

Modellierung und numerische Simulation der Nachlaufstruktur von Turbomaschinen am Beispiel einer Axialturbinenstufe

Vom Fachbereich Maschinenbau
an der Technischen Universität Darmstadt
zur
Erlangung des Grades eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte

D i s s e r t a t i o n

vorgelegt von

Dipl.-Ing. Bruno Kistner

aus Lohr am Main

Berichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. B. Stoffel
Mitberichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. J. Janicka
Tag der Einreichung:	30. August 1999
Tag der mündlichen Prüfung:	11. Januar 2000

Darmstadt 1999

D 17

Ich versichere an Eides Statt, daß ich die vorliegende Arbeit, mit Ausnahme der genannten Hilfen, selbständig angefertigt habe.

Bruno Kistner

Darmstadt, 27.08.1999

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als Doktorand am Fachgebiet Turbomaschinen und Fluidantriebstechnik der Technischen Universität Darmstadt im Rahmen des von der Deutschen Forschungsgemeinschaft unterstützten Graduiertenkollegs „Modellierung und numerische Beschreibung technischer Strömungen“.

An erster Stelle gilt mein Dank Herrn Prof. Dr.-Ing. B. Stoffel, dem Leiter des Fachgebiets Turbomaschinen und Fluidantriebstechnik, für die Anregung zu dieser Arbeit und für die wertvollen Ratschläge und Fachgespräche, sowie seine stete Unterstützung bei ihrer Durchführung.

Herrn Prof. Dr.-Ing. J. Janicka, dem Sprecher des Graduiertenkollegs und Leiter des Fachgebietes Energie- und Kraftwerkstechnik, der den Fortgang der Arbeit jederzeit mit Interesse verfolgt hat, danke ich für die kritische Durchsicht der Arbeit und die Übernahme des Koreferates.

Schließlich gilt mein Dank meinem Studienarbeiter Herrn Jens Thurso und Diplomarbeiter Herrn Stephan Meschkat für ihren Einsatz während ihrer Arbeit. Auch darf ich mich bei beiden für die weiteren Fachgespräche während ihrer Tätigkeit als wissenschaftliche Mitarbeiter am gleichen Fachgebiet bedanken. Mein Dank gilt ebenso allen weiteren Kollegen, die auch durch das soziale Umfeld zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Beschreibung turbulenter Strömungen	4
2.1	Erhaltungsgleichungen	6
2.2	Statistische Turbulenzmodelle	7
2.2.1	Wirbelviskositätsmodelle	10
2.2.1.1	Eingleichungsmodell nach Spalart und Allmaras	12
2.2.1.2	Standard $k - \varepsilon$ Modell	15
2.2.1.3	Realizable $k - \varepsilon$ Modell	17
2.2.1.4	RNG $k - \varepsilon$ Modell	19
2.2.2	Reynoldsspannungsmodelle	20
2.3	Wandbehandlung	22
2.3.1	Standard-Wandfunktion	23
2.3.2	2-Schichten Modell	24
2.3.3	Low-Re Erweiterung	25
3	Numerisches Lösungsverfahren	27
3.1	Diskretisierungsverfahren	27
3.1.1	Approximation der Oberflächenintegrale	29
3.1.2	Approximation der Volumenintegrale	31
3.1.3	Zeitdiskretisierung	31
3.2	Lösungsverfahren	33
3.2.1	Druckkorrektur	34
3.2.2	Unterrelaxation	36
3.2.3	Multigrid	36
4	Netzgenerierung	38
4.1	Netzstruktur	39
4.2	Netzqualität	40

4.3	Lage des Ein- und Ausströmrandes	42
4.4	Interface	44
5	Stationäre Nachlaufströmung	46
5.1	Stand des Wissens	46
5.2	Experimenteller Aufbau	49
5.3	Numerische Modellbildung	52
5.3.1	Netzgenerierung	54
5.3.2	Netzunabhängigkeit	54
5.3.3	Turbulenzmodelle	57
5.4	Ergebnisse	58
5.4.1	Modell A	59
5.4.2	Modell B	68
5.4.3	Schlußfolgerungen	75
6	Instationäre Nachlaufströmung	77
6.1	Stand des Wissens	77
6.2	Experimenteller Aufbau	80
6.3	Numerische Modellbildung	82
6.3.1	Teilungsanpassung	83
6.3.2	Netzgenerierung	86
6.3.3	Netzunabhängigkeit	87
6.3.4	Turbulenzmodelle	87
6.4	Ergebnisse	88
6.4.1	Stationäre Simulation	88
6.4.2	Instationäre Simulation	90
6.4.3	Schlußfolgerungen	99
7	Einflüsse auf instationäre Nachlaufströmungen	101
7.1	Experimenteller Aufbau	102
7.2	Numerische Modellbildung	103
7.2.1	Netzgenerierung	104
7.2.2	Netzunabhängigkeit	104
7.2.3	Turbulenzmodelle	105
7.3	Parameterstudie	105
8	Zusammenfassung	119
	Literaturverzeichnis	122

Lateinische Buchstaben

A	Modellgröße
A	Konstante
a	Hilfsgröße
a	Konstante
a	Koeffizient
a	Schallgeschwindigkeit
B	Konstante im logarithmischen Wandgesetz
B	Konstante
B	Breite
C	Konstante
C	Sehnenlänge
C_{ax}	axiale Sehnenlänge
C_p	Druckbeiwert
c	Absolutgeschwindigkeit
c_H	mittlere Förderstromgeschwindigkeit
D_h	hydraulischer Durchmesser
d	Wandabstand
E	Osten/East
F	Funktion
$f, f_1, f_2, f_{v1}, f_{v2}$	Modellfunktion
f	Kraftgröße
G	Produktionsterm
g	Modellgröße
H	Höhe
H	Totalenthalpie
KL	Kato/Launders
KV	Kontrollvolumen

k	turbulente kinetische Energie
k	Iterations-schritt
L	Integrallängenmaß
L	allgemeines Längenmaß
l	Länge
l_m	Mischungsweglänge
Ma	Machzahl
M	Impulsverlust
N	Norden
N	Anzahl
n	Drehzahl
n_i	Normalenvektor
n_e	Nordosten
n_w	Nordwesten
P	mittlerer Druck
P	Punkt
P	Periodendauer
P	mittlerer statischer Druck
P_k	Produktionsrate der turbulenten kinetischen Energie
P_{ij}	Produktionsterm in der Transportgleichung des Reynolds-Spannungs-Tensors
p	Druck
q	Wärmestrom
R	Zusätzlicher Quellterm in der ε -Gleichung des RNG-Modells
$RANS$	Reynolds-Averaged-Navier-Stokes-equations
Re	Reynoldszahl
Re_t	turbulente Reynoldszahl
RNG	Renormalization-Group-Turbulenzmodell
RSM	Reynoldsspannungs-Turbulenzmodell

r	Radius
r	Modellgröße
S	Quellterm
S_j	Kontrollvolumenseite j
S_{ij}	Deformationsgeschwindigkeitstensor
SA	Spalart/Allmaras
s	Strecke
s_e	Südosten
s_w	Südwesten
T	Teilung
T_E	turbulentes Zeitmaß
T_u	Turbulenzgrad
t	Zeitmaß
U	Umfangsposition
U	mittlere Geschwindigkeit in x-Richtung
U	mittlere axiale Geschwindigkeit
U_S	Schergeschwindigkeit
u	Geschwindigkeit
u	Geschwindigkeit in x-Richtung
u	Umfangsgeschwindigkeit
u_τ	Wandschubspannungsgeschwindigkeit
$\overline{u_i u_j}$	Reynoldsspannungstensor
V	Volumen
V	mittlere Geschwindigkeit in y-Richtung
v	Geschwindigkeit in y-Richtung
W	Westen
w	Relativgeschwindigkeit
X	x-Position

x	Koordinate
$Y_{\tilde{\nu}_t}$	Dissipation von $\tilde{\nu}_t$
y	Koordinate
y^+	dimensionsloser Wandabstand
$2L$	Zwei-Schichten-Formulierung

Griechische Buchstaben

α	Winkel der Absolutgeschwindigkeit zur Umfangsgeschwindigkeit
α	Modellkonstante
Γ	Diffusionskoeffizient
δ	Winkel
δ_{ij}	Kronecker-Delta
ε	Dissipationsrate
ε_{ij}	Dissipationsterm in der Transportgleichung des Reynolds-Spannungs-Tensors
η	Modellgröße
Θ	Impulsverlustdicke
κ	Kármánsche Konstante
μ	molekulare oder dynamische Viskosität
ν	kinematische Viskosität
ν_t	Wirbelviskosität
ξ	Größenverhältnis
ρ	Dichte
σ	Modellkonstante
τ	(Schub-) Spannung
τ	Zeitmaß
Φ	Strömungsgröße
Φ	Potential
ϕ_{ij}	Druck-Scher-Korrelationsterm in der Transportgleichung des Re-Spgs-Tensors
χ	Wirbelviskositätsverhältnis
Ω_{ij}	Rotationstensor
ω	Frequenz
$\bar{\omega}$	reduzierte Frequenz

Indizes

<i>ax</i>	axial
<i>E</i>	Osten
<i>e</i>	Osten
<i>H</i>	hydraulisch
<i>h</i>	hydraulisch
<i>i, j, k, l</i>	Zählindex
<i>KL</i>	Kato/Launder
<i>k</i>	Kolmogorov
<i>max</i>	maximal
<i>min</i>	minimal
<i>n</i>	Norden
<i>n</i>	Zählindex
<i>nb</i>	Nachbarpunkt
<i>P</i>	Punkt
<i>ref</i>	Referenzstelle
<i>s</i>	Süden
<i>t</i>	turbulent
<i>w</i>	Westen
1, 2, 3, 4	Bezeichnung für verschiedene Stellen
<i>o</i>	ungestörte Strömung

Symbole

–	gemittelte Größe
'	Schwankungsgröße
'	Korrekturgröße
~	modifizierte Größe
*	vorläufige Größe
Δ	Differenz

Kennzahlen

$$C = v \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad \text{Courantzahl}$$

$$Ma = \frac{u}{a} \quad \text{Machzahl}$$

$$Re_C = \frac{\rho C U_o}{\mu} \quad \text{Reynoldszahl mit der Profilschneidlänge gebildet}$$

1 Einleitung

Bei der Auslegung und Konstruktion moderner Verdichter und Turbinen ist ein deutlicher Trend hin zur Gewichtsoptimierung und Größenreduktion erkennbar. Die wesentlichen Ziele bei der heutigen Turbinenentwicklung liegen nicht in der Effizienzsteigerung, sondern in der Reduzierung der Schaufelanzahl und der Erhöhung der Belastung bei gleicher Effizienz. Besonderes Interesse gilt in diesem Zusammenhang bei Flugtriebwerken der Niederdruckturbinen. Dieser Triebwerksteil macht ca. 33 % des Gesamtgewichtes aus und verursacht somit hohe Kosten. Betrachtet man hierbei den Wirkungsgrad, der bei modernen Niederdruckturbinen deutlich über 90 % liegt, so beeinflusst ein Prozentpunkt des polytropen Wirkungsgrades nur 0,5 % des Treibstoffverbrauches.

Da in der bisherigen Auslegung der Turbinenstufen lediglich stationäre Entwurfswerkzeuge zur Anwendung kamen, ist es dringend erforderlich, in Zukunft auch die instationären Effekte zu berücksichtigen. Nur auf diese Weise wird es möglich sein, den bereits sehr guten Wirkungsgrad zu verbessern und eine Gewichtsreduzierung durch eine geringere Schaufelanzahl zu realisieren. Hierbei findet das Tool CFD (Computational Fluid Dynamics) immer größere Bedeutung. Es bietet die Möglichkeit, in Verbindung mit experimentellen Untersuchungen die physikalischen Effekte in einer Turbomaschine zu analysieren und zu verstehen. Auf diese Weise wird es möglich, instationäre Strömungsphänomene bereits in der Entwurfsphase zu berücksichtigen und die Maschine optimaler in Gewicht, Wirkungsgrad und Schaufelbelastung auszulegen, als dies mit stationären Berechnungsmethoden durchführbar ist.

Bei der Auslegung einer Turbomaschine muß eine Vielzahl von Einflußgrößen berücksichtigt werden. Ein wichtiges Element hierbei ist die instationäre Wechselwirkung zwischen stehenden und rotierenden Gitterreihen. Diese setzt sich aus der potentialtheoretischen Strömung und dem Nachlauf, der bei der Umströmung einer Schaufel entsteht, zusammen. Wesentlich beeinflusst von der Instationarität werden die Schaufelbelastung, die Stallgrenze, der Wärmeübergang, der Stufenwirkungsgrad und die Akustik.

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein System aus Stator und stromab liegendem Rotor einer Axialturbinen betrachtet. Es wird die Nachlaufstruktur detailliert untersucht. Diese setzt sich zum einen aus dem Statornachlauf und zum anderen aus dem Rotornachlauf zusammen. Entschei-

dend hierbei ist es, den Einfluß des Rotors auf den Statornachlauf richtig zu beschreiben, da das rotierende Gitter den kontinuierlichen Nachlauf des Stators zerhackt. Wenn diese Interaktion und der Rotornachlauf richtig beschrieben werden, ergibt sich eine Nachlaufstruktur, die dann in einer realen Maschine auf einen stromab liegenden Stator trifft und mit diesem in Interaktion tritt.

Es wird deutlich, daß die Nachlaufstruktur nicht isoliert ist im Gesamtsystem Turbine. Sie wirkt sich unmittelbar auf andere Strömungsphänomene aus. In diesem Zusammenhang ist besonders die periodische Interaktion einer Profilhenschicht mit einem Nachlauf zu nennen. Betrachtet man die Nachlaufstruktur in Zusammenhang mit dessen Grenzschichtinteraktion, ergibt sich der sogenannte *Clocking Effekt*. Dieser wurde experimentell [24] festgestellt und sagt aus, daß der Wirkungsgrad von 1,5 Axialturbinenstufen von der relativen Umfangsposition der beiden Statoren zueinander in der Größenordnung von einem Prozentpunkt beeinflußt werden kann. Hierbei ist es notwendig, daß die beiden Statoren gleiche Teilung aufweisen.

Dieser *Clocking Effekt* wird sowohl numerisch als auch experimentell an dem Fachgebiet Turbomaschinen und Fluidantriebstechnik der TU Darmstadt untersucht. In diesen Zusammenhang ist diese Arbeit einzuordnen. Das Ziel dieser Arbeit war es, in einem ersten Schritt die Nachlaufstruktur numerisch zu untersuchen, wie diese sich für den zweiten Stator darstellt, bevor in einem zweiten Schritt am Fachgebiet die Interaktion des Nachlaufes mit der Grenzschicht des zweiten Stators betrachtet wird. Im Rahmen der numerischen Beschreibung der Nachlaufstruktur wurde auch innerhalb dieser Untersuchungen auf die Einflußparameter Reynoldszahl und Turbulenzgrad eingegangen, sowie auf die Auswirkung einer Betriebspunktänderung. Hierin kann ein wesentlicher Beitrag gesehen werden, die Physik einer Turbinenströmung besser verstehen zu lernen und Erkenntnisse für den Entwurf einer Turbomaschine zu gewinnen.

Um das genannte Ziel zu erreichen, stand für die numerische Untersuchung das kommerzielle CFD-Programmpaket FLUENT [15] zur Verfügung. Dieses stellt ein geeignetes Werkzeug dar. Um damit die Nachlaufstruktur einer Axialturbinenstufe und die Einflußparameter darauf berechnen zu können, mußte in einem ersten Schritt die Modellierung dieses Strömungsproblems gelöst werden. Da die CFD sich erst in den letzten Jahren immer mehr zu einem ernstzunehmenden Entwicklungswerkzeug im Turbomaschinenbereich entwickelt, konnte nur sehr bedingt auf bereits Bekanntes bei der Modellierung zurückgegriffen werden. Es stellten sich die Fragen:

- nach einer geeigneten Turbulenzmodellierung
- nach einer geeigneten Netzstruktur
- nach einer geeigneten Begrenzung des Strömungsgebietes

Auf der Seite der Turbulenzmodellierung war zu klären, ob ein Ein- oder Zweigleichungsmodell nach dem Wirbelviskositätsprinzip oder sogar ein lineares Reynoldspannungsmodell in

Verbindung mit der Standard-Wandfunktion bzw. einer Zweischichtenformulierung gewählt werden muß. Um diese und andere Fragestellungen zu klären, wurde das Untersuchungsobjekt Turbinenstufe schrittweise angegangen.

In dieser Arbeit werden drei Schritte unterschieden, um das Untersuchungsziel der Einflußfaktoren auf den Nachlauf durch eine Stufe einer Axialturbine zu erreichen:

1. Stationäre Berechnung der Nachlaufströmung eines Einzelprofiles
2. Stationäre Berechnung der Nachlaufströmung eines Schaufelgitters
3. Instationäre Berechnung der Nachlaufentwicklung des Statornachlaufes in der Rotorpassage
4. Simulation von Einflußgrößen auf die Nachlaufstruktur einer Stufe einer Axialturbine

Bei dieser systematischen Vorgehensweise vom Einfachen zum Schwierigen wurde darauf geachtet, für die Teilprobleme experimentelle Daten zur Verfügung zu haben, um eine Aussage über die Qualität der Simulationsdaten treffen zu können. Hierbei wurde auf eine Datenbank der ERCOFTAC (European Research Community On Flow Turbulence And Combustion) und auf experimentelle Ergebnisse, die an der RWTH Aachen gewonnen wurden, zurückgegriffen. Der Zwischenschritt vom Einzelprofil auf das Schaufelgitter ist in Kapitel 6 dokumentiert, das sich vorwiegend mit einem instationärem Strömungsproblem beschäftigt. Er ist aus zwei Gründen dort zu finden. Zum einen können keine großen Erkenntnisse in Bezug auf die Turbulenzmodelle im Vergleich zum Einzelprofil erwartet werden, und zum anderen liegen dem 2. und 3. Schritt die Daten eines Experimentes zugrunde. In diesem wurden stationäre und instationäre Daten aufgenommen.

Für die Untersuchung der Einflußparameter, dem 4. Schritt, wird auf die geometrischen Daten zurückgegriffen, die für den im Aufbau befindlichen Versuchsstand am Fachgebiet Turbomaschinen und Fluidantriebstechnik verwendet werden. Da jedoch von diesem Versuchsstand noch keine experimentellen Daten vorliegen, liefert die numerische Untersuchung Daten, die zu einem späteren Zeitpunkt durch das Experiment validiert werden können. Es wird dieser Vorgehensweise unterstellt, daß die „Kalibrierung“ der Modellierung an den zuvor untersuchten Teilproblemen hinreichend ist, den Trend der Einflüsse Reynoldszahl und Turbulenzgrad richtig vorherzusagen.

2 Beschreibung turbulenter Strömungen

In diesem Kapitel wird ein Überblick der Möglichkeiten gegeben, turbulente Strömungen zu beschreiben und zu berechnen. Hierbei werden die Rechenmodelle näher vorgestellt, die im Rahmen dieser Arbeit verwendet wurden.

Mit dem heutigen Stand des Wissens ist es möglich, die meisten Strömungsphänomene technischer Anwendungen mit Hilfe der Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie zu beschreiben. Diese können jedoch nur für wenige technische Problemstellungen analytisch gelöst werden. Für alle weiteren Strömungsprobleme müssen die beschreibenden Erhaltungsgleichungen numerisch behandelt werden.

Um das ganze Verhalten einer Strömung vollständig beschreiben zu können, müssen auch die kleinsten Schwankungen einer Strömung, die bei technisch relevanten Anwendungen meist turbulent und damit immer stochastisch und instationär sind, durch die Diskretisierung in Raum und Zeit erfaßt werden:

- Die räumliche Schrittweite muß kleiner sein als die kleinsten turbulenten Wirbel und
- die zeitliche Schrittweite muß kleiner sein als die Dauer der kleinsten Schwankungen.

Die kleinsten Turbulenzelemente sind durch das Kolmogorov-Längenmaß l_k gegeben. Die größten dagegen werden durch das Integrallängenmaß L definiert. Das Verhältnis dieser beiden Längenmaße wird durch die turbulente Reynoldszahl wiedergegeben [16]:

$$\frac{L}{l_k} = 3 \cdot Re_t^{\frac{3}{4}} \quad (2.1)$$

Somit ergibt sich eine Knotenanzahl für die räumliche Diskretisierung, die proportional zu $27 \cdot Re_t^{\frac{9}{4}}$ ist.

Neben der räumlichen Diskretisierung muß sich die zeitliche am Kolmogorovschen Mikro-Zeitmaß t_k orientieren. Die turbulente Reynoldszahl kann auch hier eine Beziehung zu einem charakteristischen integralen Zeitmaß t herstellen [16]:

$$\frac{t}{t_k} = 0,3 \cdot Re_t^{\frac{1}{2}} \quad (2.2)$$

Da die turbulenten Größen eine sehr feine Diskretisierung in Ort und Zeit erfordern, ist es bei der heutigen Rechenleistung i.d.R. nicht möglich, die Bewegungsgleichungen für Strömungsprobleme technischer Anwendung direkt zu lösen. Neben dieser direkten numerischen Simulation (DNS) gibt es das Gebiet der Turbulenzmodellierung. Dieses ermöglicht mithilfe von Annahmen eine gröbere Problemdiskretisierung und ermöglicht somit die Berechnung technischer Strömungsprobleme mit den heutigen Ressourcen an Rechnerhardware.

Innerhalb der Modellierung turbulenter Strömungen müssen verschiedene Ansätze unterschieden werden. Die bekanntesten hierbei sind:

- Statistische Turbulenzmodelle
- **Large Eddy Simulation (LES)**
- Pdf-Verfahren

Werden die Erhaltungsgleichungen, die eine Strömung beschreiben, zeitlich gemittelt, ergibt sich ein in der Zeit mittleres Gleichungssystem. Dieses ist nicht geschlossen. Der Informationsverlust, der durch die zeitliche Mittelung hervorgerufen wird, äußert sich im Auftreten der unbekanntenen Zweifachkorrelation turbulenter Schwankungsgrößen $\overline{u_i u_j}$. Diese Unbekannte wird als Reynoldsspannungstensor bezeichnet. Je nach dem, wie dieser Tensor berechnet wird lassen sich die **statistischen Turbulenzmodelle** klassifizieren:

- Wirbelviskositätsmodelle
- Reynoldsspannungsmodelle

Diese Art der Berechnung strömungstechnischer Problemstellungen ist zur Zeit am weitesten verbreitet, was sich durch die benötigte Hardwareleistung begründen läßt. Statistische Turbulenzmodelle erfordern im Bereich der Turbulenzmodelle den geringsten Hardwareeinsatz und laufen meist numerisch stabil. In der Hierarchie der Turbulenzmodellierung sind die statistischen Modelle jedoch klar unterhalb der Grobstruktur-Simulation einzuordnen.

Eine andere Systematik liegt der **Large Eddy Simulation** zugrunde. Die Navier-Stokes-Gleichungen werden in einem ersten Schritt tiefpaßgefiltert. Somit ergibt sich ein Gleichungssystem mit weniger Freiheitsgraden, was eine gröbere Diskretisierung als bei der DNS zuläßt. Modelliert werden müssen nun die Unbekannten, die bei der Filterung herausgefallen sind.

Hierbei wird überwiegend ein sehr einfaches statistisches Turbulenzmodell verwendet. Daß diese Art der Modellierung erfolgversprechend ist, wird mit dem Argument begründet, daß die turbulente Feinstruktur weniger anisotrop und von den Randbedingungen des Problems unabhängiger sei als die turbulente Grobstruktur [16]. Auf eben dieser Annahme der Isotropie der kleinen Skalen beruhen die statistischen Modelle. Der Vorteil der LES durch eine bessere Beschreibung der Physik wird durch eine höhere Hardwareanforderung gegenüber den statistischen Modellen überschattet. Hierin ist der wesentliche Grund zu sehen, daß die LES noch nicht im industriellen Einsatz ist. Dies wird sich aber mit der Leistungssteigerung der Hardware ändern.

Eine weitere Klasse der Turbulenzmodelle stellen die **pdf-Verfahren** dar. Diese wurden von POPE [46] und DOPAZO et al. [10] entwickelt. Pdf-Verfahren beruhen auf der Lösung der Transportgleichung der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (**P**robability **D**ensity **F**unction - PDF). Der große Vorteil einer pdf-Methode ist, daß konvektive und Quellterme im Gleichungssystem geschlossen auftreten. Diese Tatsache macht die Implementierung weiterer Gleichungen für unbekannte Skalare einfach und spiegelt sich in dem Sachverhalt wieder, daß pdf-Verfahren häufig eine Anwendung bei reagierenden Strömungen finden. Es werden jedoch Modelle benötigt für die Terme, die den molekularen Transport wiedergeben [32].

2.1 Erhaltungsgleichungen

Die Erhaltungsgleichungen für die Masse (2.3), den Impuls (2.4) und die Energie (2.5) zur Beschreibung von Strömungsvorgängen können in der Eulerschen Beschreibungsweise dargestellt werden:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + S_i \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \rho H}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i H}{\partial x_j} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \tau_{ij} u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho u_i S_i \quad (2.5)$$

wobei die Dichte des Fluids mit ρ , die Geschwindigkeit in i -Richtung mit u_i , mit t die Zeit und mit x_i die Raumkoordinate in i -Richtung, der statische Druck mit p , der Quellterm der Volumenkräfte in i -Richtung mit S_i , die Totalenthalpie mit H und der Wärmestromvektor mit q_i bezeichnet wird.

Für Newtonische Fluide lautet der Spannungstensor τ_{ij} :

$$\tau_{ij} = \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{ij} \quad (2.6)$$

mit der molekularen Viskosität μ .

Für inkompressible Fluide lassen sich diese Erhaltungsgleichungen vereinfachen. Die Annahme der Inkompressibilität ist bei Gasen gerechtfertigt, solange die Strömungsgeschwindigkeit klein ist im Vergleich zur Schallgeschwindigkeit, d.h. $Ma \ll 1$. Weiterhin kann das obige Gleichungssystem durch das Weglassen der Energieerhaltung (2.5) vereinfacht werden, wenn die Temperatur nicht als Variable in einem Strömungsproblem auftritt. Es ergibt sich ein vereinfachtes System partieller Differentialgleichungen unter der Annahme konstanter Dichte ρ und konstanter Viskosität μ :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{\rho} S_i \quad (2.8)$$

Das Gleichungssystem (2.7) und (2.8) beschreibt alle inkompressiblen Strömungen vollständig, bei denen die Stoffeigenschaften von der Temperatur unabhängig sind. Es können sowohl laminare als auch turbulente Strömungen sein. Der Übergang von der einen Strömungsform zur anderen wird durch eine kritische Reynoldszahl Re_{krit} gekennzeichnet. Die Reynoldszahl ist definiert als

$$Re = \frac{u \cdot L}{\nu} \quad (2.9)$$

mit u als charakteristischer Geschwindigkeit, L als charakteristischer Länge und ν als kinematischer Viskosität. Diese dimensionslose Kennzahl beschreibt das Verhältnis von Trägheits- zu Zähigkeitskräften. Unterhalb einer kritischen Reynoldszahl Re_{krit} , die z.B. für eine Rohrströmung bei 2.300 liegt [56], dominieren die viskosen Kräfte, und die Strömung wird als laminar bezeichnet. Nimmt die Reynoldszahl größere Werte an und wird der Einfluß der Trägheitskräfte stärker, so bezeichnet man den Charakter der Strömung als turbulent. Turbulente Strömungen sind immer dreidimensional, instationär, dissipativ, rotationsbehaftet und weisen stochastisches Verhalten auf [26].

2.2 Statistische Turbulenzmodelle

Im Rahmen dieser Arbeit wurden statistische Turbulenzmodelle verwendet. Aus diesem Grund soll im folgenden näher auf diese Klasse der Turbulenzmodelle eingegangen werden. Der

Grundgedanke beruht auf der Tatsache, daß als Ergebnis einer Strömungsberechnung meist nur der zeitliche Mittelwert der gesuchten Größe von Interesse ist. Aus diesem Grunde werden alle Größen aufgeteilt in einen zeitlichen Mittelwert und die dazugehörige Schwankungsgröße.

$$\Phi = \bar{\Phi} + \Phi' \quad (2.10)$$

Diese Aufteilung der Strömungsgrößen, in Gleichung (2.10) für eine beliebige Größe Φ gezeigt, wurde bereits 1895 von REYNOLDS vorgeschlagen. Dementsprechend spricht man auch von der Reynoldsschen Mittelung. Der Aufspaltung des Momentanwertes Φ in Mittelwert $\bar{\Phi}$ und Schwankungswert Φ' liegt das Postulat von REYNOLDS zugrunde, daß statistische Mittelwerte existieren. Turbulente Strömungen weisen häufig stochastisch stationären Charakter auf, wodurch die statistische Mittelung in der Zeit oder in den homogenen Richtungen durchgeführt werden kann[16].

$$\bar{\Phi} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\tau-T/2}^{\tau+T/2} \Phi(\tau) d\tau \quad (2.11)$$

Trifft obige Voraussetzung nicht zu, dann ist $\bar{\Phi}$ aus Gleichung (2.10) als Ensemble- oder Scharmittelung zu definieren. Dies entspricht einer Mittelung über zahlreiche Wiederholungen desselben Experiments unter gleichen äußeren Bedingungen [16].

Werden die Strömungsgrößen aus den Gleichungen (2.7) und (2.8) der Reynoldsschen Mitteilungen unterworfen, kann das Gleichungssystem überführt werden in die Form

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= 0 & (2.12) \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) &= \frac{\partial}{\rho \partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \left(\frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{ij} \right) \right] - \frac{\partial p}{\rho \partial x_i} \\ &+ \frac{\partial}{\rho \partial x_j} (-\rho \overline{u'_i u'_j}) & (2.13) \end{aligned}$$

Hierbei handelt es sich nun um ein zeitlich gemitteltes System partieller Differentialgleichungen. Zur übersichtlicheren Darstellung wurden die Mittelungsstriche in (2.12) und (2.13) weggelassen. Dies wird auch im folgenden so gehandhabt werden.

Die Struktur des Gleichungssystems ist identisch mit dem der Momentanwerte. Es tritt lediglich die zusätzliche Unbekannte $\overline{u'_i u'_j}$ auf. Diese Korrelation der Schwankungswerte wird als Reynoldsspannungstensor bezeichnet. In diesem liegt die Information, die durch die zeitliche Mittelung den Momentanwerten entzogen wurde. Das Gleichungssystem (2.12) und (2.13) ist

nicht geschlossen, da der Reynoldsspannungstensor bestimmt werden muß. Dies wird allgemein als Schließungsproblematik der Turbulenz bezeichnet. Um dieses Problem zu lösen, gibt es verschiedene Ansätze:

- Modellierung des unbekanntens Tensors $\overline{u'_i u'_j}$
- Bestimmung einer Erhaltungsgleichung für den Reynoldsspannungstensor

Wird der Reynoldsspannungstensor direkt unter Verwendung des Wirbelviskositätsprinzips nach BOUSSINESQ [4] modelliert, spricht man von **Wirbelviskositätsmodellen**, auf die noch näher eingegangen wird. Es ist jedoch möglich, aus den Navier-Stokes Gleichungen eine exakte Erhaltungsgleichung für die wiederum unbekanntes Korrelation $\overline{u'_i u'_j}$ herzuleiten. In dieser treten dann unbekanntes Terme höherer Ordnung auf, für die wiederum exakte Erhaltungsgleichungen aufgestellt werden können. Diese Vorgehensweise läßt sich beliebig fortsetzen und führt zu unbekanntes Termen immer höherer Ordnung. Die sich so ergebende Hierarchie von partiellen Differentialgleichungen muß an einer Stelle abgebrochen werden. Von **Reynoldsspannungsmodellen** spricht man, wenn die unbekanntes Terme ab zweiter Ordnung modelliert werden. Die Hierarchie der statistischen Modelle läßt sich nach JONES [59] in folgender Übersicht zusammenfassen:

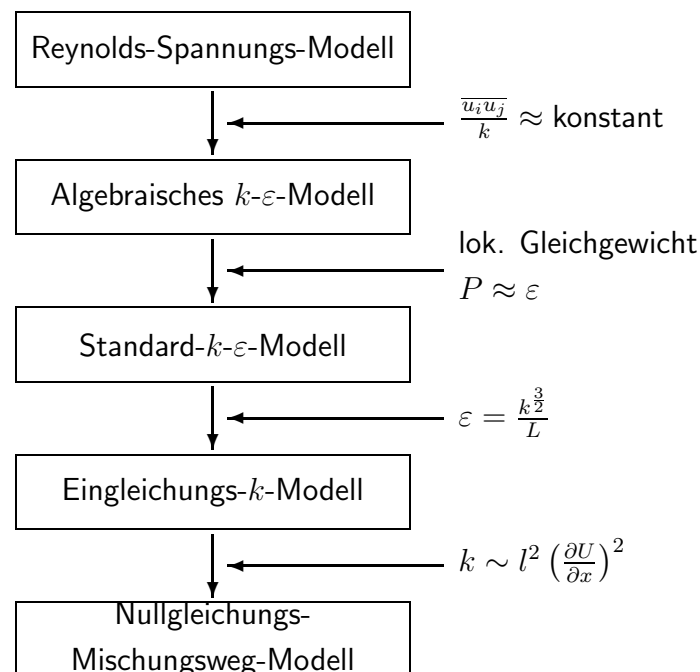


Abb. 2.1: Hierarchie der Modellierungsebenen nach JONES

2.2.1 Wirbelviskositätsmodelle

Wirbelviskositätsmodelle lösen das Schließungsproblem der Turbulenz durch eine direkte Modellierung des Reynoldsspannungstensors. Sie basieren hierbei auf der Annahme der Analogie zwischen den viskosen und den turbulenten Spannungen. Diese findet ihren Ausdruck in der Formulierung, die bereits 1877 von BOUSSINESQ aufgestellt wurde. Er geht davon aus, daß die Reynoldsspannungen sich analog zu den viskosen Spannungen proportional zu der Scher-rate bestimmen lassen. Hierfür wird eine turbulente Viskosität μ_t eingeführt. Diese ist jedoch im Gegensatz zu ihrem viskosen Analogon keine Stoffgröße, sondern ist eine im Strömungsfeld Veränderliche. Der Wirbelviskositäts- oder auch Gradientenflußansatz kann allgemein formuliert werden.

$$-\overline{\rho u_i' u_j'} = \mu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (2.14)$$

Die turbulente kinetische Energie wird mit k bezeichnet und ist nach Gleichung (2.15) definiert.

$$k = \frac{1}{2} \overline{(u_i' u_i')} \quad (2.15)$$

Unter Verwendung des Gradientenflußansatzes zur Modellierung des Reynoldsspannungstensors ergibt sich die turbulente Viskosität als weitere Unbekannte. Diese wird auf der Annahme der Gleichgewichtsturbulenz bestimmt, d.h. sowohl ein charakteristisches Zeitmaß als auch ein charakteristisches Längenmaß ist ausreichend zur Beschreibung der turbulenten Detailstruktur. Es kommt hinzu, daß die Isotropie der kleinen Skalen vorausgesetzt wird.

Eine Einteilung der Wirbelviskositätsmodelle kann vorgenommen werden nach der Anzahl der zu den gemittelten Navier-Stokes Gleichungen hinzukommenden, partiellen Differentialgleichungen:

- Nullgleichungsmodell
- Eingleichungsmodell
- Zweigleichungsmodell

Neben den Wirbelviskositätsmodellen, die auf der Annahme von BOUSSINESQ beruhen und damit nur lineare Terme zur Berechnung des Reynoldsspannungstensors berücksichtigen, gibt es auch nichtlineare Wirbelviskositätsmodelle. Wie der Name schon verdeutlicht, verwenden diese Turbulenzmodelle auch Terme höherer Ordnung. Da derartige Modelle in dieser Arbeit nicht für Berechnungen benutzt wurden, sei an dieser Stelle auf BAUER [1] verwiesen, der in seiner Dissertation einen guten Überblick dieser nichtlinearen Turbulenzmodelle bietet.

Innerhalb der Klasse der Wirbelviskositätsmodelle beschreiben die **Nullgleichungsmodelle** die unterste Hierarchieebene. Die unbekannte Wirbelviskosität μ_t wird durch bekannte Größen der gemittelten Impulsgleichungen bestimmt, ohne daß eine weitere partielle Differentialgleichung gelöst wird. Um diese Berechnungsansätze für die Reynoldsspannung herzuleiten, gibt es verschiedene Entwicklungsmethoden, z.B. Dimensionsanalyse und phänomenologische Betrachtungen [26].

Das bekannteste Nullgleichungsmodell ist sicherlich der Prandtl'sche Mischungswegansatz. Die Größe μ_t wird direkt in Beziehung gesetzt zu denen des Hauptströmungsfeldes.

$$\mu_t = \rho l_m^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \quad (2.16)$$

Es muß nun der Mischungsweg l_m empirisch bestimmt werden. Die Mischungsweghypothese ist wie die Nullgleichungsmodelle im allgemeinen ein sehr einfaches und damit wirtschaftliches Turbulenzmodell. Es müssen keine weiteren Differentialgleichungen gelöst werden. Für einfache Scherströmungen kann diese Modellart sehr erfolgreich eingesetzt werden. Der Nachteil ist aber der notwendige empirische Input, der strömungsabhängig ist. Ebenso fehlt die Berücksichtigung des Transportes von Turbulenz. Daher ist die Hypothese von Prandtl nur gültig, wenn die Turbulenz im lokalen Gleichgewicht ist [49], und nur in Ausnahmefällen in der Praxis einsetzbar.

Erstmals 1945 postulierte PRANDTL ein Turbulenzmodell, in dem die turbulente Viskosität von der turbulenten kinetischen Energie k abhängt. Er schlug eine zusätzliche partielle Differentialgleichung für k vor. Dies charakterisiert alle **Eingleichungsmodelle**, die den Turbulenztransport durch eine zusätzliche Transportgleichung für den lokalen Geschwindigkeitsmaßstab berücksichtigen. Gegenüber den Nullgleichungsmodellen werden die Reynoldsspannungen durch die „Strömungsvergangenheit“ beeinflusst. Bei dieser Klasse von Turbulenzmodellen wird zwar eine zusätzliche Transportgleichung für k gelöst, um das turbulente Zeitmaß T_E nach Gleichung (2.17) zu bestimmen, wird jedoch noch die Mischungslänge l benötigt, die empirisch ermittelt werden muß.

$$T_E = \frac{l}{\sqrt{k}} \quad (2.17)$$

Zweigleichungsmodelle lösen zwei weitere Transportgleichungen. Sie sind innerhalb der Turbulenzmodellierung die niedrigste Hierarchieebene, auf der das turbulente Zeit- und ein charakteristisches Längenmaß im gesamten Strömungsfeld von den Strömungsgrößen berechnet werden. Es wird wie bereits bei den Eingleichungsmodellen eine Transportgleichung für k gelöst, um den Geschwindigkeitsmaßstab \sqrt{k} zu erhalten. Durch das Aufstellen einer wei-

teren partiellen Differentialgleichung ist es möglich, das turbulente Zeit- und Längenmaß zu bestimmen.

Die zweite Gleichung kann z.B. für die charakteristische Frequenz ω der energietragenden, großskaligen Schwankungsbewegungen aufgestellt werden. Am bekanntesten ist aber, die zweite Gleichung für die Dissipationsrate ε der kinetische Turbulenzenergie zu lösen. Es ergibt sich das $k - \varepsilon$ Modell. Die Zeit- und Längenmaße werden berechnet wie folgt:

$$l = \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon} \quad (2.18)$$

$$T_E = \frac{k}{\varepsilon} \quad (2.19)$$

Aus dieser Gesamtheit der Wirbelviskositätsmodelle wurden diejenigen für diese Arbeit ausgewählt, die für die Problemstellung der Profilmachlaufsimulation am erfolgsversprechensten sind:

- Eingleichungsmodell nach Spalart und Allmaras
- Standard $k - \varepsilon$ Modell
- Realizable $k - \varepsilon$ Modell
- RNG $k - \varepsilon$ Modell

Neben den Zweigleichungsmodellen wurde auch ein Eingleichungsmodell ausgesucht, da dieses bereits erfolgreich für Turbomaschinenströmungen angewendet wurde [62].

2.2.1.1 Eingleichungsmodell nach Spalart und Allmaras

Das Eingleichungsmodell von SPALART und ALLMARAS [55], im weiteren wird es auch kurz als SA-Modell bezeichnet, wurde 1992 veröffentlicht. Es ist damit eines der neuesten Eingleichungsmodelle. Da es für aerodynamische Strömungen entwickelt wurde, verspricht es gute Ergebnisse für die Beschreibung der Innenströmung einer Turbinenstufe.

Als zusätzliche Gleichung neben den gemittelten Impulsgleichungen wird eine Transportgleichung für eine modifizierte Form $\tilde{\nu}_t$ der turbulenten kinematischen Viskosität ν_t gelöst. Der Zusammenhang beider Größen ist in nachstehender Gleichung beschrieben:

$$\nu_t = \tilde{\nu}_t f_1 \quad (2.20)$$

Hierbei bezeichnet f_1 eine Dämpfungsfunktion. Diese stellt sicher, daß die Modifikation der turbulenten Viskosität nur außerhalb der wandnahen Schicht, die durch die Viskosität dominiert ist, wirksam wird. Die Dämpfungsfunktion ist gegeben als

$$f_1 = \frac{\left(\frac{\tilde{\nu}_t}{\nu_t}\right)^3}{\left(\frac{\tilde{\nu}_t}{\nu_t}\right)^3 + C_{v1}^3} \quad (2.21)$$

C_{v1} ist eine Modellkonstante. Für die turbulente Viskosität $\tilde{\nu}_t$ wurde von Spalart und Allmaras die Transportgleichung (2.22) für den inkompressiblen Fall aufgestellt:

$$\frac{D\tilde{\nu}_t}{Dt} = G_{\tilde{\nu}_t} + \frac{1}{\sigma_{\tilde{\nu}_t}} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\nu + \tilde{\nu}_t) \frac{\partial \tilde{\nu}_t}{\partial x_j} \right\} + C_{b2} \left(\frac{\partial \tilde{\nu}_t}{\partial x_j} \right)^2 \right] - Y_{\tilde{\nu}_t} \quad (2.22)$$

Mit $G_{\tilde{\nu}_t}$ wird die Produktion von $\tilde{\nu}_t$ und mit $Y_{\tilde{\nu}_t}$ die Dissipation eben dieser im wandnahen Bereich aufgrund von Einflüssen der Wandversperrung und der viskosen Dämpfung bezeichnet. $\sigma_{\tilde{\nu}_t}$ und C_{b2} sind weitere Modellkonstanten.

Der Produktionsterm $G_{\tilde{\nu}_t}$ wird nach Gleichung (2.23) modelliert.

$$G_{\tilde{\nu}_t} = C_{b1} \tilde{S} \tilde{\nu}_t \quad (2.23)$$

Die Größe C_{b1} ist eine weitere Konstante und \tilde{S} wird durch Gleichung (2.24) beschrieben.

$$\tilde{S} = S + \frac{\tilde{\nu}_t}{\kappa^2 d^2} f_{v2} \quad (2.24)$$

Mit d wird der Wandabstand bezeichnet, und κ ist die von Kármán Konstante. Die Funktion f_{v2} wird nach Gleichung (2.25) bestimmt, mit χ als Verhältnis von $\tilde{\nu}_t$ zu ν_t .

$$f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}} \quad (2.25)$$

Nach Spalart und Allmaras wird die Größe S aus dem Rotationstensor bestimmt. Da dies dazu führen kann, daß die Produktion der eddy viscosity zu groß berechnet wird, wurde in dieser Arbeit eine Modifikation verwendet, die von DACLES-MARIANI, ZILLIAC, CHOW und BRADSHAW [6] vorgeschlagen wurde. Diese berücksichtigt neben dem Rotationstensor Ω_{ij} auch den Deformationsgeschwindigkeitstensor S_{ij} .

Mit

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (2.26)$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (2.27)$$

ergibt sich für S nach [6]

$$S = \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}} + 2,0 \cdot \min(0, \sqrt{S_{ij}S_{ij}} - \sqrt{\Omega_{ij}\Omega_{ij}}) \quad (2.28)$$

Die Dissipation der Wirbelviskosität $Y_{\tilde{\nu}_t}$ wird nach Gleichung (2.29) modelliert.

$$Y_{\tilde{\nu}_t} = C_{w1} f_w \left(\frac{\tilde{\nu}_t}{d} \right)^2 \quad (2.29)$$

Hierbei wird die Funktion f_w nach untenstehenden Gleichungen bestimmt.

$$f_w = g \left[\frac{1 + C_{w3}^6}{g^6 + C_{w3}^6} \right]^{\frac{1}{6}} \quad (2.30)$$

$$g = r + C_{w2}(r^6 - r) \quad (2.31)$$

$$r = \frac{\tilde{\nu}_t}{\tilde{S}\kappa^2 d^2} \quad (2.32)$$

C_{w1} , C_{w2} und C_{w3} sind weitere Modellkonstanten. In nachfolgender Zusammenstellung wird eine Übersicht aller Modellkonstanten des Eingleichungsmodells nach Spalart und Allmaras gegeben.

$$\sigma_{b1} = 0,1335 \quad \sigma_{b2} = 0,622 \quad \sigma_{\tilde{\mu}_t} = \frac{2}{3}$$

$$C_{w1} = \frac{C_{b1}}{\kappa^2} + \left(1 + \frac{C_{b2}}{\sigma_{\tilde{\nu}_t}}\right) \quad C_{w2} = 0,3 \quad C_{w3} = 2,0$$

$$C_{v1} = 7,1 \quad \kappa = 0,41$$

Diese Modellierung nach Spalart und Allmaras läßt eine Berechnung des Strömungsfeldes bis zur Wand zu. Sie ist nicht eingeschränkt auf Strömungsbereiche mit hohen Reynoldszahlen. Da dieses Modell auch für niedrige Reynoldszahlen gültig ist, kann von einer low-Re Version des Eingleichungsmodells gesprochen werden.

2.2.1.2 Standard $k - \varepsilon$ Modell

Das $k - \varepsilon$ Modell ist das bekannteste Zweigleichungsmodell, und es ist das meist genutzte im kommerziellen Bereich. Gründe hierfür liegen sicherlich im Kosten-Nutzen Vergleich. Hierbei sind unter Kosten die Rechenzeit und die Hardwareanforderungen zu sehen, und als Nutzen kann die Qualität der Rechenergebnisse bezeichnet werden. Hinzu kommt eine hohe numerische Stabilität dieses Modells, die nicht unterschätzt werden darf, wenn Turbulenzmodelle beurteilt werden.

Das Standard $k - \varepsilon$ Modell, so wie es von LAUNDER und SPALDING [35] vorgeschlagen wurde, ist ein halbempirisches Turbulenzmodell, das eine Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie und eine für deren Dissipation löst. Bei der Modellierung einzelner Terme wird angenommen, daß eine voll turbulente Strömung vorliegt und Einflüsse der molekularen Viskosität vernachlässigbar sind. Somit kann dieses Modell, so wie es hier vorgestellt wird, im wandnahen Bereich nicht sinnvoll eingesetzt werden.

Die beiden zusätzlichen Transportgleichungen neben den gemittelten Impulsgleichungen stellen sich für den inkompressiblen Fall wie folgt dar:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] + P_k - \varepsilon \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (2.34)$$

Mit P_k wird die Produktionsrate der turbulenten kinetischen Energie bezeichnet, und $C_{1\varepsilon}$, $C_{2\varepsilon}$, σ_k , σ_ε sind Modellkonstanten. Die Produktion wird unter der Annahme von BOUSSINESQ nach Gleichung (2.35) modelliert.

$$P_k = 2\nu_t S_{ij} S_{ij} \quad (2.35)$$

Hierbei ist S_{ij} nach Gleichung (2.26) definiert.

Aus den oben beschriebenen Gleichungen kann nun die turbulente Viskosität mit der Modellkonstanten C_μ bestimmt werden und zur Bestimmung des Reynoldsspannungstensors unter der Annahme von BOUSSINESQ verwendet werden.

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (2.36)$$

Die Werte der Modellkonstanten sind experimentell bestimmt worden.

$$\sigma_k = 1,0 \quad \sigma_\varepsilon = 1,3 \quad C_\mu = 0,09$$

$$C_{1\varepsilon} = 1,44 \quad C_{2\varepsilon} = 1,92$$

Eine bekannte Schwäche dieses Modells ist die Überproduktion turbulenter kinetischer Energie in einer Staupunktströmung. Diese beruht auf der Tatsache, daß die Strömung im Bereich eines Staupunktes nicht mehr von der Scherung dominiert ist, wofür das $k-\varepsilon$ Modell kalibriert ist. Die Dominanz der Normalkomponenten des Reynoldsstresstensors wird nicht physikalisch richtig wiedergegeben. Diese Unzulänglichkeit dieses Turbulenzmodells ist von hoher Relevanz bei der Berechnung einer Turbinenstufe. Eine Modifikation des Produktionsterms P_k , die von KATO und LAUNDER [29] vorgeschlagen wurde, verhindert dies.

Der exakte Produktionsterm P_{exakt} der turbulenten kinetischen Energie k lautet:

$$P_{\text{exakt}} = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (2.37)$$

Mit der Annahme von Boussinesq ergibt sich ein Produktionsterm P_k so, wie es das $k-\varepsilon$ Modell vorschlägt:

$$P_k = 2\nu_t S_{ij} S_{ij} \quad (2.38)$$

Die Änderung von KATO und LAUNDER bezieht den Rotationstensor Ω_{ij} , wie er in Gleichung (2.27) definiert ist, in der Bestimmung des Produktionstermes von k mit ein:

$$P_{KL} = \nu_t \sqrt{2S_{ij} S_{ij}} \sqrt{2\Omega_{ij} \Omega_{ij}} \quad (2.39)$$

Im Bereich der Hauptströmung rufen die beiden unterschiedlich modellierten Produktionsterme von k keine verschiedenen Ergebnisse hervor. Anders jedoch im Bereich eines Staupunktes. Nach [56] ist das Potential Φ einer stationären ebenen Staupunktströmung:

$$\Phi = \frac{a}{2}(x^2 - y^2) \quad (2.40)$$

Daraus ergibt sich:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad S_{ij} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \Omega_{ij} = 0 \quad (2.41)$$

Mit diesen Ergebnissen können nun die verschiedenen Produktionsterme von k ausgewertet werden:

$$P_{\text{exakt}} = \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = a [\overline{v'v'} - \overline{u'u'}] \quad (2.42)$$

$$P_k = \nu_t a^2 \quad (2.43)$$

$$P_{KL} = 0 \quad (2.44)$$

Mit der Annahme, daß die Anisotropie des Reynoldsstresstensors klein ist, ist die Kato-Lauder Modifikation sicherlich dem Standard $k - \varepsilon$ Produktionsterm überlegen.

2.2.1.3 Realizable $k - \varepsilon$ Modell

Ein weiteres Zweigleichungsmodell ist das realizable $k - \varepsilon$ Modell nach Shih et al. [53]. Dieses ist aus dem Standard Modell entwickelt worden und löst die identische Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie k (2.33). Als Weiterentwicklung wird eine neue Transportgleichung für die Dissipation ε eingeführt, und die Wirbelviskosität μ_t wird mit C_μ berechnet. Daher ist C_μ eine Variable und keine Konstante wie im Standard $k - \varepsilon$ Modell.

Mit diesen beiden Modelländerungen sollen zwei bekannte Unzulänglichkeiten des Standard Modells behoben werden:

- Die neu modellierte ε -Gleichung führt zu einer deutlichen Verbesserung der Berechnung der Ausbreitungsrate eines runden Freistrahles [53].
- Mit dem Einführen der Größe C_μ als Variable wird sichergestellt, daß die turbulenten Normalspannungen nicht negativ werden können. Dies führt zu einer Erhöhung der Verlässlichkeit bzw. der Übereinstimmung mit der Physik des Turbulenzmodelles. Ausgedrückt wird dieser Sachverhalt durch den Zusatz *realizable* in der Bezeichnung realizable $k - \varepsilon$ Modell.

Die modifizierte Transportgleichung für ε ist in Gleichung (2.45) gegeben.

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right] + C_1 \varepsilon \sqrt{2S_{ij}S_{ij}} - C_2 \frac{\varepsilon^2}{k - \sqrt{\nu \varepsilon}} \quad (2.45)$$

mit

$$C_1 = \max \left[0, 43, \frac{\eta}{\eta + 5} \right], \eta = \frac{k \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}}{\varepsilon}$$

Die zweite Modellverbesserung verhindert den Fehler, daß turbulente Normalspannungen negativ berechnet werden. Nach dem Standard $k - \varepsilon$ Modell wird z.B.

$$\overline{u'^2} = \frac{2}{3}k - 2\nu_t \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.46)$$

berechnet. Es ist unmittelbar einsichtig, daß die Normalspannung $\overline{u'^2}$, die per Definition positiv ist, negativ werden kann sobald der Gradient $\frac{\partial u}{\partial x}$ eine gewisse Grenze überschreitet. Dieser ist in der Ungleichung (2.47) beschrieben.

$$\frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x} \geq \frac{1}{3C_\mu} \quad (2.47)$$

Damit sichergestellt ist, daß diese Ungleichung erfüllt ist, wird ν_t weiterhin wie im Standard $k - \varepsilon$ Modell bestimmt mit der Änderung, daß C_μ nun eine variable Größe ist.

$$\nu_t = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (2.48)$$

$$C_\mu = \frac{1}{4,04 + A \frac{U^* k}{\varepsilon}} \quad (2.49)$$

Hierbei ist

$$A = \frac{1}{3} \arccos \left(\sqrt{6} \frac{S_{ij}S_{jk}S_{ki}}{\sqrt{S_{ij}S_{ij}}} \right)$$

$$U^* = \sqrt{S_{ij}S_{ij} + (\Omega_{ij} - 2\epsilon_{ijk}\omega_k)(\Omega_{ij} - 2\epsilon_{ijk}\omega_k)}$$

Es ist ersichtlich, daß die Größe C_μ nun eine Funktion der Scherung, Rotation und der Turbulenz ist. Es kann gezeigt werden, daß diese Modifikation sich positiv auswirkt auf die Produktion von k im Staupunkt einer Profilmströmung. Da die Physik der Strömung in diesem Punkt besser beschrieben wird, d.h. negative turbulente Normalspannungen vermieden werden, tritt die Schwäche des Standard $k - \varepsilon$ Modells mit der Überproduktion nicht auf.

Die Modellkonstanten sind bestimmt zu folgenden Werten:

$$\sigma_k = 1,0 \quad \sigma_\varepsilon = 1,2 \quad C_2 = 1,9$$

2.2.1.4 RNG $k - \varepsilon$ Modell

Das Renormalization Group (RNG) $k - \varepsilon$ Modell von YAKHOT und ORSZAG [64] ist ebenfalls ein Zweigleichungsmodell, das eine Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie als auch für die Dissipation ε löst. Als Ausgangspunkt für die Modellentwicklung dienen jedoch nicht die reynoldsgemittelten Navier-Stokes Gleichungen, sondern die der Momentanwerte. Aus diesen werden die Bewegungsgleichungen mittels der RNG-Theorie für das RNG $k - \varepsilon$ Modell hergeleitet. Die Grundidee hierbei ist, von den Bewegungsgleichungen der Momentanwerte iterativ enge Frequenzbänder abzuspalten um neue Gleichungen für die verbleibenden Variablen zu erhalten. Es wird diesem Vorgehen zugrunde gelegt, daß die Annahme der Gleichförmigkeit der kleinen Skalen zulässig ist, d.h. ein Zeit- und ein Längenmaß reichen aus, um die kleinen Skalen im gesamten Strömungsfeld zu beschreiben. Als weitere grundlegende Annahme kommt hinzu, daß die Skalierbarkeit gegeben sein muß. Einen tieferen Einblick in die RNG-Theorie bietet [40].

Als Transportgleichungen für die turbulenten Größen k und ε ergeben sich nach oben beschriebener Vorgehensweise für den Fall konstanter Dichte folgende Gleichungen.

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\alpha_k (\nu_t + \nu) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] + \nu_t S^2 - \varepsilon \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\alpha_\varepsilon (\nu_t + \nu) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} \nu_t S^2 - C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k} - R \quad (2.51)$$

$C_{1\varepsilon}$, $C_{2\varepsilon}$, α_k und α_ε sind Modellkonstanten. S ist hierbei die 2-fache zweite Invariante des Deformationsgeschwindigkeitstensors S_{ij} aus Gleichung (2.26).

$$S = 2S_{ij}S_{ij} \quad (2.52)$$

Die eddy viscosity ν_t wird identisch zum Standard $k - \varepsilon$ Modell nach Gleichung (2.36) bestimmt mit C_μ als weiterer Modellkonstanten. Beim Vergleich mit dem Standard $k - \varepsilon$ Modell fällt eine sehr große Ähnlichkeit beider Turbulenzmodelle auf, die sich aus zwei verschiedenen Ansätzen ergeben haben. Der Hauptunterschied liegt in dem in Gleichung (2.51) zusätzlich auftauchenden Quellterm R .

$$R = \frac{C_\mu \rho \left(\frac{Sk}{\varepsilon}\right)^3 \left(1 - \frac{Sk}{4,38\varepsilon}\right) \varepsilon^2}{1 + 0.012 \left(\frac{Sk}{\varepsilon}\right)^3} \frac{1}{k} \quad (2.53)$$

Der Einfluß dieses weiteren Quelltermes R in der ε -Gleichung kann veranschaulicht werden, wenn dieser in die Größe $C_{2\varepsilon}$ mit aufgenommen wird, so daß gleich zum Standard $k - \varepsilon$ Modell nur noch ein Dissipationsterm existiert.

$$\begin{aligned}
 C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k} + R &= C_{2\varepsilon}^* \frac{\varepsilon^2}{k} \\
 C_{2\varepsilon}^* &= C_{2\varepsilon} + \frac{C_\mu \rho \left(\frac{Sk}{\varepsilon}\right)^3 \left(1 - \frac{Sk}{4,38\varepsilon}\right)}{1 + 0,012 \left(\frac{Sk}{\varepsilon}\right)^3}
 \end{aligned}
 \tag{2.54}$$

Es ist somit anschaulich, daß der Dissipationsterm in Gleichung (2.51) neben den Größen k und ε auch von der Scherrate beeinflußt wird. Dies hat eine höhere Empfindlichkeit auf Stromlinienkrümmung im Vergleich zum Standard-Modell zur Folge. Eine Überlegenheit des RNG-Modelles läßt sich aber aus der Theorie nicht ableiten. Diese ist lediglich durch die Ergebnisse aus ihrer Anwendung abgesichert [40], und diese zeigen, daß in manchen Fällen das eine Modell besser ist und bei anderen Strömungsverhältnissen das andere. Siehe hierzu z.B. [37].

Die Modellkonstanten werden nicht experimentell bestimmt, sondern lassen sich ebenfalls aus der RNG-Theorie ableiten. Sie sind im folgenden zusammengestellt.

$$C_\mu = 0,0845 \quad C_{1\varepsilon} = 1,42 \quad C_{2\varepsilon} = 1,68$$

$$\alpha_k = 1,393 \quad \alpha_\varepsilon = 1,393$$

2.2.2 Reynoldsspannungsmodelle

Reynoldsspannungsmodelle (RSM) basieren im Gegensatz zu den Wirbelviskositätsmodellen nicht auf der Annahme von BOUSSINESQ zur Bestimmung des Reynoldsspannungstensors. Das Schließungsproblem der Turbulenz wird auf einer höheren Ebene gelöst. Es wird aus den Navier-Stokes Gleichungen eine Transportgleichung für den unbekanntem Reynoldsspannungstensor abgeleitet. Diese hat folgende exakte Form:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} (\overline{u'_i u'_j}) + u_k \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_i u'_j})}_{\text{Konvektiver Transport}} =$$

$$\underbrace{- \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\overline{(u'_i u'_j u'_k)} + \frac{p'}{\rho} (\delta_{kj} u'_i + \delta_{ik} u'_j) - \nu \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_i u'_j}) \right]}_{\text{Diffusiver Transport}}$$

$$- \underbrace{\left[\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right]}_{P_{ij} = \text{Produktion}} \quad (2.55)$$

$$\underbrace{+ \frac{p'}{\rho} \left[\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right]}_{\Pi_{ij} = \text{Druck-Scher-Korrelation}} - \underbrace{2\nu \left[\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right]}_{\varepsilon_{ij} = \text{Dissipation}}$$

Es tauchen nun die unbekanntenen Terme der Dissipation ε_{ij} , der Druck-Scher-Korrelation Π_{ij} und des turbulenten Transportes C_{ijk} auf. Als turbulenter Transport ist hierbei definiert:

$$C_{ijk} = \overline{u'_i u'_j u'_k} + \overline{p' u'_i} \delta_{jk} + \overline{p' u'_j} \delta_{ik} \quad (2.56)$$

Auf welche Weise diese drei Terme modelliert werden, klassifiziert die einzelnen Reynoldsspannungsmodelle. Eine wesentliche Unterscheidung hierbei ist die Modellierungsart der Druck-Scher-Korrelation. Diese kann mit nur linearen oder aber auch mit nichtlinearen Termen durchgeführt werden. Dementsprechend wird von einem linearen bzw. nichtlinearen RSM gesprochen. Durch das Miteinbeziehen nichtlinearer Terme wird eine höhere Modellgenauigkeit erreicht. Dies führt auf der anderen Seite aber zu einem höheren numerischen Aufwand.

RSM sind aufgrund der höheren Modellierungsebene den Wirbelviskositätsmodellen überlegen. Sie bilden die Physik besser ab. Im Gegensatz zu den Null-, Ein- und Zweigleichungsmodellen können die RSM anisotrope Turbulenzstrukturen erfassen.

Aus der Vielzahl der existierenden Reynoldsspannungsmodelle wird im folgenden auf die Modellierung der drei unbekanntenen Terme eingegangen, die im Rahmen dieser Arbeit verwendet wurden. Als Annahme bei der Modellierung werden Strömungsgebiete hoher Reynoldszahlen vorausgesetzt. Die entwickelten Berechnungsmöglichkeiten für die drei oben genannten unbekanntenen Terme sind deshalb nicht in Wandnähe gültig.

Im Term für den diffusiven oder auch turbulenten Transport in Gleichung (2.55) werden die Drucktransportterme vernachlässigt, da sie fernab fester Wände von untergeordneter Bedeutung sind. Die verbleibenden Terme werden nach DALY und HARLOW [7] entsprechend einem tensoriellen Gradientenflußansatz modelliert. In dem benutzten CFD-Code ist eine vereinfachte Form davon nach einem Vorschlag von LAUNDER, REECE und RODI [34] in Gleichung (2.57) implementiert.

$$- \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\overline{u'_i u'_j u'_k} + \frac{p'}{\rho} (\delta_{kj} u'_i + \delta_{ik} u'_j) - \nu \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_i u'_j}) \right] = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial (\overline{u'_i u'_j})}{\partial x_k} \right) \quad (2.57)$$

Die Druck-Scher-Korrelation Π_{ij} wird in einen Return-Term oder auch Slow-Term, der die Rückkehr zur Isotropie beschreibt, und einen Rapid-Term, der die Interaktion zwischen den mittleren Strömungsgrößen und den turbulenten Größen beschreibt, aufgeteilt.

Die Druck-Scher-Korrelation kann nach [34] modelliert werden. Die entsprechende Gleichung ist in (2.58) gegeben mit $P = \frac{1}{2} P_{ii}$, der halben Spur des Produktionsterms P_{ij} .

$$\frac{p'}{\rho} \left[\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right] = -C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left[\overline{u'_i u'_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right] - C_2 \left[P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P - S_{ij} \right] \quad (2.58)$$

Da bei der Modellierung der Druck-Scher-Korrelation keine Terme höherer Ordnung als eins verwendet werden, kann hier von einem linearen RSM gesprochen werden.

Um den Term der Dissipation ε_{ij} modellieren zu können, wird die Annahme lokaler Isotropie getroffen. Für den Dissipationsterm ergibt sich somit vereinfacht die Gleichung (2.59). ε wird aus der Transportgleichung (2.34) des Standard $k - \varepsilon$ Modells berechnet.

$$2\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} = \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon \quad (2.59)$$

Die Modellkonstanten sind nachstehend aufgeführt:

$$C_1 = 1,8 \quad C_2 = 0,6$$

2.3 Wandbehandlung

Dem wandnahen Bereich kommt im Rahmen der Turbulenzmodellierung eine große Bedeutung zu. Die Strömung in Wandnähe ist gekennzeichnet durch einen großen Geschwindigkeitsgradienten, bedingt durch die Haftbedingung an der Wand und besonders durch den Übergang von hohen Reynoldszahlen in der Kernströmung, in der die Reibung im Vergleich zur Turbulenz vernachlässigt werden kann, zu kleinen Reynoldszahlen in unmittelbarer Wandnähe, in der die Reibung eine wesentliche Rolle spielt. Dieser Übergangsbereich der Strömung von der Wand zum Kern wird als Grenzschicht bezeichnet. Diese muß geeignet modelliert werden, um Aussagen über entscheidende Strömungsphänomene wie Ablösung, Transition, Relaminarisierung u.a. treffen zu können.

Bei den oben beschriebenen Turbulenzmodellen wurde bei der Modellierung der unbekanntenen Terme immer die Voraussetzung großer Reynoldszahlen getroffen. Lediglich das Eingleichungsmodell nach SPALART und ALLMARAS verzichtete auf diese Vereinfachung. Da die genannten Turbulenzmodelle in ihrer beschriebenen Form nicht im wandnahen Bereich gültig sind, muß dieses Strömungsgebiet eine andere Modellierung erfahren. Die wichtigsten hierbei sind:

- Wandfunktion
- 2-Schichten Modell
- Low-Re Erweiterung

2.3.1 Standard-Wandfunktion

Um die Grenzschicht mit ihren großen Gradienten auflösen zu können, muß die Knotendichte des numerischen Rechnernetzes entsprechend groß sein. Ebenfalls muß bei der Modellierung auf Effekte niedriger Reynoldszahlen, sog. low-Re Effekte, eingegangen werden. Dies kann mit der Verwendung einer Wandfunktion vermieden werden, die eine Verbindung zwischen der Strömungsgeschwindigkeit und der Wandschubspannung herstellt. Es wird der Strömungsbereich in unmittelbarer Wandnähe überbrückt und somit das rechenintensive Gebiet vermieden. Werden für eine ebene, stationäre Strömung die Annahmen

- abhängige Variablen ändern sich nur langsam in Strömungsrichtung
- keine Wandkrümmung
- kein Druckgradient längs der Wand

vorausgesetzt, kann ein universelles logarithmisches Wandgesetz aus den gemittelten Impulsgleichungen abgeleitet werden, das für turbulente Strömungen den wandnahen Bereich abbildet.

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B \quad (2.60)$$

Hierbei bezeichnet $u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_{qw}}{\rho}}$ die Wandschubspannungsgeschwindigkeit, u die mittlere Strömungsgeschwindigkeit parallel zur Wand und $y^+ = \frac{u_\tau}{\nu} y$ den dimensionslosen Wandabstand. Eine ausführliche Herleitung und die Angabe der üblichen Werte für die Konstanten von $\kappa \approx 0,4$ und $B \approx 5$ können in [56] nachgelesen werden. Das reale Geschwindigkeitsprofil setzt sich aus einer viskosen Unterschicht, einem Übergangsbereich und dem logarithmischen Bereich zusammen.

Um die Turbulenzgrößen k und ε z.B. beim Standard $k - \varepsilon$ Modell an der wandnächsten Gitterzelle bestimmen zu können, werden zwei Annahmen getroffen:

- Produktion von $k =$ Dissipation von k
- $\tau = \tau_w$ in der ganzen wandnahen Schicht

Es ergeben sich somit als Gleichungen für die turbulente kinetische Energie und die Dissipation:

$$k = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}} \quad (2.61)$$

$$\varepsilon = \frac{u_\tau^3}{\kappa y} \quad (2.62)$$

Um die Gültigkeit dieser Wandfunktion zu gewährleisten, muß die wandnächste Gitterzelle im logarithmischen Bereich des Geschwindigkeitsprofils liegen. Dies ist für einen y^+ -Wert größer 11.225 sichergestellt.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde keine andere als die Standard-Wandfunktion verwendet. Deshalb wird darauf verzichtet, auf Modifikationen z.B. zur Berücksichtigung des Druckgradienten einzugehen. Die Standard-Wandfunktion wird sehr häufig bei Strömungsberechnungen eingesetzt. Sie reduziert erheblich die Netzauflösung im wandnahen Bereich und liefert trotz ihrer Modelleinfachheit oft hinreichend gute Ergebnisse.

2.3.2 2-Schichten Modell

Neben der Verwendung einer Wandfunktion in Wandnähe gibt es die Möglichkeit, diesen Strömungsbereich als separate Zone anzusehen. Es kann dann in der Hauptströmung ein Turbulenzmodell angewendet werden, das für große Reynoldszahlen gilt, und im wandnahen Bereich wird ein einfaches Modell eingesetzt, das low-Re Effekte berücksichtigt, aber nicht die feine Rechennetauflösung benötigt, das z.B. ein Zweigleichungsmodell, das für low-Re Effekte erweitert ist, benötigen würde, da die Gradienten von ε in eben diesem Strömungsgebiet sehr groß sind.

Einen solchen Weg bietet das Eingleichungsmodell von WOLFSHTEIN [63] an. Hier wird neben den gemittelten Impulsgleichungen eine weitere Gleichung für die turbulente kinetische Energie gelöst, wie sie in Gleichung (2.33) gegeben ist. Die Änderung nach WOLFSHTEIN wird in Gleichung (2.63) für die turbulente Viskosität deutlich.

$$\nu_t = C_\mu \sqrt{k} l_\mu \quad (2.63)$$

Die Dissipation ε wird über einen algebraischen Zusammenhang nach Gleichung (2.64) bestimmt und muß nicht durch ein sehr feines Rechennetz aufgelöst werden.

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{k^{\frac{3}{2}}}{l_\varepsilon} & (2.64) \\ \text{mit } l_\mu &= c_l y \left[1 - \exp\left(-\frac{Re_y}{A_\mu}\right) \right] \\ l_\varepsilon &= c_l y \left[1 - \exp\left(-\frac{Re_y}{A_\varepsilon}\right) \right] \\ c_l &= \kappa C_\mu^{-\frac{3}{4}} \\ A_\mu &= 70 \\ A_\varepsilon &= 2c_l \end{aligned}$$

Dieses Eingleichungsmodell kann nun in Wandnähe zur Berechnung aller Strömungsgrößen eingesetzt werden, und in der Hauptströmung kann ein Turbulenzmodell für große Reynoldszahlen verwendet werden. Als Parameter zum Umschalten von einem auf das andere Turbulenzmodell bietet sich z.B. eine auf dem Wandabstand basierende turbulente Reynoldszahl $Re_y = \frac{\sqrt{k}}{\nu_t} y$ an. Es kann somit von einem 2-Schichten Modell gesprochen werden, das alle Vorteile eines höherwertigen Modells nutzt, die wandnahe Schicht auflöst, jedoch durch die Verwendung eines Eingleichungsmodells keine zu feine Diskretisierung im Wandbereich erfordert. 2-Schichten Modelle stellen somit eine Mittellösung dar zwischen der Wandfunktion, in der die Grenzschicht überhaupt nicht aufgelöst wird, und den sog. low-Re Modellen, die die Grenzschicht mit all ihren Gradienten auflösen.

2.3.3 Low-Re Erweiterung

Viele statistische Modelle sind aufgrund ihrer Modellierung nicht in der Lage, die viskose Dämpfung in der Grenzschicht, speziell in der viskosen Unterschicht, wiederzugeben. Eine gute Übersicht hierzu bieten [62] und [41]. Um dieses Defizit auszugleichen, ist das Einführen von Dämpfungsfunktionen eine geeignete Möglichkeit. Auf diese Weise werden wanddämpfende Effekte und die der molekularen Viskosität berücksichtigt. Dämpfungsfunktionen erweitern die Turbulenzmodelle für Strömungsgebiete niedriger Reynoldszahlen.

Diese Art der Wandbehandlung bietet den Vorteil, hochwertige statistische Modelle bis hin zur Wand verwenden zu können. Für den Bereich kleiner Reynoldszahlen erweiterte Modelle, sog. Low-Re Modelle, sind in der Lage, Grenzschichtphänomene wie Transition, Ablösung u.a. zu berechnen. Der Nachteil besteht in der Notwendigkeit, den sehr großen Gradienten von ε in Wandnähe auflösen zu müssen, sobald ein Zweigleichungsmodell oder höherwertigeres Modell

benutzt wird. Die hohe Netzauflösung im Wandbereich steigert die Rechenzeit gegenüber der Verwendung einer Wandfunktion auf ca. das Doppelte.

Das in Kapitel 2.2.1.1 beschriebene Eingleichungsmodell besitzt eine oben beschriebene Low-Re Erweiterung, erfordert jedoch keine höhere Netzauflösung der Grenzschicht als ein 2-Schichtenmodell, da die zusätzliche Transportgleichung für die modifizierte turbulente Viskosität $\tilde{\nu}_t$ gelöst wird.