

Synthese von Zustands- und Ausgangsrückführungen für rekurrente Fuzzy-Systeme

Stefan Gering und Jürgen Adamy

FG Regelungstheorie und Robotik, TU Darmstadt
Landgraf-Georg-Str. 4, 64283 Darmstadt
Tel.: (06151) 16 76 056, Fax: (06151) 16 2507
E-Mail: {sgering,adamy}@rtr.tu-darmstadt.de

Kurzfassung:

Rekurrente Fuzzy-Systeme ermöglichen die Modellierung eines dynamischen Prozesses basierend auf Expertenwissen oder Messdaten, wobei sich die Regelbasis durch ihre Transparenz auszeichnet. In diesem Artikel werden Verfahren zur Synthese von Zustands- und Ausgangsrückführungen zur Stabilisierung bekannter Ruhelagen diskutiert. Dabei kann der resultierende Regler strukturell als Fuzzy-Regler interpretiert werden und auf allgemeinere Gain-Scheduling-Regler erweitert werden. Hinsichtlich der Synthese von Ausgangsrückführung wird gezeigt, dass bekannte Ansätze aus der linearen Systemtheorie übertragen werden können.

1 Einleitung

Zur Modellbildung dynamischer Systeme basierend auf Fuzzy-Logik sind zahlreiche Konzepte bekannt, welche versuchen, Expertenwissen und Messdaten zur Generierung einer approximativen Beschreibung der Systemdynamik zu verwenden. Hierbei lassen sich im wesentlichen zwei grundsätzlich verschiedene Ansätze verfolgen: Zum einen kann versucht werden, messdatengestützte Verfahren zur möglichst exakten Approximation des Systemverhaltens zu verwenden, was z.B. bei Neuro-Fuzzy-Systemen [1, 2] zu einem kleinen Modellierungsfehler führen kann. Häufig führen solche datengetriebenen Ansätze jedoch zu einer mangelnden Transparenz, was zunächst im Widerspruch zum Bestreben der Fuzzy-Logik steht, eine Verbindung zwischen mathematischer Systembeschreibung und sprachlicher Interpretierbarkeit herzustellen. Somit ist bei den zahlreichen Konzepten für dynamische Fuzzy-Systeme stets ein Kompromiss zwischen Exaktheit und Transparenz zu beobachten. So ist bei den prominenten Takagi-Sugeno-Systemen [3] zwar die Prämisse linguistisch interpretierbar, die

Konklusion besteht jedoch zumeist aus linearen oder affinen Subsystemen. Anders verhält es sich bei rekurrenten Fuzzy-Systemen (RFS) [4], welche im Folgenden betrachtet werden: Durch Einschränkung der Konklusion auf Konstanten zur Beschreibung der Zustandsänderung wird das Systemverhalten i.a. weniger gut abgebildet als bei Takagi-Sugeno-Systemen, führt jedoch zu einer unmittelbaren linguistischen Interpretierbarkeit. Im Folgenden wird nun der Frage nachgegangen, wie für diese Klasse dynamischer Fuzzy-Systeme Zustands- und Ausgangsrückführungen zur Stabilisierung bekannter Ruhelagen entworfen werden können, wobei das RFS als gegeben angenommen wird (zur Modellbildung mittels RFS sei auf [5] verwiesen). Dazu wird ein Ansatz aus [6] weiterentwickelt, in dem die Synthese von Zustandsrückführungen anhand der Regelbasis diskutiert wird. Zur Auslegung von Ausgangsrückführungen für RFS können dabei analoge Strategien wie bei solchen für lineare Systeme verwendet werden. Hierzu zählen die Approximation von Zustandsrückführungen sowie die direkte Berücksichtigung struktureller Beschränkungen

Im Folgenden werden in Abschnitt 2 zunächst die Grundlagen von RFS erläutert und in Abschnitt 3 ein Algorithmus zur Synthese von Zustandsrückführungen für diese Systeme diskutiert. Dieser wird dann in Abschnitt 4 zur Synthese von Ausgangsrückführungen erweitert. Anhand eines akademischen Beispiels werden die diskutierten Methoden in Abschnitt 5 verglichen. Abschließende Bemerkungen werden in Abschnitt 6 gegeben.

2 Rekurrente Fuzzy-Systeme

Rekurrente Fuzzy-Systeme [7] sind im Eingangs-Zustandsraum $\mathcal{X} \times \mathcal{U} \in \mathbb{R}^{n+m}$ definiert, wobei $\mathcal{X} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_{\min} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_{\max}\}$ und $\mathcal{U} = \{\mathbf{u} \mid \mathbf{u}_{\min} \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}_{\max}\}$. Mit ' \leq ' werden dabei komponentenweise Ungleichungen ausgedrückt. Die Zustandsänderung des Systems ist anhand einer linguistischen Regelbasis definiert, welche linguistische Werte $L_{j_i}^{x_i}$ und $L_{q_i}^{u_i}$ zur qualitativen Beschreibung der Zustände und Eingänge enthält, z.B. *niedrig* oder *hoch*. In gleicher Weise werden Zustandsänderungen selbst qualitativ anhand linguistischer Werte $L_{w_i}^{x_i}$ beschrieben. Ein crispere Wert $s_{j_i}^{x_i}$, welcher mit einem linguistischen Wert $L_{j_i}^{x_i}$ assoziiert ist, wird als *Kernposition* bezeichnet. Ebenso werden Komponenten von *Kernpositionsgradienten* mit $s_{w_i}^{x_i}$ bezeichnet, welche mit $L_{w_i}^{x_i}$ assoziiert sind. Durch kompakte Vektornotation $\mathbf{L}_j^x = [L_{j_1}^{x_1}, \dots, L_{j_n}^{x_n}]^T$ kann jede linguistische Re-

gel der Regelbasis als

$$\begin{aligned} \text{Wenn } \mathbf{x}(t) = \mathbf{L}_j^x \text{ und } \mathbf{u}(t) = \mathbf{L}_q^u, \\ \text{dann } \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{L}_{\mathbf{w}(j,q)}^{\dot{\mathbf{x}}} \end{aligned} \quad (1)$$

notiert werden. Durch Verwendung des Indexvektors \mathbf{j} für Kernpositionen im Zustandsraum, \mathbf{q} im Eingangsraum und \mathbf{w} as Index von Kernpositionsgradienten kann jede Regel ebenfalls als Abbildung $(\mathbf{j}, \mathbf{q}) \mapsto \mathbf{w}$ dargestellt werden. Offensichtlich gilt $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{s}_{\mathbf{w}(j,q)}^{\dot{\mathbf{x}}}$, falls ein Zustand (\mathbf{x}, \mathbf{u}) identisch zu einer Kernposition (s_j^x, s_q^u) ist. Mit Hilfe von *Zugehörigkeitsfunktionen* $\mu_{j_i}^{x_i}(x_i)$ bzw. $\mu_{q_i}^{u_i}(u_i)$ kann ausgedrückt werden, wie stark ein Zustand bzw. Eingang zu einer Kernposition gehört. Zur vereinfachten Betrachtung werden im Folgenden dreieckförmige Zugehörigkeitsfunktionen und Rampen

$$\mu_{j_i}^{x_i}(x_i) = \begin{cases} \frac{x_i - s_{j_i-1}^{x_i}}{s_{j_i}^{x_i} - s_{j_i-1}^{x_i}}, & x_{i,\min} \leq s_{j_i-1}^{x_i} \leq x_i < s_{j_i}^{x_i} \leq x_{i,\max}, \\ \frac{s_{j_i+1}^{x_i} - x_i}{s_{j_i+1}^{x_i} - s_{j_i}^{x_i}}, & x_{i,\min} \leq s_{j_i}^{x_i} \leq x_i < s_{j_i+1}^{x_i} \leq x_{i,\max}, \\ 1, & x_{i,\min} \geq x_i \vee x_i \geq x_{i,\max}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (2)$$

verwendet, welche auch in Bild 1a dargestellt sind. Neben der einfachen Darstellung bieten dreieckförmige Zugehörigkeitsfunktionen den Vorteil, dass kompliziertere Funktionen, wie z.B. Trapeze, aus ihnen zusammengesetzt werden können. Falls $\mu_{j_i}^{x_i} \neq 0$, dann werden x_i und $s_{j_i}^{x_i}$ als *verbunden* bezeichnet. Somit gilt für Zustände und Eingänge (\mathbf{x}, \mathbf{u}) , die nicht identisch mit einer Kernposition sind, dass die Konklusion an dieser Stelle eine lineare Interpolation zwischen Regeln an benachbarten Kernpositionen ist. Die Interpolation zwischen benachbarten Kernposition ist auch in Bild 1b verdeutlicht. Aus dieser Abbildung wird ebenfalls ersichtlich, dass bei vollständiger Regelbasis die Kernpositionen eine Gitterstruktur im Eingangs-Zustandsraum bilden. Die darin befindlichen Regionen, welche durch die konvexe Hüllen um Kernpositionen begrenzt sind, werden als *Hyperquader* bezeichnet und mit H_1 abgekürzt. Hyperquader, welche nur im Zustandsraum oder nur im Eingangsraum betrachtet werden, werden mit H_1^x und H_1^u bezeichnet, sodass $H_1 = H_1^x \cup H_1^u$ gilt.

Werden nach der Fuzzifizierung der linguistischen Werte das algebraische Produkt zur Aggregation und Implikation, die einfache Summation zur Akkumulation sowie die Center-of-singletons-Methode zur Defuzzifizierung verwendet, so ergibt sich

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = \sum_{\mathbf{j}, \mathbf{q}} \mathbf{s}_{\mathbf{w}(j,q)}^{\dot{\mathbf{x}}} \cdot \prod_{i=1}^n \mu_{j_i}^{x_i}(x_i) \cdot \prod_{p=1}^m \mu_{q_p}^{u_p}(u_p) \quad (3)$$

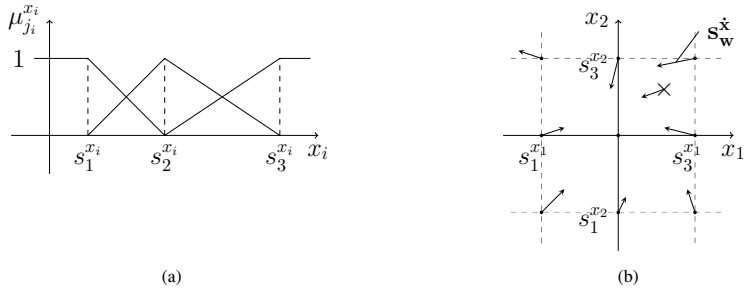


Bild 1: (a) Zugehörigkeitsfunktionen in einer Dimension und (b) Kernpositionsableitungen im Zustandsraum

für die Zustandsänderung, wie in [4] beschrieben. Somit ist \dot{x} durch ein statisches Fuzzy-System $f(x, u)$ mit Fuzzifizierung, Inferenz und Defuzzifizierung beschrieben.

Der Ausgang $y \in \mathbb{R}^r$ des RFS wird durch eine Ausgangsfunktion $g(x)$ beschrieben, welche nicht als von der Stellgröße u abhängig angenommen wird. Darüber hinaus wird angenommen, dass die zu stabilisierende Ruhelage $x^* = s^{x^*} = \mathbf{0}$ sich im Ursprung befindet und mit einer Kernposition s_j^x identisch ist. Ein Blockschaltbild des gesamten RFS einschließlich Zustandsregler zeigt Bild 2, in welchem auch die inhärente Sättigung explizit berücksichtigt wurde.

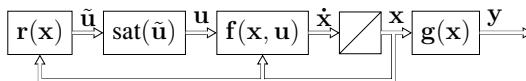


Bild 2: Regelkreis mit Zustandsregler, Sättigung und RFS

Im Weiteren wird zudem angenommen, dass das RFS beobachtbar und steuerbar ist. Zu Details dieser Systemeigenschaften sei auf [8] und [9] verwiesen.

3 Synthese von Zustandsrückführungen

3.1 Fuzzy-Regler

Bevor der Frage nach Ausgangsrückführungen für RFS nachgegangen wird, soll zunächst die Frage nach Zustandsrückführungen $u = r(x)$ geklärt

werden, welche die Ruhelage $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ asymptotisch stabilisieren. Wie in (3) gezeigt, ist die Dynamik des RFS durch Kernpositionsgradienten $\mathbf{s}_{\mathbf{w}(j,q)}^{\mathbf{x}}$ an Kernpositionen $\mathbf{s}_j^{\mathbf{x}}$ definiert und für $\mathbf{x} \neq \mathbf{s}_j^{\mathbf{x}}$ durch eine Interpolation zwischen Kernpositionsgradienten benachbarter Kernpositionen gegeben. Dies legt den Ansatz nahe, eine konstante Kernpositionsstellgröße $\mathbf{r}(\mathbf{s}_j^{\mathbf{x}}) = \mathbf{s}_j^{\mathbf{r}}$ für die Kernposition $\mathbf{s}_j^{\mathbf{x}}$ zu definieren. Der Gradient $\tilde{\mathbf{s}}_j^{\mathbf{x}}(\mathbf{u})$ in diesem Punkt $\mathbf{s}_j^{\mathbf{x}}$ ergibt sich dann zu

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{s}}_j^{\mathbf{x}}(\mathbf{u}) &= \sum_j \sum_q \mathbf{s}_{\mathbf{w}(j,q)}^{\mathbf{x}} \cdot \prod_{i=1}^n \mu_{j_i}^{x_i}(s_{j_i}^{x_i}) \cdot \prod_{p=1}^m \mu_{q_p}^{u_p}(u_p) \\ &= \sum_q \mathbf{s}_{\mathbf{w}(j,q)}^{\mathbf{x}} \cdot \prod_{p=1}^m \mu_{q_p}^{u_p}(u_p).\end{aligned}\quad (4)$$

Bei Verwendung von Zugehörigkeitsfunktionen (2) ergibt sich (4) zu [6]

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{s}}_j^{\mathbf{x}}(\mathbf{u}) &= \sum_q \left(\mathbf{a}_0(q) + \sum_{u_i} \mathbf{a}_{u_i}(q) \cdot u_i + \sum_{u_i} \sum_{u_j \neq u_i} \mathbf{a}_{u_i u_j}(q) \cdot u_i u_j \right. \\ &\quad \left. + \dots + \mathbf{a}_{u_1 \dots u_m}(q) \cdot u_1 \dots u_m \right).\end{aligned}\quad (5)$$

Darin hängen Vektoren $\mathbf{a}_i(q)$ nichtlinear von q ab. Im Fall, dass \mathbf{u} lediglich Werte in einem Hyperquader $H_q^u \subseteq \mathcal{U}$ annimmt, ergibt sich die Dynamikfunktion des geregelten Systems strukturell zu einem Polynom mit konstanten Koeffizienten und multiaffiner Abhängigkeit von den u_i :

$$\tilde{\mathbf{s}}_j^{\mathbf{x}}(\mathbf{u}) = \mathbf{a}_0 + \sum_{u_i} \mathbf{a}_{u_i} \cdot u_i + \sum_{u_i} \sum_{u_j \neq u_i} \mathbf{a}_{u_i u_j} \cdot u_i u_j + \mathbf{a}_{u_1 \dots u_m} \cdot u_1 \dots u_m. \quad (6)$$

Durch Annahme einer gemeinsamen Ljapunowfunktion $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{x}$ erhält man ferner

$$\dot{V}(\mathbf{s}_j^{\mathbf{x}}) = (\mathbf{s}_j^{\mathbf{x}})^T \cdot \tilde{\mathbf{s}}_j^{\mathbf{x}}(\mathbf{u}) \quad (7)$$

für alle Kernpositionen. Global asymptotische Stabilität der Ruhelage ist dann gesichert, wenn $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{X} \setminus \{\mathbf{x}^*\}$, gilt. Dies führt auf das Lösbarkeitsproblem

$$\begin{aligned}\text{Für jedes } \mathbf{s}_j^{\mathbf{x}}, \text{ finde } q \text{ und } \mathbf{u} = \mathbf{s}_j^{\mathbf{r}} \in H_q^u \subseteq \mathcal{U}, \text{ so dass} \\ (\mathbf{s}_j^{\mathbf{x}})^T \cdot \tilde{\mathbf{s}}_j^{\mathbf{x}}(\mathbf{s}_j^{\mathbf{r}}) < 0.\end{aligned}\quad (8)$$

Implizit werden Stellgrößenbeschränkungen berücksichtigt, da $\mathbf{s}_j^{\mathbf{r}} \in \mathcal{U}$.

Das Lösbarkeitsproblem (8) kann zudem auf ein Optimierungsproblem erweitert werden, mit dem eine untere Grenze für die Abklingrate des geregelten Systems maximiert wird. Da $V(\mathbf{x})$ gegeben ist, sichert die Bedingung $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -2\alpha V(\mathbf{x})$, dass $V(\mathbf{x}) \leq V(\mathbf{x}_0)e^{-2\alpha t}$ [10]. Somit wird für jedes s_j^x eine untere Grenze α_j maximiert durch

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{q}, \mathbf{s}_j^x} \alpha_j, \text{ s.t.} \\ & (\mathbf{s}_j^x)^T \cdot \tilde{\mathbf{s}}_j^x(\mathbf{s}_j^r) + \alpha_j \cdot (\mathbf{s}_j^x)^T \mathbf{s}_j^x < 0 \\ & \mathbf{u}_{\min, \mathbf{q}} \leq \mathbf{s}_j^r \leq \mathbf{u}_{\max, \mathbf{q}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Gl. 9 sichert, dass Trajektorien, die in einer Kernposition s_j^x starten, maximal schnell in Richtung der Ruhelage laufen, wobei zunächst keine Aussage über die Konvergenz im Interpolationsbereich $\mathbf{x} \neq s_j^x$ über die Konvergenzrate möglich ist. (9) stellt ein gemischt-ganzzahliges Optimierungsproblem dar, das in einem zweistufigen Verfahren gelöst werden kann: Zunächst wird für jede Kernposition s_j^x ein Hyperquader $H_{\mathbf{q}}^u \in \mathcal{U}$ durch eine diskrete Suche bestimmt, in welchem die Stelleingänge u_i variieren dürfen. Im zweiten Schritt, wird die gefundene Zuordnung $\mathbf{j} \mapsto \mathbf{q}$ dann festgehalten, sodass (9) zu einem beschränkten kontinuierlichen Optimierungsproblem wird, welches multiaffin in u_i und affin in α_j ist. Diese kann dann z.B. durch sequentielle quadratische Programmierung [11] gelöst werden.

Die Berechnung kann dabei parallel für alle s_j^x durchgeführt werden, da die Wahl einer Konstanten $\mathbf{u} = \mathbf{r}(s_j^x) = \mathbf{s}_j^r$ unabhängig für jede Kernposition ist. Ist für jede Kernposition s_j^x eine Kernpositionsstellgröße s_j^r gefunden, ergibt sich ähnlich einem Gain-Scheduling-Regler die resultierende Rückführung durch Interpolation zwischen Kernpositionsstellgrößen:

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{j}} \mathbf{s}_j^r \cdot \prod_{i=1}^n \mu_{j_i}^{x_i}(x_i). \quad (10)$$

Hierbei sind die Zugehörigkeitsfunktionen $\mu_{j_i}^{x_i}(x_i)$ erneut als Dreiecks- und Rampenfunktionen angenommen. Für die Dynamik des geregelten Systems gilt dann

$$\dot{\mathbf{x}} = \sum_{\mathbf{j}, \mathbf{q}} \mathbf{s}_{\mathbf{w}(\mathbf{j}, \mathbf{q})}^x \cdot \prod_{i=1}^n \mu_{j_i}^{x_i}(x_i) \cdot \prod_{p=1}^m \mu_{q_p}^{u_p} \left(\sum_{\mathbf{j}} s_{\mathbf{j}, p}^{r_p} \prod_{i=1}^n \mu_{j_i}^{x_i}(x_i) \right). \quad (11)$$

Der Nachteil dieses Gain-scheduling-ähnlichen Ansatzes liegt im Fehlen eines expliziten Stabilitätsnachweises. Insbesondere ist nicht ausgeschlos-

sen, dass durch Interpolation zwischen den verschiedenen Kernpositionsstellgrößen s_j^r zusätzliche Ruhelagen entstehen. Daher ist analog zum Entwurf von Gain-scheduling-Reglern eine numerische Verifikation nach der Synthese erforderlich.

Auf der anderen Seite liegt der wesentliche Vorteil dieses Ansatzes in der Tatsache, dass das resultierende Regelgesetz (10) wieder ein (statisches) Fuzzy-System ist und daher linguistisch interpretierbar ist in der Form

$$\text{Wenn } x = L_j^x, \text{ dann } u = L_j^r, \quad (12)$$

wobei linguistische Werte L_j^r mit Kernpositionen s_j^r korrespondieren. Wie in Abschnitt 4 gezeigt wird, liegt ein weiterer Vorteil in der Möglichkeit, Syntheseverfahren für Ausgangsrückführungen aus der linearen Systemtheorie zu übertragen.

3.2 Erweiterung auf allgemeine Gain-Scheduling Regler

Die vorangegangene Methode kann auf allgemeinere Gain-Scheduling-Regler erweitert werden, indem Stellgrößen nicht ausschließlich für Kernpositionen im Zustandsraum bestimmt werden, sondern die Systemdynamik auch innerhalb des Interpolationsgebiets betrachtet wird, d.h. für beliebige $x_\varrho \in \mathcal{X}$. Bild 3 veranschaulicht, dass bei diesem erweiterten Ansatz beliebige Arbeitspunkte betrachtet werden, welche im allgemeinen nicht mit einer Ruhelage übereinstimmen müssen [12]. Somit wird eine erhöhte Anzahl an Kernpositionsstellgrößen für das interpolierende Regelgesetz und damit eine feinere Abdeckung des Zustandsraums erreicht.

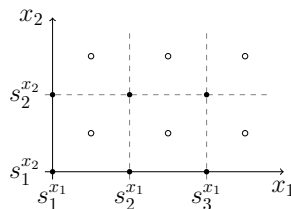


Bild 3: Arbeitspunkte des Gain-scheduling-Reglers: Kernpositionen (●) und Zustände im Inneren von Hyperquadranten (○)

Die Linearisierung der Systemdynamik des RFS um einen Arbeitspunkt $(\mathbf{x}_\varrho, \mathbf{u}_\varrho)$ lautet

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &\approx \sum_{j,q} \mathbf{s}_{w(j,q)}^{\dot{\mathbf{x}}} \prod_{i=1}^n \mu_{j_i}^{x_i}(x_{i,\varrho}) \prod_{p=1}^m \mu_{q_p}^{u_p}(u_{p,\varrho}) \\ &+ \sum_{j,q} \mathbf{s}_{w(j,q)}^{\dot{\mathbf{x}}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\prod_{i=1}^n \mu_{j_i}^{x_i}(x_i) \right) \prod_{p=1}^m \mu_{q_p}^{u_p}(u_{p,\varrho}) \Bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_\varrho} \cdot \Delta \mathbf{x} \\ &+ \sum_{j,q} \mathbf{s}_{w(j,q)}^{\dot{\mathbf{x}}} \prod_{i=1}^n \mu_{j_i}^{x_i}(x_{i,\varrho}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left(\prod_{p=1}^m \mu_{q_p}^{u_p}(u_p) \right) \Bigg|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_\varrho} \cdot \Delta \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (13)$$

mit $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_\varrho$ und $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_\varrho$. Aufgrund der Wahl von nicht stetig differenzierbaren Dreiecks- und Rampenfunktionen ist auch (13) nicht kontinuierlich. Wie Bild 4 zeigt, wird daher der Gradient an den Unstetigkeitsstellen zu null definiert.

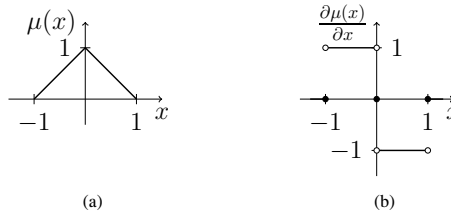


Bild 4: (a) Dreieckförmige Zugehörigkeitsfunktion und (b) Ableitung

Ist ein Arbeitspunkt \mathbf{x}_ϱ identisch mit einer Kernposition \mathbf{s}_j^x , so wird für diese eine konstante Eingangsgröße $\mathbf{u} = \mathbf{r}_\varrho(\mathbf{x}) = \mathbf{s}_j^u$ anhand von (9) bestimmt. Im anderen Fall $\mathbf{x}_\varrho \neq \mathbf{s}_j^x$, wird zunächst ein Arbeitspunkt $\mathbf{u}_\varrho \in \mathcal{U}$ durch

$$\begin{aligned} &\max_q \alpha_\varrho, \text{ so dass} \\ &\mathbf{x}_\varrho^T \cdot \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_\varrho, \mathbf{u}_\varrho) + \alpha_\varrho \mathbf{x}_\varrho^T \mathbf{x}_\varrho < 0, \\ &\mathbf{u}_\varrho = \frac{\mathbf{u}_{\min,q} + \mathbf{u}_{\max,q}}{2}. \end{aligned} \quad (14)$$

bestimmt. Für \mathbf{u}_ϱ werden dabei lediglich Zentren von Hyperquadern H_q^u zugelassen, sodass Stellgrößen bei Abweichung von \mathbf{u}_ϱ weiterhin in H_q^u liegen.

Im nächsten Schritt wird dann ein lineares Regelgesetz für das um $(\mathbf{x}_\varrho, \mathbf{u}_\varrho)$

linearisierte System

$$\begin{aligned}\Delta \dot{\mathbf{x}} &= \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u}_\varrho)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_\varrho} \cdot \Delta \mathbf{x} + \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}_\varrho, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_\varrho} \cdot \Delta \mathbf{u} \\ &= \mathbf{A}_\varrho \cdot \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B}_\varrho \cdot \Delta \mathbf{u}\end{aligned}\quad (15)$$

bestimmt, wobei $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_\varrho$. Da das Ziel die Stabilisierung der Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ist und nicht des Arbeitspunkts $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\varrho$, wird (15) zu

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\Delta \mathbf{x} + \mathbf{x}_\varrho) &= \Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_\varrho \cdot (\Delta \mathbf{x} + \mathbf{x}_\varrho) + \mathbf{B}_\varrho \cdot \Delta \mathbf{u} \\ &= \mathbf{A}_\varrho \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B}_\varrho \cdot \Delta \mathbf{u}.\end{aligned}\quad (16)$$

transformiert.

Eine Lösung für das lineare Regelgesetz $\Delta \mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$ für (16) kann durch Lösen der Linearen Matrix Ungleichungen (LMIs)

$$\mathbf{R} \succ 0, \quad (17a)$$

$$\mathbf{A}_\varrho \mathbf{R} + \mathbf{R} \mathbf{A}_\varrho^T - \mathbf{B}_\varrho \mathbf{Y} - \mathbf{Y}^T \mathbf{B}_\varrho^T \prec 0, \quad (17b)$$

bestimmt werden wobei die Substitution $\mathbf{Y} = \mathbf{K}\mathbf{R}$ zur Vermeidung bilinearer Terme vorgenommen wurde. Da die Linearisierung nur für kleine Auslenkungen aus dem Arbeitspunkt $(\mathbf{x}_\varrho, \mathbf{u}_\varrho)$ gültig ist, muss $\Delta \mathbf{u}$ geeignet beschränkt werden. Zudem muss $\mathbf{u} \in H_q^u$ bleiben, da andernfalls die Dynamik eines anderen Hyperquaders aktiv ist. Da die Zuordnung $\mathbf{x}_\varrho \rightarrow H_q^u$ schon in (14) vorgenommen wurde, ist somit eine Beschränkung $(\mathbf{u}_\varrho + \Delta \mathbf{u}) \in H_q^u$ sinnvoll, wenn $\mathbf{x} \in H_1^x$ mit $\mathbf{x}_\varrho \in H_1^x$. Nach [10] können derartige Stellgrößenbeschränkungen anhand der zusätzlichen LMI-Bedingungen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{Y}^T & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad W_{ii} \leq u_{\max, q_i}, \quad (18a)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{s}_j^x \\ \mathbf{s}_j^{xT} & 1 \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \mathbf{s}_j^x \in H_1^x \quad (18b)$$

berücksichtigt werden, sodass zusammen mit (17) gesichert ist, dass $\Delta \mathbf{u} \leq (\mathbf{u}_{\max, q} - \mathbf{u}_{\min, q})/2$ für alle $\mathbf{x} \in H_1^x$. Das Ergebnis ist dann ein Regler $\mathbf{r}_\varrho(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_\varrho + \Delta \mathbf{u}$ für jeden Arbeitspunkt $\mathbf{x}_\varrho \neq \mathbf{s}_j^x$.

Das gesamte Regelgesetz ergibt sich dann durch Interpolation zwischen den Teilreglern für die verschiedenen Arbeitspunkte

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}(\mathbf{x}) = \frac{\sum_\varrho \mathbf{r}_\varrho(\mathbf{x}) \cdot \prod_{i=1}^n \mu_\varrho^{x_i}(x_i)}{\sum_\varrho \prod_{i=1}^n \mu_\varrho^{x_i}(x_i)}. \quad (19)$$

Der Nachweis der Stabilität des geschlossenen Regelkreises muss in einem letzten Schritt numerisch erfolgen, da die Teilregler des Systems lediglich in ihrem jeweiligen Arbeitspunkt gültig sind, eine globale Stabilitätsaussage hiermit aber nicht gegeben ist.

Aufgrund der höheren Zahl an Arbeitspunkten werden diese allgemeineren Gain-scheduling-Regler gegenüber den Fuzzy-Reglern in Abschnitt 3.1 eine bessere Regelgüte erzielen. Auf der anderen Seite verliert das Regelgesetz somit seine Anschaulichkeit, da zum einen Arbeitspunkte verwendet werden, welche nicht mit Kernpositionen und somit nicht mit Regelprämissen des RFS korrespondieren. Zum anderen sind die Regler im Interpolationsbereich lineare Zustandsrückführungen, deren linguistische Interpretierbarkeit per se schwierig ist.

4 Synthese von Ausgangsrückführungen

Sind nicht alle Zustände messbar, so müssen diese entweder anhand (nicht-linearer) Beobachter rekonstruiert werden, oder es können zur Stabilisierung ausschließlich messbare Zustände zurückgeführt werden. Für den letztgenannten Ansatz existieren nach [13] zwei Strategien: Zum einen kann eine Ausgangsrückführung derart ausgelegt werden, dass sie eine Zustandsrückführung möglichst gut approximiert. Zum anderen kann die Synthesestrategie für Zustandsrückführungen derart erweitert werden, dass lediglich messbare Größen zur Regelung berücksichtigt werden. Wie im Folgenden gezeigt wird, können beide Ansätze auch für Ausgangsrückführungen für RFS angewandt werden.

In beiden Fällen hat die Ausgangsfunktion die Gestalt

$$g(\mathbf{x}) = \sum_j s_j^y \prod_{i=1}^n \mu_{j_i}^{x_i}(x_i), \quad (20)$$

welche ebenfalls ein (statisches) Fuzzy-System ist. Wie zuvor werden auch hier dreieckförmige Zugehörigkeitsfunktionen $\mu_{j_i}^{x_i}(x_i)$ in (20) angenommen.

Zudem wird angenommen, dass die Menge der Kernpositionen $\{s_j^x\}$ in $g(\mathbf{x})$ identisch mit jener in $f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ ist, was die weitere Darstellung vereinfacht. Ein Blockschaltbild des geschlossenen Regelkreises zeigt Bild 5, in dem $k(\mathbf{y})$ die Ausgangsrückführung bezeichnet.

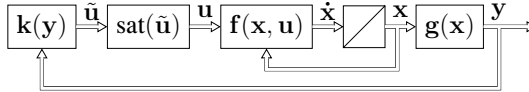


Bild 5: Regelkreis mit Ausgangsrückführung, Stellgrößenbeschränkung und RFS

4.1 Ausgangsrückführung durch Approximation einer Zustandsrückführung

Zur approximativen Bestimmung von Ausgangsrückführungen wird angenommen, dass zunächst eine vollständige Zustandsrückführung $u = r(x)$ in Form eines Fuzzy-Reglers nach Abschnitt 3.1 ausgelegt wurde. Das Ziel ist es dann, eine Ausgangsrückführung $k(y)$ derart zu bestimmen, so dass

$$r(x) = \sum_j s_j^r \cdot \Xi_j(x) \approx k(y) = \sum_1 s_1^k \cdot \Xi_1(y), \quad (21)$$

wobei die Prämisse $\Xi_j(x) = \prod_{i=1}^n \mu_{j_i}^{x_i}(x_i)$ abgekürzt wurde. Für die Ausgangsrückführung $k(y)$ mit Unbekannten s_1^k folgt

$$\begin{aligned} k(y) &= \sum_1 s_1^k \cdot \Xi_1(y) = \sum_1 s_1^k \cdot \Xi_1(g(x)) \\ &= \sum_1 s_1^k \cdot \Xi_1 \left(\sum_j s_j^y \cdot \Xi_j(x) \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Darin sind $\Xi_1(x)$ genau dann konstant, wenn x konstant ist. Da $r(x)$ für Kernpositionen s_j^x im Zustandsraum ausgelegt wurde, ist es sinnvoll, die Zustandsrückführung an diesen Stellen zu approximieren:

$$k(s_j^x) \approx r(s_j^x), \quad \forall s_j^x \in \mathcal{X}. \quad (23)$$

Zusammen mit den N_k Unbekannten $S_k = [s_1^k, \dots, s_{N_k}^k]^T$ der Ausgangsrückführung ergeben sich aus (23) für $r(s_j^x)$ Gleichungen der Form

$$\Xi^T(s_j^x) \cdot S_k = r(s_j^x). \quad (24)$$

Darin bezeichnet

$$\Xi^T(s_j^x) = [\Xi_1(s_j^x), \dots, \Xi_{N_k}(s_j^x)] \otimes \mathbf{I}_n \quad (25)$$

eine $n \times N_k$ -Matrix, welche alle Prämissen der N_k Kernpositionen s_1^k der Zustandsrückführung enthält. Mit \otimes wird das *Kronecker-Produkt* bezeichnet und \mathbf{I}_n ist eine Einheitsmatrix der Dimension n .

Da $\Xi^T(s_j^x)$ ausschließlich Prämissen an Kernpositionen enthält, sind ihre Elemente entweder 0 oder 1. Durch Aggregation aller $N_r = N_x$ Kernpositionen der Zustandsrückführung s_j^x in einem Vektor $\mathbf{S}_r = [s_1^{rT}, \dots, s_{N_r}^{rT}]^T$ kann (24) in kompakter Form als lineares Gleichungssystem

$$\Upsilon \cdot \mathbf{S}_k = \mathbf{S}_r \quad (26)$$

notiert werden, mit $\Upsilon \in \{0, 1\}^{(n \cdot N_r) \times N_k}$ und

$$\Upsilon = [\Xi(s_1^x) \ \dots \ \Xi(s_{N_x}^x)]^T. \quad (27)$$

Da $N_k < n \cdot N_r$ gilt, ist (26) im allgemeinen überbestimmt. Eine Lösung ist z.B. mit Least-squares-Verfahren möglich. Dann ist

$$\mathbf{S}_k = \Upsilon^+ \mathbf{S}_r = (\Upsilon^T \Upsilon)^{-1} \Upsilon^T \mathbf{S}_r \quad (28)$$

eine Lösung für die gesuchten Kernpositionsstellgrößen s_1^k der Ausgangsrückführung, wobei Υ^+ die Moore-Penrose-Pseudoinverse bezeichnet. Die Lösung minimiert dabei den quadratischen Fehler der Summe der Residuen:

$$\min_{s_1^k} \|\Upsilon^T \cdot \mathbf{S}_k - \mathbf{S}_r\|_2^2. \quad (29)$$

Für Konditionszahlen $\text{cond}(\Upsilon^T \Upsilon)$, welche nicht deutlich größer als 1 sind, ist die Lösung \mathbf{S}_k robust gegenüber numerischen Problemen. Ansonsten empfehlen sich eher numerische Verfahren basierend auf der QR-Zerlegung, wie z.B. die Householder-Transformation.

Abschließend muss in jedem Fall die Stabilität des mit der Ausgangsrückführung stabilisierten Systems gesondert untersucht werden.

4.2 Direkte Synthese

In einem zweiten Ansatz wird eine Ausgangsrückführung durch explizite Berücksichtigung der strukturellen Beschränkung in Folge der Ausgangsfunktion (20) entworfen.

Im Fall der Zustandsrückführung in Abschnitt 3.1 wurde eine spezifische Kernpositionsstellgröße $u = s_j^r$ für jede Kernposition s_j^x bestimmt. Es wurde dann angenommen, dass $u = s_j^r$ nur dann aktiv ist, wenn $x = s_j^x$. Im

Fall einer allgemeinen Ausgangsfunktion $g : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ ist diese Abhängigkeit nicht länger möglich. Daher ist nun das Ziel, konstante Stellgrößen s_1^k für jede Kernposition s_1^y der Ausgangsfunktion zu bestimmen, so dass weiterhin die Gradientenbedingung (7) gleichzeitig für alle s_j^x erfüllt ist, welche auf s_1^y abbilden.

Bezeichne $g^{-1}(y)$ die Inverse von $g(x)$. Da $g(x)$ nicht injektiv ist, ist $g^{-1}(y)$ im allgemeinen eine mehrwertige Funktion und daher nicht wohldefiniert. Wird sie lediglich an Kernpositionen $s_1^y \in \mathcal{Y}$ ausgewertet, bildet $g^{-1}(s_1^y)$ auf eine endliche Menge an Kernpositionen $s_j^x \in \mathcal{X}$ ab. Im Folgenden wird diese Menge mit

$$g^{-1}(s_1^y) = \mathcal{S}_x(s_1^y) = \{s_j^x \mid g(s_j^x) = s_1^y\} \quad (30)$$

bezeichnet. Für die Ausgangsrückführung $k : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{U}$, wird ein statisches Fuzzy-System gesucht, dessen Kernpositionen s_1^y identisch zu denen der Ausgangsfunktion $g(x)$ sind. Die freien Parameter s_1^k der Rückführung können dann anhand des folgenden Optimierungsproblems bestimmt werden:

$$\begin{aligned} & \max_{q, s_1^k} \alpha_1, \text{ s.t.} \\ & (s_j^x)^T \tilde{s}_j^k(s_1^k) + \alpha_1 \cdot (s_j^x)^T s_j^x < 0, \quad \forall s_j^x \in \mathcal{S}_x(s_1^y), \\ & \mathbf{u}_{\min, q} \leq s_1^k \leq \mathbf{u}_{\max, q}. \end{aligned} \quad (31)$$

Durch Lösen von (31) wird so eine Kernpositionsstellgröße s_1^k berechnet, die für alle x aktiv ist, welche mit $s_j^x \in \mathcal{S}(s_1^y)$ verbunden sind. Anzumerken ist, dass in (31) ein einziges α_1 für alle $\mathcal{S}_x(s_1^y)$ gewählt wurde. Wie bei den vorherigen Rückführungen ist auch bei diesem Ansatz eine abschließende Verifikation der Stabilität des geschlossenen Regelkreises notwendig.

5 Numerisches Beispiel

Im Folgenden werden die diskutierten Syntheseansätze für Zustands- und Ausgangsrückführungen beispielhaft an einem RFS mit zwei Zuständen und einem Eingang angewandt.

Für den Fall der Zustandsrückführung werden Fuzzy-Regler wie in Abschnitt 3.1 betrachtet, welche zwischen konstanten Eingangsgrößen interpolieren, um einen Vergleich mit den Ausgangsrückführungen zu ermöglichen. Alle Simulationen wurden in MATLAB/SIMULINK durchgeführt.

Zusätzlich wurde zur Lösung der Optimierungsprobleme (9) das Framework YALMIP [14] verwendet.

Die Kernpositionen des betrachteten RFS befinden sich für \mathcal{X} bei $\{s^{x_1}\} = \{s^{x_2}\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, welche mit den linguistischen Werten $\{L_{j_1}^{x_1}\} = \{L_{j_2}^{x_2}\} = \{\text{negativ groß, negativ klein, null, positiv klein, positiv groß}\}$ korrespondieren.

Kernpositionen in \mathcal{U} befinden sich bei $\{s_q^u\} = \{-10, 0, 10\}$, welche mit linguistischen Werten $\{L_q^u\} = \{\text{negativ, null, positiv}\}$ korrespondieren. Die Systemdynamik ist über Kernpositionsgradienten definiert, welche für das freie System ($u = \text{null}$) in Tabelle 1 wiedergegeben ist. Die linguistischen Werte der Kernpositionsgradienten $\{L_{j_1}^{x_1}\}, \{L_{j_2}^{x_2}\}$ sind dabei mit crispen Werten

$$\begin{aligned} \{s_{j_1}^{x_1}\} &= \{-12, -4, -1, 0, 1, 4, 12\} \\ \text{und } \{s_{j_2}^{x_2}\} &= \{-10, -3, -1, 0, 1, 3, 10\} \end{aligned}$$

assoziiert. Ein Phasenportrait des ungeredelten Systems zeigt Bild 6a, aus dem hervorgeht, dass die Ruhelage bei $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ instabil ist.

Tabelle 1: Regelbasis des ungeredelten Systems

L_j^x		$L_{j_2}^{x_2}$				
		ng	nk	z	pk	pg
$L_{j_1}^{x_1}$	ng	pg/pm	pm/ps	pk/z	pm/nm	pg/nm
	nk	pm/nm	pk/nk	pk/z	pk/pk	pm/pk
	z	z/nm	z/nm	z/z	z/pk	z/pm
	pk	nm/nm	nk/nk	nk/z	nk/pk	nm/pk
	pg	ng/pm	nm/pk	nk/z	nm/nm	ng/nm

Für die Ausgangsfunktion wird angenommen, dass nur x_2 messbar ist. Seine Regelbasis ist in Tabelle 1 angegeben, wobei die linguistischen Werte $\{L_l^y\}$ mit Kernpositionen $\{s_l^y\} = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$ verbunden sind. Somit bildet $g(\mathbf{x})$ die lineare Funktion $y = 2x_2$ nach.

Tabelle 2: Regelbasis der Ausgangsfunktion

	$L_{j_2}^{x_2}$				
	ng	nk	z	pk	pg
L_l^y	ng	nk	z	pk	pg

Zur Stabilisierung der Ruhelage wird zunächst eine Zustandsrückführung wie in Abschnitt 3.1 beschrieben ausgelegt. Die sich ergebenden konstan-

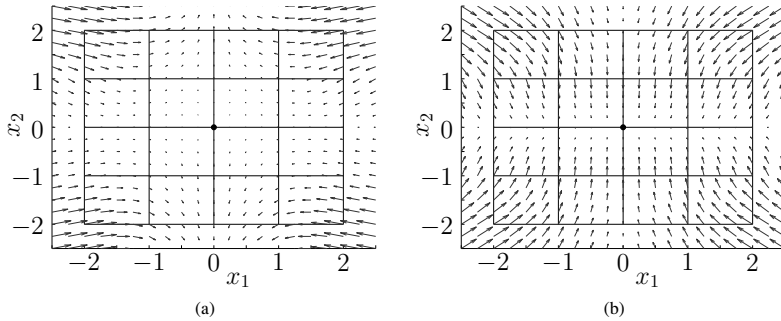


Bild 6: Ruhelage und Gradienten des (a) offenen und (b) mit Zustandsrückführung geregelten Systems

ten Stellgrößen $u = s_j^r$ für jede Kernposition s_j^x sind in Tabelle 3 angegeben. Bild 6b zeigt zudem die Gradienten des geregelten RSF im Zustandsraum sowie die global asymptotisch stabile Ruhelage.

Tabelle 3: Kernpositionsstellgrößen der Zustandsrückführung

$u = s_j^r$		L_{j2}^{x2}				
		nb	ns	z	ps	pb
L_{j1}^{x1}	nb	10	10	10	10	10
	ns	10	10	10	10	10
	z	-0.139	-1.11	0	-1.11	-0.139
	ps	-10	-10	-10	-10	-10
	pb	-10	-10	-10	-10	-10

Für das gleiche System wird eine Ausgangsrückführung durch Approximation der Zustandsrückführung sowie eine Ausgangsrückführung mittels direkter Synthese entworfen. Eine Simulation des Ausgangs y für den Anfangswert $x_0 = [3, 2.5]^T$ ist in Bild 7 gezeigt, in der die Ergebnisse bei Verwendung der Zustands- und Ausgangsrückführung verglichen werden. Wie zu erkennen ist, stabilisiert die Zustandsrückführung die Ruhelage asymptotisch. Das gleiche gilt für die Ausgangsrückführung, welche mittels direkter Synthese entworfen wurde.

Im Fall der Ausgangsrückführung, welche durch Approximation einer Zustandsrückführung gewonnen wurde, wird lediglich Stabilität im Sinne von Ljapunow erreicht. Bild 7 zeigt den Verlauf von u , welcher im Fall der Ausgangsrückführung durch Approximation nicht gegen Null konvergiert. Für

alle Rückführungen gilt jedoch, dass die Stellgrößenbegrenzungen nicht verletzt werden und das Regelgesetz trotz des hybriden Systemcharakters stetig ist, sodass keine Rattereffekte auftreten.

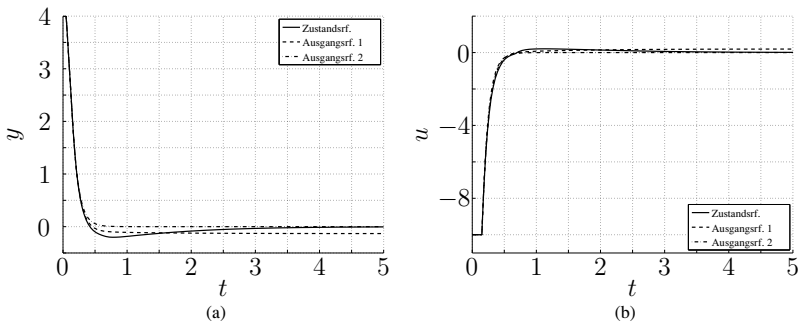


Bild 7: (a) Ausgang y und (b) Stellgröße u für Anfangsauslenkung $\mathbf{x}_0 = [3, 2.5]^T$ im Fall einer vollständigen Zustandsrückführung sowie Ausgangsrückführungen

6 Zusammenfassung

Es wurde ein praktischer Ansatz zur Synthese von Zustands- und Ausgangsrückführungen präsentiert. Dieser basiert auf dem Ansatz, jeder Kernposition des Zustandsraums je eine konstante Stellgröße zuzuordnen, zwischen denen dann interpoliert wird. Der Vorteil des sich so ergebenden Fuzzy-Reglers liegt sicherlich in seiner einfachen Implementierbarkeit sowie der Möglichkeit der linguistischen Interpretierbarkeit. Diese kann dabei mit der gleichen Terminologie wie jene des RFS erfolgen. Bei Erweiterung des Konzepts auf allgemeinere Gain-Scheduling-Regler kann zudem eine bessere Regelgüte erreicht werden. Dies senkt jedoch die linguistische Interpretierbarkeit und erhöht den Implementierungsaufwand.

Die Methode zur Zustandsrückführung wurde zudem auf Ausgangsrückführungen erweitert. Hierbei zeigte sich, dass Methoden zur Synthese von Ausgangsrückführungen, welche aus der linearen Systemtheorie bekannt sind, auch auf RFS übertragbar sind.

In der Anwendung der Verfahren an einem akademischen Beispiel ergaben sich bei allen Verfahren eine Stabilisierung des Systems. Ist zudem eine stationäre Genauigkeit erforderlich, so eignet sich bei der Auslegung

der Ausgangsrückführung insbesondere die direkte Berücksichtigung der strukturellen Beschränkung bei der Synthese, auch wenn hierbei der Entwurfsaufwand höher ist als bei einer einfachen Approximation von Zustandsrückführungen.

Bislang unberücksichtigt geblieben sind die Auswirkungen von Modellierungsfehlern auf die erreichbare Regelgüte, sodass Gegenstand weiterer Arbeiten der Fokus auf möglichst robusten Rückführungen liegen soll. Zudem wurden in dieser Arbeit lediglich die Stabilisierung einzelner Ruhelagen betrachtet, wobei sich die Frage der Erweiterbarkeit auf Folgeregelungen stellt. Schließlich wurde das RFS als gegeben angenommen, welches stets eine vollständige Regelbasis aufweist. Hier stellt sich die Frage der Erweiterbarkeit des präsentierten Ansatzes auf unvollständig spezifizierte RFS sowie RFS mit allgemeineren Partitionierungen des Eingangs-Zustandsraums.

Literatur

- [1] Juang, C.-F.; Lin, C.-T.: A recurrent self-organizing neural fuzzy inference network. *IEEE Transactions on Neural Networks* 10 (1999) 4, S. 828–845.
- [2] Zhang, J.; Morris, A.: Recurrent neuro-fuzzy networks for nonlinear process modeling. *IEEE Transactions on Neural Networks* 10 (1999) 2, S. 313–326.
- [3] Takagi, T.; Sugeno, M.: Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions On Systems, Man And Cybernetics* 15 (1985) 1, S. 116–132.
- [4] Kempf, R.; Adamy, J.: Equilibria of recurrent fuzzy systems. *Fuzzy Sets and Systems* 140 (2003) 2, S. 231–257.
- [5] Adamy, J.; Schwung, A.: Modellierung dynamischer Systeme mit zeitkontinuierlichen rekurrenten Fuzzy-Systemen. *at - Automatisierungstechnik* 3 (2009), S. 129–137.
- [6] Gering, S.; Adamy, J.: Synthesis of Local State Feedback for Continuous-Time Recurrent Fuzzy Systems. In: *Proc. of the IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*. 2013.
- [7] Adamy, J.; Flemming, A.: Equilibria of continuous-time recurrent fuzzy systems. *Fuzzy Sets and Systems* 157 (2006) 22, S. 2913–2933.

- [8] Kempf, R.: *Rekurrenente Fuzzy-Systeme*. Dissertation, Technische Universität Darmstadt. 2004.
- [9] Flemming, A.: *Zeitkontinuierliche rekurrenente Fuzzy-Systeme*. Dissertation, Technische Universität Darmstadt. 2008.
- [10] Boyd, S.; Ghaoui, L. E.; Feron, E.; Balakrishnan, V.: *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia. 1994.
- [11] Nocedal, J.; Wright, S.: *Numerical Optimization*. Springer. 2006.
- [12] Leith, D. J.; Leithead, W. E.: Survey of gain-scheduling analysis and design. *International Journal of Control* 73 (2000) 11, S. 1001–1025.
- [13] Föllinger, O.: *Regelungstechnik*. Hüthig. 1990.
- [14] Löfberg, J.: YALMIP : A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB. In: *Proceedings of the CACSD Conference*. 2004.