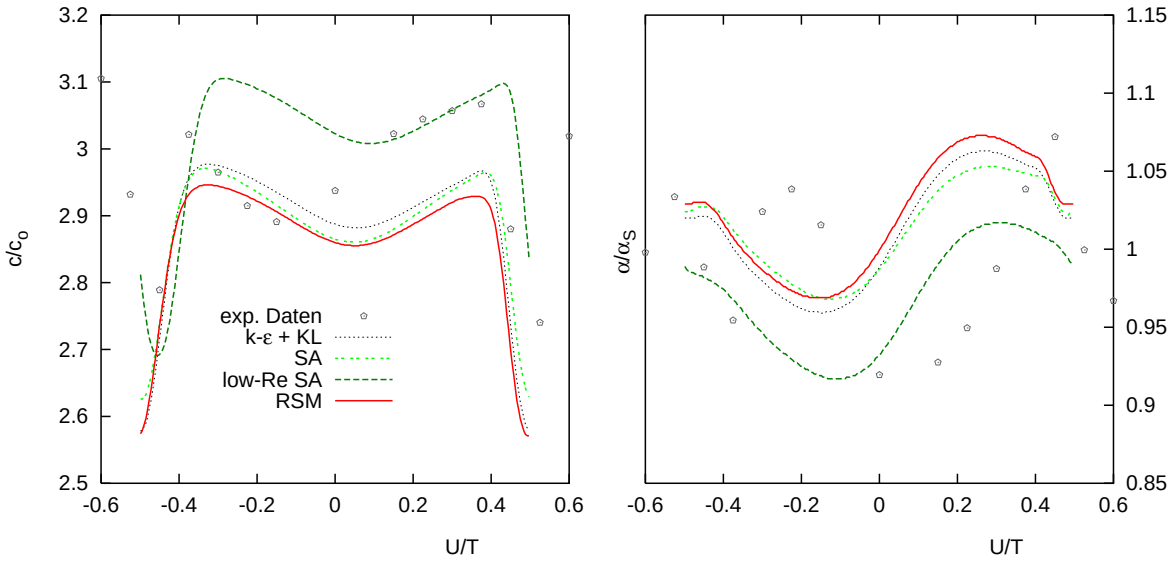

Abb. 6.12: Stationärer Vergleich in Meßebene 1

Alle Turbulenzmodelle in Verbindung mit der Standard-Wandfunktion unterscheiden sich in ihren Ergebnissen nur sehr unwesentlich. Hingegen errechnet das SA Modell mit der low-Re Erweiterung markant andere Werte für die Absolutgeschwindigkeit und den Winkel α. Dies ist auf die andere Art der Wandbehandlung zurückzuführen. Aus dem Experiment ist bekannt, daß es sich beim Stator um eine ablösungsfreie Grenzschicht handelt. Auch kann aufgrund der Umlenkung, der Oberflächen- und damit der Stromlinienkrümmung sowie des Druckgradienten die Standard-Wandfunktion nicht ihren Voraussetzungen entsprechend verwendet werden. Das Resultat ist aber nicht schlechter als das, das mit der low Re-Erweiterung erzielt wurde.

Bei der Ergebnisinterpretation muß keine Rückwirkung des Rotors auf die Meßebene 1 berücksichtigt werden. Dies geht aus den Experimenten hervor. Aus der Simulation geht hervor, daß die Berechnungsergebnisse nur rein qualitativ ausgewertet werden können, die exakten Werte können nicht wiedergegeben werden.

Im weiteren soll schwerpunktmäßig auf die Auswertung der instationären Ergebnisse eingegangen werden.

6.4.2 Instationäre Simulation

Die instationäre Simulation wurde mit den vier oben genannten Turbulenzmodellen durchgeführt. Für die Drehzahl des Experimentes von 3.500 $\frac{U}{min}$ wurde eine translatorische Geschwindigkeit von 99 $\frac{m}{s}$ im Mittelschnitt berechnet. Die zeitliche Auflösung einer Rotorpassage wurde orientiert an der des Experimentes. Dort wurde jede Passage mit 64 Zeitschritten aufgelöst, jedoch nur jeder achte Zeitschritt aufgenommen. In der Simulation konnten mit 128 Zeitschritten pro Rotorpassage zeitunabhängige Ergebnisse erzielt werden. Für die Zeitdiskretisierung wurde das implizite Eulerverfahren verwendet. Als Konvergenzkriterium der Zeit wurde der Auftriebsbeiwert herangezogen. Dessen zeitlicher Verlauf wurde beobachtet und ein über eine Passage periodischer Verlauf abgewartet. Dann kann von einer zeitlichen Konvergenz der numerischen Lösung gesprochen werden. Ein Beispiel hierfür ist in Abbildung 6.13 dargestellt. Es wird deutlich, daß der Auftriebsbeiwert sich sehr schnell periodisch darstellt. Ab der vierten, fünften Rotorpassage kann bereits von einer zeitlichen Konvergenz gesprochen werden. Die weiteren Passagen bestätigen das Ergebnis lediglich noch.

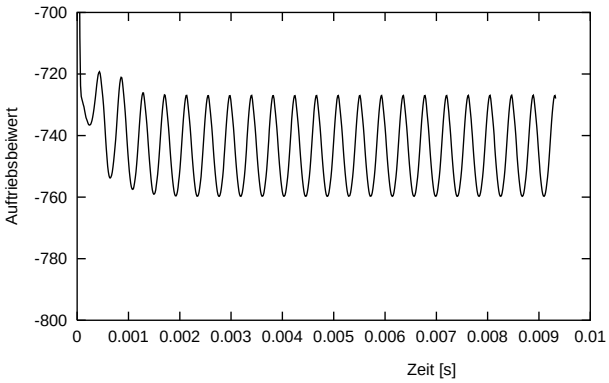

Abb. 6.13: Verlauf des Auftriebsbeiwertes über der Zeit

Die Ergebnisse werden zunächst anhand der Absolutgeschwindigkeit diskutiert. Um die Vielzahl der Ergebnisse übersichtlich zu gestalten, werden nur noch die Turbulenzmodelle anhand der turbulenten kinetischen Energie weiterbetrachtet, die bei der Geschwindigkeit zufriedenstellende Ergebnisse aufweisen. Die Auswahl der beiden Größen zum Vergleich der Turbulenzmodelle wurde analog dem stationären Fall in Kapitel 5 getroffen. Zum Verständnis muß zunächst näher auf die Ergebnisdarstellung eingegangen werden. Ziel hierbei muß es sein, die wichtigsten Informationen der Datenmenge aus der instationären Simulation zu komprimieren und übersichtlich darzustellen. Hierfür wurde die Möglichkeit eines Konturenplotes gewählt, dessen eine Achse die Zeit und die andere die der Umfangsposition innerhalb der 2. Meßebene ist. Die Abbildung 6.14 zeigt in der genannten Darstellung die Absolutgeschwindigkeit c. Die Umfangsposition U wurde mit der Teilung T entdimensioniert sowie die Zeit t mit der Periodendauer P einer Rotorpassage.

In dieser Darstellungsform sind die Meßwerte in der Meßebene 2 zu verschiedenen Zeitpunkten dargestellt. Da im Experiment eine größere Umfangsstrecke als die Teilung vermessen wurde, beginnt die Ordinate vor -0,5 und endet nicht bei 0,5. Der Nullpunkt der x-Achse liegt auf der Höhe der Rotorhinterkante zum Zeitpunkt 0.

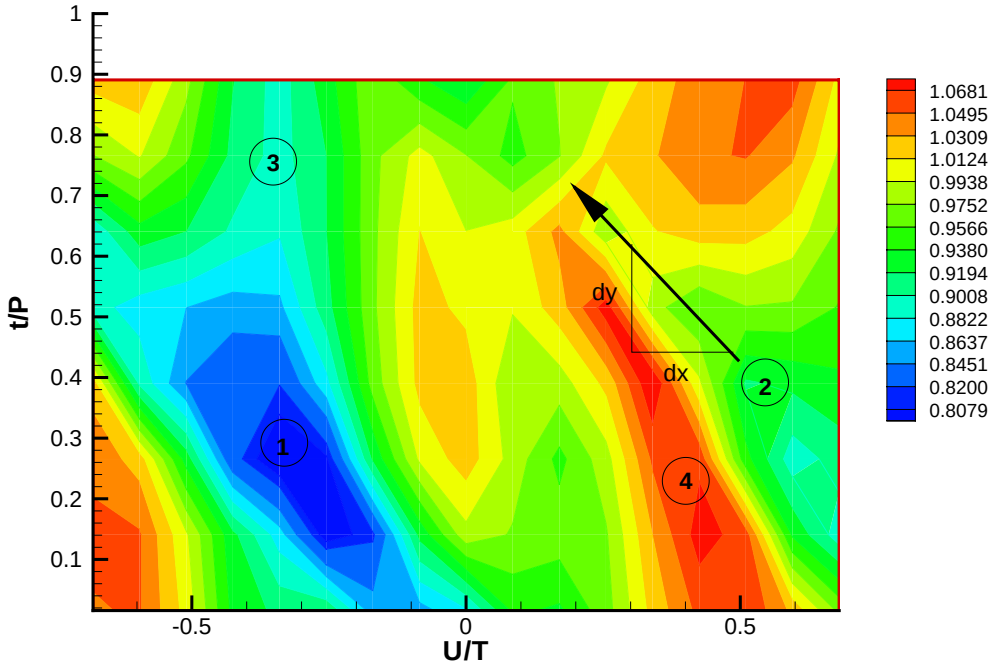

Abb. 6.14: Konturenplot der Absolutgeschwindigkeit, Experiment

Das Gebiet 1 der Abbildung 6.14 kennzeichnet den Bereich der Defizitgeschwindigkeit, der sich durch den Rotor ergibt. Die Absolutgeschwindigkeit wurde hierbei mit der Geschwindigkeit des *velocity inlets* normiert. Das Nachlaufgebiet der gegen die Drehrichtung benachbarten Rotorschaufel ist nicht mehr so deutlich zu erkennen, wird aber im Bereich des Punktes 2 sichtbar. Eine gepulste Nachlaufdelle des stromauf liegenden Stators ist durch den Punkt 3 kenntlich gemacht. Im Gebiet des Punktes 4 tritt das Geschwindigkeitsmaximum auf. Es ist hierbei wichtig festzustellen, daß das Wakegebiet den Bereich der Maximalgeschwindigkeit teilt. Eine Aussage über die Genauigkeit der vorliegenden Meßdaten kann leider nicht getroffen werden. Im Bereich des Punktes 2 und damit des kontinuierlichen Rotornachlaufes ist eine kurzzeitige Geschwindigkeitszunahme zu erkennen, die allerdings in Frage gestellt werden muß.

Ein wichtiges Kriterium zur Beurteilung der berechneten Ergebnisse ist die Ausbreitungsrichtung des Rotornachlaufes, der wiederum die konvektive Richtung des gepulsten Statornachlaufes beeinflußt. Diese Richtung kann mit dem Quotienten $\frac{dy}{dx}$ bestimmt werden. Für das Experiment ergibt sich ein Wert von 1. Neben diesem Aspekt wird ein qualitativer Vergleich anhand der oben genannten vier Strömungsbereiche vorgenommen.

Beim Vergleich mit numerischen Ergebnissen muß berücksichtigt werden, daß den unterschiedlichen Konturenplots verschiedene Auflösungen zugrunde liegen. Beim Experiment ist ein Zeitschritt mit 16 Meßpunkten in der Meßebene bestimmt und eine Rotorpassage mit 8 Zeitschrit-

ten. Die numerische Ergebnisdarstellung greift auf eine wesentliche feinere Diskretisierung in Raum und Zeit zurück. Pro Zeitschritt stehen 232 Punkte zur Verfügung und pro Rotorpassage die oben genannten 128 Zeitschritte, die jedoch zur Ergebnisdarstellung auf 32 reduziert wurden.
Die Konturenplots der Simulationen wurden nicht mit einer zu den experimentellen Ergebnissen identischen Farbskala dargestellt. Da es vor allem um qualitative Aussagen geht, ist dies zulässig und erleichtert das Erfassen der Strömungsstruktur sehr erheblich.
Alle Simulationsergebnisse weisen unabhängig vom Turbulenzmodell einen klar begrenzten Rotornachlauf auf. Sie unterschätzen den diffusiven Charakter sehr deutlich. Aus dem stationären und zweidimensionalen Testfall, der in Kapitel 5 vorgestellt wurde, ist diese Unzulänglichkeit der Turbulenzmodelle nicht bekannt. Es kann deshalb davon ausgegangen werden, daß das reale Strömungsgebiet in der Meßebene 2 durch dreidimensionale Strömungsphänomene, wie Hinterkanten- und Passagenwirbel, beeinflußt wird.

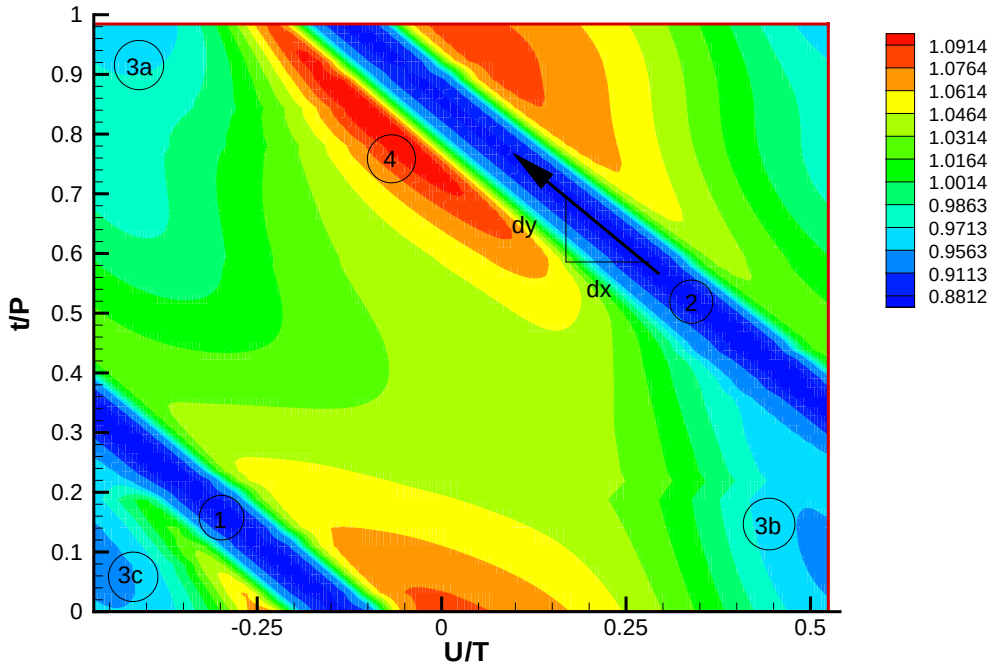

Abb. 6.15: Konturenplot der Absolutgeschwindigkeit, $k-\varepsilon$ Modell + KL

In den Abbildungen 6.15 und 6.16 sind die Ergebnisse des $k-\varepsilon$ Modelles und des RSM dargestellt. Bei diesen und allen weiteren Simulationsresultaten kann festgestellt werden, daß die Ausbreitungsrichtung des Rotornachlaufes mit der des Experimentes übereinstimmt. Der Quotient $\frac{dy}{dx}$ liegt ebenfalls bei 1. Beide Turbulenzmodelle weisen die Strömungsstruktur des Experimentes auf. Die Bereiche 1 bis 4 können identifiziert werden. Ein signifikanter Unterschied liegt in der Lage des diskreten Statornachlaufes. Dies kann als Phasenverschiebung

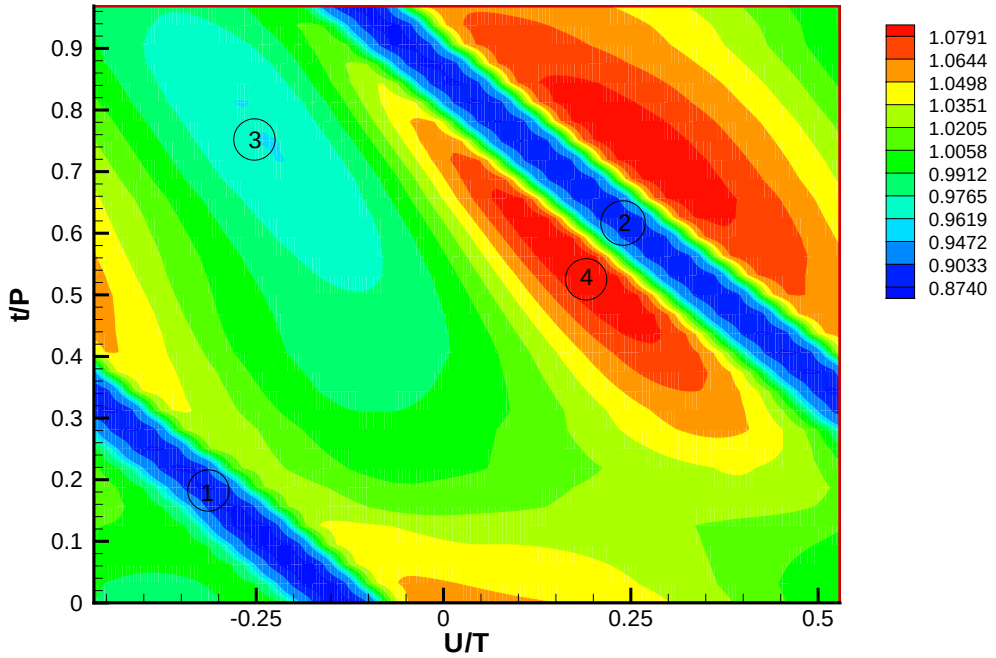

Abb. 6.16: Konturenplot der Absolutgeschwindigkeit, RSM

interpretiert werden. Der gepulste Statornachlauf trifft somit zu unterschiedlichen Zeitpunkten auf eine stromabliegende Statorreihe auf. Qualitativ ändert sich aber an dem berechneten Strömungsfeld nichts. Ursache für diesen Phasenunterschied ist die konvektive Geschwindigkeit, die beide Turbulenzmodelle unterschiedlich vorhersagen.

Die Absolutwerte des Geschwindigkeitsminimums werden um ca. 10% zu groß vorhergesagt, demgegenüber wird das Maximum mit einer Abweichung von ca. 1% sehr gut berechnet. Berücksichtigt man hierbei noch den Faktor Meßgenauigkeit, können die Simulationsergebnisse in Bezug auf die Extremgeschwindigkeiten als sehr gut bezeichnet werden. Das RSM ist dem Zweigleichungsmodell überlegen, wenn die Ausbreitung der Gebiete maximaler Geschwindigkeit betrachtet wird. Diese sind größer und geben somit ein realistischeres Bild der Strömung wieder. Leichte Vorteile weist jedoch das $k-\varepsilon$ Modell auf in Bezug auf den Statornachlauf. Dieser wird mit einer kleineren Geschwindigkeit berechnet, und die Struktur, die in der gewählten Darstellungsform sich aus den Bereichen 3a, 3b und 3c zusammensetzt, wird besser beschrieben.

In der Abbildung 6.17 ist das Geschwindigkeitsfeld dargestellt, das mit dem realizable $k-\varepsilon$ Modell berechnet wurde, dargestellt. Das Strömungsgebiet stellt sich sehr ähnlich dem des RSM dar. Die Strömungsbereiche 1 bis 4 können eindeutig identifziert werden. Die dimensionslosen Absolutwerte der Geschwindigkeit liegen im Bereich von 1,082 bis 0,8698. Sie sind somit ebenfalls in guter Übereinstimmung mit den experimentellen Daten, die Werte

von 1,0681 bis 0,8079 aufweisen. Der sehr wellige Verlauf des Geschwindigkeitsminimums im Bereich von 1 und 2 ist ein Phänomen, das auf die Ergebnisaufbereitung der Simulationsdaten zurückzuführen ist.

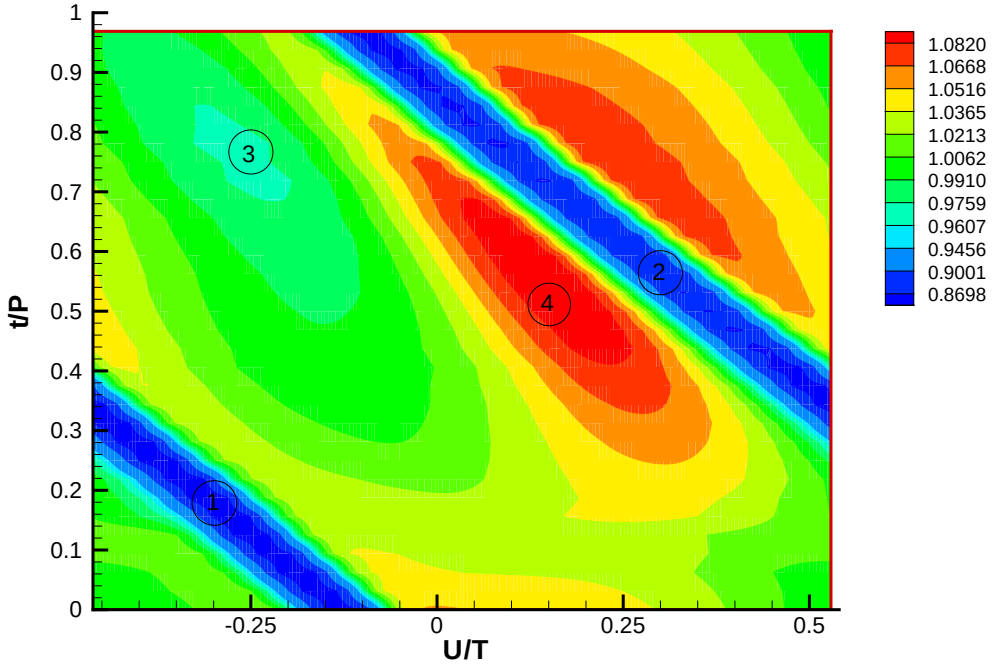

Abb. 6.17: Konturenplot der Absolutgeschwindigkeit, realizable $k-\varepsilon$ Modell

Für eine vollständige Diskussion der Simulationsergebnisse müssen noch die Ergebnisse berücksichtigt werden, die mit dem SA Modell unter Verwendung zweier verschiedener Wandbehandlungen erzielt wurden. Hierbei kann festgestellt werden, daß die in den Abbildungen 6.18 und 6.19 dargestellten Strömungsfelder eine gegenüber den bisherigen Ergebnissen andere Struktur aufweisen.

Es können bei den Ergebnissen dieses Turbulenzmodelles auch die vier verschiedenen Strömungsgebiete angegeben werden. Dabei sind aber nur die Bereiche 1 und 2, die den Rotornachlauf angeben, mit anderen Ergebnissen vergleichbar. Besonders markant ist, daß nur ein Gebiet maximaler Geschwindigkeit berechnet wird. Dieses liegt in Strömungsrichtung gesehen unterhalb des Rotornachlaufes. Die Realität wird somit sehr unzulänglich beschrieben.

Betrachtet man den Wertebereich, in dem die numerisch ermittelten Daten liegen, fällt eine deutlich größere Abweichung bei der Minimalgeschwindigkeit auf, als bei den bisher dargestellten Ergebnissen. Diese Abweichung beträgt 13% bzw. 16%. Auch die Maximalgeschwindigkeit wird etwas größer errechnet, jedoch ist hier die Differenz nicht so offensichtlich.

Der entscheidende Unterschied der beiden Wandbehandlungen in Verbindung mit dem SA

Modell macht sich bei der Berechnung des Statornachlaufes bemerkbar. In Verbindung mit der Standard-Wandfunktion wird der Statornachlauf falsch wiedergegeben. Es wird hier bereits eine starke Interaktion der beiden Nachlaufgebiete von Stator und Rotor bestimmt, so daß es zu einem Verschmelzen beider Strömungsbereiche kommt. Realistischer sind in diesem Aspekt die Ergebnisse der low Re-Version. Hier werden vergleichbare Strukturen des Statornachlaufes angegeben, wie sie die anderen Modelle in Verbindung mit der Wandfunktion aufweisen.

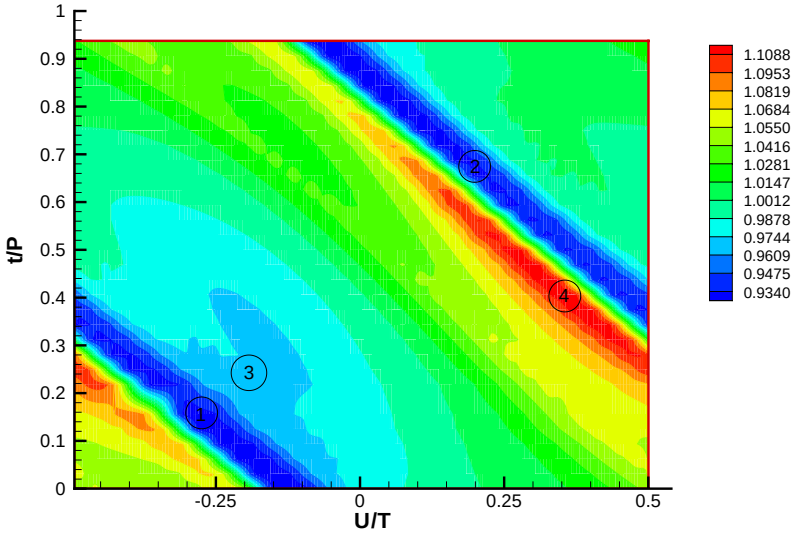

Abb. 6.18: Konturenplot der Absolutgeschwindigkeit, SA Modell mit Stand. Wandfunktion

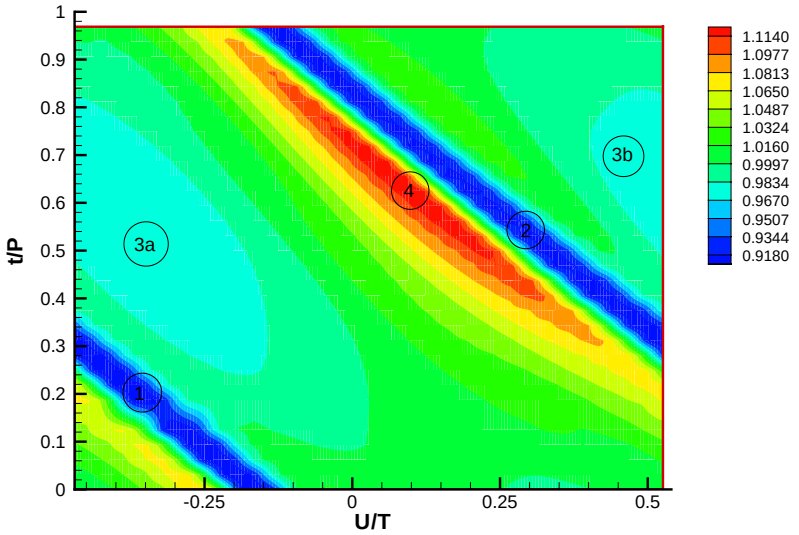

Abb. 6.19: Konturenplot der Absolutgeschwindigkeit, SA Modell mit low Re-Erweiterung

Aus der Diskussion der Geschwindigkeitsfelder, die mit den verschiedenen Turbulenzmodellen erzielt wurden, geht hervor, daß das SA Modell nicht geeignet ist, zutreffende Ergebnisse dieses Testfalles zu liefern. Anders sieht dies für die beiden $k-\varepsilon$ Modelle und das RSM aus. Diese unterscheiden sich nicht sehr deutlich voneinander und bestimmen alle qualitativ gute Geschwindigkeitsfelder. Die Struktur der Strömung ist in Übereinstimmung mit den experimentellen Daten. Um weitere Aussagen über die Güte der Turbulenzmodelle in Bezug auf eine instationäre Nachlaufströmung zu erhalten, wird die turbulente kinetische Energie betrachtet.

Diese wird im folgenden in der gleichen Darstellungsform für das Experiment und die drei oben genannten Turbulenzmodelle aufbereitet. Die experimentellen Daten sind in Abbildung 6.20 dargestellt. Innerhalb dieses Strömungsgebietes können drei verschiedene Bereiche identifiziert werden. Die Bereiche 1 und 2 kennzeichnen wie im Geschwindigkeitsfeld den kontinuierlichen Rotornachlauf. Der wake ist durch einen höheren Turbulenzgrad gekennzeichnet und weist die gleiche Ausbreitungsrichtung wie das Geschwindigkeitsminimum auf.

Ein Maximum der turbulenten kinetischen Energie findet sich im Bereich von 2, der benachbart ist zum Gebiet 3. Dieses charakterisiert ein Gebiet höherer Turbulenz in der freien Außenströmung, die aus der Rotorpassage kommt.

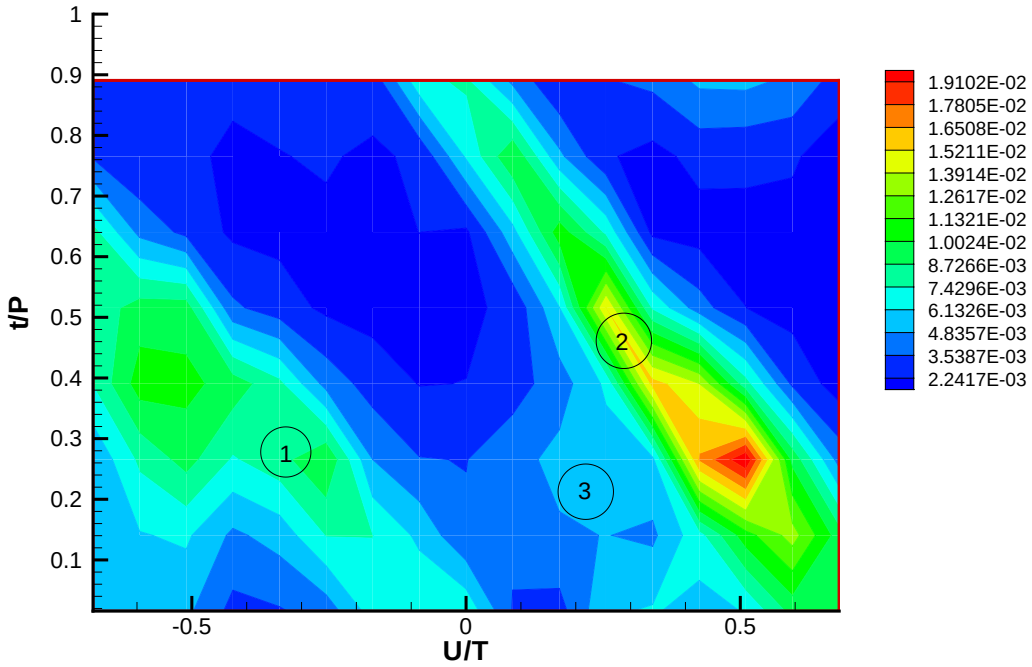

Abb. 6.20: Konturenplot der turb. kinet. Energie, Experiment

Die zeitliche Lage des Statornachlaufes steht nicht im Einklang mit dem Geschwindigkeitsfeld. Hier muß die Frage gestellt werden, inwieweit die beiden Meßreihen für die Geschwindigkeit und den Turbulenzgrad einem zeitlichen Versatz unterliegen.
Im folgenden werden die vorliegenden numerischen Ergebnisse auf ihre Aussagefähigkeit in Bezug auf die Nachlaufstruktur untersucht. Alle drei Turbulenzmodelle ergeben ein sehr ähnliches Strömungsbild, dargestellt in den Abbildungen 6.21, 6.22 und 6.23. Die Gebiete 1 und 2 sind eindeutig zu erkennen. Diese geben die Ausbreitungsrichtung realistisch wieder. Da bei einem Profilnachlauf ein unmittelbarer Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit und der turbulenten kinetischen Energie besteht, war in dieser Beziehung auch kein anderes Ergebnis zu erwarten.
Das Maximum der Größe k tritt im Nachlaufbereich des Rotors auf. Hier unterscheiden sich die Turbulenzmodelle. Die Unterschiede sind denen in der Bestimmung des Geschwindigkeitsminimums gleich. So ist das Maximum beim $k-\varepsilon$ Modell mit der Kato-Launder Modifikation zu größeren Zeiten verschoben.

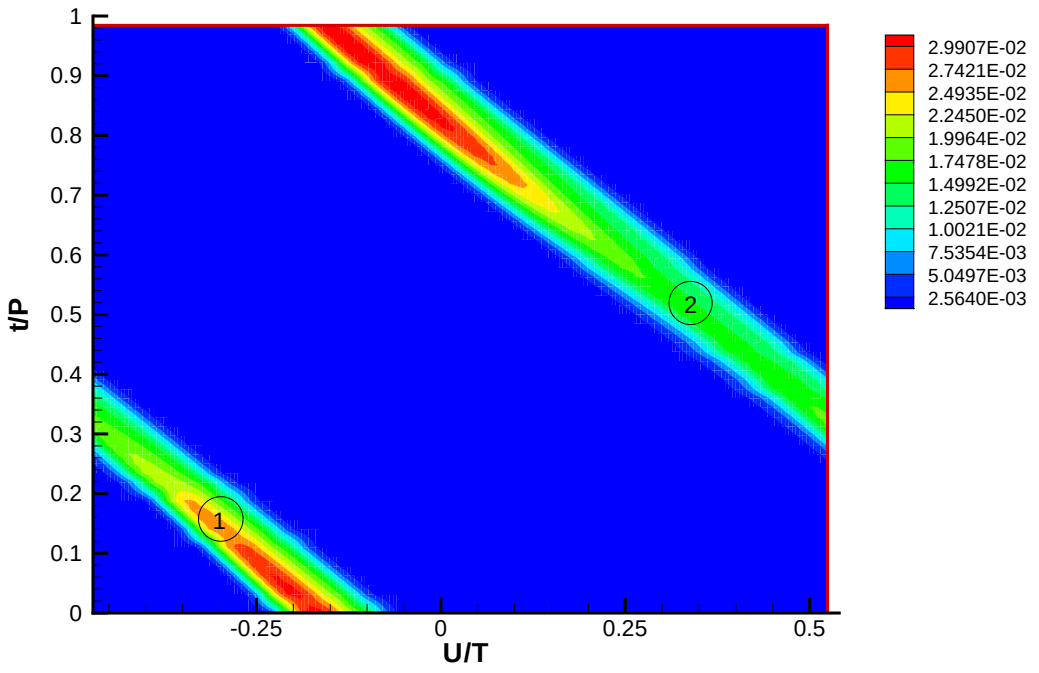

Abb. 6.21: Konturenplot der turb. kinet. Energie, $k-\varepsilon$ Modell + KL

Der größte Wert von k tritt im Nachlaufgebiet auf und wird von der Kernströmung, die den Statornachlauf transportiert, bestimmt. Dieser Sachverhalt geht nicht sehr deutlich aus dem Konturenplot für k hervor. Die Werte der turbulenten kinetischen Energie weisen in der Hauptströmung nur so kleine Unterschiede auf, daß diese bei der gewählten Darstellungsform nicht aufgelöst werden.

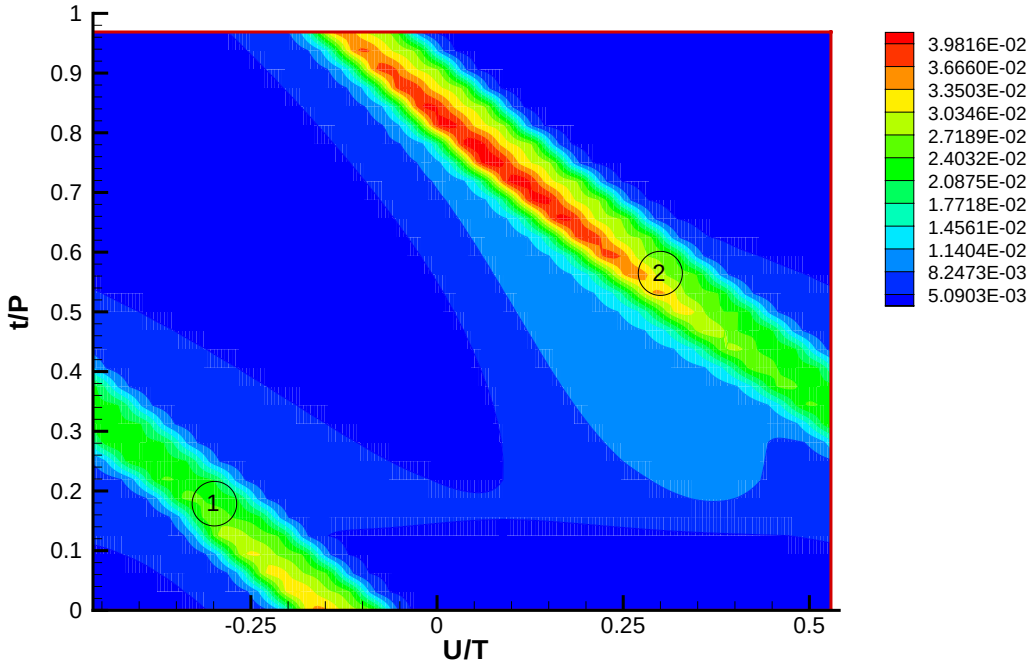

Abb. 6.22: Konturenplot der turb. kinet. Energie, realizable $k - \varepsilon$ Modell

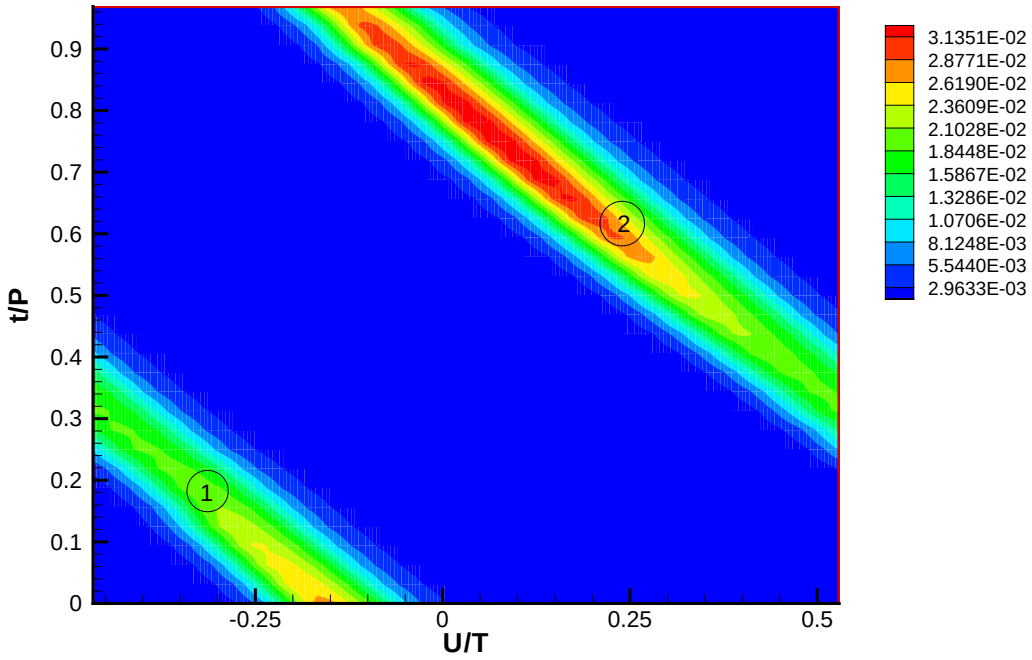

Abb. 6.23: Konturenplot der turb. kinet. Energie, RSM

Der Konturenplot für das RSM liefert die gleichen Aussagen wie der des $k-\varepsilon$ Modelles mit der Kato-Launder Erweiterung. Anders sieht dies beim realizable $k-\varepsilon$ Modell aus. Hier ist eine Erhöhung von k auch in der Kernströmung erkennbar. Diese vermischt sich über der Zeit mit dem Rotornachlauf und führt so zu einer Erhöhung von k im kontinuierlichen Nachlauf. Jedoch steht das turbulente Energiemaximum der Kernströmung in keinem direkten Zusammenhang zum Geschwindigkeitsminimum. Dies ist ein unphysikalisches Problem, das dieses Turbulenzmodell ungeeignet macht, eine instationäre Nachlaufströmung sinnvoll zu beschreiben.
Eine geeignete Möglichkeit, den Unterschied des RSM und des $k-\varepsilon$ Modelles mit der Kato-Launder Modifikation aufzuzeigen, ist die Darstellung der turbulenten Viskosität μ_t. Diese wird sehr häufig zur Ergebnisdarstellung in Zusammenhang mit Profilnachläufen verwendet, da sie auch in der Kernströmung größere Gradienten als k aufweist.

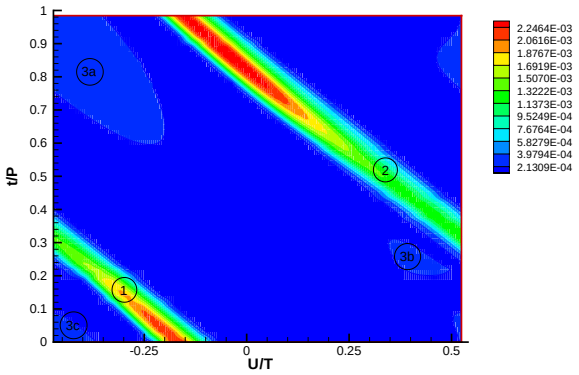

Abb. 6.24: Konturenplot von μ_t / $k-\varepsilon$ Modell + KL

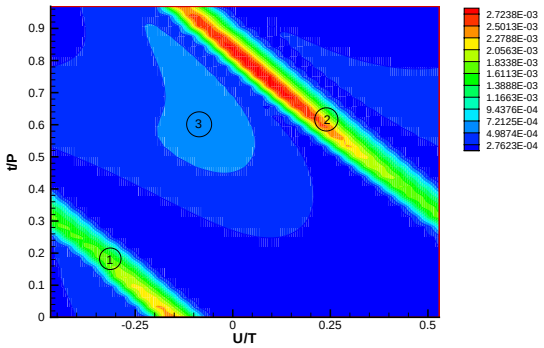

Abb. 6.25: Konturenplot von μ_t / RSM

Aus den Abbildungen 6.24 und 6.25 geht eindeutig der Zusammenhang von μ_t und der diskreten Statornachlaufdelle hervor. In der Darstellung sind diese Gebiete mit der Ziffer 3 gekennzeichnet. Es wird die Interaktion zwischen dem Statornachlauf in der Kernströmung und dem Rotornachlauf deutlich. Der Statornachlauf trägt zu einer Erhöhung der turbulenten Größen im Rotornachlauf bei.

6.4.3 Schlußfolgerungen

Der Vergleich der ausgewählten Turbulenzmodelle mit den experimentellen Daten läßt folgende Aussagen zu:
Da dreidimensionale Effekte das Strömungsfeld beeinflussen, muß dies bei der Ergebnisinterpretation berücksichtigt werden. Allerdings stellt die Reduzierung um eine Dimension bei der

Aufbereitung des Strömungsgebietes keine entscheidende Vereinfachung dar. Es ist gewährleistet, daß qualitative Aussagen über die Struktur der Strömung möglich sind.
Bei der Diskussion des berechneten Geschwindigkeitsfeldes zeigt das Eingleichungsmodell von SPALART und ALLMARAS gegenüber den anderen verwendeten Modellen deutliche Schwächen. Es ist nicht geeignet, die Struktur der Geschwindigkeit dieses instationären Problemes richtig zu beschreiben. Deshalb wird es für weitere Untersuchungen nicht mehr berücksichtigt.
Das realizable $k-\varepsilon$ Modell weist bei der Bestimmung der turbulenten Größen eine markante Schwäche auf. Die Verteilung von k in der Kernströmung steht nicht in der richtigen Relation zum Geschwindigkeitsfeld. Dies äußert sich noch wesentlich deutlicher bei der Verteilung der turbulenten Viskosität. Ein weiterer Aspekt, der gerade bei instationären Simulationen hohe Relevanz hat, ist das sehr schlechte Konvergenzverhalten.
Das $k-\varepsilon$ Modell mit der Kato-Launder Modifikation und das RSM weisen sehr ähnliche Ergebnisse auf. Die Struktur des Strömungsfeldes wird in der Geschwindigkeit und der turbulenten kinetischen Energie vergleichbar wiedergegeben. Unter Berücksichtigung der turbulenten Viskosität kann eine qualitativ gute Übereinstimmung mit dem Experiment für gemittelte Größen, charakterisiert durch die Geschwindigkeit, und turbulente Größen festgestellt werden. Auch in den Absolutwerten der Berechnungsergebnisse weisen beide Modelle keine entscheidenden Unterschiede auf. Obwohl die Berechnung mit dem RSM einen höheren numerischen Aufwand bedeutet, soll im Weiteren dieses Turbulenzmodell verwendet werden. Der Grund hierfür ist in der Modellgüte zu suchen.
Das auszuwählende Turbulenzmodell soll Strömungen in einer Axialturbine qualitativ gut beschreiben können. In solchen Strömungsgebieten gibt es Bereiche großer Beschleunigungen, die für die Kato-Launder Modifikation des Produktionstermes eine Schwierigkeit darstellen. Der Grund ist in der Formulierung des Produktionstermes für k, vgl. Gleichung (2.39), zu sehen. Der Rotationstensor taucht als Faktor in dieser Beziehung auf. Somit wird die Produktion von k gleich Null, sobald die Rotation Null ist. Genau dieser Fall tritt in Gebieten großer Beschleunigung ein. Aus diesem Grund wird das RSM, das das höherwertigere Turbulenzmodell ist, bessere Ergebnisse liefern bei der Parameterstudie, die in Kapitel 7 vorgestellt wird und für die keine experimentellen Vergleichsdaten vorliegen. Ein weiterer Grund, der für das RSM spricht, ist die Möglichkeit, anisotrope Strukturen zu beschreiben. Dies ist besonders bei Nachlaufuntersuchungen von großer Bedeutung. Das Wakegebiet stromab von Profilen ist durch Anisotropie gekennzeichnet.

7 Einflüsse auf instationäre Nachlaufströmungen

Der Bereich der instationären Effekte einer Turbinenstufe umfaßt viele Einzelaspekte. Diese wurden aufgrund ihrer Komplexität bisher bei der Auslegung von Turbomaschinen nur unzureichend berücksichtigt. Deshalb sollen in diesem Kapitel zwei wesentliche Größen, die Reynoldszahl und der Turbulenzgrad, untersucht werden in Bezug auf ihre Auswirkung auf die Nachlaufproblematik. Hinzu kommt eine Variation des Betriebspunktes. Es ist klar, daß dies nur eine beschränkte Auswahl aus vielen Faktoren ist, die instationäre Effekte markant beeinflussen. So gibt es eine Vielzahl von Arbeiten, die einzelne Einflußgrößen betrachten, z.B. HODSON [19], der den Axialabstand zweier Gitterreihen zum Untersuchungsgegenstand gewählt hat.

Die beiden vorangestellten Kapitel dienten dazu, die geeignete Wahl eines Turbulenzmodelles, der richtigen Netzstruktur und einer sinnvollen Abbildung des realen Strömungsgebietes auf ein numerisches Rechengitter zu finden. Dies konnte mithilfe von ausgewählten Testfällen durchgeführt werden. Auf dieser Grundlage ist es nun möglich, ein numerisches Experiment durchzuführen, d.h. einen Testfall zu berechnen, ohne hierfür experimentelle Daten zur Verfügung zu haben. Es muß jedoch darauf hingewiesen werden, daß bei einer solchen Vorgehensweise nur qualitative Aussagen über das Strömungsverhalten zulässig sind.

Da diese wissenschaftliche Arbeit in engem Zusammenhang mit experimentellen Untersuchungen des *Fachgebietes Turbomaschinen und Fluidantriebstechnik der TU Darmstadt* zum Clocking Effekt steht, wird für dieses Kapitel die entsprechende Geometrie gewählt. Dies ist eine 1,5-stufige Axialturbine, von der jedoch nur die Kombination Stator-Rotor berücksichtigt wird. Da an dieser im Aufbau befindlichen Versuchsturbine in naher Zukunft erste Ergebnisse gewonnen werden, können diese im Nachhinein zum Vergleich mit den numerischen Daten dienen.

7.1 Experimenteller Aufbau

Das Strömungsgebiet stellt eine 1,5-stufige Axialturbine dar. Eine Prinzipskizze des im Aufbau befindlichen Versuchsstandes an der TU Darmstadt ist in Abbildung 7.1 zu finden. Die Profile der beiden Statoren und des Rotors weisen über den Radius einen konstanten Querschnitt auf. Deshalb kann in guter Näherung von einer zweidimensionalen Strömung im Mittelschnitt ausgegangen werden.

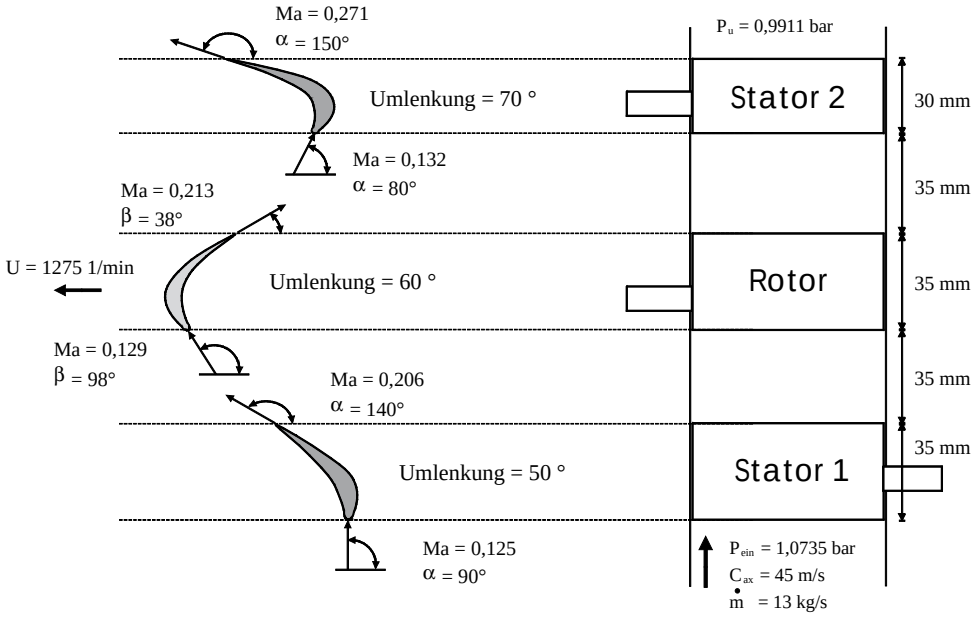

Abb. 7.1: TU-Rig

Der erste Stator weist eine Sehnenlänge von C = 42,79 mm auf und der Rotor von C = 41,01 mm. Es handelt sich hierbei um Niederdruckprofile. Die Statoren setzen sich aus 66 Schaufeln zusammen und der Rotor aus 77. Somit ergibt sich im Mittelschnitt eine Statorteilung von 37,31 mm und eine Rotorteilung von 32,9 mm. Mit der ungestörten Anströmgeschwindigkeit im Auslegungspunkt von $U_o = 45,34$ m/s und der Rotorsehnenlänge ergibt sich eine Reynoldszahl von

$$Re_C = \frac{\rho C U_o}{\mu} \approx 1,3 \cdot 10^5 \tag{7.1}$$

Der Naben- und der Gehäusedurchmesser ist für die drei Gitter konstant gehalten und beträgt am Außendurchmesser 880 mm bzw. am Innendurchmesser 678 mm. Die Anlage soll mit Luft unter Normalbedingungen betrieben werden. Somit ergibt sich bei den auftretenden Geschwindigkeiten eine Machzahl von 0,125 bis 0,213 innerhalb der Axialturbinenstufe.

7.2 Numerische Modellbildung

Für die folgenden Überlegungen zur numerischen Simulation wird der zweite Stator vernachlässigt. Er trägt keinen entscheidenden Beitrag für die Untersuchungen der Nachlaufstruktur bei.
Vorab muß nach HODSON [19] geklärt werden, ob eine stationäre oder instationäre Rechnung für die Turbinenstufe des Versuchstandes auszuführen war. Näheres hierzu siehe Kapitel 6.4.

$$\overline{\omega} = \omega \frac{C_{ax}}{c_{ax}} \tag{7.2}$$

$$= 2\pi \frac{u_{Rotor}}{T} \cdot \frac{C_{ax}}{c_{ax}} \tag{7.3}$$

$$\approx 7,7 \tag{7.4}$$

Hierbei wird mit C_{ax} die axiale Profilerstreckung des Rotors, mit c_{ax} die Axialgeschwindigkeit, mit T die Teilung und mit u_{Rotor} die Rotorgeschwindigkeit bezeichnet. Mit dem Wert von 7,7 liegt die reduzierte Frequenz über der Grenze von 2π. Das Strömungsproblem ist deshalb durch instationäre Effekte geprägt, und es kann keine quasistationäre Rechnung durchgeführt werden.
Die Annahmen der Inkompressibilität und der Zweidimensionalität im Mittelschnitt stellen nach Kapitel 7.1 keine unzulässige Vereinfachung dar.
Durch die ungleiche Teilung der Statoren und des Rotors müßte eine Kombination von 6 Statorschaufeln mit 7 Rotorprofilen berechnet werden, um die Realität exakt abzubilden. Um jedoch Rechenzeit zu sparen, wird der erste Stator wie in Kapitel 6 skaliert. Somit wurde die Realität auf die gleiche Teilung von Stator und Rotor abgebildet. Damit erhält man sinnvolle Aussagen über die Nachlaufstruktur einer Niederdruckturbinenstufe in Hinblick auf die Auswirkung der Reynoldszahl und des Turbulenzgrades.
Das numerische Rechengebiet beginnt in axialer Richtung 1,5 Sehnenlängen vor der Statorvorderkante, das Interface zwischen Stator und Rotor liegt beim halben axialen Abstand der beiden Gitter und das Rechengebietsende liegt 3 Sehnenlängen stromab der Rotorhinterkante. Stromauf des Stators wird ein *velocity inlet* und stromab des Rotors ein *pressure outlet* definiert. Diese Vorgehensweise ist analog zu Kapitel 6. Als Randbedingungen werden ebenso wie in Kapitel 6 und 5 der Turbulenzgrad und der hydraulische Durchmesser vorgegeben. An den Rändern des Rechengebietes in Umfangsrichtung wurden periodische Randbedingungen angenommen, und an den Profiloberflächen wird die Haftbedingung erfüllt. Somit ergibt sich das gleiche Bild wie in Abbildung 6.6 für das numerische Rechengebiet.
Als einzige Änderung zu den Default-Einstellungen in FLUENT wurde für die Diskretisierung der konvektiven Flüsse das second-order upwind Verfahren eingestellt.

7.2.1 Netzgenerierung

Da das Problemgebiet sehr ähnlich zu dem aus Kapitel 6 ist, erfolgt die Netzgenerierung identisch, d.h. es werden zwei getrennte für den Stator und Rotor Netze erstellt. Beide werden über ein Interface miteinander gekoppelt. Sie bestehen aus quadrilateralen Zellen, die eine O/H-Struktur aufweisen.

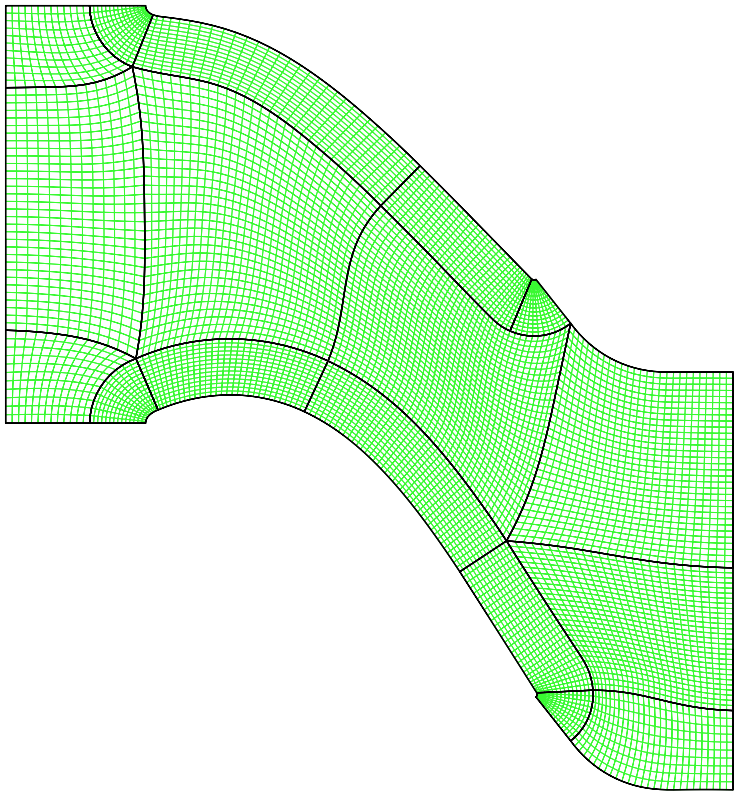

Abb. 7.2: Netzstruktur des Stators

Ein Netzausschnitt des 1. Stators ist in Abbildung 7.2 dargestellt. Es handelt sich hierbei um eine Darstellung mit einer geringeren Netzanzahl gegenüber der Rechnung, um eine erkennbare Netzstruktur zu erhalten. Das Rotornetz ist von gleicher Struktur.
Da für die folgenden Untersuchungen für die Auflösung der wandnahen Schicht nur die Standard-Wandfunktion verwendet wird, wurde nur jeweils ein Netz für die beiden Schaufelreihen erstellt. Dabei wurde darauf geachtet, daß der y^+-Wert bei 50 liegt.

7.2.2 Netzunabhängigkeit

Die Netzgenerierung erfolgte getrennt für den Stator und den Rotor. Es kann davon ausgegangen werden, daß es zur Darstellung der Netzunabhängigkeit ausreicht, diese für den Stator

nachzuweisen und dann auf den Rotor zu schließen. Aus diesem Grund wurden fünf Statornetze erstellt, die für die Verwendung der Wandfunktion geeignet sind. Um die Rechenergebnisse beurteilen zu können, werden sie an der Meßebene stromab des Stators in Bezug auf die Absolutgeschwindigkeit untereinander verglichen, (Abbildung 7.3). Es zeigt sich, daß bei der Erhöhung der Zellanzahl von 60.000 auf 90.000 keine Veränderung des Geschwindigkeitsprofiles erkennbar ist. Bereits die Vergrößerung der Zellen von 45.000 auf 60.000 läßt nur noch sehr kleine Veränderungen der Geschwindigkeit erkennen. Somit kann davon ausgegangen werden, daß eine Zellanzahl von 60.000 für das Rechennetz pro Gitter ausreichend ist. Das Gesamtnetz für das komplette Strömungsgebiet besitzt ca. 120.000 Zellen.

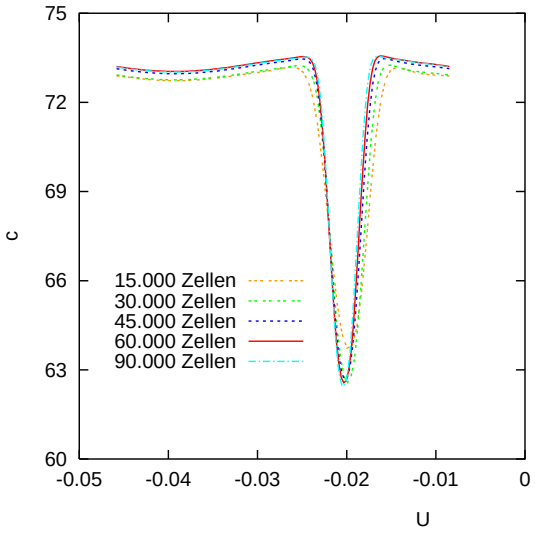

Abb. 7.3: Vergleich der Absolutgeschwindigkeit hinter dem Stator

7.2.3 Turbulenzmodelle

Aus den vorhergehenden Kapitel geht hervor, daß das Reynoldsspannungsmodell im Vergleich zu den getesteten Wirbelviskositätsmodellen am besten geeignet ist, eine instationäre Strömung einer Turbinenstufe zu simulieren. Deshalb werden im Folgenden alle Simulationen mit eben diesem in Verbindung mit der Standard-Wandfunktion durchgeführt.

7.3 Parameterstudie

In diesem Abschnitt soll neben dem Einfluß einer Betriebspunktänderung sowohl der Einfluß der Reynoldszahl als auch der des Turbulenzgrades auf die Nachlaufstruktur stromab des Rotors untersucht werden. Als Basis dient hierzu die Simulation der Turbinenstufe in ihrem Auslegungspunkt, der durch eine freie Zuströmung von 45,34 m/s und einen Turbulenzgrad von 0,1 % gekennzeichnet ist.

Es wurden die beiden Parameter Reynoldszahl und Turbulenzgrad gewählt, da diese sehr entscheidend sind für das Betriebsverhalten einer Axialturbine. Die meisten bisher verwendeten Versuchsstände weisen sehr geringe Turbulenzgrade auf. Dies ist hinreichend zur Untersuchung von einzelnen Phänomenen. In der Realität jedoch treten bei einem Flugtriebwerk Turbulenz-

grade bis zu 20 % hinter der Brennkammer auf. Um diese Lücke zwischen dem Experiment und der Realität zu schließen, bietet sich die numerische Simulation an. Auf diese Weise soll im Folgenden versucht werden, die Auswirkung des Turbulenzgrades auf die Nachlaufstruktur zu untersuchen.
Ebenso wichtig ist die Reynoldszahl. Betrachtet man ein Flugtriebwerk, so durchläuft ein solches im Laufe eines Fluges verschiedene Reynoldszahlbereiche. So wird die Reynoldszahl in der Flughöhe auf ca. die Hälfte reduziert gegenüber der Bedingung beim Start auf Meereshöhe (*sea-level take off*). Um diese Auswirkung der Flughöhe auf die Nachlaufstruktur besser zu verstehen, werden gegenüber dem Auslegungszustand der Versuchsturbine die Bedingungen beim Start und in der Flughöhe numerisch untersucht. Hierzu muß die Reynoldszahl des aerodynamischen Entwurfes von $1,3 \cdot 10^5$ auf $1,0 \cdot 10^5$ in der Flughöhe und $2,6 \cdot 10^5$ für den sea-level take off variiert werden.
Neben den beiden oben genannten charakteristischen Größen einer Strömung ist der Betriebspunkt sehr entscheidend für eine Turbomaschine. Dieser wurde mit Blick auf die Nachlaufstruktur variiert, indem in Anlehnung an die Reynoldszahlstudie die gleichen Reynoldszahlen durch eine Änderung der Anströmgeschwindigkeit eingestellt wurden.
In folgender Tabelle sind alle fünf durchgeführten Berechnungen übersichtlich dargestellt.

	Turbulenzgrad [%]			Anströmgeschwindigkeit [m/s]			Reynoldszahl[$\cdot 10^5$]		
	$0,1$	$1,0$	$10,0$	$0,77 \cdot c_o$	c_o	$2 \cdot c_o$	$1,0$	$1,3$	$2,6$
Basis	x				x			x	
T1		x			x			x	
T2			x		x			x	
R1	x				x		x		
R2	x				x				x
B1	x			x			x		
B2	x					x			x

Alle fünf Simulationen wurden mit den identischen Programmeinstellungen durchgeführt. Der Betriebspunkt B1 bzw. B2 wurde durch eine Änderung der Geschwindigkeit am *velocity inlet* angepaßt, der Turbulenzgrad T1 bzw. T2 durch die entsprechende Vorgabe an der Eintrittsrandbedingung und die Reynoldszahl R1 bzw. R2 durch die Variation der dynamischen Viskosität. Für die Zeitdiskretisierung wurde das implizite Eulerverfahren eingesetzt. Es stellte sich heraus, daß eine hinreichend genaue Zeitdiskretisierung durch 100 Zeitschritte pro Rotorpassage gegeben ist. Die zeitliche Konvergenz einer Simulation wurde wie in Kapitel 6 durch den Verlauf des Auftriebsbeiwertes überprüft. Hierbei wurde ein periodischer Verlauf desselben abgewartet.
Für die Ergebnisse der Basisvariante und aller anderen Simulationen wird im Folgenden aus

Gründen der Vergleichbarkeit die gleiche Darstellungsform gewählt. Dies ist die Form eines Konturenplots, in dem die berechnete Größe in Abhängigkeit von der Zeit über der Teilung dargestellt ist. Die Zeit t wurde mit der Periodendauer P einer Rotorpassage entdimensioniert und die Umfangsposition U mit der Teilung T. Diese Darstellungsart wurde bereits in Kapitel 6 gewählt. Im Gegensatz zu diesem Kapitel wird für die Parametervariation neben der Absolutgeschwindigkeit die turbulente Viskosität ausgewertet. Diese turbulente Größe erleichtert die Aussagen über die Nachlaufstruktur, wie dies bereits am Ende der Auswertung des instationären Testfalles aus Aachen erläutert wurde.
Bei der Interpretation der Ergebnisdarstellungen muß darauf geachtet werden, daß die Skalierung nicht in allen Fällen identisch gewählt wurde. Da bei einzelnen Varianten Werte unterschiedlicher Größenordnungen auftreten, wäre bei gleicher Skalierung die Nachlaufstruktur nicht mehr eindeutig zu erkennen. Da aber mit der hier präsentierten Parameterstudie nur qualitative Aussagen getroffen werden, stellt diese Darstellungsform keine unzulässige Vereinfachung dar.
Die Ebene, in der die Simulationsdaten ausgewertet werden, liegt 17,5 mm stromab des Rotors und befindet sich somit axial in der Mitte zwischen dem Rotor und dem zweiten Stators des experimentellen Aufbaues. Beim ersten Zeitschritt der Auswertung befinden sich die Rotorvorderkante und die Statorhinterkante in der gleichen Umfangsposition. Die Rotorvorderkante liegt bei einer Position von $U/T = 0,75$.
In Bild 7.4 und 7.5 sind die Rechenergebnisse für die Basisvariante dargestellt. Die Absolutgeschwindigkeit ist hier und in allen weiteren Darstellungen mit der jeweiligen Geschwindigkeit des *velocity inlets* entdimensioniert.
Bei der Interpretation des berechneten Geschwindigkeitsfeldes können im wesentlichen drei charakteristische Bereiche unterschieden werden. Dies sind zum einen die Rotornachläufe zweier aufeinanderfolgender Schaufeln, die mit den Ziffern 1 und 2 gekennzeichnet sind, und zum anderen der gepulste Nachlauf des Stators, der durch die Ziffer 3 kenntlich gemacht ist. Es wird deutlich, daß diese Bereiche nicht isoliert betrachtet werden können, sie treten in Interaktion miteinander. Der Statornachlauf beeinflußt die beiden Rotornachläufe sehr deutlich. Deren Minimalgeschwindigkeit sinkt deutlich ab, und die Dellenbreite nimmt zu. Für die turbulente Viskosität ergibt sich das gleiche Verhalten. Aus beiden betrachteten Strömungsgrößen geht hervor, daß die Interaktion zwischen Statornachlauf und Rotornachlauf 1 und 2 stattfindet, jedoch mit dem Rotornachlauf 2 stärker ausgeprägt ist. Dies entspricht der Rotorsaugseite.

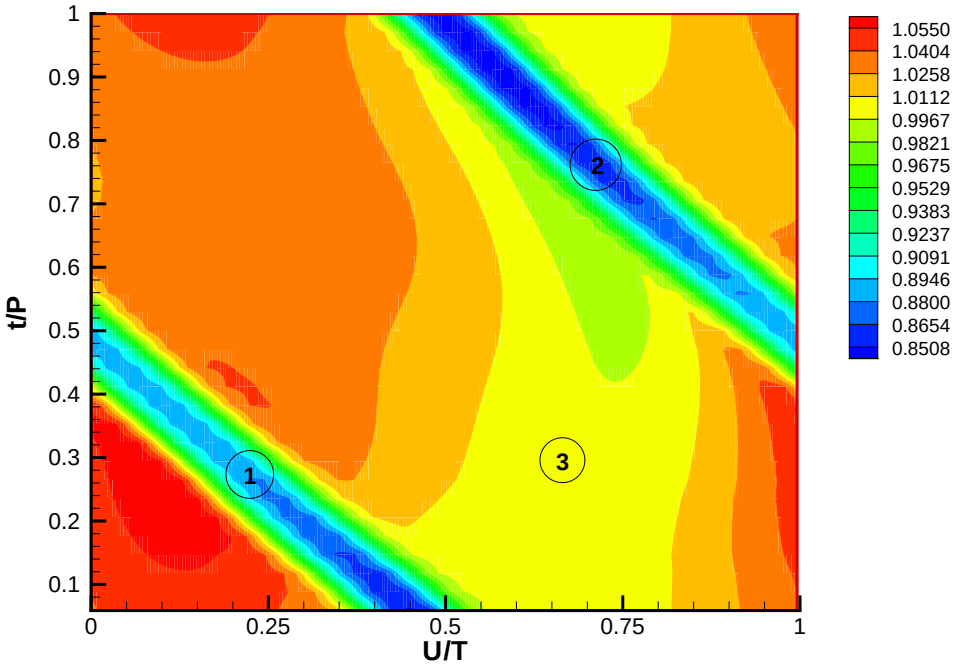

Abb. 7.4: Konturenplot der Absolutgeschwindigkeit, Tu=0,1%, Re=$1,3 \cdot 10^5$, c_o

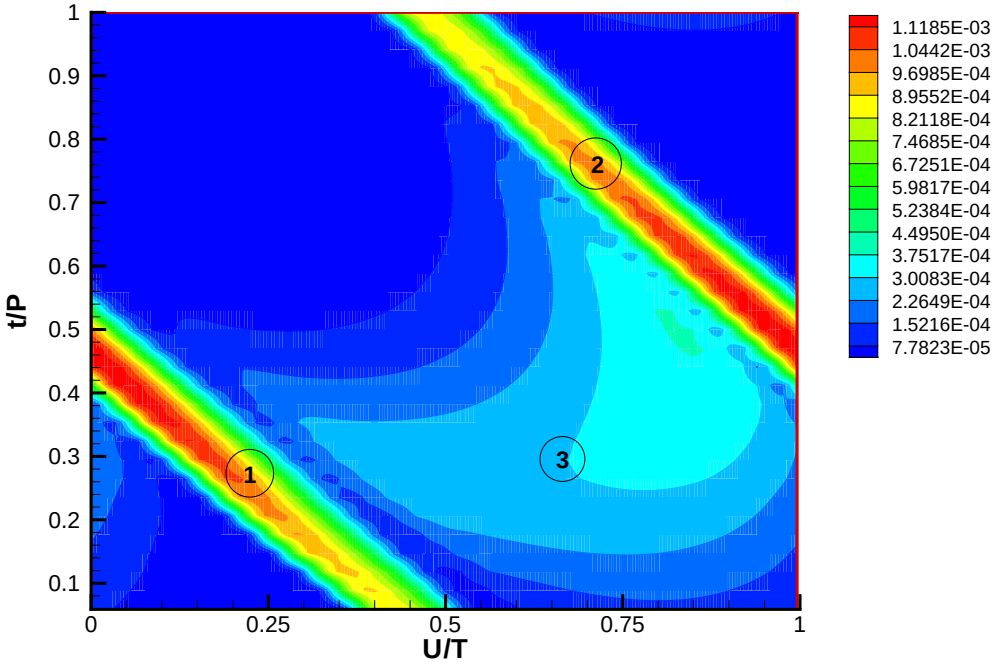

Abb. 7.5: Konturenplot der turb. Viskosität, Tu=0,1%, Re=$1,3 \cdot 10^5$,c_o

Turbulenzgrad

In den Abbildungen 7.6 und 7.7 sind die Ergebnisse der Absolutgeschwindigkeit für den Turbulenzgrad der ungestörten Zuströmung von 1,0% bzw. 10,0% dargestellt. Um den Einfluß dieses Parameters auf die Nachlaufstruktur isoliert betrachten zu können, wurden alle anderen Werte der Simulation gegenüber der Basisvariante unverändert gelassen.
Analog zu den Ergebnisdarstellungen der Basis werden zur Diskussion der Simulation die Bereiche 1, 2 und 3 näher betrachtet. In beiden Fällen kann eine Interaktion der Nachlaufdelle des Stators mit beiden Rotornachläufen festgestellt werden, die aber an der Rotorsaugseite stärker ausgeprägt ist. Dies ist in guter Übereinstimmung zur Basisvariante zu sehen. Im Unterschied zu dieser jedoch ergibt sich mit zunehmendem Turbulenzgrad ein ausgeglicherenes Geschwindigkeitsfeld. Dies zeigt sich sowohl bei der Maximal- als auch bei der Minimalgeschwindigkeit. Ebenso zeigt sich, daß der Statornachlauf nicht mehr so markant von der Kernströmung zu unterscheiden ist. Mit steigendem Turbulenzgrad ist ein stärkeres Ausmischen der Wakegeschwindigkeit mit der Kernströmung festzustellen.
Die Turbulenzgradvariation wird signifikanter, werden turbulente Größen betrachtet. In den Abbildungen 7.8 und 7.9 ist hierzu jeweils die turbulente Viskosität dargestellt.
Bei der Erhöhung des Turbulenzgrades von 0,1% auf 1,0% können die Strömungsbereiche 1 bis 3 eindeutig identifiziert werden. Sie stehen in Einklang mit dem entsprechenden Geschwindigkeitsfeld. Hinzu kommen jedoch noch zwei weitere Strömungsbereiche, die charakteristisch sind. Dies ist der Bereich 4, ein Kernströmungsgebiet niedrigerer Turbulenz. Es ist stromab durch den diskreten Statornachlauf begrenzt und stromauf durch einen weiteren Bereich erhöhter turbulenter Viskosität, gekennzeichnet mit der Ziffer 5. Im Gegensatz zu der Statornachlaufdelle tritt der Bereich 5 nicht verstärkt saugseitig mit dem Rotornachlauf in Interaktion, sondern druckseitig. Auf der Grundlage einer Auswertung aller Simulationsdaten im gesamten Strömungsbereich können die in der Auswerteebene dargestellten Daten interpretiert werden. Die zwei Bereiche stromab des Rotors entstehen an der Statorhinterkante. Die Anströmung des Stators weist einen Turbulenzgrad von 1,0% auf, die im wandnahen Bereich des Profiles gedämpft wird. Diese Zone gedämpfter Turbulenz hüllt den an der Hinterkante entstehenden Nachlauf ein. Die Bereiche höherer Turbulenz resultieren an der Auswerteebene somit aus der ungestörten Anströmung, Bereich 5, und aus dem Statornachlauf, Bereich 3. Die Zone 4 ist folglich ein Resultat aus der Turbulenzdämpfung der Statorwand. Die vermeintlich ausgeprägtere druckseitige Interaktion des Bereiches 5 mit dem Rotornachlauf in der Auswerteebene ist eine Folge einer unterschiedlichen Lauflänge der Zone 5. Die druckseitige Strömung legt aufgrund der Strömungswinkel einen kürzeren Weg bis zur Auswerteebene zurück als die auf der Saugseite. Aus diesem Grund wird saugseitig bereits eine höhere Ausmischung der Kernströmung sichtbar.
Die Erhöhung des Turbulenzgrades von 0,1% auf 10,0% wirkt sich nicht auf die Struktur der

turbulenten Viskosität aus, die Bereiche 1 bis 5 bleiben erhalten. Jedoch tritt eine markante Änderung in den Absolutwerten von μ_t auf. Die Maxima treten nicht im Rotornachlauf auf, sondern in der Kernströmung, die durch die Ziffer 5 markiert ist. Dieser Bereich resultiert, wie oben beschrieben, aus der ungestörten Anströmung des Stators. Es wird deutlich, daß durch das Zusammenwachsen der Rotorgrenzschichten die turbulente Viskosität keine so großen Werte annimmt, wie sie in der Außenströmung vorhanden sind. Werden bei der Ergebnisinterpretation die Absolutwerte berücksichtigt, kann festgestellt werden, daß der Rotornachlauf weitgehend identische Werte für μ_t aufweist, jedoch die Kernströmung um gut eine Potenz erhöhte Zahlen für die turbulente Viskosität.
Eine weitere Auswirkung des hohen Turbulenzgrades der Variante T2 ist eine Verbreiterung des Rotornachlaufes. Dies ist eine unmittelbare Folge des diffusiven Charakters von Turbulenz, was letztlich zu einem ausgeglichenen Strömungsfeld führt. Abschließend muß angemerkt werden, daß eine direkte Schlußfolgerung von μ_t auf die turbulente kinetische Energie nicht möglich ist, da beide Werte über ε miteinander gekoppelt sind. So bewirkt diese, daß im Rotornachlauf k größere Werte annimmt als in der Kernströmung. Es kann aber festgestellt werden, daß beide turbulente Größen k und μ_t in der gleichen Tendenz auf Änderungen von Randbedingungen reagieren.

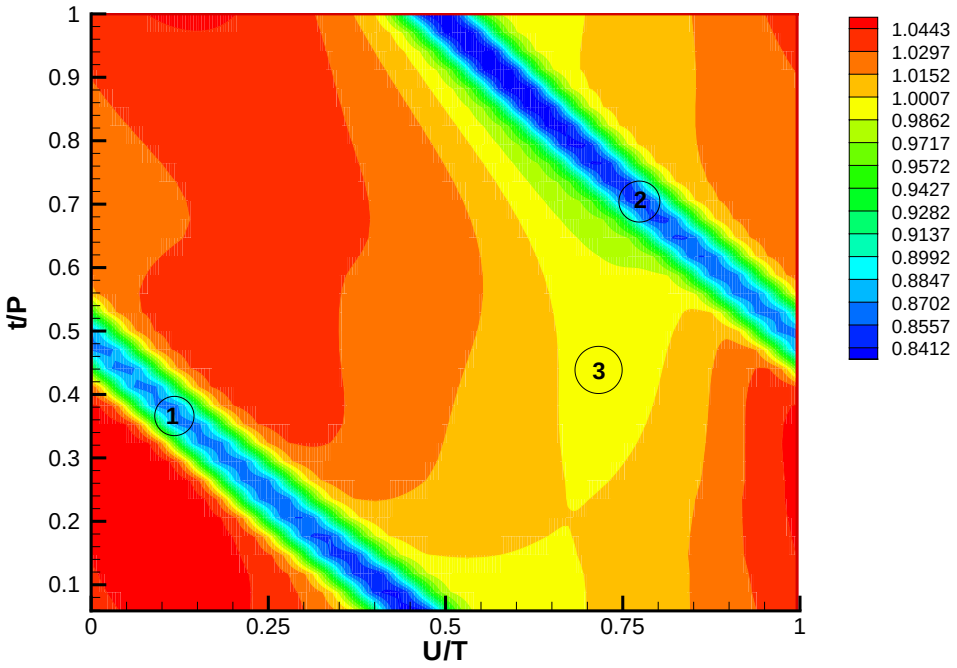

Abb. 7.6: Konturenplot der Absolutgeschwindigkeit, Tu=1,0%, Re=$1,3 \cdot 10^5$,c_o

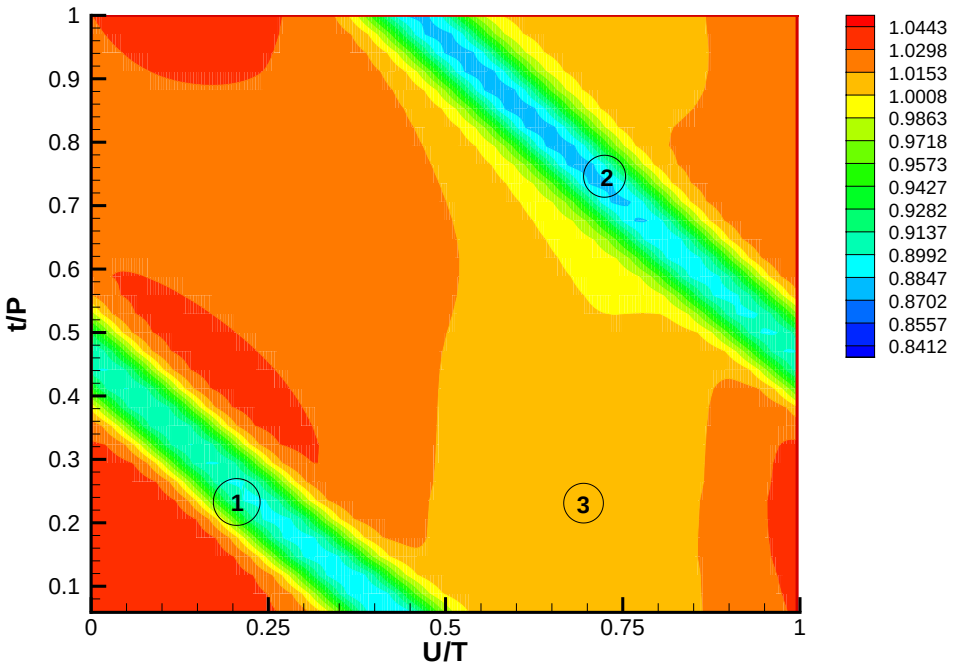

Abb. 7.7: Konturenplot der Absolutgeschwindigkeit, Tu=10,0%, Re=$1,3 \cdot 10^5$, c_o

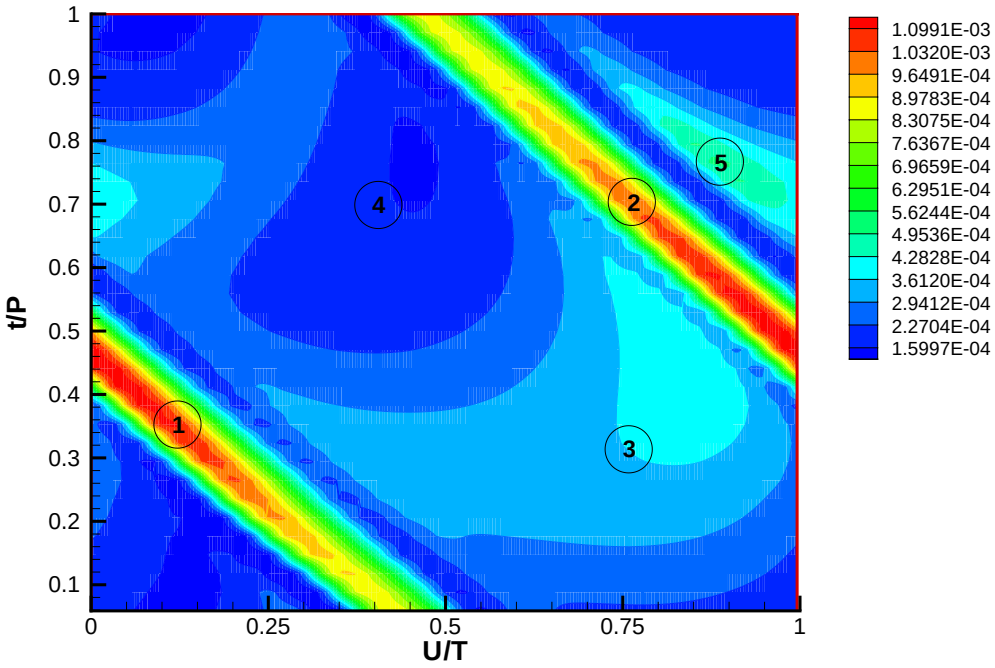

Abb. 7.8: Konturenplot der turb. Viskosität, Tu=1,0%, Re=$1,3 \cdot 10^5$, c_o

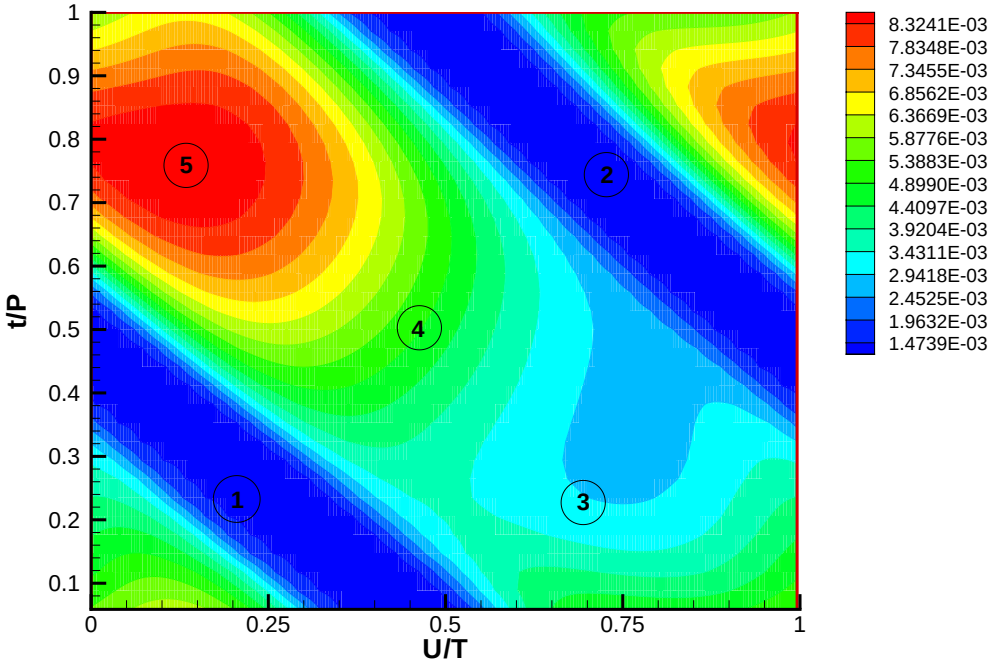

Abb. 7.9: Konturenplot der turb. Viskosität, Tu=10,0%, Re=$1,3 \cdot 10^5$, c_o

Reynoldszahl

Bei der Variation der Reynoldszahl wurde ausschließlich die Viskosität des Strömungsmediums Luft geändert. Alle anderen Simulationseinstellungen wurden ebenso wie bei der Turbulenzgradstudie unverändert zur Basisrechnung gelassen. Neben der Reynoldszahl von $1,3 \cdot 10^5$ wurden die Werte $1,0 \cdot 10^5$ und $2,6 \cdot 10^5$ für den *sea-level take off* und die Flughöhe gewählt. Um diese Reynoldszahlwerte zu erreichen, wurde die dynamische Viskosität der Luft von $\mu = 1,7894 \cdot 10^{-5} \frac{kg}{ms}$ auf die Werte $\mu = 2,3262 \cdot 10^{-5} \frac{kg}{ms}$ für die Simulation R1 und $\mu = 0,8947 \cdot 10^{-5} \frac{kg}{ms}$ für die größere Reynoldszahl variiert.
Durch die Veränderung der Reynoldszahl wird das Verhältnis der Trägheitskräfte zu den viskosen Kräften beeinflußt. Somit nehmen bei einer Reynoldszahlverkleinerung die Reibungseinflüsse zu und umgekehrt. Da die viskosen Effekte in einer turbulenten Strömung nur in Wandnähe dominant sind, ist in der Kernströmung kein entscheidender Einfluß der dynamischen Viskositätsänderung zu erwarten.
Um diese Vermutung zu überprüfen, sind in den Abbildungen 7.10 und 7.11 die Geschwindigkeitsfelder der Viskositätsvariation dargestellt. Die beiden Konturenplots geben ein weitgehend identisches Bild der Nachlaufstruktur wieder. Es ist ebenso vergleichbar mit der Basisrechnung. Die drei Strömungsgebiete 1 bis 3 sind eindeutig zu identifizieren. Aus dieser Ergebnisdarstellung geht hervor, daß der höchste Viskositätswert von $\mu = 2,32 \cdot 10^{-5} \frac{kg}{ms}$ der Rechnung R1 die geringste Minimalgeschwindigkeit des Rotornachlaufes zur Folge hat. Dies ist eine Auswirkung des verstärkten Reibungseinflusses an den Rotorschaufeln, der eine Zunahme der Grenzschichtdicke bewirkt, die sich ihrerseits in einer Zunahme der Nachlaufdellentiefe widerspiegelt. Dagegen ist die Auswirkung der dynamischen Viskosität auf den diskreten Statornachlauf in der betrachteten Auswerteebene kaum mehr feststellbar. Bei der Simulation R2 sind die maximalen Geschwindigkeitswerte kleiner als bei der Rechnung mit höherer Viskosität. Allgemein kann aufgrund der hier vorliegenden Ergebnisse die Aussage bestätigt werden, daß sich mit Zunahme der Reynoldszahl ein ausgeglicherenes Strömungsfeld einstellt.
Zur vollständigen Ergebnisdiskussion muß auch die Turbulenz berücksichtigt werden. Hierzu ist in den Abbildungen 7.12 und 7.13 die turbulente Viskosität dargestellt. Der Konturenplot dieser Größe bestätigt die oben getroffene Aussage. Mit zunehmender Reynoldszahl bzw. abnehmender dynamischer Viskosität ergibt sich ein ausgeglicheneres Strömungsfeld. Im Gegensatz zum Geschwindigkeitsfeld wird aber ein deutlicher Einfluß der Reynoldszahl auf den Statorwake sichtbar. Dieser weist auch nach der Rotorpassage mit abnehmender Reynoldszahl wesentlich größere Werte für μ_t auf, was auf die unterschiedliche Grenzschichtentwicklung am Stator und die damit verbundene Scherung beim Aufeinandertreffen der beiden Grenzschichten an der Statorhinterkante zurückzuführen ist.

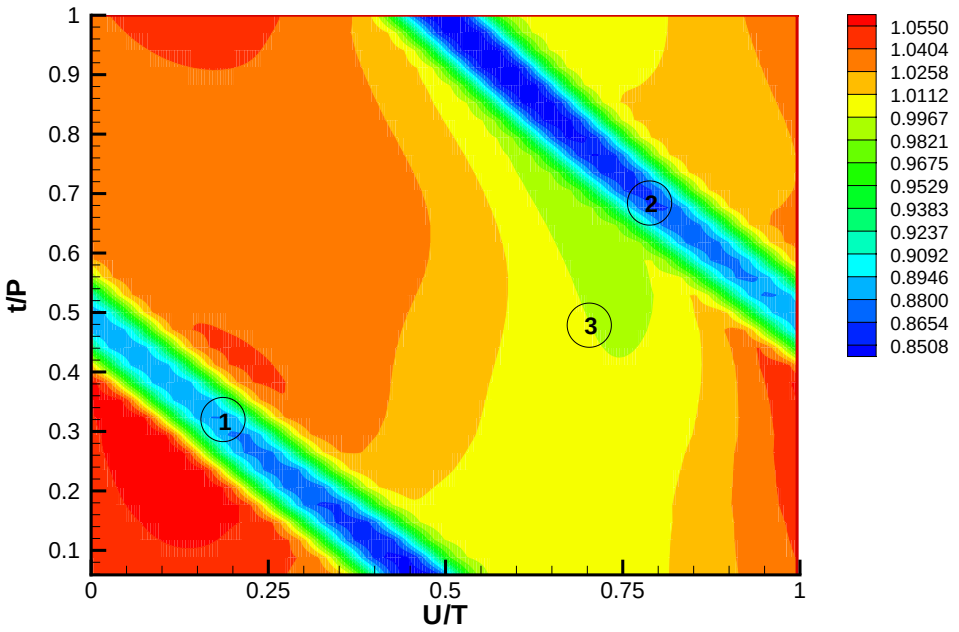

Abb. 7.10: Konturenplot der Absolutgeschwindigkeit, Tu=0,1%, Re=$1,0 \cdot 10^5$,c_o

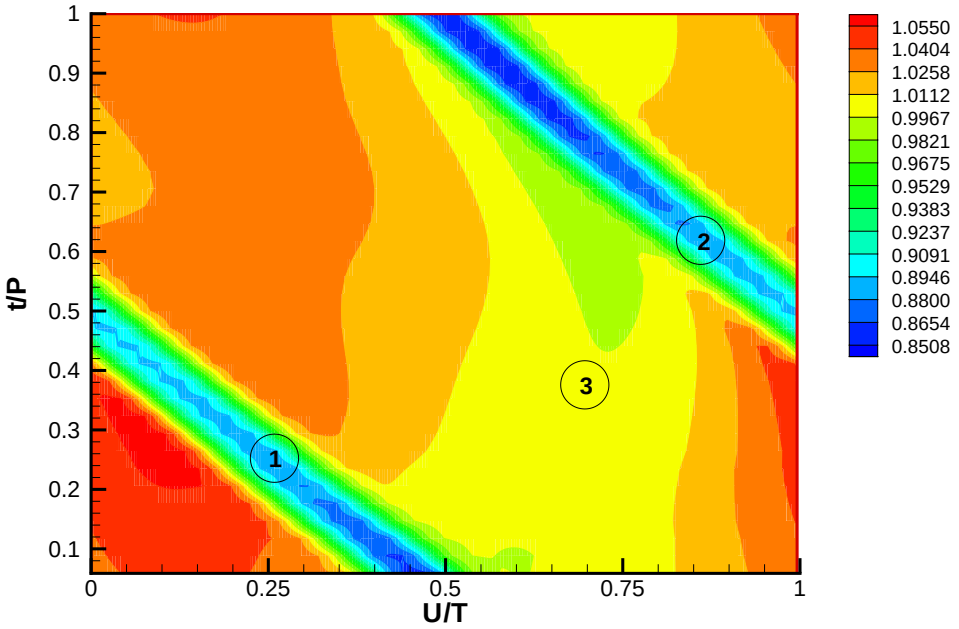

Abb. 7.11: Konturenplot der Absolutgeschwindigkeit, Tu=0,1%, Re=$2,6 \cdot 10^5$, c_o

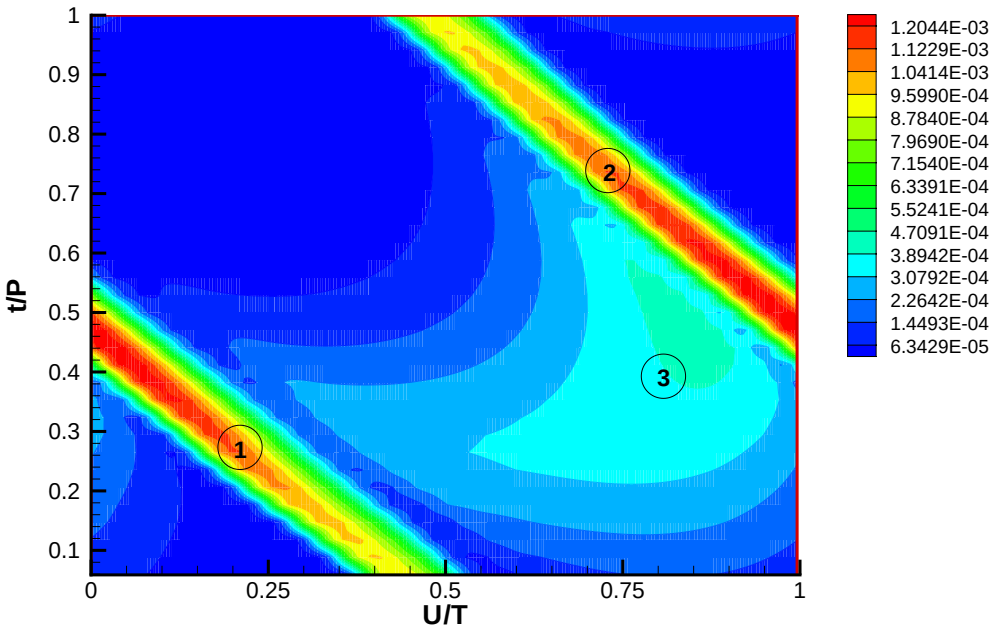

Abb. 7.12: Konturenplot der turb. Viskosität, Tu=0,1%, Re=$1,0 \cdot 10^5$, c_o

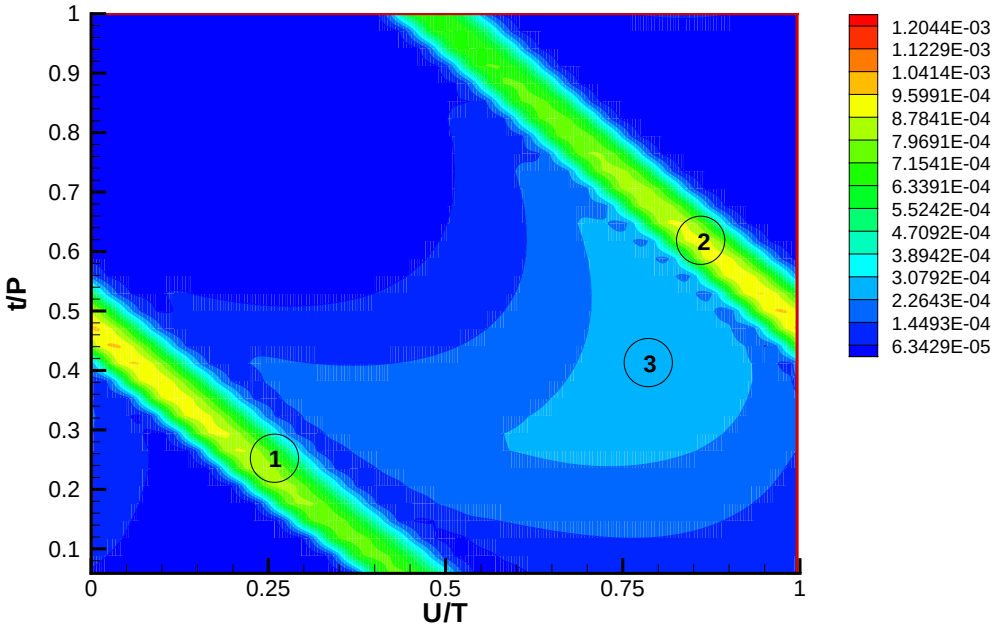

Abb. 7.13: Konturenplot der turb. Viskosität, Tu=0,1%, Re=$2,6 \cdot 10^5$, c_o

Betriebspunkt

In den Abbildungen 7.14 und 7.15 sind die Geschwindigkeitsfelder für die beiden Betriebspunkte B1 und B2 dargestellt. Die Variation des Betriebspunktes wurde durch eine Variation der Geschwindigkeit am *velocity inlet* erreicht. Alle weiteren Einstellungen wurden gegenüber der Basisvariante nicht verändert. Auf diese Weise wurden in Anlehnung an die oben dargestellte Parameterstudie die Reynoldszahlen von $1,0 \cdot 10^5$ und $2,6 \cdot 10^5$ erreicht.
Jedoch ist die im Folgenden dargestellte Untersuchung nicht signifikant für die Reynoldszahl, sondern für den Betriebspunkt der Maschine. Durch die Änderung der Eintrittsgeschwindigkeit bei konstanter Drehzahl kommt es zu einer signifikanten Änderung der Strömungswinkel. Die Änderung des Verhältnisses der Trägheits- und viskosen Kräften zueinander ist hierbei nicht dominierend. Der Rotor wird im Auslegungspunkt von $Re = 1,3 \cdot 10^5$ mit einem Rückenstoß angeströmt, der um ca. $8°$ gegenüber einer stoßfreien Anströmung versetzt ist. Bei der Reynoldszahl von $2,6 \cdot 10^5$ kommt es zu einer Fehlanströmung auf der Druckseite, hingegen für Re $= 1,0 \cdot 10^5$ wird der Rückenstoß um einige Grad weiter saugseitig verschoben.
In den Geschwindigkeitsfeldern der Simulationen B1 und B2 lassen sich analog zur Basisvariante die Bereiche 1 bis 3 identifizieren. Sehr markant ist bei der Simulation B2 die Interaktion des Statornachlaufes mit dem des Rotors. Diese resultiert in einer deutlichen Verbreiterung des kontinuierlichen Rotornachlaufes, ohne jedoch die Minimalgeschwindigkeit wesentlich zu beeinflussen. Festzustellen ist anhand der Geschwindigkeitsverläufe, daß die Interaktion der beiden Nachläufe miteinander sich mit der Zunahme der Fehlanströmung von der Saugseite auf die Druckseite verschiebt. Bei der Variante B2 hat sich gegenüber der rein einseitigen Interaktion der Basisrechnung eine auf beide Seiten gleichmäßig verteilte Auswirkung des Statornachlaufes ausgebildet. Dies ist gleichzusetzen mit der Tatsache, daß mit zunehmender Strömungsgeschwindigkeit die Unterschiede zwischen Druck- und Saugseite stärker ausgeglichen werden.
Aus der Betrachtung des gesamten Geschwindigkeitsfeldes der Turbinenstufe wird deutlich, daß bei konstanter Drehzahl die Ablöseneigung auf der Rotorsaugseite stark zunimmt.
Die Abbildungen 7.16 und 7.17 zeigen die turbulente Struktur des Strömungsfeldes. Im Gegensatz zu der Geschwindigkeit kommt es bei der Variante B2 aufgrund der höheren Geschwindigkeit zu keiner Verbreiterung der nachlaufinduzierten Turbulenz des Rotors. Die Werte von μ_t werden aber im Rotornachlauf durch den diskreten Statornachlauf erhöht. Bei der Simulation B1, die sich durch die geringsten Absolutgeschwindigkeiten auszeichnet, kommt es zu einer sehr starken Aufdickung des Rotornachlaufes. Auch der diskrete Nachlauf des Stators ist relativ zur freien Strömung noch durch wesentlich höhere Turbulenzwerte gekennzeichnet, als dies bei der Simulation B2 der Fall ist. Die Basisvariante reiht sich zwischen die beiden Fälle ein. Es wird somit deutlich, daß bei kleineren Transportgeschwindigkeiten die turbulente Struktur länger erhalten bleibt und höhere Geschwindigkeiten diese schneller abbauen.

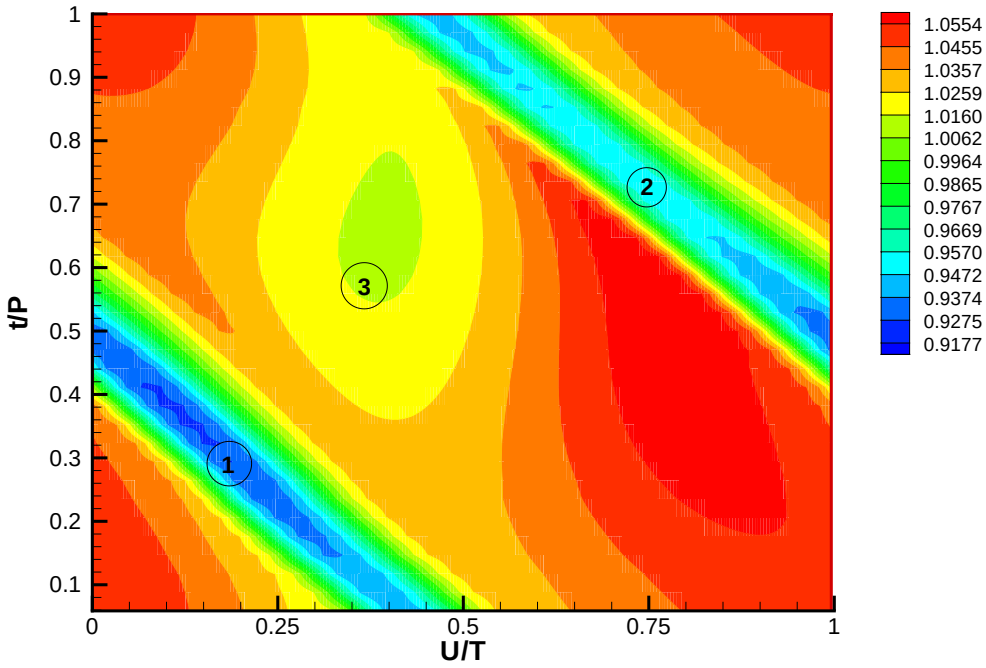

Abb. 7.14: Konturenplot der Absolutgeschwindigkeit, Tu=0,1%, Re=$1,0 \cdot 10^5$, $0,77 \cdot c_o$

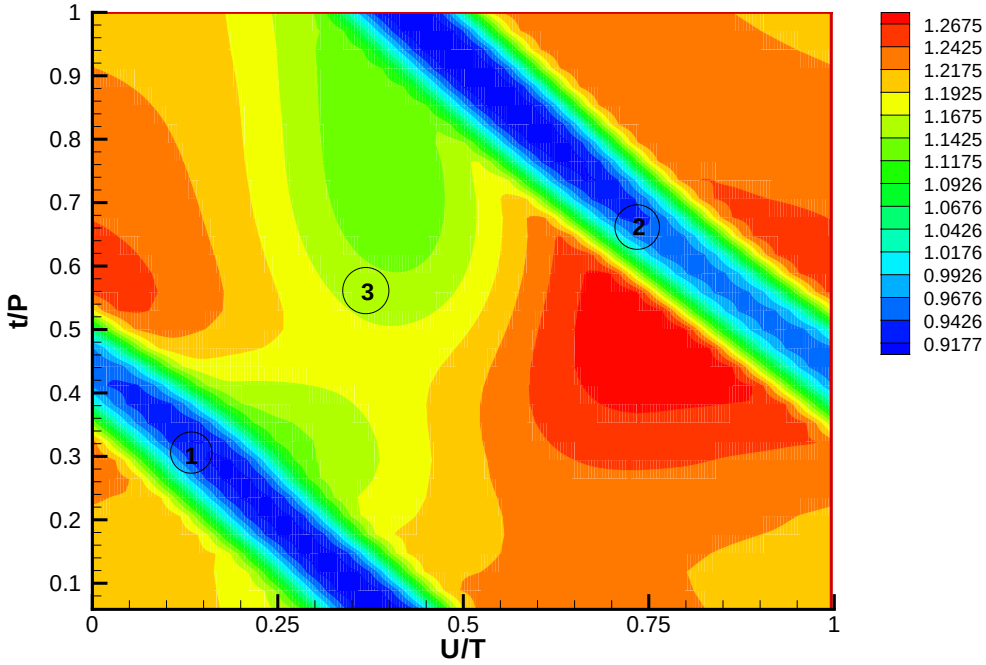

Abb. 7.15: Konturenplot der Absolutgeschwindigkeit, Tu=0,1%, Re=$2,6 \cdot 10^5$, $2,6 \cdot c_o$

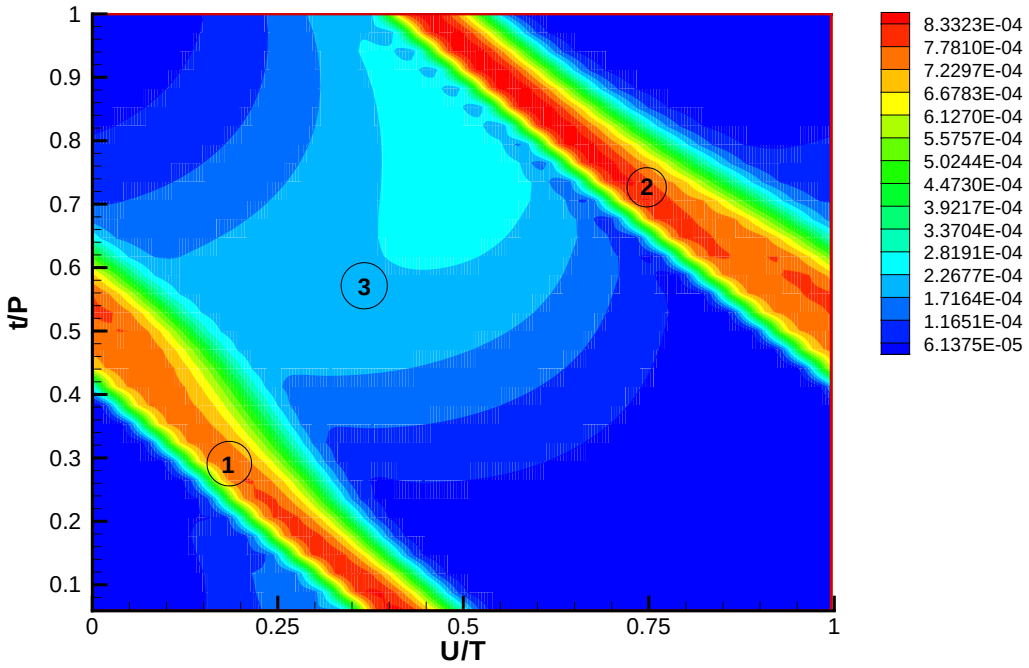

Abb. 7.16: Konturenplot der turb. Viskosität, Tu=0,1%, Re=$1,0 \cdot 10^5$, $0,77 \cdot c_o$

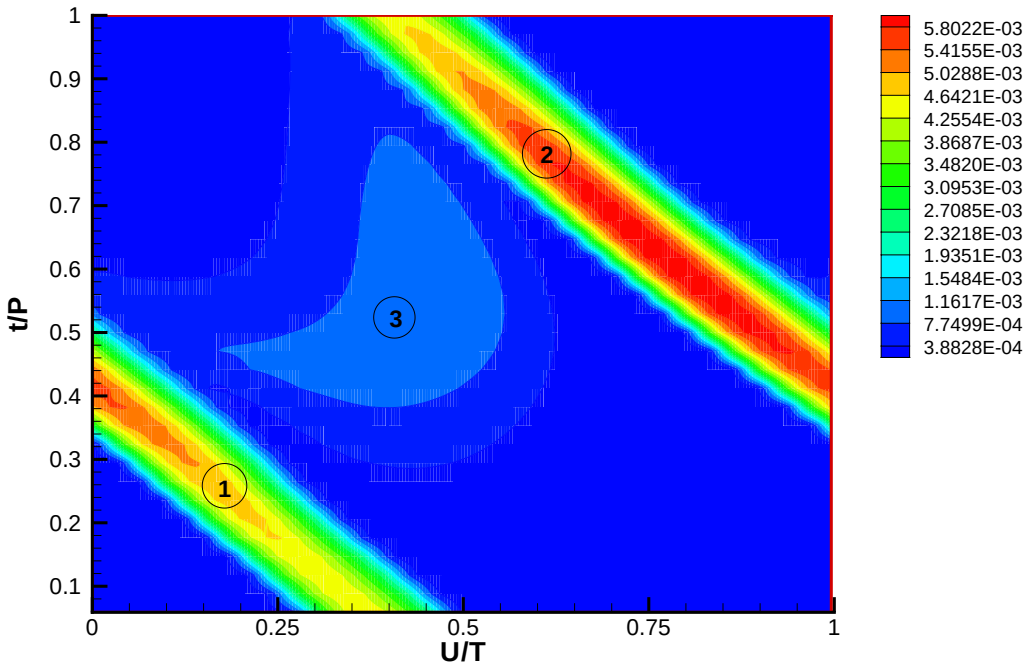

Abb. 7.17: Konturenplot der turb. Viskosität, Tu=0,1%, Re=$2,6 \cdot 10^5$, $2,6 \cdot c_o$

8 Zusammenfassung

Bei der Auslegung und Konstruktion einer modernen Turbomaschine wird die Berücksichtigung von Instationaritäten immer wichtiger. Von entscheidender Bedeutung hierbei ist die Wechselwirkung zwischen rotierenden und stehenden Schaufelreihen. Diese kann in zwei Anteile unterteilt werden. Zum einen ist dies der Nachlauf und zum anderen die potentialtheoretische Strömung. Letztere klingt mit der Strömung sehr schnell ab. Der Nachlauf hingegen beeinflußt auch weit stromab seines Entstehungsortes noch das Strömungsfeld.

In diesen Kontext ist der sogenannte *Clocking Effekt* einzuordnen. Dieser betrachtet eine Konfiguration von drei aufeinanderfolgenden Schaufelreihen einer Axialmaschine, wobei das erste und das letzte Gitter Statorreihen mit gleicher Teilung sind. Experimentell wurde bei einer Umfangspositionsänderung der beiden Statorreihen zueinander eine Änderung des polytropen Wirkungsgrades in der Größenordnung von einem Prozentpunkt festgestellt [24]. Die bisher bekannten experimentellen Erkenntnisse können noch nicht die physikalischen Zusammenhänge dieses instationären Effektes zufriedenstellend erklären. Aus diesem Grund gibt es einige Forschungsvorhaben, die sich mit dieser Thematik beschäftigen. Das Fachgebiet *Turbomaschinen und Fluidantriebestechnik* der TU Darmstadt untersucht den Clocking Effekt ebenfalls sehr intensiv. Hierfür werden das Experiment und CFD parallel eingesetzt. Dem numerischen Teil sind die in dieser Arbeit vorgestellten Ergebnisse zuzuordnen.

Da die numerische Simulation von 1,5 Stufen einer Axialmaschine ein sehr komplexes Problem darstellt, wurden die Untersuchungen dieser Arbeit auf einen Teilaspekt des Clocking Effektes, die Nachlaufstruktur, beschränkt. Hierfür wurde mit dem kommerziellen Programm FLUENT [15] die Nachlaufstruktur einer Turbomaschine exemplarisch an einer Stufe der fachgebietseigenen axialen Versuchsturbine untersucht. Um nähere Erkenntnisse über die physikalischen Zusammenhänge auf diesem Gebiet zu gewinnen, wurde eine Parameterstudie durchgeführt. Es wurde der Turbulenzgrad der freien Zuströmung, die Reynoldszahl und der Betriebspunkt der Turbomaschine variiert.

Bevor diese Parameterstudie durchgeführt werden konnte, mußten die Fragen nach einer geeigneten Turbulenzmodellierung, Netzstruktur und nach einer geeigneten Begrenzung des Strömungsgebietes beantwortet werden. Aus diesem Grund kann diese Arbeit in drei Ab-

schnitte unterteilt werden. Nach der Berechnung einer stationären Einzelprofilumströmung und eines stationären Gitters wurde eine instationäre Turbinenstufenströmung näher betrachtet, bevor letztlich eine sinnvolle Paramterstudie durchgeführt werden konnte. Um die hierbei erzielten Simulationsergebnisse beurteilen zu können, wurden diese mit geeigneten experimentellen Daten verglichen. Für den stationären Testfall wurde auf Daten von NAKAYAMA [39] zurückgegriffen. Beim instationären Fall wurden Daten der RWTH Aachen [61] verwendet.

Auf Seiten der Turbulenzmodellierung wurden Ein- bzw. Zweigleichungsmodelle und ein lineares Reynoldsspannungsmodell eingehend untersucht. Für die Berechnung der wandnahen Zone wurde eine Zweischichtenformulierung, bei der in Wandnähe ein Eingleichungsmodell gelöst wird, bzw. die Standard-Wandfunktion sowie eine low-Re Formulierung des Eingleichungsmodelles getestet. Im stationären Fall kann der Profilnachlauf von allen Modellen bis auf das Standard $k-\varepsilon$ und das RNG $k-\varepsilon$ Modell qualitativ sehr gut beschrieben werden. Das Versagen des Standard Modelles ist auf eine Überproduktion der turbulenten kinetischen Energie an der Profilvorderkante zurückzuführen. Diese bekannte Schwäche kann mit einer von KATO und LAUNDER vorgeschlagenen Modifikation behoben werden.

Als weiteres Ergebnis des stationären Testfalles kann festgehalten werden, daß die Zweischichtenformulierung, bei der ein Eingleichungsmodell in Wandnähe gelöst wird, keine entscheidend bessere Resultate gegenüber der Standard-Wandfunktion liefert, die den höheren numerischen Aufwand rechtfertigen.

Bei der Auswertung der Ergebnisse des instationären Testfalles kristallisierte sich das RSM in Verbindung mit der Standard-Wandfunktion als das geeignete Turbulenzmodell heraus, mit dem eine Axialturbinenstufe instationär gerechnet werden kann. Es muß hierbei aber festgestellt werden, daß es im Rahmen dieser Arbeit nicht möglich war, die Strömungsgrößen quantitativ exakt zu beschreiben. Die qualitative Strömungsstruktur wurde aber sehr gut erfasst, so daß auf dieser Grundlage eine Parameterstudie anhand einer Versuchsturbine möglich war, für die noch keine experimentelle Daten zur Verifikation der numerischen Werte vorliegen.

Als geeignete Netzstruktur stellte sich im Rahmen dieser Arbeit eine O/H-Struktur bei Verwendung eines blockstrukturierten Netztypes heraus.

Nach diesen Vorarbeiten wurde im letzten Kapitel dieser Arbeit eine Parameterstudie durchgeführt. Ziel war es hierbei, einzelne Größen isoliert zu variieren, um deren Einfluß auf die Nachlaufstruktur von dem Gesamtkomplex Stufenströmung separieren zu können. So wurden die Reynoldszahl über die dynamische Viskosität, der Turbulenzgrad der freien Anströmung und der Betriebspunkt durch eine Änderung der freien Anströmgeschwindigkeit variiert.

Mit steigendem Turbulenzgrad ergibt sich ein immer ausgeglicherenes Strömungsfeld. Der Unterschied der Geschwindigkeits- und der Turbulenzextrema wird kleiner, so daß von einer verringerten Wirkungsgradänderung des *Clocking Effektes* ausgegangen werden kann. Ein ähnliches Ergebnis stellt sich ein, wenn die Reynoldszahl vergrößert wird. In diesem Fall gleichen

sich die Strömungsextrema mit abnehmender Viskosität immer mehr an. Bei der Variation des Betriebspunktes ergibt sich ein komplett anderes Strömungsfeld. Durch die Veränderung der Anströmgeschwindigkeit werden die Geschwindigkeitsdreiecke stark beeinflußt. Es kommt zu großen Änderungen des Inzidenzwinkels. Dies macht sich sehr deutlich durch Ablöseneigungen am Rotor bemerkbar. Hinzu kommt, daß mit steigender Strömungsgeschwindigkeit die Turbulenzstruktur stärker beeinflußt wird.
Allgemein kann festgestellt werden, daß, obwohl CFD eine junge Disziplin unter den Entwicklungsmethoden der Turbomaschinen darstellt, qualitativ gute Ergebnisse erzielt werden können. Durch das Vorliegen aller Strömungsgrößen im gesamten Strömungsfeld zu jedem Zeitpunkt werden die physikalischen Zusammenhänge der Instationaritäten in einer Turbomaschine deutlicher. Es muß aber darauf hingewiesen werden, daß CFD, um sinnvoll eingesetzt werden zu können, experimentelle Validierungsdaten benötigt. Nur auf diese Weise kann eine geeignete Modellbildung für ein Strömungsproblem gefunden werden, bevor dieses eingehend untersucht werden kann. Diese Vorgehensweise wurde in dieser Arbeit für eine einstufige Axialturbine vorgestellt.

Literaturverzeichnis

[1] Bauer, W.: *Berechnung turbulenter Strömungen mit starken Stromlinienkrümmungen beziehungsweise mit Rotation*. Dissertation, FG Gasturbinen und Flugantriebstechnik, TU Darmstadt, 1998. 10

[2] Biswas, D., Fukuyama, Y.: *Calculation of Transitional Boundary Layers With an Improved Low Reynolds Number Version of the $k - \varepsilon$ Model*. ASME Journal of Turbomachinery, Vol. 116, pp. 765-773, 1994. 49

[3] Binder, A., et al.: *An Experimantal Investigation into the Effect of Wakes on the Unsteady Turbine Rotor Flow*. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, Vol. 107, pp. 458-466, 1985. 78, 78, 80

[4] Boussinesq, J.: *Theorie de l'coulement tourbillant*. Mem. Presentes par divers Savants Acad. Sci. Inst. Fr. XXIII, Band 46, Paris, 1877. 9

[5] Chen, W.L., Leschziner, M.A.: *Modelling Turbomachine-Blade Flows with Non-Linear Eddy-Viscosity Models and Second-Moment Closure*. Professional Engineering Publishing, pp. 189-199, 1999. 49, 80

[6] Dacles-Mariani, J., Zilliac, G.G., Chow, J.S., Bradshaw, P.: *Numerical/Experimental Study of a Wingtip Vortex in the Near Field*. AIAA Journal, 33(9): pp. 1561-1568, 1995. 13, 14

[7] Daly, B.J., Harlow, F.H.: *Transport Equations in Turbulence*. Phys. Fluids, Vol. 13, pp. 2634-2649, 1970. 21

[8] Dawes, W.N.: *Simulating Unsteady Turbomachinery Flows on Unstructured Meshes which Adapt Both in Time and Space*. ASME Paper, No. 93-GT-104, 1993. 79

[9] Denton, J.D.: *Loss Mechanisms in Turbomachines*. ASME, Paper No. 93-GT-435, May 1993. 80

[10] Dopazo, C., O'Brien: *Acto Astronautica 1*. pp 1239-1240, 1974. 6

[11] Dring, R.P., et al.: *Turbine Rotor-Stator Interaction*. ASME Paper, No. 82-GT-3, 1982. 77

[12] Eulitz, F. Engel, K.: *Numerical Investigation of Wake Interaction in a Low Pressure Turbine*. AIAA 97-3027, 1997. 65

[13] Ferziger, J.H., Peric, M.: *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, Berlin u.a., 2. Auflage, 1997. 28, 29, 31, 35

[14] Fletcher, C.A.J.: *Computational Techniques for Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, Berlin u.a., 2. Ausgabe, 1991. 34

[15] Fluent Incorporated: *User's Guide for FLUENT 5*. Release 5.0.4, Lebanon, NH 03766, 1998. 2, 27, 37, 37, 45, 119

[16] Friedrich, R.: *Grundlagen turbulenter Strömungen und numerische Simulation*. Skript zur Summer School des Graduiertenkollegs *Modellierung und numerische Beschreibung technischer Strömungen* 1997. 4, 4, 6, 8, 8

[17] Giles, M.B.: *Calculation of Unsteady Wake/Rotor Interaction*. AIAA Journal of Propulsion and Power, 4(4), pp. 356-362, 1988. 79

[18] Hodson, H.P., Addison, J.S.: *Wake-Boundary Layer Interactions in an Axial-Flow Turbine at Off-Design Conditions*. ASME Paper 88-GT-233, 1988. 79

[19] Hodson, H.P.: *Bladerow Interactions in Low Pressure Turbines*. VKI Lecture Series *Blade Row Interference Effects in axial Turbomachinery Stages* February 9-12, Belgium, 1998. 78, 79, 88, 101, 103

[20] Hodson, H.P.: *Boundary Layer and Loss Measurements on the Rotor of an Axial-Flow Turbine*. ASME Paper, No. 83-GT-4, 1983. 77

[21] Hodson, H.P.: *The Development of Unsteady Boundary Layers on the Rotor of an Axial-Flow Turbine*. AGARD Conf. on Viscous Effects in Turbomachines, AGARD CP-351, Copenhagen, June 1983. 79

[22] Hodson, H.P.: *Measurements of Wake-Generated Unsteadiness in the Rotor Passages of Axial Flow Turbines*. ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, Vol. 107, April 1985. 79

[23] Hodson, H.P.: *Blade-to-Blade Prediction of a Wake-Generated Unsteady Flow*. ASME Journal for Gas Turbines and Power, Vol. 107, April 1985. 79

[24] Huber, F.W., Johnson, P.D., Sharma, O.P., Staubach, J.B., Gaddis, S.W.: *Performance Improvement through Indexing of Turbine Airfoils*. Journal of Turbomachinery, Vol. 118, pp. 630-635, 1996. 2, 119

[25] Hunter, I.H.: *Endwall Boundary Layer Flows and Losses in an Axial Turbine Stage*. ASME Journal of Engineering for Power, Vol. 104, pp. 184-193, 1982. 80

[26] Janicka, J.: *Turbulenz*. Skriptum zur Vorlesung. TU Darmstadt, 1997. 7, 11, 28, 47

[27] Joslyn, H.D., Dring, R.P., Sharma, O.P.: *Unsteady Three-Dimensional Turbine-Aerodynamics*. ASME Journal of Engineering for Power, Vol. 105, pp. 322-331, 1983. 77, 79

[28] Joslyn, H.D., Dring, R.P.: *Three-Dimensional Flow in an Axial Turbine: Part 1 - Aerodynamic Mechanisms; Part 2 - Profile Attention*. ASME Journal of Turbomachinery, Vol. 92, pp. 61-78, 1992. 80

[29] Kato, M., Launder, B.E.: *The Modelling of Turbulent Flows Around Stationary and Vibrating Square Cylinders*. Proc. 9th Symposium Turbulent Shear Flows, Kyoto, No. 10-4, 1993. 16

[30] Kerrebrock, K.L., Mikolajczak, A.A.: *Intra-Stator Transport of Rotor Wakes and Its Effects on Compressor Performance*. ASME Journal of Engineering for Power, p. 359, 1970. 78, 78

[31] Korakinitis, T.: *On the Propagation of Viscous Wakes and Potential Flow in Axial Turbine Cascades*. ASME Paper No. 91-GT-373, 1991. 79

[32] Krieger, G.C.: *Untersuchung zur Hydroxylradikal- und Stickoxidbildung in turbulenten Wasserstoffdiffusionsflammen mittels Wahrscheinlichkeitsdichte-Methoden*. Dissertation,FG Energie- und Kraftwerkstechnik, TU Darmstadt, 1997. 6

[33] Krysinski, J.E., et al.: *Stator Wake Clocking Effects on Three-Dimensional Unsteady Flow in a Two-Stage Low-Pressure Turbine*. Professional Publishing, pp. 323-332, 1999. 80

[34] Launder, B.E., Reece, G.J., Rodi, W.: *Progress in the Development of a Reynolds-Stress Turbulence Closure*. Journal of Fluid Mechanics, Vol. 68, pp. 537-566, 1975. 21, 22

[35] Launder, B.E., Spalding, D.B.: *Lectures in Mathematical Models of Turbulence*. Academic Press, London, England, 1972. 15

[36] Magagnato, F.: *Unsteady Flow past a Turbine Blade Using Non-Linear Two-Equation Models*. Professional Engineering Publishing, pp. 221-230, 1999. 80

[37] Menter, F.R.: *A Comparison of Some Recent Eddy-Viscosity Turbulence Models*. Journal of Fluids Engineering, Vol. 118, pp. 514-519, 1996. 20

[38] Meyer, R.X.: *The Effect of Wakes ont the Transient Pressure and Velocity Distribution in Turbomachines*. ASME Journal of Basic Engineering, pp. 1544-1552, 1958. 77, 78

[39] Nakayama, B.: *Characteristics of the Flow around Conventional and Supercritical Airfoils*. Journal of Fluid Mechanics, Vol. 160, pp. 155-179, 1985. 46, 49, 120

[40] Orszag, S.A.: *Introduction to Renormalization Group Modeling of Turbulence*. In: Simulation and Modeling of Turbulent Flows, Ed. Thomas Gatski, M. Yousuff Hussaini, John L. Lumley. New York, Oxford, Oxford University Press, 1996. 19, 20

[41] Patel, C., Rodi, W., Scheurer, G.: *Turbulence Models for Near-Wall and Low Reynolds Number Flows: A Review*. AIAA Journal, Vol. 23, No. 9, 1984. 25

[42] Patel, C., Scheurer, G.: *Calculation of Two-Dimensional Near and Far Wakes*. AIAA Journal, 20, pp. 900-907, 1982. 46, 49

[43] Patankar, S.V.: *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Hemisphere, Washington, D.C., 1980. 35

[44] Paxon, D.E., Mayle, R.E.: *Laminar Boundary Layer Interaction with an Unsteady Passing Wake*. ASME Paper 90-GT-120, 1990. 79

[45] Pfeil, H., Herbst, R.: *Grenzschichtentwicklung bei instationärer Zuströmung*. VDI-Berichte 361, S. 45-48, 1980. 77

[46] Pope, S.B.: *PDF Methods for Turbulent Reactive Flows*. Progr. in Energy and Comb. Science, Vol. 11, pp. 119-192, 1985. 6

[47] Rai, M.M.: *Navier-Stokes Simulations of Rotor-Stator Interactions using Patched and Overlaid Grids*. Journal of Prop Power, Vol. 3, No. 5, pp. 387-396, 1987. 79

[48] Raj, R., Lakshminarayana, B.: *Characteristics of the Wake behind a Cascase of Airfoils*. Journal of Fluid Mechanics, 61, pp. 707-730, 1973. 46, 48, 49

[49] Rodi, W.: *Numerische Berechnung turbulenter Strömungen in Forschung und Praxis*. Unterlagen zum Kurzlehrgang. Institut für Hydromechanik, Universität Karlsruhe, 1996. 11

[50] Sanz, W., et al.: *Numerical and Experimental Investigation of the Flow Downstream of a Linear Turbine Cascade*. ASME Turbo Expo, Stockholm, Sweden, June 2-5, 1998. 49, 64

[51] Schäfer, M.: *Numerische Berechnungsverfahren im Maschinenbau*. Skriptum zur Vorlesung. Technische Hochschule Darmstadt, 1996. 32, 32, 33

[52] Sharma, O.P., Butler, T.L., Joslyn, H.D., Dring, R.P.: *Three-Dimensional Unsteady Flow in an Axial Turbine*. Jet Propulsion, Vol. 1, No. 1, pp. 29-38, 1985. 80

[53] Shih, T.-H., Liou, W.W., Shabbir, A., Zhu, J.: *A New $k-\epsilon$ Eddy-Viscosity Model for High Reynolds Number Turbulent Flows- Model Development and Validation*. Computers Fluids, 24(3): pp. 227-238, 1995. 17, 17

[54] Smith, L.H.: *Wake Dissipation in Turbomachines*. ASME Journal of Basic Engineering, Vol. 88D, pp. 688-690, 1966. 78

[55] Spalart, P.R., Allmaras, S.R.: *A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows*. 30th Aerospace Sciences Meeting & Exhibit, Reno, NV, January 6-9, 1992. 12

[56] Spurk, J.H.: *Strömungslehre, Einführung in die Theorie der Strömungen*. 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin u.a., 1989. 7, 16, 23

[57] Tennekes, H., Lumley, J.L.: *A First Course in Turbulence*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1972. 47

[58] Volmar, T.W., Brouillet, B., Gallus, H.E.: *Time Accurate 3D Navier-Stokes Analysis of a $1\frac{1}{2}$ Stage Axial Flow Turbine*. AIAA Paper, No. 98-3247, 1998. 80

[59] Von Kármán Institut: *Introduction to the Modelling of Turbulence*. Lecture Series 1997-03, Belgium, 1997. 9

[60] Walraevens, R.E.: *Stator-Rotor-Stator Interaction in an Axial Flow Turbine and its Influence on Loss Mechanisms*. AGARD Conference Proceedings, 571, 1995. 77, 80

[61] Walraevens, R.E., Gallus, H.E., Jung, A.R., Mayer, J.F., Stetter, H.: *Experimental And Computational Study of the Unsteady Flow in a 1.5 Stage Axial Turbine with Emphasis on the Secondary Flow in the Second Stator*. International Gas Turbine & Aeroengine Congress & Exhibition, Stockholm, Schweden, June 2-5, 1998. 80, 120

[62] Wilcox, D.C.: *Turbulence Modeling for CFD*. DCW Industries, La Cañada, 1994. 12, 25

[63] Wolfshtein, M.: *The Velocity and Temperature Distribution in One-Dimensional Flow with Turbulence Augmentation and Pressure Gradient* . International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 12, pp. 301-318, 1969. 24

[64] Yakhot, V., Orszag, S.A.: *Renormalization Group Analysis of Turbulence: I. Basic Theory*. J. Scientific Computing, 1: pp. 3-51, 1986. 19

[65] Zaccaria, M.A., Lakshminarayana, B.: *Unsteady Flow Field Due to Nozzle Wake Interaction With the Rotor in an Axial Flow Turbine: Part II - Rotor Exit Flow Fiel*. Journal of Turbomachinery, 119, pp. 214-224, 1997. 46, 47, 48

[66] Zeschky, J., Gallus, H.E.: *Effects of Stator Wakes and Spanwise Nonuniform Inlet Conditions on the Rotor Flow of an Axial Turbine Stage*. Journal of Turbomachinery, 115, pp. 128-136, 1995.