
Dynamische Eigenschaften axial durchströmter Ringspalte

Maximilian M. G. Kuhr

Band 29



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

 FLUID
SYSTEM
TECHNIK

Forschungsberichte zur Fluidsystemtechnik

Herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. Peter F. Pelz

Dynamische Eigenschaften axial durchströmter Ringspalte

Vom Fachbereich Maschinenbau
an der Technischen Universität Darmstadt
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktor-Ingenieurs
(Dr.-Ing.)

eingereichte

D I S S E R T A T I O N

vorgelegt von

Maximilian Markus Georg Kuhr M.Sc.

aus Aachen

Berichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. Peter F. Pelz
Mitberichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. Rainer Nordmann
Tag der Einreichung:	25.01.2022
Tag der mündlichen Prüfung:	17.03.2022

Darmstadt 2022

D 17

Forschungsberichte zur Fluidsystemtechnik

Band 29

Maximilian Markus Georg Kuhr

**Dynamische Eigenschaften
axial durchströmter Ringspalte**

D 17 (Diss. TU Darmstadt)

Shaker Verlag
Düren 2022

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Zugl.: Darmstadt, Techn. Univ., Diss., 2022

Copyright Shaker Verlag 2022

Licence: CC BY-NC 4.0 /

Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-8610-2

ISSN 2194-9565

Shaker Verlag GmbH • Am Langen Graben 15a • 52353 Düren Telefon:
02421 / 99 0 11 - 0 • Telefax: 02421 / 99 0 11 - 9
Internet: www.shaker.de • E-Mail: info@shaker.de

Vorwort des Herausgebers

Dem Entwicklungsprozess wohnt inne, dass der Entwickler (oder der Algorithmus, der in Zukunft möglicherweise den Menschen im Designprozess ersetzt) sowohl Funktion als auch die drei Qualitätsdimensionen Aufwand, Verfügbarkeit und Akzeptanz antizipieren muss. Dies gilt, da das zu realisierende System noch gar nicht existiert. Die Antizipation erfordert Modelle und insbesondere Vertrauen in die Modelle. Die Modellunsicherheit soll also klein sein. Nun gilt zur Validität von Modellen die Erkenntnis: „Alle Modelle sind falsch, manche nützlich“ (George Box). Daneben sind die vier Anforderungen von Heinrich Hertz an ein Modell zu stellen: Ein gutes Modell ist a) konsistent, b) knapp, c) klar (Hertz) und d) valide (Box). Bekanntermaßen wird die Modellimplementierung im Verifikationsprozess überprüft.

Es wird eng und turbulent: Spalte, Dichtungen und Lager

Für den Maschinenbau, der durch Entwicklung, Fertigung, Verkauf und Beschäftigung die meisten Steuern in den Staatshaushalt bringt, gilt: „Am Anfang war die Mittellinie“. Dann kommt schon die Welle, die Spaltdichtung oder das mediengeschmierte Lager und dann der Rest, d.h. die Wicklungen, Schaufeln, Kolben und Zahnräder, die unsere technische Welt in Gang halten. Unsere Welt ruht also auf den Lagern, die Herr Kuhr in seiner Dissertation betrachtet.

Eine Welle in einem Lager hat zunächst sechs Freiheitsgrade. Der Drehfreiheitsgrad ist durch das Zusammenspiel von An- und Abtrieb vorgegeben, sodass fünf Freiheitsgrade übrigbleiben. Die Translation in axialer Richtung wird über ein Axiallager gesperrt, sodass vier Freiheitsgrade verbleiben, nämlich zwei translatorische und zwei rotatorische Freiheitsgrade. Letztere sind die Verkipfung der Welle um die zwei lateralen Achsen. Lager haben kapazitive (Nachgiebigkeit), dissipative (Dämpfung) und induktive (Trägheit) Eigenschaften. Damit werden die dynamischen Eigenschaften des Lagers durch 48 Koeffizienten beschrieben, sofern eine Theorie erster Ordnung verwendet wird. Diese dynamischen Eigenschaften stehen im Fokus der Arbeit von Herrn Kuhr.

Bekannte experimentelle und numerische Arbeiten zur dynamischen Eigenschaft von Spalten vernachlässigen immer einen oder mehrere der acht wesentlichen Aspekte, die hier aufgelistet sind:

1. Die Flüssigkeitsträgheit bei klassischer Schmierfilmtheorie. Diese ist nur bei kleinem Produkt von Reynoldszahl und relativem Lagerspiel vernachlässigbar. Diejenigen, die die Reynoldssche Gleichung lösen, vernachlässigen von vornherein 16 der 48 Koeffizienten.
2. Häufig wird die axiale Strömung nicht beachtet oder der Vordrall der Strömung beim Eintritt in den Spalt. Beides ist aber wesentlich für die Stabilität des Rotors, wie Herr Kuhr zeigt.
3. Zumeist wird die Verkipfung der Welle ignoriert und allein die beiden translatorischen Freiheitsgrade betrachtet. Dies reduziert die Anzahl der dynamischen Koeffizienten von 48 auf nun mehr zwölf. Wie Herr Kuhr aber in seiner Arbeit eindrucksvoll zeigt, ist die Vernachlässigung der Verkipfung bei der Stabilitätsbetrachtung häufig nicht zulässig.
4. Eine experimentelle Modellvalidierung erfolgt häufig nicht. Dies hat den Grund, dass experimentelle Daten extrem rar sind, da praktisch keine Prüfstände existieren. Die zwei von Herrn Kuhr entwickelten Prüfstände bauen auf den Ideen und Prüfständen von Herrn Prof. Nordmann auf. Die beiden am Institut für Fluidsystemtechnik von Herrn Kuhr entwickelten und genutzten Prüfstände führen das Konzept konsequent weiter, sodass heute zwei weltweit einzigartige Prüfstände zur Charakterisierung von Spalten in der Darmstädter Halle stehen.
5. Die Unsicherheitsquantifizierung der Messdaten erfolgt häufig halberzig, wenn überhaupt. Herr Kuhr hat demgegenüber innovativ die Unsicherheitsquantifizierung im Frequenzraum erweitert.
6. Heutzutage wird die Berücksichtigung der zusätzlichen 36 rotordynamischen Koeffizienten zumeist einzig auf Basis der Ringspaltlänge beurteilt. Im Allgemeinen wird empfohlen, dass ab einem Verhältnis Ringspaltlänge zu Wellenradius von 1.5 die zusätzlichen Koeffizienten in der Bewegungsgleichung relevant werden. Die Herleitung dieses geometrischen Schwellenwerts vernachlässigt jedoch jedweden operativen Parameter des Ringspalts gänzlich (Druckdifferenz, Drall, etc.). Herr Kuhr zeigt, dass neben der Ringspaltlänge auch die Durchflusszahl und die modifizierte Reynoldszahl ausschlaggebend für die Beurteilung der

Relevanz der zusätzlichen rotordynamischen Koeffizienten ist. Das für die Praxis sehr wichtige Ergebnis ist Abbildung 6.10 und Abbildung 6.11 auf Seite 156 ff.

7. Die Bewertung der Systemstabilität erfolgt bei Herrn Kuhr über das logarithmische Dekrement. Hierbei verwendet Herr Kuhr eine erweiterte Betrachtung des logarithmischen Dekrements, basierend auf den Arbeiten von Kanemori & Iwatsubo. Diese alternative Formulierung stellt strenggenommen eine weitere Analyse des Realteils der Eigenwerte dar. Mit dieser ist es möglich, den Einfluss der einzelnen physikalischen Effekte, d.h. der Kräfte und Momente auf den Rotor durch translatorische bzw. rotatorische Bewegungen, auf die Stabilität des Systems gesondert zu betrachten. Herr Kuhr zeigt, dass im Allgemeinen die Kräfte durch translatorische Bewegungen sowie die Momente durch rotatorische Bewegungen stabilisierend wirken, wohingegen die Kräfte durch rotatorische Bewegung und Momente durch translatorische Bewegungen einen destabilisierenden Einfluss haben. Diese Klarheit und Eleganz, die Heinrich Hertz fordert (konsistent, knapp, klar s.o.) ist häufig bei anderen Autoren nicht gegeben.
8. Heutzutage werden zur Berücksichtigung der Geschwindigkeitsprofile im Spalt entweder parabolische oder blockartige Profile verwendet. Die reale Welt ist aber häufig turbulent. Von den Integralmethoden der Grenzschichttheorie kennt man den praktischen Nutzen von Potenzansätzen für die Geschwindigkeitsprofile. Dies hat Herr Kuhr und sein Vorgänger Herr Dr.-Ing. Lang richtigerweise umgesetzt und damit einen wesentlichen Fortschritt erzielt. Nun könnte man auf die Idee kommen, die Strömung im Spalt mittels 3D-CFD-Methoden zu berechnen. In der Tat ist dies ein Zugang. Die Zeiteffizienz dieses Verfahrens ist allerdings nicht akzeptabel. Daher haben mein früherer Mitarbeiter Herr Lang und meine derzeitigen Mitarbeiter, die Herren Kuhr und Robrecht CAPM entwickelt.

Nutzen für die Wissenschaft und die Industrie

Ein generischer Prüfstand ist bereits ein Modell der technischen Wirklichkeit. Herr Kuhr hat deren zwei gebaut, wobei nur einer in der Arbeit vorgestellt wird. Herr Kuhr's Lagerprüfstände sind äußerst komplexe mechatronische Systeme. Eine Feldberechnungsmethode ist ein Modell. Herr Kuhr hat wesentliche Funktionen von CAPM erst ermöglicht, so die Bestimmung dynamischer Koeffizienten. CAPM ist im Vergleich zu 3D-CFD knapp, aber gleichzeitig wie 3D-CFD konsistent. Es ist valide im Vergleich zu den gemessenen Lager- und Dichtungseigenschaften, wohingegen die Lösung der Reynoldsschen Gleichung häufig nicht valide Ergebnisse liefert. Bei der Reynoldsschen Gleichung gilt der Satz von George Box. Die Gültigkeit der Gleichung ist an Grenzen gebunden, die häufig ignoriert werden. Herr Kuhr hat ein Systemmodell gebildet und zwar mit den konzentrierten Parametern, die aus CAPM oder dem Prüfstand resultieren. Letztlich hat Herr Kuhr mit Abbildung 6.11 wichtige Konstruktionshinweise gegeben. Auch dies ist ein Modell, da es den Design-Raum einschränkt. Insgesamt hat Herr Kuhr vier unterschiedliche Modelle erarbeitet und validiert. Jedes Modell dient einem unterschiedlichen Zweck. Herr Kuhr bringt nicht nur die Wissenschaft in den Methoden und Erkenntnissen voran, sondern auch die Industrie, die bereits heute seine Ergebnisse zur Auslegung von Rotoren und deren Lagerungen nutzt.

Darmstadt, im März 2022

Peter Pelz

Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand im Laufe mehrerer Forschungsprojekte, während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter des Instituts für Fluidsystemtechnik der Technischen Universität Darmstadt. Im Laufe dieser Zeit hatte ich das Vergnügen, mit einer Vielzahl von außergewöhnlichen Menschen zusammenzuarbeiten. Einigen von ihnen bin ich zu besonderem Dank verpflichtet.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Peter F. Pelz danke ich für die Betreuung der Arbeit und das fortwährende Vertrauen in meine Forschung und mich. Besonders die von ihm zugesicherten Freiheiten sowie die fachliche und gestalterische Unterstützung haben maßgeblich zur Entstehung dieser Arbeit beigetragen.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Rainer Nordmann danke ich für die bereitwillige Übernahme des Koreferats, die fachliche Betreuung sowie das besondere Interesse an meiner Arbeit.

Ein besonderer Dank gilt den Mitarbeitern der institutseigenen mechanischen Werkstatt Udo Trometer, Andreas Schuler, Kai Habermann und Dieter Meier für die Fertigung der Prüfstandskomponenten.

Allen Kolleginnen und Kollegen des Instituts danke ich für die wertvollen Gespräche und die tolle Arbeitsatmosphäre am Institut. Ein außerordentlicher Dank für die ursprüngliche Gestaltung des Forschungsthemas am Institut sowie die Unterstützung auch nach seiner aktiven Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter gilt Herrn Dr.-Ing. Sebastian Lang. Des Weiteren gilt mein besonderer Dank den Herren Dr.-Ing. Gerhard Ludwig, Dr.-Ing. John Fiesen, Dr.-Ing. Christian Schänzle, Dr.-Ing. Bastian Pfau, Grigorios Hatzissawidis, Benjamin Hermann, Kevin Logan, Manuel Rexer, Robin Robrecht und Philipp Wetterich für die fachliche und gestalterische Unterstützung bei der Anfertigung dieser Arbeit.

Ein zusätzlicher, aber nicht minder wichtiger Dank geht an die große Anzahl von Studierenden, welche mit Engagement und Begeisterung den Aufbau des Prüfstands sowie die Entwicklung des Modells begleitet haben. Besonders hervorzuheben sind hierbei die Herren Tom Bayer, Lucas Kreuder und Leon Schuhmann, welche sich auch vor bzw. nach den regulären Arbeitszeiten meiner Forschung gewidmet haben.

Besonderer Dank gilt meiner Familie. Meinen Eltern Markus und Bettina Kuhr für den moralischen und humoristischen Rückhalt in frustrierenden Zeiten sowie meinen Schwiegereltern Andrea und Robert Schäfer für die guten Zusprüche bei besonders langen Arbeitstagen.

VI

Mein abschließender und größter Dank gilt meiner Frau Nicole und unseren beiden Söhnen Leon und Louis, ohne deren Rückhalt, alltägliche Ablenkungen und stetige Ermutigungen die vorliegende Dissertation nicht entstanden wäre. Ihnen ist diese Arbeit gewidmet.

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit, abgesehen von den in ihr ausdrücklich genannten Hilfen, selbstständig verfasst habe.

Darmstadt, im Januar 2022

Maximilian M. G. Kuhr

Try. Do or do not. There is no try.

Jedi Master Yoda^a

^a **Star Wars** © & Lucasfilm Ltd. All Rights Reserved. Used under authorization. COURTESY OF LUCASFILM LTD.

Kurzfassung

Das rotordynamische Verhalten moderner Fluidenergiemaschinen wird im Wesentlichen durch die dynamischen Eigenschaften axial durchströmter Ringspalte beeinflusst. Durch strömungsmechanische Effekte innerhalb der Ringspalte werden bewegungsabhängige Kräfte und Momente auf den Rotor induziert. Obgleich der dynamische Einfluss unbestritten ist, vernachlässigt der Großteil der Untersuchungen in der Literatur die induzierten Momente durch translatorische sowie die Kräfte und Momente durch rotatorische Bewegungen. Eine systematische, theoretische und experimentelle Untersuchung der dynamischen Eigenschaften, d.h. aller 48 rotordynamischen Koeffizienten, ist somit nicht vorhanden. Die vorliegende Arbeit liefert einen maßgeblichen Beitrag zur Schließung dieser Forschungslücke. Aufbauend auf der zentralen Frage nach der Kenntnis aller 48 rotordynamischen Koeffizienten, wird der Stand der Forschung hinsichtlich der dynamischen Eigenschaften typischer Ringspalte wie Gleitlager und berührungsloser Fluiddichtungen aufgearbeitet. Besonders die Annahmen zur heutzutage üblichen Modellierung des dynamischen Einflusses mit 12 rotordynamischen Koeffizienten werden hervorgehoben und kritisch diskutiert. Im Anschluss daran wird ein existierendes, zeiteffizientes Berechnungswerkzeug, das Clearance-Averaged Pressure Model (CAPM), zur Berechnung aller 48 rotordynamischen Koeffizienten erweitert und initial mit den wenigen verfügbaren Daten aus der Literatur verglichen. Zur ausführlichen Validierung des Modells wird ein eigens konzipierter und weltweit einzigartiger Prüfstand vorgestellt. Dieser Prüfstand ermöglicht es sowohl die statischen als auch dynamischen Eigenschaften axial durchströmter Ringspalte zu identifizieren. Durch Vergleich der experimentellen Ergebnisse mit den Berechnungen des CAPM wird das Modell validiert. Das validierte Modell wird im Anschluss zur Untersuchung des Einflusses der Geometrie- und Betriebsparameter auf die 48 rotordynamischen Koeffizienten verwendet. Im Wesentlichen wird hierbei die Frage beantwortet, ab welchen Bedingungen eine Vernachlässigung der zusätzlichen 36 Koeffizienten gerechtfertigt ist. Es zeigt sich, dass neben der Ringspaltlänge auch die Durchflusszahl und die modifizierte Reynoldszahl ausschlaggebend für die Beurteilung der Relevanz der zusätzlichen Koeffizienten ist. Abschließend wird der Frage nachgegangen, welche Auswirkung eine Modellierung des dynamischen Einflusses mit und ohne Betrachtung der zusätzlichen 36 rotordynamischen Koeffizienten auf das Verhalten eines Beispielsystems hat. Mit Hilfe einer alternativen Formulierung des logarithmischen Dekrements wird gezeigt, dass die Kräfte aus der translatorischen Bewegung sowie die Momente aus der rotatorischen Bewegung einen stabilisierenden Einfluss auf das System aufweisen. Die Kräfte aus der rotatorischen Bewegung und die Momente aus der translatorischen Bewegung wirken hingegen destabilisierend auf das System.

Abstract

The rotordynamic behaviour of modern turbomachinery is mainly influenced by the dynamic characteristics of annular gaps with an axial flow component. Due to fluid mechanical effects, motion-dependent forces and torques are induced on the rotor. Although the dynamic influence is indisputable, most of the published studies neglect the induced torques due to translational motions as well as the forces and torques due to angular motions. A systematic theoretical and experimental investigation of the dynamic characteristics, i.e. of all 48 rotordynamic coefficients, thus does not exist. The present thesis contributes significantly to bridge this research gap. Based on the main research question regarding the knowledge of all 48 rotordynamic coefficients, the latest research regarding the dynamic characteristics of typical annular gaps such as journal bearings and annular seals is reviewed. Especially, the assumptions concerning the nowadays common modelling of the dynamic influence with 12 rotordynamic coefficients are highlighted and critically discussed. Subsequently, an existing time-efficient calculation tool, the Clearance-Averaged Pressure Model (CAPM), is enhanced to calculate all 48 rotordynamic coefficients. The CAPM is initially compared to the limited data available from published works. A specially designed and worldwide unique test rig is introduced to validate the model in detail. The test rig allows identifying both the static and dynamic characteristics of annular gaps with an axial flow component. Subsequently, the model is validated by comparing the experimental results to the calculations obtained by the Clearance-Averaged Pressure Model. The validated model is then used to investigate the influence of the geometry and operating parameters on the 48 rotordynamic coefficients. Essentially, the question under which conditions the additional 36 coefficients can be neglected is answered. It is shown that, in addition to the length of the annulus, the flow number and the modified Reynolds number are decisive for assessing the relevance of the additional coefficients. Finally, the question is addressed which effect a modelling of the dynamic influence with and without consideration of the additional 36 rotordynamic coefficients has on the behaviour of an exemplary system. Using an alternative formulation of the logarithmic decrement, it can be shown that the forces from the translational motions as well as the torques from the angular motions have a stabilizing effect on the system. The forces from the angular motions and the torques from the translational motions, on the other hand, have a destabilizing effect on the system.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen	9
2.1	Der axial durchströmte Ringspalt	10
2.2	Stand der Forschung	20
2.2.1	Dynamische Eigenschaften öl- bzw. fördermedienge- schmierter Gleitlager und berührungsloser Fluiddich- tungen	20
2.2.2	Generalisierte Betrachtung der dynamischen Eigenschaf- ten	30
2.2.3	Zwischenfazit	35
2.3	Systemverhalten	36
2.3.1	Whirl-Frequenzverhältnis und effektive Dämpfung . . .	36
2.3.2	Hurwitz-Kriterium	40
2.3.3	Das logarithmische Dekrement	42
3	Modellbildung	45
3.1	Das Clearance-Averaged Pressure Model	46
3.2	Störungsrechnung	54
3.3	Voruntersuchungen	65
3.3.1	Rotordynamische Koeffizienten aus den Kräften auf den Rotor durch translatorische Bewegung	67
3.3.2	Rotordynamische Koeffizienten aus den Momenten auf den Rotor durch rotatorische Bewegung	69
3.4	Zwischenfazit	71
4	Der Spaltströmungsprüfstand	73
4.1	Versuchsaufbau	74
4.2	Identifikationsverfahren	82
4.3	Quantifizierung der Messunsicherheit	86
4.3.1	Systematische und statistische Messunsicherheit	86
4.4	Vorversuche	91
4.4.1	Validierung des Identifikationsverfahrens	91
4.4.2	Dynamische Eigenschaften des Versuchsaufbaus	95
5	Experimentelle Identifikation und Modellvalidierung	101
5.1	Variation der Ringspaltlänge	104
5.1.1	Steifigkeiten	106

5.1.2	Dämpfungen	110
5.1.3	Trägheiten	112
5.2	Variation der Durchflusszahl	116
5.2.1	Steifigkeiten	116
5.2.2	Dämpfungen	118
5.2.3	Trägheiten	120
5.3	Variation des Taumelpunkts	122
5.3.1	Steifigkeiten	122
5.3.2	Dämpfungen	124
5.3.3	Trägheiten	126
5.4	Zwischenfazit	128
6	Weiterführende Untersuchungen und Relevanz einer generalisierten Betrachtung	129
6.1	Einfluss der Ringspaltlänge	131
6.1.1	Steifigkeiten	132
6.1.2	Dämpfungen	134
6.1.3	Trägheiten	136
6.2	Einfluss der Durchflusszahl	138
6.2.1	Steifigkeiten	138
6.2.2	Dämpfungen	142
6.2.3	Trägheiten	144
6.3	Einfluss der modifizierten Reynoldszahl	146
6.3.1	Steifigkeiten	146
6.3.2	Dämpfungen	148
6.3.3	Trägheiten	150
6.4	Beurteilung der Relevanz der zusätzlichen rotordynamischen Koeffizienten	152
6.5	Zwischenfazit	160
7	Systemverhalten	163
7.1	Alternative Formulierung des logarithmischen Dekrements	165
7.2	Einfluss einer generalisierten Betrachtung auf das Systemverhalten	170
7.2.1	Einfluss der Ringspaltlänge	170
7.2.2	Einfluss des Vordralls	178
7.3	Zwischenfazit	182
8	Zusammenfassung und Ausblick	183
	Literatur	189

A	Dimensionsanalyse	199
B	Der Spaltströmungsprüfstand	203
	B.1 Komponenten	203
	B.2 Messtechnik	205
C	Experimentelle Identifikation und Modellvalidierung	207
	C.1 Variation der modifizierten Reynoldszahl	208
	C.2 Variation des Vordralls	211
D	Weiterführende Untersuchungen und Relevanz einer generalisierten Betrachtung	215
	D.1 Einfluss der relativen Exzentrizität	216
	D.2 Einfluss des Taumelpunkts	219
	D.3 Einfluss des Vordralls	222
	D.4 Relevanz der zusätzlichen rotordynamischen Koeffizienten . . .	225
E	Systemverhalten	229
	E.1 Einfluss der Ringspaltlänge auf die logarithmischen Teildekremente	230
	E.2 Einfluss der Ringspaltlänge auf die logarithmischen Teildekremente	231
	E.3 Einfluss der relativen Exzentrizität	232
	E.4 Einfluss des Taumelpunkts	235
	E.5 Einfluss der modifizierten Reynoldszahl	238
	E.6 Einfluss der Durchflusszahl	241

Symbolverzeichnis

Die Symbole der ersten Spalte werden in der zweiten Spalte beschrieben. Dimensionsbehaftete Größen werden innerhalb der Arbeit durch eine Tilde $\tilde{}$ gekennzeichnet. Die dritte Spalte, wenn vorhanden, gibt bei dimensionsbehafteten Größen die Dimension als Produkt der Basisgrößen Länge (L), Masse (M), Zeit (T), Temperatur (Θ) und elektrischer Strom (I) an. Bei dimensionslosen Größen gibt die dritte Spalte die zugehörige Definition an.

Dimensionsbehaftete Größen

Symbol	Beschreibung	Dimension
\tilde{A}	Fläche	L^2
\tilde{B}	magnetische Flussdichte	$MT^{-2}I^{-1}$
\tilde{c}_φ	Geschwindigkeit in Umfangsrichtung	LT^{-1}
\tilde{c}_z	Geschwindigkeit in axialer Richtung	LT^{-1}
\tilde{C}_φ	Geschwindigkeit in Umfangsrichtung auf halber Ringspalthöhe	LT^{-1}
$\tilde{C}_\varphi _{z=0}$	Umfangskomponente der Strömung vor Eintritt in den Ringspalt	LT^{-1}
\tilde{C}_z	Geschwindigkeit in axialer Richtung auf halber Ringspalthöhe	LT^{-1}
$\tilde{\tilde{C}}_z$	mittlere axiale Strömungsgeschwindigkeit	LT^{-1}
\tilde{C}_{ij}	Dämpfungskoeffizient aus Kraft und translatorischer Bewegung ($i, j = X, Y$)	MT^{-1}
\tilde{C}'_{ij}	Dämpfungskoeffizient aus Kraft und rotatorischer Bewegung ($i = X, Y; j = \alpha, \beta$)	LMT^{-1}
\tilde{C}_{ij}	Dämpfungskoeffizient aus Moment und translatorischer Bewegung ($i = \alpha, \beta; j = X, Y$)	LMT^{-1}
\tilde{C}_{ij}	Dämpfungskoeffizient aus Moment und rotatorischer Bewegung ($i, j = \alpha, \beta$)	L^2MT^{-1}
\tilde{D}	Durchmesser des Rotors	L
\tilde{e}	Exzentrizität des Rotors	L
$\Delta\tilde{e}$	Amplitude der Präzessionsbewegung um die statische Ruhelage	L
\tilde{E}_{KIN}	kinetische Energie	L^2MT^{-2}

\tilde{f}	Frequenz der Präzessionsbewegung	T^{-1}
\tilde{F}	Kraft der Strömung auf den Rotor	LMT^{-2}
\tilde{g}	Massenkraft der Schwere	LT^{-2}
\tilde{G}	Gewichtskraft des Rotors	LMT^{-2}
\tilde{h}	mittlere Spaltweite	L
\tilde{K}_{ij}	Steifigkeitskoeffizient aus Kraft und translatorischer Bewegung ($i, j = X, Y$)	MT^{-2}
\tilde{K}_{ij}	Steifigkeitskoeffizient aus Kraft und rotatorischer Bewegung ($i = X, Y; j = \alpha, \beta$)	LMT^{-2}
\tilde{K}_{ij}	Steifigkeitskoeffizient aus Moment und translatorischer Bewegung ($i = \alpha, \beta; j = X, Y$)	LMT^{-2}
\tilde{K}_{ij}	Steifigkeitskoeffizient aus Moment und rotatorischer Bewegung ($i, j = \alpha, \beta$)	L^2MT^{-2}
\tilde{L}	Ringspaltlänge	L
\tilde{M}	Moment der Strömung auf den Rotor	LM^2T^{-2}
\tilde{M}_{ij}	Trägheitskoeffizient aus Kraft und translatorischer Bewegung ($i, j = X, Y$)	M
\tilde{M}_{ij}	Trägheitskoeffizient aus Kraft und rotatorischer Bewegung ($i = X, Y; j = \alpha, \beta$)	LM
\tilde{M}_{ij}	Trägheitskoeffizient aus Moment und translatorischer Bewegung ($i = \alpha, \beta; j = X, Y$)	LM
\tilde{M}_{ij}	Trägheitskoeffizient aus Moment und rotatorischer Bewegung ($i, j = \alpha, \beta$)	L^2M
\tilde{M}_{ROT}	Masse des Rotors	M
\tilde{Q}	Volumenstrom	L^3T^{-1}
\tilde{p}	Druck	$L^{-1}MT^{-2}$
\tilde{r}	Radialkoordinate	L
\tilde{R}	Rotorradius	L
\tilde{s}	Lage des Rotorschwerpunkts	L
\tilde{t}	Zeit	T
\tilde{T}	Temperatur	Θ
\tilde{V}	Volumen des Rotors	L^3
\tilde{X}	X-Koordinate	L
\tilde{Y}	Y-Koordinate	L
\tilde{z}	z-Koordinate	L
\tilde{z}_T	Abstand des Taumelpunkts vom Ringspalttritt	L
$\tilde{\delta}$	Grenzschichtdicke	L
$\tilde{\Gamma}$	Zirkulation	L^2T^{-1}
$\tilde{\eta}$	dynamische Viskosität	$L^{-1}MT^{-1}$

$\tilde{\Theta}_{\text{ROT}}$	Trägheit des Rotors	L^2M
$\tilde{\lambda}$	Eigenwert	T^{-1}
$\tilde{\mu}_0$	magnetische Feldkonstante	$LMT^{-2}I^{-2}$
$\tilde{\nu}$	kinematische Viskosität	L^2T^{-1}
$\tilde{\rho}$	Dichte	$L^{-3}M$
$\tilde{\tau}_{y\varphi} _0^{\hbar}$	Summe der Wandschubspannungen an Stator und Rotor in Umfangsrichtung	$L^{-1}MT^{-2}$
$\tilde{\tau}_{yz} _0^{\hbar}$	Summe der Wandschubspannungen an Stator und Rotor in axialer Richtung	$L^{-1}MT^{-2}$
$\tilde{\Phi}$	Potential der Strömung	L^2T^{-1}
$\tilde{\omega}$	Kreisfrequenz der Präzessionsbewegung	T^{-1}
$\tilde{\omega}_0$	Eigenfrequenz	T^{-1}
$\tilde{\omega}_D$	Eigenfrequenz des gedämpften Systems	T^{-1}
$\tilde{\Omega}$	Kreisfrequenz des Rotors	T^{-1}

Dimensionslose Größen

Symbol	Beschreibung	Definition
a_i	i -ter Koeffizient des charakteristischen Polynoms	
B	einhüllende Abklingkurve einer Schwingung	
c_{\square}	Skalar der zerlegten Dämpfungsmatrix des rotordynamischen Systems	
c_{φ}	dimensionslose Geschwindigkeit in Umfangsrichtung	$\tilde{c}_{\varphi} / (\tilde{\Omega} \tilde{R})$
c_z	dimensionslose Geschwindigkeit in axialer Richtung	$\tilde{c}_z / \tilde{C}_z$
C_{φ}	Geschwindigkeit in Umfangsrichtung auf halber Ringspalthöhe	$\tilde{C}_{\varphi} / (\tilde{\Omega} \tilde{R})$
$C_{\varphi} _{z=0}$	Vordrall, d.h. die entdimensionierte Umfangsgeschwindigkeit vor Eintritt in den Ringspalt	$\tilde{C}_{\varphi} _{z=0} / (\tilde{\Omega} \tilde{R})$
C_z	Geschwindigkeit in axialer Richtung auf halber Ringspalthöhe	$\tilde{C}_z / \tilde{C}_z$
C_{ij}	Dämpfungskoeffizient aus Kraft und translatorischer Bewegung ($i, j = X, Y$)	$2\tilde{h}\tilde{C}_{ij} / (\tilde{\varrho}\tilde{\Omega}\tilde{R}^3\tilde{L})$
C_{ij}	Dämpfungskoeffizient aus Kraft und rotatorischer Bewegung ($i = X, Y; j = \alpha, \beta$)	$2\tilde{h}\tilde{C}_{ij} / (\tilde{\varrho}\tilde{\Omega}\tilde{R}^3\tilde{L}^2)$
C_{ij}	Dämpfungskoeffizient aus Moment und translatorischer Bewegung ($i = \alpha, \beta; j = X, Y$)	$2\tilde{h}\tilde{C}_{ij} / (\tilde{\varrho}\tilde{\Omega}\tilde{R}^3\tilde{L}^2)$
C_{ij}	Dämpfungskoeffizient aus Moment und rotatorischer Bewegung ($i, j = \alpha, \beta$)	$2\tilde{h}\tilde{C}_{ij} / (\tilde{\varrho}\tilde{\Omega}\tilde{R}^3\tilde{L}^3)$
D_i	i -te Hauptabschnittsdetermine der quadratischen Hurwitz-Matrix	
f	Fanning-Widerstandszahl	
F	Kraft der Strömung auf den Rotor	$2\tilde{F} / (\tilde{\varrho}\tilde{\Omega}^2\tilde{R}^3\tilde{L})$
H	Hurwitz-Matrix	
i	imaginäre Einheit	$\sqrt{-1}$
k_{\square}	Skalar der zerlegten Steifigkeitsmatrix des rotordynamischen Systems	
K_{ij}	Steifigkeitskoeffizient aus Kraft und translatorischer Bewegung ($i, j = X, Y$)	$2\tilde{h}\tilde{K}_{ij} / (\tilde{\varrho}\tilde{\Omega}^2\tilde{R}^3\tilde{L})$

K_{ij}	Steifigkeitskoeffizient aus Kraft und rotatorischer Bewegung ($i = X, Y; j = \alpha, \beta$)	$2\tilde{h}\tilde{K}_{ij}/\left(\tilde{\varrho}\tilde{\Omega}^2\tilde{R}^3\tilde{L}^2\right)$
K_{ij}	Steifigkeitskoeffizient aus Moment und translatorischer Bewegung ($i = \alpha, \beta; j = X, Y$)	$2\tilde{h}\tilde{K}_{ij}/\left(\tilde{\varrho}\tilde{\Omega}^2\tilde{R}^3\tilde{L}^2\right)$
K_{ij}	Steifigkeitskoeffizient aus Moment und rotatorischer Bewegung ($i, j = \alpha, \beta$)	$2\tilde{h}\tilde{K}_{ij}/\left(\tilde{\varrho}\tilde{\Omega}^2\tilde{R}^4\tilde{L}^3\right)$
\hat{l}_i	linksseitiger Eigenvektor zum i -ten Eigenwert	
L	relative Ringspalllänge	\tilde{L}/\tilde{R}
m_{\square}	Skalar der zerlegten Trägheitsmatrix des rotordynamischen Systems	
m_f	empirische Konstante im Wandschubspannungsmodell	
M	Moment der Strömung auf den Rotor	$2\tilde{M}/\left(\tilde{\varrho}\tilde{\Omega}^2\tilde{R}^3\tilde{L}^2\right)$
M_{ij}	Trägheitskoeffizient aus Kraft und translatorischer Bewegung ($i, j = X, Y$)	$2\tilde{h}\tilde{M}_{ij}/\left(\tilde{\varrho}\tilde{R}^3\tilde{L}\right)$
M_{ij}	Trägheitskoeffizient aus Kraft und rotatorischer Bewegung ($i = X, Y; j = \alpha, \beta$)	$2\tilde{h}\tilde{M}_{ij}/\left(\tilde{\varrho}\tilde{R}^3\tilde{L}^2\right)$
M_{ij}	Trägheitskoeffizient aus Moment und translatorischer Bewegung ($i = \alpha, \beta; j = X, Y$)	$2\tilde{h}\tilde{M}_{ij}/\left(\tilde{\varrho}\tilde{R}^3\tilde{L}^2\right)$
M_{ij}	Trägheitskoeffizient aus Moment und rotatorischer Bewegung ($i, j = \alpha, \beta$)	$2\tilde{h}\tilde{M}_{ij}/\left(\tilde{\varrho}\tilde{R}^4\tilde{L}^3\right)$
M_{ROT}	dimensionslose Masse des Rotors	$2\tilde{h}\tilde{M}_{\text{ROT}}/\left(\tilde{\varrho}\tilde{R}^3\tilde{L}\right)$
n_f	empirischer Exponent im Wandschubspannungsmodell	
n_{φ}, n_z	Exponent der Potenzgesetze zur Beschreibung der Geschwindigkeitsprofile	
N	Anzahl an physikalischen Parameter bzw. Einträgen in einer Spaltenmatrix	
p	dimensionsloser Druck	$2\tilde{p}/\left(\tilde{\varrho}\tilde{\Omega}^2\tilde{R}^2\right)$
\hat{q}	dimensionslose Schwingungsamplitude	
\hat{q}_i	rechtsseitiger Eigenvektor zum i -ten Eigenwert	
Re_{φ}	Reynoldszahl	$\tilde{\Omega}\tilde{R}\tilde{h}/\tilde{\nu}$
t	dimensionslose Zeit	$\tilde{\Omega}\tilde{t}$
t_{VI}	Student'scher t -Faktor	
W	Gewichte der „bisquare“ Gewichtung	
y	Radialkoordinate zählend ab Stator	
y_{ROT}	Hilfskoordinate zählend ab Rotor	
z	Axialkoordinate	\tilde{z}/\tilde{L}

z_T	dimensionsloser Abstand des Taumelpunkts vom Ringspalteintritt	\tilde{z}_T/\tilde{L}
α_X	Winkel der Drehung um die X-Koordinatenachse	
α	normierter Winkel der Drehung um die X-Koordinatenachse	$\tilde{L}/\tilde{h} \alpha_X$
β_Y	Winkel der Drehung um die Y-Koordinatenachse	
β	normierter Winkel der Drehung um die Y-Koordinatenachse	$\tilde{L}/\tilde{h} \beta_X$
$\Delta\gamma$	Amplitude der Präzessionsbewegung in den rotatorischen Freiheitsgraden	
γ	normierte Amplitude der Präzessionsbewegung in den rotatorischen Freiheitsgraden	$\tilde{L}/\tilde{h} \Delta\gamma$
δ	Grenzschichtdicke	$\tilde{\delta}/\tilde{h}$
ϵ	Störparameter bzw. Amplitude der Präzessionsbewegung in den translatorischen Freiheitsgraden	$\Delta\tilde{\epsilon}/\tilde{h}$
ε	relative Exzentrizität	$\tilde{\epsilon}/\tilde{h}$
ζ	Druckverlustkoeffizient	
θ	Verlagerungswinkel	
Θ_{ROT}	dimensionslose Trägheit des Rotors	$2\tilde{h}\tilde{\Theta}_{\text{ROT}}/(\tilde{\rho}\tilde{R}^4\tilde{L}^3)$
λ	dimensionsloser Eigenwert	$\tilde{\lambda}/\tilde{\Omega}$
Λ	logarithmisches Dekrement	$-2\pi \Re(\lambda)/\Im(\lambda)$
ξ	Dämpfungsmaß	$-\Re(\lambda)/ \lambda $
Ξ	beliebige dimensionslose zeitabhängige Größe des Systems	
$\tau_{y\varphi} _0^1$	Summe der Wandschubspannungen an Stator und Rotor in Umfangsrichtung	$2\tilde{\tau}_{y\varphi} _0^{\tilde{h}}/(\tilde{\rho}\tilde{\Omega}^2\tilde{R}^2)$
$\tau_{yz} _0^1$	Summe der Wandschubspannungen an Stator und Rotor in axialer Richtung	$2\tilde{\tau}_{yz} _0^{\tilde{h}}/(\tilde{\rho}\tilde{\Omega}^2\tilde{R}^2)$
φ	Umfangskoordinate	
ϕ	Durchflusszahl	$\tilde{C}_z/(\tilde{\Omega}\tilde{R})$
χ	charakteristisches Polynom	
ψ	relative Spaltweite	\tilde{h}/\tilde{R}
ω	dimensionslose Kreisfrequenz der Präzessionsbewegung	$\tilde{\omega}/\tilde{\Omega}$
ω_0	dimensionslose Eigenfrequenz	$\tilde{\omega}_0/\tilde{\Omega}$

ω_D dimensionslose Eigenfrequenz des gedämpften Systems $\tilde{\omega}_D/\tilde{\Omega}$

Indizes

Symbol	Beschreibung
0, 1	Größe 0. bzw. 1. Ordnung bei Verwendung des Störansatzes
2×2	reduzierter Detaillierungsgrad bei Betrachtung der Koeffizientenmatrizen
4×4	generalisierte Betrachtung der Koeffizientenmatrizen
I	Teilmatrix der Kräfte auf den Rotor durch die translatorische Bewegung
II	Teilmatrix der Kräfte auf den Rotor durch die rotatorische Bewegung
III	Teilmatrix der Momente auf den Rotor durch die translatorische Bewegung
IV	Teilmatrix der Momente auf den Rotor durch die rotatorische Bewegung
CARNOT	Carnot
D	gedämpft
DYN	dynamisch
EFF	effektiv
KIN	kinetisch
KRIT	kritisch
LIFT	Auftrieb
LOMAKIN	aus dem Lomakin Effekt resultierend
MAX	maximal
RAD	Radialkomponente
RES	resultierend
ROT	Rotor
STAT	Stator bzw. statistisch
SYS	System bzw. systematisch
TAN	Tangentialkomponente
VI	Vertrauensintervall
VIRT	virtuell
X, Y, z	kartesische Koordinatenrichtung
α, β	Drehung um die X- bzw. um die Y-Koordinate
φ, \tilde{r}	in Umfangs- und Radialrichtung
Σ	symmetrisch
\triangleright	schiefssymmetrisch

Komplexe Größen und Operatoren**Symbol Beschreibung**

\mathcal{D}_{ij}	Fouriertransformierte der Weg- und Winkelanregung
\mathcal{F}_{ij}	Fouriertransformierte der Kraft auf den Rotor
\mathcal{K}_{ij}	komplexer Steifigkeitskoeffizient
\mathcal{M}_{ij}	Fouriertransformierte des Moments auf den Rotor
$\sigma(\square)$	Standardabweichung von \square
$\mathfrak{F}(\square)$	Fouriertransformation von \square
$\mathcal{O}(\square)$	Größenordnung von \square
$\Im(\square)$	Imaginärteil von \square
$\Re(\square)$	Realteil von \square
$\delta(\square)$	Messunsicherheit von \square
$\Delta\square$	Differenz von \square

Abkürzungen

Abkürzung	Beschreibung
AiF	Arbeitsgemeinschaft industrieller Forschungsvereinigungen „Otto von Guericke“ e.V.
bspw.	beispielsweise
bzw.	beziehungsweise
CAPM	Clearance-Averaged Pressure Model
CFD	Computational Fluid Dynamics
DFT	diskrete Fourier-Transformation
d.h.	das heißt
engl.	auf Englisch
FS	Full Scale
GUM	Guide to the expression of Uncertainty in Measurement
IGF	Industrielle Gemeinschaftsforschung
METAS	Eidgenössische Institut für Metrologie
MID	magnetisch-induktiver Durchflussmesser
MW	Messwert
rel.	relativ
RSM	Reynolds Stress Model
SIMPLE	Semi-implicit Method for Pressure Linked Equations
SIMPLE-C	Semi-implicit Method for Pressure Linked Equations-Consistent
vgl.	vergleiche
VI	Vertrauensintervall
WFR	whirl-frequency ratio

Kapitel 1

Einleitung

Die rotordynamischen Eigenschaften von Fluidenergiemaschinen werden maßgeblich durch die dynamischen Eigenschaften der verwendeten Dichtungs- und Lagerungselemente bestimmt¹. Zur Erfüllung der unterschiedlichen Funktionen beider Maschinenelemente: *Zonen unterschiedlichen Drucks abdichten* und *Last tragen*, werden üblicherweise axial durchströmte berührungslose Fluiddichtungen sowie öl- oder fördermediengeschmierte Gleitlager eingesetzt. Vereinfacht betrachtet bestehen sowohl Fluiddichtungen als auch Gleitlager aus einem engen, mit Fluid durchströmten Ringspalt, zwischen einem sich drehenden Rotor und einem sich in Ruhe befindenden Stator. Durch strömungsmechanische Effekte innerhalb des Ringspalts werden bewegungsabhängige Kräfte und Momente auf den Rotor induziert, welche das rotordynamische Verhalten der Maschine, insbesondere die Eigenwerte und Eigenvektoren, beeinflussen.

Die Hauptursachen einer verminderten Verfügbarkeit², d.h. verkürzte Wartungsintervalle und reparaturbedingte Standzeiten von Fluidenergiemaschinen, sind hauptsächlich durch Kavitation hervorgerufenen Schäden sowie das Auftreten von Vibrationen und unkontrollierbaren Rotorbewegungen³. Dementsprechend ist das Wissen über die dynamischen Eigenschaften axial durchströmter Ringspalte von essentieller Bedeutung für die Vorhersage und die damit einhergehende Beherrschung unkontrollierbarer Maschinenschwingungen.

¹ GÜLICH, *Kreiselpumpen: Handbuch für Entwicklung, Anlagenplanung und Betrieb*, ([28], 2010)

² PELZ U. A., *Mastering Uncertainty in Mechanical Engineering*, ([71], 2021)

³ BECKERLE, SCHAEDE UND RINDERKNECHT, „Fault Diagnosis and State Detection in Centrifugal Pumps—A Review of Applications“, ([5], 2015)

Die Ermittlung der dynamischen Eigenschaften axial durchströmter Ringspalte beruht heutzutage im Wesentlichen auf zwei unterschiedlichen Herangehensweisen. Zum einen werden die bewegungsabhängigen induzierten Kräfte und Momente auf den Rotor mit klassischen Methoden der numerischen Strömungsmechanik im Sinne von Computational Fluid Dynamics (CFD) sowie zeiteffizienten Berechnungswerkzeugen⁴ wie der Reynolds'schen Differentialgleichung⁵ oder dem Bulk-Flow Model⁶ berechnet. Zum anderen können die dynamischen Eigenschaften messtechnisch, auf Basis experimenteller Untersuchungen in einer kontrollierten Umgebung, erfasst werden. Aufgrund des hohen Aufwands von CFD-Simulationen und experimentellen Untersuchungen dienen diese oftmals als Validierungsgrundlage der zeiteffizienten Berechnungswerkzeuge.

Zur Charakterisierung der dynamischen Eigenschaften axial durchströmter Ringspalte sowie der Übertragung der Eigenschaften auf das Themengebiet der Rotordynamik bedarf es eines einfachen Bindegliedes. In Analogie zur klassischen Mechanik wird bereits seit den 40er Jahren des 20. Jahrhunderts⁷ das dynamische Verhalten axial durchströmter Ringspalte mit den klassischen mechanischen Elementen: Federn (Federsteifigkeit \tilde{K} ⁸), Dämpfern (Dämpfung \tilde{C}) und Massen (Trägheit \tilde{M}) modelliert.

Abbildung 1.1 zeigt eine solche Abstraktion am Beispiel einer schematisch dargestellten Turbomaschine. Abstrahiert werden die dynamischen Eigenschaften einer berührungslosen Fluiddichtung (1), welche die Druckniveaus \tilde{p}_1 und \tilde{p}_2 voneinander separiert, sowie die dynamischen Eigenschaften eines fördermediengeschmierten Gleitlagers (2) zur Lagerung des Rotors. Die Anzahl der zur Beschreibung der dynamischen Eigenschaften notwendigen mechanischen Elemente ergibt sich im Allgemeinen aus den zwei translatorischen \tilde{X} und \tilde{Y} sowie den zwei rotatorischen Freiheitsgraden α_x und β_y des Rotors. Die zur Beschreibung notwendigen rotordynamischen Koeffizientenmatrizen für die Steifigkeits-, Dämpfungs- und Trägheitseigenschaften haben somit jeweils

⁴ Hierbei handelt es sich in den meisten Fällen ebenfalls um numerische Simulationen, wobei die zugrunde liegenden Annahmen der beschreibenden Gleichungen deutlich weitreichender sind.

⁵ REYNOLDS, „On the theory of lubrication and its application to Mr. Beauchamp tower's experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil“, ([76], 1886)

⁶ CHILDS, „Finite-Length Solutions for Rotordynamic Coefficients of Turbulent Annular Seals“, ([11], 1983)

⁷ HAGG, „The Influence of Oil-Film Journal Bearings on the Stability of Rotating Machines“, ([29], 1946)

⁸ Dimensionsbehaftete Größen werden innerhalb der Arbeit durch eine Tilde $\tilde{\square}$ gekennzeichnet.

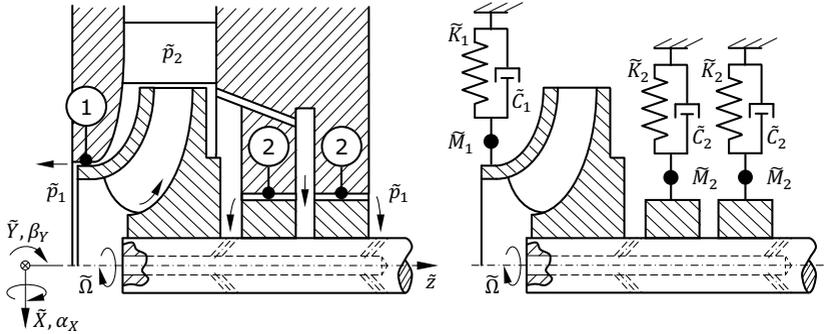


Abbildung 1.1 – Schematische Abbildung einer Turbomaschine und Abstraktion der dynamischen Eigenschaften der berührungslosen Fluiddichtung (1) und des fördermediengeschmierter Gleitlagers (2).

16 Einträge. Die dynamischen Eigenschaften axial durchströmter Ringspalte lassen sich demnach mit Hilfe von 48 unterschiedlichen rotordynamischen Koeffizienten beschreiben. Die induzierten Kräfte \tilde{F} und Momente \tilde{M} auf den Rotor⁹ ergeben sich aus den rotordynamischen Koeffizientenmatrizen in Kombination mit den translatorischen Bewegungen in den Freiheitsgraden \tilde{X} und \tilde{Y} und ihren zeitlichen Ableitungen¹⁰ sowie den rotatorischen Bewegungen in den Freiheitsgraden α_X und β_Y um die \tilde{X} - bzw. \tilde{Y} -Achse und deren zeitlichen Ableitungen

$$\begin{aligned}
 - \begin{bmatrix} \tilde{F}_X \\ \tilde{F}_Y \\ \tilde{M}_X \\ \tilde{M}_Y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \tilde{K}_{XX} & \tilde{K}_{XY} & \tilde{K}_{X\alpha} & \tilde{K}_{X\beta} \\ \tilde{K}_{XY} & \tilde{K}_{YY} & \tilde{K}_{Y\alpha} & \tilde{K}_{Y\beta} \\ \tilde{K}_{\alpha X} & \tilde{K}_{\alpha Y} & \tilde{K}_{\alpha\alpha} & \tilde{K}_{\alpha\beta} \\ \tilde{K}_{\beta X} & \tilde{K}_{\beta Y} & \tilde{K}_{\beta\alpha} & \tilde{K}_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \\ \alpha_X \\ \beta_Y \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} \tilde{C}_{XX} & \tilde{C}_{XY} & \tilde{C}_{X\alpha} & \tilde{C}_{X\beta} \\ \tilde{C}_{XY} & \tilde{C}_{YY} & \tilde{C}_{Y\alpha} & \tilde{C}_{Y\beta} \\ \tilde{C}_{\alpha X} & \tilde{C}_{\alpha Y} & \tilde{C}_{\alpha\alpha} & \tilde{C}_{\alpha\beta} \\ \tilde{C}_{\beta X} & \tilde{C}_{\beta Y} & \tilde{C}_{\beta\alpha} & \tilde{C}_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{X}} \\ \dot{\tilde{Y}} \\ \dot{\alpha}_X \\ \dot{\beta}_Y \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} \tilde{M}_{XX} & \tilde{M}_{XY} & \tilde{M}_{X\alpha} & \tilde{M}_{X\beta} \\ \tilde{M}_{XY} & \tilde{M}_{YY} & \tilde{M}_{Y\alpha} & \tilde{M}_{Y\beta} \\ \tilde{M}_{\alpha X} & \tilde{M}_{\alpha Y} & \tilde{M}_{\alpha\alpha} & \tilde{M}_{\alpha\beta} \\ \tilde{M}_{\beta X} & \tilde{M}_{\beta Y} & \tilde{M}_{\beta\alpha} & \tilde{M}_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\tilde{X}} \\ \ddot{\tilde{Y}} \\ \ddot{\alpha}_X \\ \ddot{\beta}_Y \end{bmatrix}. \tag{1.1}
 \end{aligned}$$

⁹ Im Folgenden werden die Begriffe „Kräfte“ und „Momente“, sofern nicht anders beschrieben, gleichbedeutend mit den Ausdrücken „Kräfte auf den Rotor“ und „Momente auf den Rotor“ verwendet.

¹⁰ Zeitliche Ableitungen werden innerhalb der Arbeit mit $\dot{\square}$ und $\ddot{\square}$ gekennzeichnet.

Hierbei ist zu erwähnen, dass die Modellierung der Trägheitseigenschaften des Ringspalts keineswegs nur die physikalische Masse des Fluids im Spalt abbildet. Vielmehr wird hierdurch der Einfluss der Fluidträgheit¹¹, beispielsweise bei turbulenter Strömung, sowie die virtuelle Masse^{12,13} des Fluids abgebildet. Die virtuelle Masse des Fluids überschreitet die physikalische Masse desselben um mehrere Größenordnungen.

Das Wissen über die rotordynamischen Koeffizienten aus den induzierten Kräften und Momenten durch translatorische und rotatorische Bewegungen ist demnach essentiell für die Vorhersage des rotordynamischen Verhaltens von Fluidenergiemaschinen. Besonders hervorzuheben sind hierbei die Auswirkungen auf die Eigenwerte und Eigenvektoren, welche die Eigenfrequenzen und Schwingungsmoden der Maschine bestimmen. Bereits in einem frühen Entwicklungsstadium sowie während des Betriebs der Maschine können mit dem Wissen über den dynamischen Einfluss kritische Betriebspunkte identifiziert und gezielt vermieden werden. Die Diskussion der in dieser Arbeit dargestellten Ergebnisse und den daraus ableitbaren Schlussfolgerungen führen demnach zu einem detaillierteren Verständnis der dynamischen Eigenschaften axial durchströmter Ringspalte und ihres Einflusses auf ein zugrunde liegendes Gesamtsystem.

¹¹CONSTANTINESCU, „On Turbulent Lubrication“, ([18], 1959)

¹²BRENNEN, „A Review of Added Mass and Fluid Inertial Forces“, ([6], 1982)

¹³STOKES, *Mathematical and Physical Papers*, ([92], 2009)

Wissenschaftliche Fragestellung und Gliederung

Der dynamische Einfluss axial durchströmter Ringspalte auf die rotordynamischen Eigenschaften von Fluidenergiemaschinen ist unbestritten^{14,15,16,17}. Der Detaillierungsgrad zur Modellierung ihres Einflusses variiert jedoch. Obgleich die generalisierte Formulierung des dynamischen Einflusses neben den Kräften durch translatorische Bewegung auch die Momente durch translatorische sowie die Kräfte und Momente durch rotatorische Bewegungen mit einschließt, vernachlässigt der Großteil der theoretischen und experimentellen Untersuchungen in der Literatur ebendiese¹⁸. Der Detaillierungsgrad zur Beschreibung der dynamischen Eigenschaften reduziert sich in diesem Fall von 48 rotordynamischen Koeffizienten auf je 4 Einträge pro Koeffizientenmatrix, d.h. 12 rotordynamische Koeffizienten. Als Grundlage der Reduktion des Detaillierungsgrades wird unter anderem die zu vernachlässigende Relevanz der zusätzlichen 36 Koeffizienten unterhalb einer pauschalen Ringspaltlänge von 1.5 mal dem Radius des Rotors, d.h. $\tilde{L}/\tilde{R} \leq 1.5$, verwiesen¹⁵. Die Herleitung dieses Schwellenwerts vernachlässigt jedoch jedweden anderen geometrischen oder betrieblichen Parameter des Ringspalts gänzlich.

Lediglich vereinzelt werden die zusätzlichen 36 rotordynamischen Koeffizienten betrachtet. Hierbei handelt es sich vor allem um theoretische Untersuchungen auf Basis von zeiteffizienten Berechnungswerkzeugen wie dem Bulk-Flow Model¹⁹. Auf experimenteller Seite existieren lediglich vier Veröffentlichungen^{20,21,22,23}, welche die experimentelle Identifikation aller 48 rotordynamischen Koeffizienten beschreiben. Eine systematische theoretische und vor allem expe-

¹⁴NEWKIRK UND TAYLOR, „Shaft whipping due to oil action in journal bearings“, ([68], 1925)

¹⁵CHILDS, *Turbomachinery rotordynamics: Phenomena, modeling, and analysis*, ([13], 1993)

¹⁶GÜLICH, *Kreiselpumpen: Handbuch für Entwicklung, Anlagenplanung und Betrieb*, ([28], 2010)

¹⁷TIWARI, *Rotor Systems: Analysis and identification*, ([99], 2018)

¹⁸Eine ausführliche Auflistung des Stands der Forschung gibt Kapitel 2.

¹⁹CHILDS, „Finite-Length Solutions for Rotordynamic Coefficients of Turbulent Annular Seals“, ([11], 1983)

²⁰KANEMORI UND IWATSUBO, „Experimental Study of Dynamic Fluid Forces and Moments for a Long Annular Seal“, ([40], 1992)

²¹KANEMORI UND IWATSUBO, „Forces and Moments Due to Combined Motion of Conical and Cylindrical Whirls for a Long Seal“, ([41], 1994)

²²NEUMER, *Entwicklung einer Versuchsanlage mit aktiver Magnetlagerung zur Parameteridentifikation von Fluid-Struktur-Interaktionen in Strömungsmaschinen: Zugl.: Kaiserslautern, Univ., Diss*, ([67], 1994)

²³MATROS, ZIEGLER UND NORDMANN, „Fluid Structure Interactions in Annular Seals of Centrifugal Pumps“, ([61], 1995)

rimentelle Untersuchung des Einflusses der Betriebs- und Geometrieparameter des Ringspalts auf alle 48 rotordynamischen Koeffizienten ist nach Kenntnisstand des Autors somit nicht vorhanden. Des Weiteren erfolgt die Angabe der experimentell identifizierten rotordynamischen Koeffizienten meist ohne die Angabe der zugehörigen Messunsicherheit. Die fehlende systematische theoretische und experimentelle Untersuchung aller 48 rotordynamischen Koeffizienten führt zudem zu einer limitierten Aussage über die Auswirkungen derselben auf das Verhalten eines rotordynamischen Systems, d.h. das Auftreten von stabilen bzw. instabilen Betriebspunkten. Zur Schließung dieser Forschungslücke werden für die vorliegende Arbeit folgende wissenschaftliche Fragestellungen formuliert:

- (i) *Welchen Einfluss haben die Betriebs- und Geometrieparameter des axial durchströmten Ringspalts auf die 48 rotordynamischen Koeffizienten?*
- (ii) *Bei welchen Randbedingungen werden die induzierten Momente durch translatorische sowie die induzierten Kräfte und Momente durch rotatorische Bewegungen relevant?*
- (iii) *Welche Auswirkung hat eine Betrachtung aller 48 rotordynamischen Koeffizienten auf die Analyse des Systemverhaltens?*

Betrachtet man die Forschungsfragen, so ist ersichtlich, dass zu ihrer Beantwortung die Kenntnis der rotordynamischen Koeffizienten über einen weiten Betriebs- und Geometriebereich notwendig ist. Aus diesem Grund wird in Kapitel 2 zunächst der beschreibende Parameterraum typischer Ringspalte in Fluidenergiemaschinen diskutiert. Das Ergebnis dieser Diskussion ist die Möglichkeit berührungslose Fluiddichtungen sowie öl- bzw. fördermediengeschmierte Gleitlager mit Hilfe eines generischen axial durchströmten Ringspalts zu abstrahieren. Im Anschluss wird der Stand der Forschung hinsichtlich der dynamischen Eigenschaften axial durchströmter Ringspalte dargestellt. Hierbei werden grundlegende Annahmen bei der Betrachtung der dynamischen Eigenschaften klassischer öl- bzw. fördermediengeschmierter Gleitlager und berührungsloser Fluiddichtungen diskutiert und die bisherigen theoretischen und experimentellen Untersuchungen zur generalisierten Betrachtung der rotordynamischen Koeffizienten aufgearbeitet. Abschließend werden die gängigen Methoden zur Vorhersage des Systemverhaltens, d.h. die Vorhersage des Verhaltens hinsichtlich stabiler oder instabiler Betriebszustände, eines zugrunde liegenden Systems mit Bezug auf die vorliegende Arbeit diskutiert.

Zur Beantwortung der Forschungsfragen (i) und (ii) wird in Kapitel 3 eine zeiteffiziente Methode zur Vorhersage der rotordynamischen Koeffizienten erarbeitet. Zunächst wird ein auf dem integro-differentiellen Ansatz beruhendes Berechnungswerkzeug für die statischen Eigenschaften axial durchströmter Ringspalte, das Clearance-Averaged Pressure Model (CAPM), vorgestellt. Das in der Dissertation von Lang²⁴ entwickelte effiziente Modell zur Vorhersage der statischen Eigenschaften axial durchströmter Ringspalte, wird dahin gehend erweitert, dass die Bestimmung der dynamischen Eigenschaften axial durchströmter Ringspalte ermöglicht wird. Grundlage hierbei bildet die Anwendung eines Perturbationsansatzes zur Linearisierung des Gleichungssystems und Behandlung der instationären Terme in den beschreibenden Gleichungen. Abschließend wird das erweiterte Modell mit numerischen Ergebnissen aus der Literatur verglichen und eine erste Vorvalidierung durchgeführt.

Eine weitaus ausführlichere Validierung erfolgt im Rahmen dieser Arbeit auf Grundlage eines eigens konzipierten und weltweit einzigartigen Prüfstands, zur systematischen Untersuchung der statischen und dynamischen Eigenschaften axial durchströmter Ringspalte. Kapitel 4 beschreibt zunächst den verwendeten experimentellen Aufbau sowie die verwendete Messtechnik. Anschließend erfolgt die Vorstellung des zugrunde liegenden Verfahrens zur Identifikation der dynamischen Eigenschaften sowie die Quantifizierung der Messunsicherheit. Die Validierung des Verfahrens auf Grundlage der Identifikation bekannter Messgrößen, wie der Masse des Rotors, sowie die Charakterisierung des dynamischen Einflusses des Prüfstandes bildet den Abschluss des Kapitels.

Das erweiterte Clearance-Averaged Pressure Model zur Bestimmung der rotordynamischen Eigenschaften axial durchströmter Ringspalte wird in Kapitel 5 mit den Ergebnissen des Prüfstands validiert und eine erste Antwort auf Forschungsfrage (i) gegeben. Zu diesem Zweck werden ausführliche experimentelle Untersuchungen zum Einfluss der beschreibenden Betriebs- und Geometrieparameter auf die dynamischen Eigenschaften axial durchströmter Ringspalte durchgeführt und mit den Berechnungsergebnissen des Clearance-Averaged Pressure Models verglichen. Im Schwerpunkt steht hierbei die Qualität der Modellvorhersage im Vergleich zu den experimentell ermittelten rotordynamischen Koeffizienten auf Grundlage der Messunsicherheit des verwendeten Aufbaus.

Zur detaillierten Beantwortung der Forschungsfrage (i) und Beantwortung der Forschungsfrage (ii) werden in Kapitel 6 weiterführende Parameterstudien mit Hilfe des validierten Clearance-Averaged Pressure Models durchgeführt. Hier-

²⁴LANG, *Effiziente Berechnung von Gleitlagern und Dichtspalten in Turbomaschinen*, ([50], 2018)

bei werden vor allem Geometrie- und Betriebsbereiche außerhalb der physikalischen Möglichkeiten des Prüfstandes untersucht. Im Anschluss daran werden die Ergebnisse genutzt, um die Relevanz der induzierten Momente durch translatorische und der induzierten Kräfte und Momente durch rotatorische Bewegungen in einer generalisierten Betrachtung des dynamischen Einflusses axial durchströmter Ringspalte zu beurteilen. Die Beurteilung erfolgt hierbei auf Basis einer Größenordnungsabschätzung sowie einiger Annahmen zur Vereinfachung der Bewegungsgleichung 1.1. Durch die Vereinfachung ergibt sich die Möglichkeit, die Relevanz der zusätzlichen 36 rotordynamischen Koeffizienten einer generalisierten Betrachtung auf Basis eines einzigen Quotienten zu beurteilen.

Zur Beantwortung der verbleibenden Forschungsfrage (iii) werden in Kapitel 7 die gewonnenen Ergebnisse auf ein rotordynamisches Beispielsystem übertragen. Mithilfe einer linearen Stabilitätsanalyse wird das Systemverhalten bei Variation der Betriebs- und Geometrieparameter des Ringspalts analysiert. Zur Analyse des Verhaltens hinsichtlich stabiler bzw. instabiler Betriebszustände wird hierbei unter anderem eine alternative Formulierung des logarithmischen Dekrements verwendet. Diese ermöglicht es, stabilisierende und destabilisierende Effekte der dynamischen Eigenschaften axial durchströmter Ringspalte auf das rotordynamische Beispielsystem zu identifizieren. Alle Untersuchungen vergleichen hierbei stets das Systemverhalten bei Verwendung aller 48 rotordynamischen Koeffizienten mit dem Verhalten auf Basis eines reduzierten Detaillierungsgrades.

Abschließend werden die Kernaussagen und wichtigsten Ergebnisse zusammengefasst und ein Ausblick auf weiterführende Fragestellungen auf dem Gebiet axial durchströmter Ringspalte gegeben.

Kapitel 2

Grundlagen

Bereits seit den 20er Jahren des 20. Jahrhunderts sind die dynamischen Eigenschaften enger Ringspalte und ihr Einfluss auf die Stabilität eines zugrunde liegenden rotordynamischen Systems Gegenstand der Forschung. Hierbei konzentrieren sich die meisten Autoren entweder auf klassische ölgeschmierte Gleitlager oder axial durchströmte Fluiddichtungen. Zur abstrahierten Betrachtung beider Maschinenelemente werden im Folgenden zunächst die strömungsmechanischen Eigenschaften axial durchströmter Fluiddichtungen und Gleitlager in Fluidenergiemaschinen diskutiert. Durch diese abstrahierte Betrachtungsweise auf Basis geeigneter Annahmen ergibt sich der in dieser Arbeit behandelte Fall des generischen axial durchströmten Ringspalts.

Im Anschluss wird der Stand der Forschung der dynamischen Eigenschaften axial durchströmter Ringspalte aufgearbeitet. Im Wesentlichen werden hierbei grundlegende Annahmen bei der Betrachtung der dynamischen Eigenschaften klassischer öl- bzw. fördermediengeschmierter Gleitlager und berührungsloser axial durchströmter Fluiddichtungen diskutiert und die bisherigen theoretischen und experimentellen Untersuchungen zur generalisierten Betrachtung des rotordynamischen Einflusses axial durchströmter Ringspalte aufgearbeitet. Abschließend werden die gängigen Methoden zur Bewertung des Systemverhaltens, d.h. die Bewertung des Verhaltens hinsichtlich stabiler oder instabiler Betriebszustände, eines zugrunde liegenden Systems mit Bezug auf die vorliegende Arbeit erörtert.

2.1 Der axial durchströmte Ringspalt

Wie bereits erörtert existieren mit axial durchströmten Fluiddichtungen und klassischen öl- bzw. fördermediengeschmierten Gleitlagern zwei mit Fluid durchströmte Ringspalte, welche Kräfte und Momente auf den Rotor induzieren. Obgleich bisher alle Betrachtungen auf Grundlage einer allgemeinen Fluidenergiemaschine durchgeführt wurden, so wird im Folgenden der Fokus auf Fluidarbeitsmaschinen, wie moderne Kreiselpumpen, gelegt. Diese Art der Fluidenergiemaschine fördert in der Regel Newtonsche Flüssigkeiten wie Wasser oder flüssige Kohlenwasserstoffe. Dementsprechend wird im weiteren Verlauf der Arbeit die Strömung durch den Ringspalt als inkompressibel angenommen. Des Weiteren wird angenommen, dass die Strömung isotherm zu behandeln ist und es innerhalb des Ringspalts zu keinen Phasenwechsel- oder Ausgasungsvorgängen kommt¹.

Ungeachtet der Differenzierung nach der Funktion der Bauteile lassen sich berührungslose Fluidichtungen und Gleitlager als abstrahierte generische Ringspalte darstellen. Abbildung 2.1 zeigt solch einen von links nach rechts durchströmten generischen Ringspalt² mit den auf den Rotor wirkenden Kräften \vec{F}_X und \vec{F}_Y sowie dem Verlagerungswinkel θ . Auf die Einzeichnung der wirkenden Momente \vec{M}_X und \vec{M}_Y wurde aus Darstellungsgründen verzichtet.

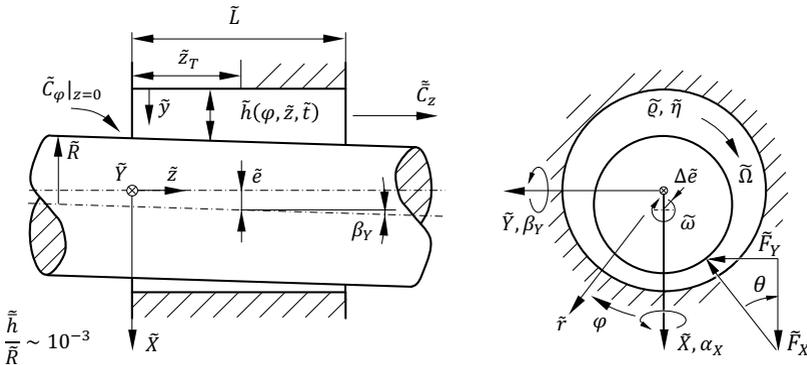


Abbildung 2.1 – Generischer axial durchströmter Ringspalt.

¹ Die Annahme vernachlässigbarer Phasenwechsel- und Ausgasungsvorgänge im Ringspalt ist in Gleitlagern und axial durchströmten Fluidichtungen nicht immer erfüllt, vgl. die Einträge [37, 7, 108, 94, 95, 96] im Literaturverzeichnis. Aufgrund der Komplexität der Vorgänge und der damit einhergehenden komplexen Beschreibung der Strömung innerhalb des Ringspalts wird jedoch bewusst auf eine Betrachtung verzichtet.

² Der Ringspalt ist aus Darstellungsgründen nicht maßstabsgetreu dargestellt.

Die Geometrie des Ringspalts ist durch den Rotorradius \tilde{R} sowie die Spaltlänge \tilde{L} und die mittlere Spaltweite³ \tilde{h} gegeben. Für enge Ringspalte wie Gleitlager und berührungslöse Fluiddichtungen gilt in den meisten Fällen $\tilde{h}/\tilde{R} \sim 10^{-3}$. Die allgemeine zeitabhängige Spaltweite $\tilde{h}(\varphi, \tilde{z}, \tilde{t})$, auch Spaltfunktion genannt, ergibt sich aus der, um die Exzentrizität \tilde{e} ausgelenkten, Lage des Rotors sowie der Drehungen um den im Abstand \tilde{z}_T zum Ringspalteintritt gelegenen Taumelpunkt. Die beschreibenden Winkel α_X und β_Y sind hierbei analog zu einer Drehung um die kartesischen Koordinatenachsen \tilde{X} und \tilde{Y} definiert. In guter Näherung⁴ kann die Spaltfunktion \tilde{h} in Abhängigkeit der Exzentrizität \tilde{e} sowie der Drehung um die \tilde{X} - und \tilde{Y} -Achse geschrieben werden

$$\tilde{h}(\varphi, \tilde{z}, \tilde{t}) = \tilde{h} - \tilde{e} \cos \varphi - (\tilde{z} - \tilde{z}_T) \beta_Y \cos \varphi + (\tilde{z} - \tilde{z}_T) \alpha_X \sin \varphi. \quad (2.1)$$

Die Betriebsbedingungen des Ringspalts werden zum einen durch die Kreisfrequenz des Rotors $\tilde{\Omega}$ und zum anderen durch die Kreisfrequenz der Präzessionsbewegung um die statische Ruhelage $\tilde{\omega}$ sowie deren Amplitude $\Delta\tilde{e} \ll \tilde{e}$ beschrieben. Der Ringspalt wird mit der mittleren axialen Strömungsgeschwindigkeit \tilde{C}_z durchströmt und weist eine Umfangskomponente der Strömung vor Eintritt in den Ringspalt, d.h. $\tilde{z} = 0$, den Vordrall $\tilde{C}_\varphi|_{\tilde{z}=0}$ auf.

Das Fluid im Spalt wird über dessen Dichte $\tilde{\rho}$ und die kinematische Viskosität $\tilde{\nu}$ charakterisiert. Die dynamische Viskosität $\tilde{\eta} := \tilde{\rho} \tilde{\nu}$ ergibt sich aus dem Produkt der Dichte $\tilde{\rho}$ und der kinematischen Viskosität $\tilde{\nu}$.

Die sich einstellenden Geschwindigkeitsfelder in axialer und Umfangsrichtung $\tilde{c}_z(\varphi, \tilde{z}, \tilde{t})$ und $\tilde{c}_\varphi(\varphi, \tilde{z}, \tilde{t})$ sowie das induzierte Druckfeld im Ringspalt $\tilde{p}(\varphi, \tilde{z}, \tilde{t})$ sind somit abhängige Größen der 14 dimensionsbehafteten Parameter⁵

$$\tilde{p}, \tilde{c}_z, \tilde{c}_\varphi = \text{fn} \left(\tilde{R}, \tilde{L}, \tilde{h}, \tilde{\Omega}, \tilde{\omega}, \tilde{C}_z, \tilde{C}_\varphi|_{\tilde{z}=0}, \tilde{e}, \Delta\tilde{e}, \tilde{z}_T, \alpha_X, \beta_Y, \tilde{\rho}, \tilde{\nu} \right). \quad (2.2)$$

Die große Anzahl an Parametern stellt sowohl in der Praxis als auch im Kontext dieser Arbeit eine Herausforderung dar. So würde etwa die Kenntnis des vollständigen Parameterraums mit nur drei Schritten (Stufen) pro Parameter (Faktor) die Betrachtung von $3^{14} \approx 5 \times 10^6$ Betriebspunkten voraussetzen. Da die Betrachtung einer solchen Fülle von Betriebspunkten nur unter großem

³ Die mittlere Spaltweite ergibt sich als Differenz des Statorradius $\tilde{R}_{\text{STAT}} = \tilde{R} + \tilde{h}$ und dem Rotorradius \tilde{R} .

⁴ Unter Anwendung der Kleinwinkelnäherung bei der Betrachtung der Winkel α_X und β_Y .

⁵ Die Betrachtung des radialen Geschwindigkeitsfelds \tilde{c}_r sowie des radialen Druckgradienten $\partial\tilde{p}/\partial\tilde{y}$ ist auf Grundlage von Größenordnungsabschätzungen im Vergleich zu den Größen in axialer und Umfangsrichtung zu vernachlässigen, vgl. Spurk & Aksel [88].

Aufwand zu bewerkstelligen ist, wird zur Reduktion der Anzahl an Parametern die in der Strömungsmechanik übliche Methode der Dimensionsanalyse⁶ herangezogen⁷. Gemäß dem Bridgman Postulat⁸ der *absoluten Bedeutung relativer Größen* ist die Information der Einheit der beschreibenden N Parameter bei einem bestehenden physikalischen Zusammenhang irrelevant. Auf Grundlage des Buckingham Π -Theorems⁹ ist es möglich, einen physikalischen Zusammenhang in dimensionsloser Schreibweise und mit einer reduzierten Anzahl an dimensionslosen Produkten zu schreiben. Hierbei ist die Anzahl an dimensionslosen Produkten um die Anzahl der zur Beschreibung notwendigen Basisgrößen des Maßsystems⁶ reduziert. Die Entdimensionierung der dimensionsbehafteten Parameter erfolgt gemäß der Dissertation von Lang¹⁰ mit den Basisgrößen Länge L , Masse M und Zeit T .

Die geometrischen Größen des generischen Systems, die Ringspaltlänge \tilde{L} sowie die mittlere Spaltweite \tilde{h} , werden mit Hilfe des Rotorradius \tilde{R} entdimensioniert. Hieraus ergeben sich die dimensionslosen Größen der relativen Ringspaltlänge L sowie die relative mittlere Spaltweite ψ , auch relatives Spaltspiel genannt. Die mittlere axiale Strömungsgeschwindigkeit \tilde{C}_z sowie die Umfangskomponente der Strömung vor Eintritt in den Ringspalt $\tilde{C}_\varphi|_{z=0}$ wird mit der Umfangsgeschwindigkeit der Rotoroberfläche $\tilde{\Omega}\tilde{R}$ entdimensioniert. Dies führt auf die aus dem Turbomaschinenbau bekannten Größen der Durchflusszahl ϕ sowie des entdimensionierten Vordralls $C_\varphi|_{z=0}$. Die Entdimensionierung der Kreisfrequenz der Präzessionsbewegung $\tilde{\omega}$ erfolgt mit Hilfe der Kreisfrequenz des Rotors $\tilde{\Omega}$. Im Gegensatz zu den bisherigen Größen wird die Entdimensionierung der kinematischen Viskosität $\tilde{\nu}$ nicht explizit durchgeführt. Vielmehr ist sie Teil der Reynoldszahl Re_φ zur Beschreibung des Verhältnisses von Trägheitskräften zu viskosen Kräften. Die Exzentrizität des Rotors \tilde{e} , der Abstand des Taumelpunkts vom Ringspalteneintritt \tilde{z}_T sowie die beschreibenden Winkel α_X und β_Y werden jeweils so entdimensioniert, dass

⁶ SPURK, *Dimensionsanalyse in der Strömungslehre*, ([87], 1992)

⁷ Die Dimensionsanalyse zur Reduktion der Anzahl der beschreibenden Parameter des generischen axial durchströmten Ringspalts wurde ursprünglich in der Arbeit von Lang [50] durchgeführt. Die Ausführungen in dieser Arbeit geben deren Erkenntnisse in ergänzter Form wieder.

⁸ BRIDGMAN, *Dimensional Analysis*, ([8], 1922)

⁹ BUCKINGHAM, „On Physically Similar Systems; Illustrations of the Use of Dimensional Equations“, ([10], 1914)

¹⁰ LANG, *Effiziente Berechnung von Gleitlagern und Dichtspalten in Turbomaschinen*, ([50], 2018)

ihre dimensionslosen Produkte einen Wertebereich von 0 bis 1 aufweisen¹¹. Dies führt auf die mit der mittleren Spaltweite \tilde{h} gebildete relative Exzentrizität ε , den mit der Ringspaltlänge \tilde{L} gebildeten dimensionslosen Abstand des Taumelpunkts vom Ringspalteintritt z_T sowie die mit dem Schlankheitsgrad $\psi/L = \tilde{h}/\tilde{L}$ normierten Winkel α und β . Analog zur Exzentrizität \tilde{e} erfolgt die Entdimensionierung der Amplitude der Präzessionsbewegung $\Delta\tilde{e}$ mit der mittleren Spaltweite \tilde{h} . Die abhängigen Größen der Geschwindigkeitsfelder in axialer und Umfangsrichtung \tilde{c}_z und \tilde{c}_φ sowie der im Ringspalt induzierte Druck \tilde{p} werden mit der mittleren axialen Strömungsgeschwindigkeit \tilde{C}_z , der Umfangsgeschwindigkeit der Rotoroberfläche $\tilde{\Omega}\tilde{R}$ sowie dem dynamischen Druck, gebildet aus der Umfangsgeschwindigkeit der Rotoroberfläche und der Dichte des Fluids $\tilde{\rho}(\tilde{\Omega}\tilde{R})^2/2$, entdimensioniert. Es ergeben sich folgende dimensionslosen Produkte:

$$\begin{aligned} L &:= \frac{\tilde{L}}{\tilde{R}}, & \psi &:= \frac{\tilde{h}}{\tilde{R}}, & \phi &:= \frac{\tilde{C}_z}{\tilde{\Omega}\tilde{R}}, & C_\varphi|_{z=0} &:= \frac{\tilde{C}_\varphi|_{z=0}}{\tilde{\Omega}\tilde{R}}, & \omega &:= \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\Omega}}, \\ Re_\varphi &:= \frac{\tilde{\Omega}\tilde{R}\tilde{h}}{\tilde{\nu}}, & \varepsilon &:= \frac{\tilde{e}}{\tilde{h}}, & \epsilon &:= \frac{\Delta\tilde{e}}{\tilde{h}}, & z_T &:= \frac{\tilde{z}_T}{\tilde{L}}, & \alpha &:= \frac{L}{\psi}\alpha_x, \\ \beta &:= \frac{L}{\psi}\beta_y, & c_z &:= \frac{\tilde{c}_z}{\tilde{C}_z} = \frac{1}{\phi}\frac{\tilde{c}_z}{\tilde{\Omega}\tilde{R}}, & c_\varphi &:= \frac{\tilde{c}_\varphi}{\tilde{\Omega}\tilde{R}}, & p &:= \frac{2\tilde{p}}{\tilde{\rho}(\tilde{\Omega}\tilde{R})^2}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Lang¹² führt in seiner Arbeit zusätzlich zur klassischen Dimensionsanalyse, welche ohne die beschreibenden Gleichungen¹³ des Problems auskommt, eine inspektionelle Dimensionsanalyse durch. Mit Hilfe der beschreibenden Gleichungen und durch geschicktes Sortieren der dimensionslosen Produkte sowie der Anwendung einer Größenordnungsabschätzung zeigt sich, dass das relative Spaltspiel ψ nur in Verbindung mit der Reynoldszahl Re_φ in der dimensionslosen Form der beschreibenden Gleichungen auftritt. Dieser charakteristische Parameter $\psi Re_\varphi = (\tilde{\Omega}\tilde{R}\tilde{h}/\tilde{\nu})(\tilde{h}/\tilde{R}) = \tilde{\Omega}\tilde{h}^2/\tilde{\nu}$ nimmt vorrangig in der hydrodynamischen Schmierfilmtheorie, beispielsweise zur Beschreibung klassischer ölgeschmierter Gleitlager, eine zentrale Rolle ein. Er dient hierbei als Maß für die Vernachlässigbarkeit der konvektiven Terme in den Impulsgleichungen und kann als Maß für die Relevanz von Trägheitseffekten

¹¹Der Wertebereich des Abstands des Taumelpunkts vom Ringspalteintritt kann in Abhängigkeit des zugrunde liegenden rotordynamischen Systems im Allgemeinen auch Werte außerhalb des hier definierten Bereiches von 0 bis 1 aufweisen.

¹²LANG, *Effiziente Berechnung von Gleitlagern und Dichtspalten in Turbomaschinen*, ([50], 2018)

¹³Detaillierte Ausführungen zu den beschreibenden Gleichungen sind Kapitel 3 zu entnehmen.

innerhalb der Strömung betrachtet werden. Für kleine Werte des charakteristischen Parameters $\psi Re_\varphi \ll 1$ ist die Strömung von viskosen Kräften, d.h. Reibungseffekten, dominiert. Dementsprechend können die konvektiven Terme in den Impulsgleichungen im Vergleich zu den viskosen Spannungen vernachlässigt werden. Diese Vernachlässigung wird vor allem bei der Beschreibung klassischer ölgeschmierter Gleitlager verwendet. Nimmt der charakteristische Parameter hingegen sehr große Werte an, d.h. $\psi Re_\varphi \gg 1$, so dominieren Trägheitseffekte in der Strömung. Für solche Betriebspunkte, wie sie vornehmlich in berührungslosen axial durchströmten Fluidichtungen vorkommen können, spricht man im Allgemeinen von Potentialströmung.

Keht man zurück zur eigentlichen Bauteilfunktion einer berührungslosen Fluidichtung bzw. eines klassischen ölgeschmierten Gleitlagers, so lassen sich beide Maschinenelemente mit den hier dargelegten dimensionslosen Größen beschreiben. Für berührungslose Fluidichtungen wird allgemein angenommen, dass der Rotor gänzlich konzentrisch im Stator verweilt und er keine exzentrische oder verkippte Lage in Relation zum Stator annimmt. Durch die funktionsbedingte Trennung unterschiedlicher Druckniveaus kommt es zudem zur Ausbildung einer signifikanten axialen Durchströmung, d.h. $\phi \gg 0$. Zudem führt die Verwendung niederviskoser Fluide, oftmals Wasser, in Kombination mit großen Rotorradien und relativen Spaltspielen in der Größenordnung $\psi \sim 10^{-3}$ zu Reynoldszahlen in den Größenordnungen $Re_\varphi \sim 10^3$ bis $Re_\varphi \sim 10^4$. Die daraus resultierenden turbulenten Strömungszustände im Ringspalt führen ihrerseits zu großen charakteristischen Parametern in der Größenordnung $\psi Re_\varphi \gg 1$. Dementsprechend ist die Strömung innerhalb berührungsloser Fluidichtungen vornehmlich von Trägheitseffekten dominiert.

Gegenüber den konzentrischen Betriebsbedingungen berührungsloser Fluidichtungen werden klassische ölgeschmierte Gleitlager in einem großen Exzentrizitätsbereich ohne signifikante Druckdifferenz zwischen Ringspaltein- und -austritt betrieben. Zudem kommt es durch die Verwendung hochviskoser Schmiermedien, wie Öl, in Verbindung mit kleinen Rotorradien und relativen Spaltspielen in der Größenordnung $\psi \sim 10^{-3}$ zu kleinen Reynoldszahlen in der Größenordnung $Re_\varphi \sim 10^1$ und dementsprechend zur Ausbildung laminarer Strömung sowie charakteristischen Parametern $\psi Re_\varphi \ll 1$. Die Strömung innerhalb eines klassischen ölgeschmierten Gleitlagers ist dementsprechend von Reibungseffekten dominiert.

Einen besonderen Bereich zwischen berührungslosen Fluidichtungen und klassischen ölgeschmierten Gleitlagern nehmen fördermediengeschmierte Gleitlager ein. Hierbei wird das zu fördernde Medium der Fluidenergiemaschine zur Schmierung des Gleitlagers verwendet, vgl. Abbildung 1.1. Die oftmals

niederviskosen Medien, wie beispielsweise Wasser, führen zu Reynoldszahlen in der Größenordnung $Re_\varphi \sim 10^3$ und dementsprechend zur Ausbildung turbulenter Strömung im Ringspalt. Im Gegensatz zu klassischen ölgeschmierten Gleitlagern bewegt sich der charakteristische Parameter in Größenordnungen $\psi Re_\varphi \sim 1$, was dazu führt, dass die konvektiven Terme in den Impulsbilanzen nicht mehr vernachlässigt werden dürfen. Hinzu kommt, dass aufgrund konstruktiver Voraussetzungen fördermediengeschmierte Gleitlager oftmals mit einer axialen Druckdifferenz über dem Spalt sowie einer Umfangskomponente der Strömung vor Eintritt in den Schmierspalt betrieben werden. Vergleicht man die Betriebsbedingungen mit denen der berührungslosen Fluidichtung, so zeigt sich, dass fördermediengeschmierte Gleitlager als eine Art Hybrid, im englischen Sprachgebrauch wird auch von *hybrid bearings*^{14,15,16} gesprochen, zwischen Fluidichtungen und klassischen ölgeschmierten Gleitlagern fungieren.

Beispielhaft kann der übliche Betriebsbereich von berührungslosen Fluidichtungen und öl- sowie fördermediengeschmierten Gleitlagern in einem dreidimensionalen Parameterraum mit der relativen Exzentrizität ε , dem charakteristischen Parameter ψRe_φ und der Durchflusszahl ϕ dargestellt werden, vgl. Abbildung 2.2.

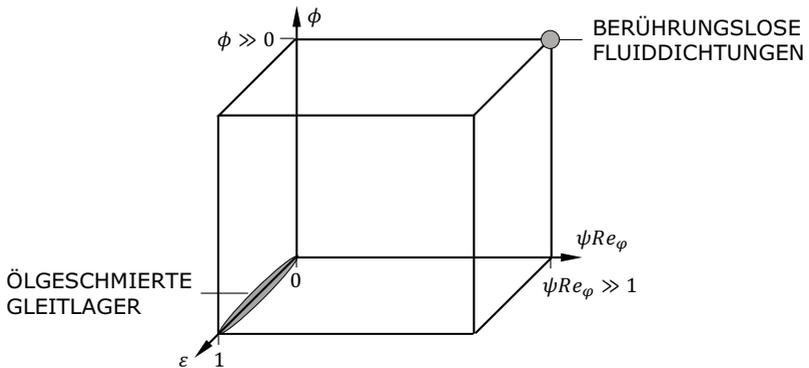


Abbildung 2.2 – Dreidimensionaler Parameterraum zur Charakterisierung berührungsloser Fluidichtungen und Gleitlager.

¹⁴SAN ANDRÉS, „Turbulent Hybrid Bearings With Fluid Inertia Effects“, ([79], 1990)

¹⁵SAWICKI, CAPALDI UND ADAMS, „Experimental and Theoretical Rotordynamic Characteristics of a Hybrid Journal Bearing“, ([81], 1997)

¹⁶WANG U. A., „Investigation of the combined influence of turbulence and thermal effects on the performance of water-lubricated hybrid bearings with circumferential grooves and stepped recesses“, ([105], 2013)

Fördermediengeschmierte Gleitlager können jedwedem Punkt im Parameter-
raum annehmen, wohingegen klassische ölgeschmierte Gleitlager in einem
Exzentrizitätsbereich von $0 < \varepsilon < 1$ ohne nennenswerte Durchflusszahl $\phi \approx 0$
und einem charakteristischen Parameter von $\psi Re_\varphi \ll 1$ abgebildet werden.
Im Gegensatz dazu werden berührungslose Fluiddichtungen bei einer relati-
ven Exzentrizität von $\varepsilon = 0$, einem charakteristischen Parameter $\psi Re_\varphi \gg 1$
und einer Durchflusszahl von $\phi \gg 0$ dargestellt. Es zeigt sich, dass sowohl
klassische Gleitlager als auch berührungslose Fluiddichtungen als asympto-
tische Grenzfälle eines axial durchströmten Ringspalts angesehen werden
können. Alle weiteren Ausführungen im Rahmen der Arbeit konzentrieren
sich dementsprechend nicht auf einen der beiden asymptotischen Grenzfälle,
sondern behandeln vielmehr den allgemeinen Fall einer Spaltströmung inner-
halb eines generischen axial durchströmten Ringspalts, ähnlich des Falls eines
fördermediengeschmierten Gleitlagers. Dementsprechend wird der vollständige
Parameterraum der Abbildung 2.2 innerhalb dieser Arbeit betrachtet.

Bevor im folgenden Kapitel der Stand der Forschung hinsichtlich der dyna-
mischen Eigenschaften axial durchströmter Ringspalte aufbereitet wird, soll
zunächst die Methode der Dimensionsanalyse auf die Steifigkeiten \tilde{K} , Dämp-
fungen \tilde{C} und Trägheiten \tilde{M} angewandt werden. Den generischen Ringspalt
zugrunde legend sind die beschreibenden rotordynamischen Koeffizienten eine
Funktion von 12 dimensionsbehafteten Parametern

$$\tilde{K}, \tilde{C}, \tilde{M} = \text{fn} \left(\tilde{R}, \tilde{L}, \tilde{h}, \tilde{e}, \tilde{z}_T, \alpha_X, \beta_Y, \tilde{\Omega}, \tilde{C}_z, \tilde{C}_\varphi|_{z=0}, \tilde{\varrho}, \tilde{\nu} \right). \quad (2.4)$$

Die Kreisfrequenz der Präzessionsbewegung $\tilde{\omega}$ sowie deren Amplitude $\Delta \tilde{e}$ sind
im Falle flüssigkeitsdurchströmter Ringspalte kein Teil der Abhängigkeits-
liste. Vielmehr werden sie, wie im weiteren Verlauf der Arbeit gezeigt wird,
als Parameter zur Ermittlung der rotordynamischen Koeffizienten verwen-
det. Für gasdurchströmte Ringspalte, wie sie beispielsweise in Gasturbinen
und Kompressoren auftreten, sind die rotordynamischen Koeffizienten jedoch
im Allgemeinen auch eine Funktion der Kreisfrequenz der Präzessionsbewe-
gung $\tilde{\omega}$ ¹⁷.

Die Definition der dimensionslosen rotordynamischen Koeffizienten wird mit
Hilfe der dimensionsbehafteten Bewegungsgleichung 1.1 abgeleitet¹⁸. Die indu-
zierten Kräfte auf den Rotor \tilde{F}_X und \tilde{F}_Y ergeben sich aus der Integration des
Druckfelds im Ringspalt. Die Entdimensionierung erfolgt mit dem dynami-
schen Druck, gebildet aus der Dichte des Fluids $\tilde{\varrho}$ und der Umfangsgeschwin-
digkeit des Rotors $\tilde{\Omega}\tilde{R}$, sowie dem Rotorradius \tilde{R} und der Ringspaltlänge \tilde{L} .

¹⁷Vergleiche Einträge [106, 16, 72, 9, 20, 14, 103, 110, 109] im Literaturverzeichnis.

¹⁸Für eine detaillierte Herleitung sei an dieser Stelle auf Anhang A verweisen.

In Analogie hierzu werden die dimensionslosen induzierten Momente auf den Rotor M_X und M_Y gebildet

$$F_i := \frac{2\tilde{F}_i}{\tilde{\varrho}\tilde{\Omega}^2\tilde{R}^3\tilde{L}}, \quad M_i := \frac{2\tilde{M}_i}{\tilde{\varrho}\tilde{\Omega}^2\tilde{R}^3\tilde{L}^2}, \quad \text{mit } i = X, Y. \quad (2.5)$$

Die translatorischen Bewegungen \tilde{X} und \tilde{Y} werden in Übereinstimmung mit der relativen Exzentrizität ε und der Amplitude der Präzessionsbewegung ϵ mit der mittleren Spaltweite \tilde{h} entdimensioniert

$$X := \frac{\tilde{X}}{\tilde{h}}, \quad Y := \frac{\tilde{Y}}{\tilde{h}}. \quad (2.6)$$

Somit weisen alle dimensionslosen Freiheitsgrade in der Bewegungsgleichung, d.h. X , Y , α und β , einen Wertebereich von 0 bis 1 auf. Mit Hilfe der Definition der dimensionslosen Kräfte und Momente auf den Rotor, vgl. Gleichung 2.5, lassen sich die dimensionslosen rotordynamischen Koeffizienten aus der dimensionsbehafteten Bewegungsgleichung herleiten. Aufgrund der unterschiedlichen physikalischen Einheiten der dimensionsbehafteten rotordynamischen Koeffizienten ist es notwendig, die dimensionslosen rotordynamischen Koeffizienten für die induzierten Kräfte und Momente auf den Rotor aus den translatorischen und rotatorischen Bewegungen jeweils separat zu definieren. Es ergeben sich vier Definitionen der dimensionslosen Steifigkeiten für die vier unterschiedlichen Kombinationen: (I) induzierte Kräfte auf den Rotor aus der translatorischen Bewegung, (II) induzierte Kräfte auf den Rotor aus der rotatorischen Bewegung, (III) induzierte Momente auf den Rotor aus der translatorischen Bewegung und (IV) induzierte Momente auf den Rotor aus der rotatorischen Bewegung

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_I &:= \frac{2\tilde{h}\tilde{\mathbf{K}}_I}{\tilde{\varrho}\tilde{\Omega}^2\tilde{R}^3\tilde{L}}, & \mathbf{K}_{II} &:= \frac{2\tilde{h}\tilde{\mathbf{K}}_{II}}{\tilde{\varrho}\tilde{\Omega}^2\tilde{R}^3\tilde{L}^2}, \\ \mathbf{K}_{III} &:= \frac{2\tilde{h}\tilde{\mathbf{K}}_{III}}{\tilde{\varrho}\tilde{\Omega}^2\tilde{R}^3\tilde{L}^2}, & \mathbf{K}_{IV} &:= \frac{2\tilde{h}\tilde{\mathbf{K}}_{IV}}{\tilde{\varrho}\tilde{\Omega}^2\tilde{R}^3\tilde{L}^3}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Schwarz hervorgehobene Symbole wie beispielsweise \mathbf{K}_I werden im Verlauf der Arbeit an bestimmten Stellen genutzt, um Matrizen allgemein vereinfacht darzustellen und dadurch die Lesbarkeit zu verbessern. Durch die Herleitung der dimensionslosen Koeffizienten auf Basis der Bewegungsgleichung sowie der oben aufgeführten Entdimensionierung ist es möglich diese auch quantitativ untereinander zu vergleichen. Analog zu den Steifigkeiten definieren sich die

Dämpfungen

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_I &:= \frac{2\tilde{h}\tilde{\mathbf{C}}_I}{\tilde{\varrho}\tilde{\Omega}\tilde{R}^3\tilde{L}}, & \mathbf{C}_{II} &:= \frac{2\tilde{h}\tilde{\mathbf{C}}_{II}}{\tilde{\varrho}\tilde{\Omega}\tilde{R}^3\tilde{L}^2}, \\ \mathbf{C}_{III} &:= \frac{2\tilde{h}\tilde{\mathbf{C}}_{III}}{\tilde{\varrho}\tilde{\Omega}\tilde{R}^3\tilde{L}^2}, & \mathbf{C}_{IV} &:= \frac{2\tilde{h}\tilde{\mathbf{C}}_{IV}}{\tilde{\varrho}\tilde{\Omega}\tilde{R}^3\tilde{L}^3}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

und Trägheiten

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_I &:= \frac{2\tilde{h}\tilde{\mathbf{M}}_I}{\tilde{\varrho}\tilde{R}^3\tilde{L}}, & \mathbf{M}_{II} &:= \frac{2\tilde{h}\tilde{\mathbf{M}}_{II}}{\tilde{\varrho}\tilde{R}^3\tilde{L}^2}, \\ \mathbf{M}_{III} &:= \frac{2\tilde{h}\tilde{\mathbf{M}}_{III}}{\tilde{\varrho}\tilde{R}^3\tilde{L}^2}, & \mathbf{M}_{IV} &:= \frac{2\tilde{h}\tilde{\mathbf{M}}_{IV}}{\tilde{\varrho}\tilde{R}^3\tilde{L}^3}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Die Indizes I bis IV werden im weiteren Verlauf der Arbeit stellvertretend für die vier Kombinationen der induzierten Kräfte und Momente aus den translatorischen und rotatorischen Bewegungen verwendet. So beschreiben etwa die Steifigkeiten der Teilmatrix I \mathbf{K}_I alle Steifigkeiten aus den induzierten Kräften durch die translatorische Bewegung¹⁹, d.h. K_{XX} , K_{XY} , K_{YX} und K_{YY} . Die dimensionslose Bewegungsgleichung in ausgeschriebener und vereinfacht dargestellter Form ergibt sich zu

$$\begin{aligned} - \begin{bmatrix} F_X \\ F_Y \\ M_X \\ M_Y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} K_{XX} & K_{XY} & K_{X\alpha} & K_{X\beta} \\ K_{YX} & K_{YY} & K_{Y\alpha} & K_{Y\beta} \\ K_{\alpha X} & K_{\alpha Y} & K_{\alpha\alpha} & K_{\alpha\beta} \\ K_{\beta X} & K_{\beta Y} & K_{\beta\alpha} & K_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} C_{XX} & C_{XY} & C_{X\alpha} & C_{X\beta} \\ C_{YX} & C_{YY} & C_{Y\alpha} & C_{Y\beta} \\ C_{\alpha X} & C_{\alpha Y} & C_{\alpha\alpha} & C_{\alpha\beta} \\ C_{\beta X} & C_{\beta Y} & C_{\beta\alpha} & C_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} M_{XX} & M_{XY} & M_{X\alpha} & M_{X\beta} \\ M_{YX} & M_{YY} & M_{Y\alpha} & M_{Y\beta} \\ M_{\alpha X} & M_{\alpha Y} & M_{\alpha\alpha} & M_{\alpha\beta} \\ M_{\beta X} & M_{\beta Y} & M_{\beta\alpha} & M_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.10a)$$

¹⁹Indizes der Teilmatrix I: \square_{XX} , \square_{XY} , \square_{YX} und \square_{YY} ; Indizes der Teilmatrix II: $\square_{X\alpha}$, $\square_{X\beta}$, $\square_{Y\alpha}$ und $\square_{Y\beta}$; Indizes der Teilmatrix III: $\square_{\alpha X}$, $\square_{\alpha Y}$, $\square_{\beta X}$ und $\square_{\beta Y}$; Indizes der Teilmatrix IV: $\square_{\alpha\alpha}$, $\square_{\alpha\beta}$, $\square_{\beta\alpha}$ und $\square_{\beta\beta}$.

$$\begin{aligned} - \begin{bmatrix} F_X \\ F_Y \\ M_X \\ M_Y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_I & \mathbf{K}_{II} \\ \mathbf{K}_{III} & \mathbf{K}_{IV} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} \mathbf{C}_I & \mathbf{C}_{II} \\ \mathbf{C}_{III} & \mathbf{C}_{IV} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}_I & \mathbf{M}_{II} \\ \mathbf{M}_{III} & \mathbf{M}_{IV} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.10b)$$

2.2 Stand der Forschung

Im Folgenden wird der Stand der Forschung zu den dynamischen Eigenschaften axial durchströmter Ringspalte aufbereitet. Im Wesentlichen werden hierbei grundlegende Annahmen der Modellierung klassischer öl- bzw. fördermediengeschmierter Gleitlager und berührungsloser axial durchströmter Fluiddichtungen diskutiert und die bisherigen theoretischen und experimentellen Untersuchungen zur generalisierten Betrachtung mit allen 48 rotordynamischen Koeffizienten vorgestellt.

2.2.1 Dynamische Eigenschaften öl- bzw. fördermediengeschmierter Gleitlager und berührungsloser Fluiddichtungen

Wie bereits eingangs diskutiert variiert der Detaillierungsgrad, mit dem der dynamische Einfluss der beiden asymptotischen Grenzfälle (i) ölgeschmierter Gleitlager bzw. (ii) berührungsloser axial durchströmter Fluiddichtungen modelliert wird. Im Folgenden wird der in der Literatur übliche Detaillierungsgrad der Modellierung und die damit einhergehenden Besonderheiten sowie die zugrunde liegenden Annahmen reflektiert. Aus Vergleichsgründen wird an dieser Stelle nochmals die dimensionslose Bewegungsgleichung zur Modellierung des dynamischen Einflusses axial durchströmter Ringspalte in Erinnerung gerufen:

$$\begin{aligned}
 - \begin{bmatrix} F_X \\ F_Y \\ M_X \\ M_Y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} K_{XX} & K_{XY} & K_{X\alpha} & K_{X\beta} \\ K_{YX} & K_{YY} & K_{Y\alpha} & K_{Y\beta} \\ K_{\alpha X} & K_{\alpha Y} & K_{\alpha\alpha} & K_{\alpha\beta} \\ K_{\beta X} & K_{\beta Y} & K_{\beta\alpha} & K_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} C_{XX} & C_{XY} & C_{X\alpha} & C_{X\beta} \\ C_{YX} & C_{YY} & C_{Y\alpha} & C_{Y\beta} \\ C_{\alpha X} & C_{\alpha Y} & C_{\alpha\alpha} & C_{\alpha\beta} \\ C_{\beta X} & C_{\beta Y} & C_{\beta\alpha} & C_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} M_{XX} & M_{XY} & M_{X\alpha} & M_{X\beta} \\ M_{YX} & M_{YY} & M_{Y\alpha} & M_{Y\beta} \\ M_{\alpha X} & M_{\alpha Y} & M_{\alpha\alpha} & M_{\alpha\beta} \\ M_{\beta X} & M_{\beta Y} & M_{\beta\alpha} & M_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix}. \tag{2.11}
 \end{aligned}$$

Gleitlager

Wird zunächst das klassische ölgeschmierte Gleitlager betrachtet, so ist dessen dynamischer Einfluss auf ein rotordynamisches System seit den 20er Jahren des 20. Jahrhunderts bekannt. Beispielsweise beschreiben Newkirk & Taylor²⁰ bereits 1925 das Auftreten selbsterregter Schwingungen gleitgelagerter Rotoren. Die Modellierung der dynamischen Eigenschaften mit Hilfe klassischer mechanischer Elemente erfolgt jedoch erst seit den 1940er Jahren auf Basis der Arbeiten von Hagg²¹ und Hagg & Sankey²². Hierbei beschreibt Hagg, unter der Annahme rein translatorischer Bewegungen des Rotors, die dämpfenden Eigenschaften des Ölfilms. Neben den Haupt- und Nebensteifigkeiten K_{XX} , K_{YY} und K_{XY} , K_{YX} zur Beschreibung der wegproportionalen Kraft auf den Rotor wird die dämpfende Wirkung des Ölfilms anhand einer konstanten Hauptdämpfung $C_{XX} = C_{YY} = \text{const.}$ beschrieben.

Der heutzutage übliche Detaillierungsgrad der Modellierung des dynamischen Einflusses ölgeschmierter Gleitlager mit vier Dämpfungs- und Steifigkeitskoeffizienten ist erstmals unter anderem in den Arbeiten von Sternlicht²³, Sternlicht et al.²⁴ sowie den Forschungsarbeiten von Lund^{25,26,27} zu finden. Die zugehörige Bewegungsgleichung reduziert sich dementsprechend zu

$$-\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{XX} & K_{XY} \\ K_{YX} & K_{YY} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{XX} & C_{XY} \\ C_{YX} & C_{YY} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Die darin enthaltenen Steifigkeits- und Dämpfungsmatrizen sind in ihrer dimensionlosen Form lediglich von der relativen Exzentrizität ε des Rotors im Gleitlager²⁸ sowie dessen Form abhängig. Für kleine relative Exzentrizi-

²⁰NEWKIRK UND TAYLOR, „Shaft whipping due to oil action in journal bearings“, ([68], 1925)

²¹HAGG, „The Influence of Oil-Film Journal Bearings on the Stability of Rotating Machines“, ([29], 1946)

²²HAGG UND SANKEY, „Some Dynamic Properties of Oil-Film Journal Bearings With Reference to the Unbalance Vibration of Rotors“, ([30], 1956)

²³STERNLICHT, „Elastic and Damping Properties of Cylindrical Journal Bearings“, ([89], 1959)

²⁴STERNLICHT, PORITSKY UND ARWAS, „Dynamic Stability Aspects of Cylindrical Journal Bearings using Compressible and Incompressible Fluids“, ([90], 1959)

²⁵LUND, „The Stability of an Elastic Rotor in Journal Bearings With Flexible, Damped Supports“, ([58], 1965)

²⁶LUND, *Rotor-Bearing Dynamics Design technology. Part VII: The Three Lobe Bearing and Floating Ring Bearing: Technical Report AFAPL- TR-65-41, Part VII*, ([56], 1968)

²⁷LUND, „Stability and Damped Critical Speeds of a Flexible Rotor in Fluid-Film Bearings“, ([57], 1974)

²⁸GASCH, NORDMANN UND PFÜTZNER, *Rotordynamik*, ([27], 2002)

täten $\varepsilon \leq 0.2$ können die Matrizen in guter Näherung als schiefsymmetrisch angenommen werden, d.h. $\mathbf{K}, \mathbf{C} = -\mathbf{K}^T, -\mathbf{C}^T$. Mit zunehmender relativer Exzentrizität verschwindet die Schiefsymmetrie der Steifigkeits- und Dämpfungsmatrizen. Einen beispielhaften Verlauf der Koeffizienten über der relativen Exzentrizität ε für ein klassisches ölgeschmiertes kurzes Gleitlager zeigt Abbildung 2.3.

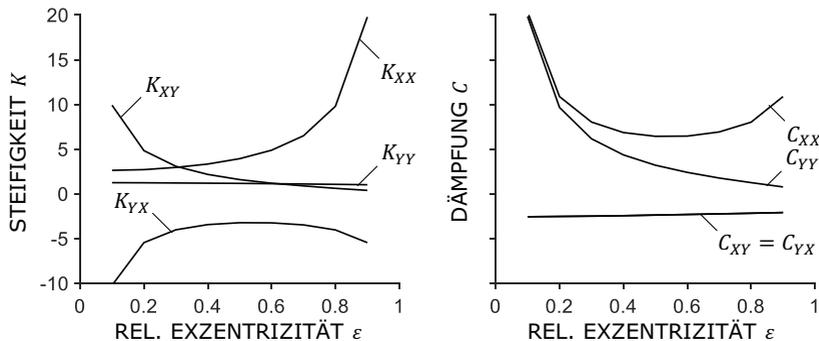


Abbildung 2.3 – Dimensionenlose Steifigkeiten K und Dämpfungen C über der relativen Exzentrizität ε eines klassischen ölgeschmierten kurzen Gleitlagers nach Gasch [27].

Vergleicht man die heutzutage gängige Modellierung klassischer Gleitlager mit der generalisierten Beschreibung des dynamischen Verhaltens nach Gleichung 2.10, so zeigt sich ein deutlich reduzierter Detaillierungsgrad. Besonders auffällig ist hierbei die Vernachlässigung der induzierten Momente durch die translatorischen als auch die induzierten Kräfte und Momente durch die rotatorischen Bewegungen. Zudem wird der Einfluss der Fluidträgheit und der virtuellen Masse des Ringspalts vernachlässigt. Dieser reduzierte Detaillierungsgrad im Vergleich zur generalisierten Beschreibung beruht im Allgemeinen auf drei Annahmen: (i) die Symmetrieachse des Rotors ist stets achsparallel zur Symmetrieachse des Stators, (ii) das sich ausbildende Druckfeld ist symmetrisch zur axialen Mitte des Gleitlagers, d.h. es werden keine Momente auf den Rotor induziert, (iii) Trägheitskräfte können im Vergleich zu viskosen Kräften vernachlässigt werden, d.h. $\psi Re_\varphi \ll 1$.

Die Annahmen (i) und (ii) sind gleichbedeutend mit einer Vernachlässigung der rotatorischen Freiheitsgrade sowie der Modellierung des dynamischen Einflusses auf Basis von Kräften auf den Rotor. Diese beiden Annahmen sind jedoch in einer realen Maschine nur in grober Näherung erfüllt. Bereits 1925

beschreiben Newkirk & Taylor²⁹ einen signifikanten Unterschied des Verhaltens gleitgelagerter Rotoren bei einer statischen Schiefstellung der Welle, d.h. $\alpha, \beta \neq 0$. Feng et al.^{30,31} weisen darauf hin, dass die Annahmen (i) und (ii) in einem realen Gleitlager durch drei mögliche Ursachen verletzt werden: das Auftreten eines externen Biegemoments durch eine ungenügende Ausrichtung von Pumpe und Motor, Unsicherheit bzw. ungenügende Form- und Lagetoleranz bei der Fertigung der Komponenten sowie sich aufsummierende Unsicherheiten bei der Montage einzelner Bauteile. Alle drei genannten Ursachen führen zu einer Schiefstellung des Rotors relativ zum Stator sowie zur Ausbildung eines unsymmetrischen Druckfelds bezüglich der Mitte des Gleitlagers. Die dritte und letzte Annahme (iii) beruht auf der Vernachlässigung der Trägheitseigenschaften des Fluids, d.h. $\psi Re_\varphi \ll 1$, und der daraus resultierenden Vernachlässigung der konvektiven Terme in den Impulsgleichungen.

Die Vernachlässigung der konvektiven Terme ermöglicht eine Beschreibung der Strömung im Ringspalt auf Grundlage der instationären Reynolds'schen Differentialgleichung der Schmierfilmtheorie³²

$$\frac{1}{\tilde{R}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\tilde{h}^3}{12 \tilde{\eta} \tilde{R}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\frac{\tilde{h}^3}{12 \tilde{\eta} \tilde{R}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} \right) = \frac{1}{2} \tilde{\Omega} \tilde{R} \frac{1}{\tilde{R}} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}}. \quad (2.13)$$

Zur Berechnung der in Abbildung 2.3 dargestellten rotordynamischen Koeffizienten wird der instationäre Term auf der rechten Seite der Gleichung unter Anwendung der Annahmen (i) und (ii) als eine Funktion der Exzentrizität \tilde{e} sowie des Verlagerungswinkels θ und ihrer zeitlichen Ableitungen geschrieben

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} = -\tilde{e} \dot{\theta} \sin \varphi - \dot{\tilde{e}} \cos \varphi. \quad (2.14)$$

²⁹NEWKIRK UND TAYLOR, „Shaft whipping due to oil action in journal bearings“, ([68], 1925)

³⁰FENG UND JIANG, „Dynamics of a motorized spindle supported on water-lubricated bearings“, ([22], 2017)

³¹FENG, JIANG UND JI, „Investigations of the static and dynamic characteristics of water-lubricated hydrodynamic journal bearing considering turbulent, thermohydrodynamic and misaligned effects“, ([23], 2019)

³²REYNOLDS, „On the theory of lubrication and its application to Mr. Beauchamp tower's experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil“, ([76], 1886)

Es ist direkt ersichtlich, dass auf diese Weise der Druck innerhalb des Gleitlagers eine Funktion der Exzentrizität $\tilde{\epsilon}$, sowie des Verlagerungswinkels θ und ihrer Ableitungen $\dot{\tilde{\epsilon}}$ und $\dot{\theta}$ ist. Dementsprechend sind auch die induzierten Kräfte auf den Rotor eine Funktion der selbigen Größen. Die Steifigkeits- und Dämpfungskoeffizienten³³ ergeben sich im Zuge der Berechnung aus den Ableitungen der Kraftkomponenten in \tilde{X} - und \tilde{Y} -Richtung³⁴ mit $i = X, Y$

$$\tilde{K}_{iX} = -\frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial \tilde{X}}, \quad \tilde{K}_{iY} = -\frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial \tilde{Y}}, \quad (2.15a)$$

$$\tilde{C}_{iX} = -\frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial \dot{\tilde{X}}}, \quad \tilde{C}_{iY} = -\frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial \dot{\tilde{Y}}}. \quad (2.15b)$$

Trotz der daraus resultierenden Einschränkungen in Bezug auf die generalisierte Bewegungsgleichung³⁵ bildet die Reynolds'sche Differentialgleichung das heutige Standardwerkzeug bei der dynamischen Auslegung klassischer ölgeschmierter Gleitlager. Für eine detaillierte Herleitung der Reynolds'schen Differentialgleichung sowie tabellierte rotordynamische Steifigkeits- und Dämpfungskoeffizienten sei an dieser Stelle auf die Werke von Szeri³⁶, Spurk³⁷ und Gasch³⁴ verwiesen.

³³Die Entdimensionierung der Steifigkeiten und Dämpfungen erfolgt im Themengebiet klassischer ölgeschmierter Gleitlager im Gegensatz zu den dimensionslosen Größen in Gleichung 2.7 und 2.8 auf Basis der mittleren Spaltweite \tilde{h} , der resultierenden Kraft auf den Rotor $\tilde{F}_{\text{RES}} = \sqrt{\tilde{F}_X^2 + \tilde{F}_Y^2}$ sowie der Kreisfrequenz des Rotors $\tilde{\Omega}$, d.h. $K_{ij} := \tilde{h} \tilde{K}_{ij} / \tilde{F}_{\text{RES}}$ und $C_{ij} := \tilde{h} \tilde{\Omega} \tilde{C}_{ij} / \tilde{F}_{\text{RES}}$.

³⁴GASCH, NORDMANN UND PFÜTZNER, *Rotordynamik*, ([27], 2002)

³⁵Es können auf Grundlage der Reynolds'schen Differentialgleichung 2.13 maximal 36 rotordynamische Koeffizienten berechnet werden.

³⁶SZERI, *Fluid film lubrication: Theory and design*, ([97], 1998)

³⁷SPURK UND AKSEL, *Strömungslehre: Einführung in die Theorie der Strömungen*, ([88], 2006)

Berührungslose Fluiddichtungen

Den zweiten asymptotischen Grenzfall einer Beschreibung der Strömung über einen generischen axial durchströmten Ringspalt bilden berührungslose Fluiddichtungen. Diese werden heutzutage in Analogie zu klassischen ölgeschmierten Gleitlagern ebenfalls über einen reduzierten Detaillierungsgrad im Vergleich zur generalisierten Bewegungsgleichung modelliert

$$\begin{aligned}
 - \begin{bmatrix} F_X \\ F_Y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} K_{XX} & K_{XY} \\ K_{YX} & K_{YY} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} C_{XX} & C_{XY} \\ C_{YX} & C_{YY} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} M_{XX} & M_{XY} \\ M_{YX} & M_{YY} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Der Detaillierungsgrad schließt hierbei im Vergleich zum klassischen Gleitlager die Trägheitsmatrix \mathbf{M} für die translatorische Bewegung mit ein. Dies begründet sich vorwiegend auf den oftmals turbulenten Strömungszuständen innerhalb der Fluiddichtungen und der daraus resultierenden unzulässigen Vernachlässigung der konvektiven Terme in den Impulsbilanzen. Wie bereits diskutiert wird für berührungslose Fluiddichtungen im Allgemeinen angenommen, dass der Rotor gänzlich konzentrisch im Stator verweilt, d.h. $\varepsilon \approx 0$. Dementsprechend werden in Analogie zur Modellierung des dynamischen Einflusses klassischer Gleitlager die Steifigkeits-, Dämpfungs- und Trägheitsmatrizen in guter Näherung als schiefsymmetrisch angenommen, d.h. $\mathbf{K}, \mathbf{C}, \mathbf{M} = -\mathbf{K}^T, -\mathbf{C}^T, -\mathbf{M}^T$.

Der reduzierte Detaillierungsgrad bei der Modellierung des dynamischen Einflusses berührungsloser Fluiddichtungen begründet sich im Allgemeinen zunächst auf einer achsparallelen Symmetrieachse von Rotor und Stator. Der Rotor steht hierbei zusätzlich konzentrisch im Stator, d.h. $\varepsilon = 0$. Die Annahme eines symmetrischen Druckfelds zur Mitte der Fluiddichtung ist jedoch aufgrund der immanenten axialen Druckdifferenz unzulässig. Zudem weist das Druckfeld einer berührungslosen Fluiddichtung bei dynamischer Anregung des Rotors neben einer Abhängigkeit in axialer Richtung auch eine Abhängigkeit in Umfangsrichtung auf. Diese Abhängigkeit des Druckfelds in Umfangsrichtung resultiert aus einer umfangsverteilten trägheitsbedingten Ablösung der Strömung am Stator bei Eintritt in den Ringspalt. Die dadurch entstehende umfangsverteilte Querschnittsverengung im Eintrittsbereich des Ringspalts resultiert in einem umfangsverteilten Druckverlust auf Basis des Carnotschen Stoßverlust. Abbildung 2.4 zeigt beispielhaft den Druckverlauf

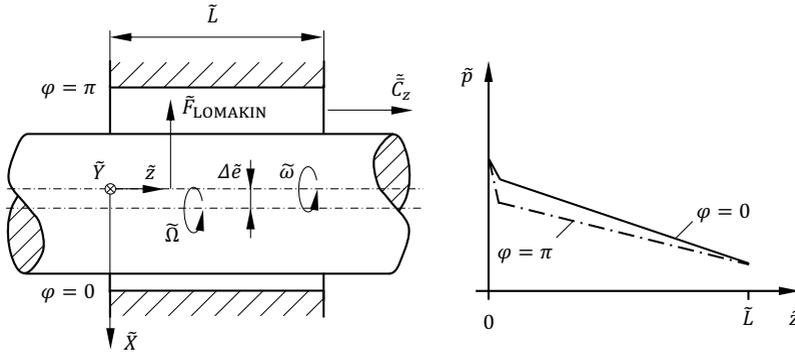


Abbildung 2.4 – Schematische Darstellung des umfangverteilten Druckfelds durch den Lomakin Effekt und die daraus resultierende zentrierende Kraft auf den Rotor F_{LOMAKIN} .

einer berührungslosen Fluiddichtung an der engsten, d.h. $\varphi = 0$, und der weitesten Stelle, d.h. $\varphi = \pi$, des Ringspalts.

Die Umfangsverteilung des Druckfelds wurde erstmalig durch Lomakin³⁸ im Jahr 1958 beschrieben und resultiert in einer zentrierenden Kraft auf den Rotor F_{LOMAKIN} , den nach ihm benannten Lomakin Effekt. Es ist zudem direkt ersichtlich, dass die Ausbildung eines umfangverteilten Druckfelds unweigerlich zur Ausbildung eines auf den Rotor wirkenden Moments führt. Diese immanenten Momente auf den Rotor werden jedoch im heutzutage üblichen Detaillierungsgrad vernachlässigt, vgl. Gleichung 2.16.

Die Grundlage, auf welcher die Annahme vernachlässigbar kleiner Momente auf den Rotor und den daraus resultierenden dynamischen Einflüssen auf ein rotordynamisches System beruht, bleibt jedoch in den meisten Fällen undokumentiert. Eine oftmals aufgeführte Begründung bezieht sich auf den unspezifischen Fall eines „langen Ringspalts“. Der Zahlenwert der relativen Ringspaltlänge, ab wann ein axial durchströmter Ringspalt als „lang“ angesehen werden kann, variiert jedoch stark. So definiert beispielsweise Gasch³⁹ eine relative Ringspaltlänge von $L > 0.5$, Güllich⁴⁰ eine Länge von $L > 1$

³⁸LOMAKIN, „Calculation of the critical speed and the conditions to ensure dynamic stability of the rotors in high pressure hydraulic machines, taking account of the forces in the seals (in Russian). Energomashinostroenie, 14“, ([55], 1958)

³⁹GASCH, NORDMANN UND PFÜTZNER, *Rotordynamik*, ([27], 2002)

⁴⁰GÜLICH, *Kreiselpumpen: Handbuch für Entwicklung, Anlagenplanung und Betrieb*, ([28], 2010)

und Childs⁴¹ eine Ringspaltlänge von $L > 1.5$ als Schwellenwert für einen langen Ringspalt. Einzig Childs gibt für den angegebenen Schwellenwert eine mathematische Begründung an⁴². Jedweder Parameter außerhalb der relativen Ringspaltlänge L wird bei der Herleitung jedoch vernachlässigt. Dementsprechend kann die Vernachlässigung der auf den Rotor induzierten Momente lediglich als erste Näherung betrachtet werden. Dass auch bereits bei kleineren relativen Ringspaltlängen die induzierten Momente auf den Rotor relevant werden, zeigt die Arbeit von Kim & Palazzolo⁴³. Die Autoren untersuchen hierbei den Einfluss des Laufradkopfspaltes zwischen Pumpenimpeller und Gehäuse auf das Systemverhalten einer einstufigen Kreiselpumpe. Der Ringspalt weist hierbei lediglich eine relative Länge von $L = 0.44$ auf. Es zeigt sich, dass die induzierten Momente durch translatorische Bewegungen sowie die Kräfte und Momente durch translatorische und rotatorische Bewegung keineswegs vernachlässigbar sind. Vielmehr beeinflussen diese zusätzlichen Kräfte und Momente bereits bei der betrachteten Ringspaltlänge von $L = 0.44$ das Systemverhalten der Pumpe maßgeblich.

Im Allgemeinen werden heutzutage die statischen und dynamischen Eigenschaften berührungsloser Fluiddichtungen mit Hilfe eines integro-differentiellen Ansatzes^{44,45} berechnet. Dieser entsteht durch Integration der Kontinuitätsgleichung sowie der Navier-Stokes-Gleichungen über der Ringspalthöhe \tilde{h} sowie unter der Annahme vernachlässigbarer radialer Geschwindigkeitsfelder und Druckgradienten, vgl. Kapitel 2.1. Der Name „integro-differentiell“ leitet sich aus der Art der Beschreibung des Kontrollvolumens ab. Durch die Integration über die Ringspalthöhe wird die radiale Richtung integral, die axiale und Umfangsrichtung jedoch differentiell betrachtet.

⁴¹CHILD, *Turbomachinery rotordynamics: Phenomena, modeling, and analysis*, ([13], 1993)

⁴²Eine ausführliche Beschreibung erfolgt in Kapitel 6.

⁴³KIM UND PALAZZOLO, „Rotordynamic Stability Effects of Shrouded Centrifugal Impellers With Combined Whirl and Precession“, ([43], 2018)

⁴⁴LAUNDER UND LESCHZINER, „Flow in Finite-Width, Thrust Bearings Including Inertial Effects: I—Laminar Flow“, ([53], 1978)

⁴⁵LAUNDER UND LESCHZINER, „Flow in Finite-Width Thrust Bearings Including Inertial Effects: II—Turbulent Flow“, ([52], 1978)

Für den hier betrachteten Fall eines axial durchströmten Ringspalts ergibt sich der integro-differentielle Ansatz

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} + \frac{1}{\tilde{R}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\int_0^{\tilde{h}} \tilde{c}_\varphi \, d\tilde{y} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\int_0^{\tilde{h}} \tilde{c}_z \, d\tilde{y} \right) = 0, \quad (2.17a)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\tilde{h}} \frac{\partial \tilde{c}_\varphi}{\partial \tilde{t}} \, d\tilde{y} + \frac{1}{\tilde{R}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\int_0^{\tilde{h}} \tilde{c}_\varphi^2 \, d\tilde{y} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\int_0^{\tilde{h}} \tilde{c}_\varphi \tilde{c}_z \, d\tilde{y} \right) = \\ = -\frac{1}{\tilde{R}} \frac{\tilde{h}}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\tilde{\rho}} \tilde{\tau}_{y\varphi} \Big|_0^{\tilde{h}}, \end{aligned} \quad (2.17b)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\tilde{h}} \frac{\partial \tilde{c}_z}{\partial \tilde{t}} \, d\tilde{y} + \frac{1}{\tilde{R}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\int_0^{\tilde{h}} \tilde{c}_\varphi \tilde{c}_z \, d\tilde{y} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\int_0^{\tilde{h}} \tilde{c}_z^2 \, d\tilde{y} \right) = \\ = -\frac{1}{\tilde{\rho}} \tilde{h} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} + \frac{1}{\tilde{\rho}} \tilde{\tau}_{yz} \Big|_0^{\tilde{h}}. \end{aligned} \quad (2.17c)$$

Wie zu erkennen ist, werden die konvektiven Terme in den Impulsgleichungen im Vergleich zu der Beschreibung klassischer ölgeschmierter Gleitlager nicht mehr vernachlässigt. Dementsprechend lassen sich mit dem integro-differentiellen Ansatz auch die Trägheitskoeffizienten in den Bewegungsgleichungen berechnen. Zur mathematischen Schließung des Systems aus nicht linearen partiellen Differentialgleichungen bedarf es zum einen einer Beschreibung der Geschwindigkeitsintegrale und zum anderen einer adäquaten Modellierung der Wandschubspannungen. Der gebräuchlichste Ansatz zur Behandlung der Geschwindigkeitsintegrale stellt der sogenannte „Bulk-Flow Ansatz“ [33] dar. Hierbei wird vereinfacht angenommen, dass die Geschwindigkeitsintegrale lediglich mit einer über die Ringspalthöhe gemittelten Geschwindigkeit \tilde{C}_i ($i = \varphi, z$) beschrieben werden können

$$\tilde{C}_\varphi = \frac{1}{\tilde{h}} \int_0^{\tilde{h}} \tilde{c}_\varphi \, d\tilde{y}, \quad \tilde{C}_z = \frac{1}{\tilde{h}} \int_0^{\tilde{h}} \tilde{c}_z \, d\tilde{y}. \quad (2.18)$$

Physikalisch lässt sich dies am einfachsten durch die Annahme blockartiger Geschwindigkeitsprofile, wie sie beispielsweise bei sehr großen Reynoldszahlen $Re_\varphi \rightarrow \infty$ vorliegen, interpretieren. Hierin liegt auch der größte Kritikpunkt des Ansatzes begründet. Hirs⁴⁶, Szeri⁴⁷ und Lang⁴⁸ weisen darauf hin, dass die

⁴⁶HIRS, „A Bulk-Flow Theory for Turbulence in Lubricant Films“, ([32], 1973)

⁴⁷SZERI, *Fluid film lubrication: Theory and design*, ([97], 1998)

⁴⁸LANG, *Effiziente Berechnung von Gleitlagern und Dichtspalten in Turbomaschinen*, ([50], 2018)

in Kapitel 2.1 diskutierten Reynoldszahlen für die typischen Vertreter axial durchströmter Ringspalte die Forderung nach solch großen Reynoldszahlen keineswegs erfüllen. Angesichts dessen gehen unterschiedlichste Autoren dazu über, schärfere Formulierungen zur Beschreibung der Geschwindigkeitsintegrale zu verwenden. So gehen beispielsweise Constantinescu & Galetuse⁴⁹ sowie Simon & Frêne⁵⁰ von parabolischen Geschwindigkeitsprofilen im Ringspalt aus. Die so ausgewerteten Integrale in den Impulsgleichungen genügen wiederum parabolischen Funktionen mit den beschreibenden über der Ringspalthöhe gemittelten Geschwindigkeiten \tilde{C}_φ^2 , $\tilde{C}_\varphi \tilde{C}_z$ und \tilde{C}_z^2 .

Lang & Pelz⁵¹, Lang⁵² sowie Kuhr et al.⁵³ verwenden zur Beschreibung der Geschwindigkeitsprofile \tilde{c}_φ und \tilde{c}_z erstmals vollausgebildete Geschwindigkeitsprofile auf Basis von Potenzgesetzen. Die Verwendung von Potenzgesetzen führt hierbei auf einen deutlich physikalisch motivierteren Modellierungsansatz und eröffnet die Möglichkeit, durch geschickte Wahl der Potenzen neben turbulenten Strömungszuständen auch laminare Strömungszustände im Ringspalt unter Berücksichtigung der Trägheitseigenschaften des Fluids zu untersuchen. Lang⁵² stellt zudem einen ausführlichen Vergleich der effizienten Berechnungswerkzeuge der Reynolds'schen Differentialgleichung und des integro-differentiellen Ansatzes mit Hinblick auf die Anwendbarkeit auf eine generische Ringspaltströmung an. Er schlussfolgert hierbei, dass eine Berechnung der Strömung auf Basis eines integro-differentiellen Ansatzes in Verbindung mit der Modellierung der Geschwindigkeitsprofile auf Basis von Potenzgesetzen die Anwendungsgebiete der Reynolds'schen Differentialgleichung und des Bulk-Flow Ansatzes als Spezialfälle mit einschließt. Dies führt dazu, dass der integro-differentielle Ansatz prädestiniert für die Beschreibung der Strömung eines generischen axial durchströmten Ringspalts ist. Die Ableitung der rotordynamischen Koeffizienten aus dem Bulk-Flow Ansatz erfolgt meist mit Hilfe eines Perturbationsansatzes sowie auf Basis von Methoden der Parameteridentifikation, vgl. hierzu Kapitel 3.2.

⁴⁹CONSTANTINESCU UND GALETUSE, „On the Possibilities of Improving the Accuracy of the Evaluation of Inertia Forces in Laminar and Turbulent Films“, ([19], 1974)

⁵⁰SIMON UND FRÊNE, „Rotordynamic coefficients for turbulent annular misaligned seals“, ([85], 1992)

⁵¹LANG UND PELZ, „Unified Prediction of Hydrodynamic Forces in Plain Annular Seals and Journal Bearings by means of an Analytically Derived Design Tool“, ([51], 2016)

⁵²LANG, *Effiziente Berechnung von Gleitlagern und Dichtspalten in Turbomaschinen*, ([50], 2018)

⁵³KUHR, LANG UND PELZ, „Static force characteristic of annular gaps -Experimental and simulation results“, ([47], To be published)

2.2.2 Generalisierte Betrachtung der dynamischen Eigenschaften

Die zugrunde liegenden Annahmen einer Betrachtung des rotordynamischen Einflusses axial durchströmter Ringspalte mit reduziertem Detaillierungsgrad wurden im vorherigen Kapitel reflektiert. Der Fokus der vorliegenden Arbeit bezieht sich jedoch explizit auf eine generalisierte Betrachtung des dynamischen Einflusses auf Basis aller 48 rotordynamischen Koeffizienten. Angesichts dessen werden im Folgenden die wichtigsten theoretischen und experimentellen Beiträge sowie die darin betrachteten Geometrie- und Betriebsbedingungen einer generalisierten Betrachtung des dynamischen Einflusses aufbereitet. Für eine detailliertere Auflistung der theoretischen und experimentellen Untersuchungen sei auf die Übersichtsartikel von Sternlicht & Rieger⁵⁴, Lund⁵⁵, Pinkus⁵⁶, Tiwari^{57,58}, Garg⁵⁹ und Zakharov⁶⁰ verwiesen.

Berechnung aller 48 rotordynamischen Koeffizienten

Im Folgenden wird der Stand der Forschung hinsichtlich der Berechnung der rotordynamischen Koeffizienten einer generalisierten Betrachtung des dynamischen Einflusses axial durchströmter Ringspalte dargelegt.

Im Hinblick auf die zusätzlichen 36 rotordynamischen Koeffizienten stellen Childs et al.⁶¹ 1982 erstmalig eine eindimensionale, auf dem Bulk-Flow Model basierende Berechnungsmethode zur Bestimmung schiefssymmetrischer Steifigkeits-, Dämpfungs- und Trägheitsmatrizen von berührungslosen Fluiddichtungen vor. Die Berechnung der statischen und dynamischen Eigenschaften erfolgt hierbei numerisch und unter Verwendung eines Perturbationsansatzes.

⁵⁴STERNLICHT UND RIEGER, „Rotor Stability“, ([91], 1967)

⁵⁵LUND, „Stability and Damped Critical Speeds of a Flexible Rotor in Fluid-Film Bearings“, ([57], 1974)

⁵⁶PINKUS, „The Reynolds Centennial: A Brief History of the Theory of Hydrodynamic Lubrication“, ([73], 1987)

⁵⁷TIWARI, LEES UND FRISWELL, „Identification of Dynamic Bearing Parameters: A Review“, ([100], 2004)

⁵⁸TIWARI, MANIKANDAN UND DWIVEDY, „A Review of the Experimental Estimation of the Rotor Dynamic Parameters of Seals“, ([101], 2005)

⁵⁹GARG, SHARDA UND KUMAR, „On the design and development of hybrid journal bearings: a review“, ([25], 2006)

⁶⁰ZAKHAROV, „Hydrodynamic lubrication research: Current situation and future prospects“, ([112], 2010)

⁶¹CHILDS U. A., „A high-Reynolds-number seal test facility: Facility description and preliminary test data“, ([15], 1982)

Childs et al. untersuchen in ihrer Arbeit die Auswirkungen der relativen Ringspaltlänge L auf die rotordynamischen Koeffizienten bei einer konstanten Druckdifferenz $\Delta p := 2\Delta\tilde{p}/(\tilde{\rho}\tilde{\Omega}^2\tilde{R}^2)$. Neben Untersuchungen ohne Vordrall der Strömung vor Eintritt in den Ringspalt, d.h. $C_\varphi|_{z=0} = 0$ für die drei Ringspaltlängen $L = 0.3, 1.0, 2.0$ wird auch der Einfluss eines negativen Vordralls von $C_\varphi|_{z=0} = -0.5$ bei einer Ringspaltlänge von $L = 1.0$ auf die dynamischen Eigenschaften untersucht.

Simon & Frêne⁶² entwickeln eine zweidimensionale Methode zur Berechnung der statischen und dynamischen Eigenschaften von berührungslosen Fluidichtungen bei exzentrischer Rotorposition. Ähnlich zu den Arbeiten von Childs et al. basiert die Methode auf einem integro-differentiellen Ansatz. Im Gegensatz zu dem von Childs et al. verwendeten Bulk-Flow Ansatz werden die Integrale in den Impulsgleichungen auf Basis parabolischer Geschwindigkeitsprofile modelliert. Die Lösung des Gleichungssystems erfolgt im Anschluss in Analogie zu der Arbeit von Childs et al. numerisch und unter Zuhilfenahme eines Perturbationsansatzes. Zur Validierung des Modells werden die numerischen Ergebnisse zunächst mit publizierten experimentellen und numerischen Daten von Nordmann & Dietzen⁶³ sowie Nelson & Nguyen⁶⁴ verglichen. Es zeigt sich eine gute Übereinstimmung der berechneten rotordynamischen Koeffizienten mit den Literaturdaten. Im Anschluss daran werden die Steifigkeiten K und Dämpfungen C für die drei relativen Exzentrizitäten $\varepsilon = 0, 0.5, 0.8$ berechnet. Eine generalisierte Betrachtung der Trägheitsmatrix \mathbf{M} , d.h. inklusive der Trägheiten aus den Kräften und Momenten durch rotatorische Bewegungen, findet nicht statt.

Simon & Frêne⁶⁵ weiten in einer weiteren Veröffentlichung ihre Untersuchungen auf den Einfluss der Ringspaltlänge L sowie des Vordralls $C_\varphi|_{z=0}$ aus. Hierbei werden auch gezielt negative Vordralle untersucht und mit den Daten von Childs et al. verglichen.

San Andrés⁶⁶ stellt eine zweidimensionale, auf dem Bulk-Flow Ansatz beruhende, Methode zur Berechnung der rotordynamischen Koeffizienten berührungsloser Fluidichtungen vor. Im Wesentlichen wird hierbei die Lage des

⁶²SIMON UND FRÊNE, „Analysis for Incompressible Flow in Annular Pressure Seals“, ([84], 1992)

⁶³NORDMANN UND DIETZEN, „Finite difference analysis of rotordynamic seal coefficients for an eccentric shaft position“, ([70], 1988)

⁶⁴NELSON UND NGUYEN, „Analysis of Eccentric Annular Incompressible Seals: Part 2— Effects of Eccentricity on Rotordynamic Coefficients“, ([66], 1988)

⁶⁵SIMON UND FRÊNE, „Rotordynamic coefficients for turbulent annular misaligned seals“, ([85], 1992)

⁶⁶SAN ANDRÉS, „Effect of Shaft Misalignment on the Dynamic Force Response of Annular Pressure Seals“, ([77], 1993)

Taumelpunktes z_T auf die rotordynamischen Koeffizienten zweier berührungsloser Fluiddichtungen mit den Längen $L = 0.4$ und 1.0 untersucht. San Andrés vergleicht seinen Ansatz mit den Berechnungsergebnissen von Childs et al. und Simon & Frêne. Es zeigt sich, dass die zusätzlichen 36 rotordynamischen Koeffizienten der Kräfte und Momente durch rotatorische Bewegungen sowie die Koeffizienten aus den Momenten durch translatorische Bewegung stark von der Position des Taumelpunkts z_T abhängen.

Das gleiche Modell wird in einer weiteren Veröffentlichung⁶⁷ zudem verwendet, um den Einfluss der relativen Exzentrizität ε auf die rotordynamischen Koeffizienten zu untersuchen. Hierbei werden die rotordynamischen Koeffizienten für eine axial durchströmte Fluiddichtung bei hohen statischen Winkelversätzen, d.h. $\alpha_x, \beta_y \neq 0$, betrachtet. Es zeigt sich, dass die Annahme schiefssymmetrischer Matrizen für große statische Winkel α_x und β_y nur ansatzweise Gültigkeit besitzt. In einer weiteren Arbeit erweitert San Andrés⁶⁸ seinen theoretischen Ansatz auf die Auswirkungen des exzentrisch betriebenen Rotors für hydrostatische Gleitlager mit turbulenter Strömung. Die Arbeit konzentriert sich auf den Einfluss der relativen Exzentrizität ε und der rotatorischen Freiheitsgrade α und β auf die Steifigkeiten K und Dämpfungen C aus den translatorischen und rotatorischen Bewegungen. Eine ganzheitliche Betrachtung der Trägheiten M aus den translatorischen und rotatorischen Bewegungen findet, ähnlich wie in der Arbeit von Simon & Frêne, nicht statt. San Andrés kommt zu dem Schluss, dass bei exzentrischer Rotorlage die Momente auf den Rotor durch translatorische Bewegungen sowie die Kräfte und Momente auf den Rotor durch rotatorische Bewegung bei einer ordnungsgemäßen Auslegung von hydrostatischen Gleitlagern mit turbulenter Strömung nicht vernachlässigbar sind.

Storteig⁶⁹ verwendet eine auf dem Bulk-Flow Model basierende Berechnungsmethode zur Bestimmung aller 48 rotordynamischen Koeffizienten bei profilierten Fluiddichtungen. Die Modellierung des Einflusses der Profilierung erfolgt hierbei nicht lokal aufgelöst. Vielmehr wird die profilierte Ringspaltgeometrie mit einem glatten Ringspalt und einer effektiven, erweiterten mittleren Spaltweite dargestellt. Die Modellierung der Wandschubspannungen erfolgt

⁶⁷SAN ANDRÉS, „The Effect of Journal Misalignment on the Operation of a Turbulent Flow Hydrostatic Bearing“, ([78], 1993)

⁶⁸SAN ANDRÉS, YANG UND CHILDS, „Thermal Effects in Cryogenic Liquid Annular Seals—Part II: Numerical Solution and Results“, ([80], 1993)

⁶⁹STORTEIG, „Dynamic characteristics and leakage performance of Dynamic characteristics and leakage performance of liquid annular seals in centrifugal pumps“, ([93], 1999)

nach Childs⁷⁰ auf Basis eines veränderten Ansatzes nach Moody⁷¹. Mit Hilfe aufwendiger CFD-Simulationen wird der Ansatz auf unterschiedlichste Oberflächenprofilierungen, wie Ringnuten und Bohrlochprofile parametrisiert. Feng & Jiang⁷² und Feng et al.⁷³ verwenden die Reynolds'sche Differentialgleichung zur Berechnung der Steifigkeiten K und Dämpfungen C eines fördermediengeschmierten hydrodynamischen Gleitlagers. Der Einfluss von laminarer und turbulenter Strömung wird ebenso untersucht wie der Einfluss der relativen Exzentrizität ε , der Kreisfrequenz des Rotors $\tilde{\Omega}$ und der rotatorischen Freiheitsgrade α_x und β_y . Zur Untersuchung des Einflusses turbulenter Strömung im Gleitlager wird die Reynolds'sche Differentialgleichung mit Hilfe von Korrekturfaktoren modifiziert. Diese „Turbulenzfaktoren“⁷⁴ ermöglichen es zwar indirekt turbulente Strömung durch die lokale Veränderung der dynamischen Viskosität des Fluids $\tilde{\eta}$ abzubilden, die ursprünglichen Beschränkungen der Reynolds'schen Differentialgleichung hinsichtlich der Berechnung des dynamischen Einflusses der Fluidträglichkeit, d.h. der Trägheiten M , bleiben jedoch bestehen.

Experimentelle Identifikation rotordynamischer Koeffizienten

Abschließend wird der Stand der Forschung hinsichtlich der experimentellen Identifikation einer generalisierten Betrachtung mit allen 48 rotordynamischen Koeffizienten aufgearbeitet. Für eine allgemeine Zusammenstellung der experimentellen Arbeiten sei nochmals auf die bereits genannten Übersichtsartikel verwiesen.

Eine der ersten experimentellen Identifikationen der generalisierten Betrachtung des dynamischen Einflusses axial durchströmter Ringspalten basiert auf den Arbeiten von Kanemori & Iwatsubo^{75,76}. Mit Hilfe eines eigens konstruierten Prüfstands, bestehend aus zwei ineinander gelagerten und angetriebenen

⁷⁰CHILD, *Turbomachinery rotordynamics: Phenomena, modeling, and analysis*, ([13], 1993)

⁷¹MOODY UND PRINCETON, „Friction Factors for Pipe Flow“, ([62], 1944)

⁷²FENG UND JIANG, „Dynamics of a motorized spindle supported on water-lubricated bearings“, ([22], 2017)

⁷³FENG, JIANG UND JI, „Investigations of the static and dynamic characteristics of water-lubricated hydrodynamic journal bearing considering turbulent, thermohydrodynamic and misaligned effects“, ([23], 2019)

⁷⁴POPE, *Turbulent flows*, ([74], 2015)

⁷⁵KANEMORI UND IWATSUBO, „Experimental Study of Dynamic Fluid Forces and Moments for a Long Annular Seal“, ([40], 1992)

⁷⁶KANEMORI UND IWATSUBO, „Forces and Moments Due to Combined Motion of Conical and Cylindrical Whirls for a Long Seal“, ([41], 1994)

Rotoren, werden kleine sowohl translatorische als auch rotatorische Bewegungen um die statische Ruhelage ermöglicht. Diese Bewegungen induzieren frequenzabhängige Kräfte und Momente auf den Rotor. Durch messtechnische Erfassung sowohl der Bewegung des Rotors als auch der induzierten Kräfte und Momente auf den Rotor werden die rotordynamischen Koeffizienten mit Hilfe von Methoden der Parameteridentifikation, ähnlich zum Bulk-Flow Model, identifiziert. Kanemori & Iwatsubo untersuchen in ihren Arbeiten stets axial durchströmte berührungslose Fluiddichtungen. Entsprechend den oben genannten Annahmen werden demnach die Steifigkeits-, Dämpfungs- und Trägheitsmatrizen als schiefssymmetrisch angenommen. Im Wesentlichen wird in den Arbeiten der Einfluss der axialen Druckdifferenz $\Delta\tilde{p}$ sowie der Kreisfrequenz des Rotors $\tilde{\Omega}$ und des Vordralls $\tilde{C}_\varphi|_{z=0}$ auf die rotordynamischen Koeffizienten betrachtet.

Eine andere Art des experimentellen Aufbaus zur experimentellen Identifikation aller 48 rotordynamischen Koeffizienten geht auf die Arbeiten von Neumer⁷⁷ und Matros et al.⁷⁸ zurück. Beide Autoren verwenden aktive Magnetlager zur Positionierung und Anregung des Rotors. Die Verwendung aktiver Magnetlager zur experimentellen Identifikation der rotordynamischen Koeffizienten hat den Vorteil, dass die Magnetlager gleichermaßen als Aktor und Sensor fungieren. Auf Grundlage der Messung des elektrischen Spulenstroms der Elektromagneten sowie der Rotorposition in den Magnetlagern kann auf die zur Anregung benötigte Kraft geschlossen werden. Die Identifikation der rotordynamischen Koeffizienten erfolgt im Anschluss ebenfalls auf Grundlage von Methoden der Parameteridentifikation. Die Arbeiten von Neumer und Matros untersuchen den Einfluss der Kreisfrequenz des Rotors $\tilde{\Omega}$ sowie den Einfluss der axialen Druckdifferenz $\Delta\tilde{p}$ auf die rotordynamischen Koeffizienten. Hierbei werden neben den Steifigkeits-, Dämpfungs- und Trägheitskoeffizienten aus den induzierten Kräften durch translatorische Bewegung, lediglich Steifigkeits- und Dämpfungskoeffizienten aus den induzierten Momenten auf den Rotor durch translatorische Bewegung angegeben.

⁷⁷NEUMER, *Entwicklung einer Versuchsanlage mit aktiver Magnetlagerung zur Parameteridentifikation von Fluid-Struktur-Interaktionen in Strömungsmaschinen: Zugl.: Kaiserslautern, Univ., Diss.*, ([67], 1994)

⁷⁸MATROS, ZIEGLER UND NORDMANN, „Fluid Structure Interactions in Annular Seals of Centrifugal Pumps“, ([61], 1995)

2.2.3 Zwischenfazit

In den vorangegangenen Kapiteln wurde der Stand der Forschung in Bezug auf die dynamischen Eigenschaften axial durchströmter Ringspalte aufgearbeitet. Hierbei wurden vor allem die Annahmen zur Reduktion des Detaillierungsgrades der Modellierung kritisch diskutiert. Besonders die Annahme einer stets achsparallelen Symmetrieachse von Rotor und Stator sowie die ungenügende Definition des „langen Ringspalts“ zur Vernachlässigung der Momente durch translatorische Bewegung und der Kräfte und Momente durch rotatorische Bewegung sind hierbei hervorzuheben.

Zusätzlich zu den Annahmen zur Reduktion des Detaillierungsgrades wurde der begrenzte Stand der Forschung hinsichtlich der systematischen Untersuchung des Einflusses von Betriebs- und Geometrieparametern auf eine generalisierte Betrachtung der rotordynamischen Koeffizienten dargelegt. Es zeigt sich, dass zur Berechnung aller 48 rotordynamischen Koeffizienten lediglich eine überschaubare Anzahl zeiteffizienter Berechnungsprogramme zur Verfügung stehen. Diese beruhen in großen Teilen auf dem Bulk-Flow Ansatz und weisen dementsprechend Unzulänglichkeiten im Hinblick auf die Behandlung der Integrale in den Erhaltungsgleichungen auf, vgl. Kapitel 2.2.1. Eine gezielte Validierung der Modelle anhand von experimentellen Daten ist zudem nur begrenzt erfolgt. Ausschlaggebend hierfür ist vorrangig die begrenzte Verfügbarkeit an validen, experimentell ermittelten rotordynamischen Koeffizienten. Prinzipiell existierten nach Kenntnisstand des Autors weltweit lediglich zwei Prüfstände zur Untersuchung aller 48 rotordynamischen Koeffizienten. Dementsprechend besteht auf Seiten der Forschung eine generelle Wissenslücke hinsichtlich der experimentellen Identifikation der rotordynamischen Eigenschaften axial durchströmter Ringspalte. Diese fehlende Basis an zuverlässigen Daten führt zudem unweigerlich zu einer Lücke hinsichtlich validierter Berechnungswerkzeuge. Diese betrifft sowohl die klassischen Methoden der numerischen Strömungsmechanik im Sinne von Computational Fluid Dynamics (CFD) als auch die zeiteffizienten Berechnungswerkzeuge wie das Bulk-Flow Model oder die Reynolds'sche Differentialgleichung.

2.3 Systemverhalten

Zur Beantwortung der dritten Forschungsfrage (iii) reicht die alleinige Kenntnis der dynamischen Eigenschaften des generischen axial durchströmten Ringspalts nicht aus. Das Wissen über die rotordynamischen Koeffizienten lässt noch keine Aussage über das dynamische Verhalten der Fluidenergiemaschine zu⁷⁹. Hierfür ist eine ganzheitliche Betrachtung des schwingfähigen Systems, bestehend aus der mechanischen Struktur sowie sämtlicher Lager- und Dichtungselemente, notwendig. Sind die dynamischen Eigenschaften aller beteiligten Elemente bekannt, so lässt sich mit unterschiedlichen Methoden das Verhalten des Systems bei vorgegebenen Geometrie- und Betriebsparametern, d.h. das Auf- oder Abklingen von Schwingungen, vorhersagen. Im Folgenden werden die gängigsten Methoden und Kennzahlen auf dem Gebiet axial durchströmter Ringspalte zur Vorhersage des Systemverhaltens hinsichtlich der Stabilität eines Systems sowie ihre Eignung im Kontext der vorliegenden Arbeit diskutiert.

2.3.1 Whirl-Frequenzverhältnis und effektive Dämpfung

Obleich eine alleinige Betrachtung der dynamischen Eigenschaften ohne die mechanische Struktur nicht zielführend ist, wird der Einfluss berührungsloser Fluiddichtungen auf das Systemverhalten oftmals mit Hilfe einfacher Kennzahlen auf Basis der rotordynamischen Koeffizienten beurteilt. Hierbei finden vorrangig die effektive Dämpfung sowie das Whirl-Frequenzverhältnis^{79,80}, engl. whirl-frequency ratio (WFR), Gebrauch. Das Whirl-Frequenzverhältnis bildet hierbei das Verhältnis von anfachenden, d.h. destabilisierenden, zu dämpfenden, d.h. stabilisierenden, Kräften ab. Die Herleitung des Whirl-Frequenzverhältnisses erfolgt auf Basis typischer Betriebsbedingungen und Annahmen berührungsloser Fluiddichtungen.

⁷⁹GASCH, NORDMANN UND PFÜTZNER, *Rotordynamik*, ([27], 2002)

⁸⁰CHILDS, *Turbomachinery rotordynamics: Phenomena, modeling, and analysis*, ([13], 1993)

Den Ausführungen in Kapitel 2.2.1 folgend, wird der dynamische Einfluss berührungsloser Fluiddichtungen oftmals auf Grundlage eines reduzierten Detaillierungsgrades betrachtet

$$\begin{aligned}
 - \begin{bmatrix} F_X \\ F_Y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} K_{XX} & K_{XY} \\ K_{YX} & K_{YY} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} C_{XX} & C_{XY} \\ C_{YX} & C_{YY} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} M_{XX} & M_{XY} \\ M_{YX} & M_{YY} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Unter der Annahme kreisförmiger Bewegungen um die konzentrische Ruhelage

$$X = \epsilon \cos(\omega t); \quad Y = \epsilon \sin(\omega t) \tag{2.20}$$

mit der Kreisfrequenz der Präzessionsbewegung ω sowie der Amplitude ϵ lassen sich die Bewegungsgleichungen durch Transformation in ein mitrotierendes zylindrisches Koordinatensystem voneinander entkoppeln⁸¹. Die radiale und tangentielle Kraftkomponente der Strömung auf den Rotor F_{RAD} und F_{TAN} lässt sich nunmehr als quadratische Funktionen der Steifigkeiten K , Dämpfungen C und Trägheiten M schreiben

$$- \begin{bmatrix} F_{\text{RAD}} \\ F_{\text{TAN}} \end{bmatrix} = \epsilon \begin{bmatrix} K_{XX} + C_{XY}\omega - M_{XX}\omega^2 \\ -K_{XY} + C_{XX}\omega + M_{XY}\omega^2 \end{bmatrix}. \tag{2.21}$$

Zur Beurteilung der stabilisierenden oder destabilisierenden Wirkung des Ringspalts auf das System wird ausschließlich die tangentielle Kraftkomponente F_{TAN} betrachtet. Positive Tangentialkräfte, d.h. in Präzessionsbewegung gerichtete Kräfte, haben eine destabilisierende Wirkung auf das System, wohingegen negative Tangentialkräfte, d.h. der Präzessionsbewegung entgegenwirkend, eine stabilisierende Wirkung auf das System aufweisen. Die Erfahrung^{82,83,84} zeigt, dass der Einfluss der Nebenträgheit M_{XY} aufgrund ihrer Größenordnung, d.h. $M_{XY} = -M_{YX} \ll 1$, im Vergleich zum Einfluss der Nebensteifigkeiten K_{XY} und Hauptdämpfungen C_{XX} vernachlässigt werden kann.

⁸¹Die Entkopplung der Gleichungen ist nur bei schiefssymmetrischen Koeffizientenmatrizen für den Fall einer konzentrischen Position von Rotor und Stator und der Annahme kreisförmiger Bewegungen um die konzentrische Ruhelage möglich.

⁸²CHILDS, *Turbomachinery rotordynamics: Phenomena, modeling, and analysis*, ([13], 1993)

⁸³GÜLICH, *Kreiselpumpen: Handbuch für Entwicklung, Anlagenplanung und Betrieb*, ([28], 2010)

⁸⁴KUHR, LUDWIG UND PELZ, „Measurement and simulation of the dynamic characteristics of plain and profiled annular seals“, ([48], 2021)

Die auf die Anregungsamplitude ϵ bezogene tangentiale Kraftkomponente der Strömung auf den Rotor F_{TAN} reduziert sich dementsprechend zu

$$\frac{F_{\text{TAN}}}{\epsilon} = K_{XY} - C_{XX}\omega = C_{XX} \left(\frac{K_{XY}}{C_{XX}} - \omega \right). \quad (2.22)$$

Diese vereinfachte Form der bezogenen Tangentialkraft wird negativ, sobald das Verhältnis aus Nebensteifigkeit K_{XY} und Hauptdämpfung C_{XX} kleiner als die Kreisfrequenz der Präzessionsbewegung ω ist, d.h. $K_{XY}/C_{XX} < \omega$. Wird davon ausgegangen, dass die Anregung der Schwingung einzig aus der Drehfrequenz des Rotors resultiert, d.h. $\omega = \tilde{\omega}/\tilde{\Omega} = 1$, so wird das System instabil, sobald $K_{XY}/C_{XX} > 1$. Die dimensionslose Kennzahl des Whirl-Frequenzverhältnisses definiert sich in Übereinstimmung mit der Arbeit von Childs⁸⁵ zu

$$WFR = \frac{K_{XY}}{C_{XX}}. \quad (2.23)$$

Das Whirl-Frequenzverhältnis ist demnach das Verhältnis aus den destabilisierenden, d.h. aus der Nebensteifigkeit K_{XY} resultierenden, und den stabilisierenden, d.h. aus der Hauptdämpfung C_{XX} resultierenden, Anteilen der Tangentialkraft auf den Rotor. Die Nebensteifigkeit K_{XY} sowie die Hauptdämpfung C_{XX} sind positiv. Dementsprechend ist auch das Whirl-Frequenzverhältnis positiv. Für Werte $0 < WFR < 1$ übersteigt die Hauptdämpfung C_{XX} die Nebensteifigkeit K_{XY} , d.h. $C_{XX} > K_{XY}$, und die Tangentialkraft wirkt stabilisierend auf das System. Übersteigt hingegen die Nebensteifigkeit K_{XY} die Hauptdämpfung C_{XX} , d.h. $K_{XY} > C_{XX}$, ergibt sich ein Whirl-Frequenzverhältnis $WFR > 1$ und die Tangentialkraft auf den Rotor übt einen destabilisierenden Einfluss auf das System aus. Das Whirl-Frequenzverhältnis stellt somit eine erste Indikation über den dynamischen Einfluss der Strömung innerhalb des Ringspalts auf die Stabilität des Systems dar. Laut Childs⁸⁵ treten ab einem Frequenzverhältnis von $WFR \approx 0.5$ erste destabilisierende Effekte auf. Dementsprechend sollten berührungslose Fluiddichtungen in Turbomaschinen immer unterhalb eines Whirl-Frequenzverhältnisses von $WFR \leq 0.5$ betrieben werden.

Eine Erweiterung der Definition des Whirl-Frequenzverhältnisses auf die Mitbeziehung der Kräfte durch rotatorische Bewegung wurde in den vergangenen Jahren vor allem an der Texas A&M University vorangetrieben. So geben Kim und Palazzolo⁸⁶ eine abgeänderte Form des Whirl-Frequenzverhältnisses

⁸⁵CHILDs, *Turbomachinery rotordynamics: Phenomena, modeling, and analysis*, ([13], 1993)

⁸⁶KIM UND PALAZZOLO, „Rotordynamic Stability Effects of Shrouded Centrifugal Impellers With Combined Whirl and Precession“, ([43], 2018)

an

$$WFR = \frac{K_{YX} + K_{Y\beta}\gamma/\epsilon}{C_{XX} + C_{Y\alpha}\gamma/\epsilon}. \quad (2.24)$$

Hierin beschreibt γ die Amplitude der rotatorischen Bewegung. Die Herleitung erfolgt, analog zu der des Whirl-Frequenzverhältnisses, für rein translatorische Bewegung. Die Autoren tätigen die Annahme, dass die rotatorischen Freiheitsgrade α_X und β_Y durch das Verhältnis aus der Amplitude der rotatorischen Freiheitsgrade γ und der Amplitude der translatorischen Freiheitsgrade ϵ , d.h. $\alpha_X = -\gamma Y/\epsilon$ und $\beta_Y = \gamma X/\epsilon$, angenähert werden können. Zudem werden die Trägheiten aus den Kräften der rotatorischen Bewegung \mathbf{M}_{II} aufgrund ihrer Größenordnung im Vergleich zu den Trägheiten aus den Kräften der translatorischen Bewegung \mathbf{M}_I vernachlässigt. Im Gegensatz zur Definition des Whirl-Frequenzverhältnisses bei rein translatorischer Bewegung beinhaltet die erweiterte Formulierung das Verhältnis der Anregungsamplituden γ/ϵ . Das erweiterte Whirl-Frequenzverhältnis kann erneut als ein Verhältnis aus destabilisierenden und stabilisierenden Kräften interpretiert werden. Auch das erweiterte Whirl-Frequenzverhältnis stellt lediglich eine erste Indikation über den stabilisierenden bzw. destabilisierenden Einfluss der Ringspaltströmung auf das System dar.

Wie oben erwähnt existiert neben dem Whirl-Frequenzverhältnis eine weitere gängige Kennzahl zur Beurteilung der Stabilität von berührungslosen Fluidichtungen, die effektive Dämpfung C_{EFF} ⁸⁷. Die effektive Dämpfung ergibt sich ebenfalls aus der tangentialen Kraftkomponente F_{TAN} der Strömung auf den Rotor. Hierbei wird nicht, wie bei der Herleitung des Whirl-Frequenzverhältnisses, das Verhältnis aus destabilisierenden und stabilisierenden Kräften betrachtet. Vielmehr ergibt sich die effektive Dämpfung C_{EFF} aus dem funktionalen Zusammenhang

$$\frac{F_{\text{TAN}}}{\epsilon} = -C_{\text{EFF}}, \quad \text{mit} \quad C_{\text{EFF}} = C_{XX} \left(\omega - \frac{K_{XY}}{C_{XX}} \right). \quad (2.25)$$

Eine positive effektive Dämpfung $C_{\text{EFF}} > 0$ ist gleichbedeutend mit einer stabilisierenden Wirkung der Tangentialkraft F_{TAN} auf das System. Eine negative, effektive Dämpfung $C_{\text{EFF}} < 0$ steht hingegen stellvertretend für einen destabilisierenden Einfluss des Ringspalts. Im Gegensatz zum Whirl-Frequenzverhältnis WFR bietet die effektive Dämpfung C_{EFF} keine physikalische Interpretation. Vielmehr ist sie gleichbedeutend mit der negativen Tangentialkraft F_{TAN} der Strömung auf den Rotor. Auch die effektive Dämpfung C_{EFF} stellt lediglich eine erste Indikation über den dynamischen Einfluss der Ringspaltströmung auf das System dar.

⁸⁷IWATSUBO UND ISHIMARU, „Consideration of Whirl Frequency Ratio and Effective Damping Coefficient of Seal“, ([35], 2010)

Abschließend erfolgt eine Diskussion, inwiefern sich die Kennzahlen des Whirl-Frequenzverhältnisses WFR sowie der effektiven Dämpfung C_{EFF} zur Analyse des Systemverhaltens eignen. Hervorzuheben ist hierbei vor allem die Beschränkung der Betrachtung auf die Ringspaltströmung ohne Einbeziehung des mechanischen Systems. Iwatsubo⁸⁸ urteilt, dass die oben genannten Definitionen im Vergleich zu einer vollständigen Betrachtung des rotordynamischen Systems das Auftreten instabiler Betriebszustände nur ungenügend vorhersagen. Dementsprechend können die Kennzahlen für sich genommen lediglich einen ersten Anhaltspunkt über das Systemverhalten liefern. Für eine detaillierte Analyse des Systemverhaltens ist immer die Betrachtung des gesamten Systems, d.h. inklusive der mechanischen Elemente, erforderlich.

2.3.2 Hurwitz-Kriterium

Neben den Möglichkeiten, den dynamischen Einfluss eines axial durchströmten Ringspalts über einfache Kennzahlen zu beurteilen, haben sich unterschiedlichste Methoden zur Betrachtung der Stabilität eines gesamten Systems etabliert. Eines der am häufigsten verwendeten Kriterien ist hierbei das von Adolf Hurwitz postulierte Hurwitz-Kriterium⁸⁹. Betrachtet man die homogene Differentialgleichung eines allgemeinen mechanischen Systems, so ist diese in Analogie zur Bewegungsgleichung des Ringspalts durch die Steifigkeits- \mathbf{K} , Dämpfungs- \mathbf{C} und Trägheitsmatrizen \mathbf{M} sowie die Freiheitsgrade \mathbf{q} gegeben

$$\mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = 0. \quad (2.26)$$

Wird zur Lösung des Systems ein Exponentialansatz der Form

$$\mathbf{q} = \hat{\mathbf{q}} \exp(\lambda t) \quad (2.27)$$

mit der Amplitude $\hat{\mathbf{q}}$ sowie dem dimensionslosen Eigenwert $\lambda := \tilde{\lambda}/\tilde{\Omega}$ gewählt, so ergibt sich das homogene Gleichungssystem

$$(\mathbf{K} + \mathbf{C}\lambda + \mathbf{M}\lambda^2) \hat{\mathbf{q}} = 0. \quad (2.28)$$

Das Gleichungssystem hat nur dann eine nicht triviale Lösung, wenn das charakteristische Polynom χ verschwindet

$$\chi = \det(\mathbf{K} + \mathbf{C}\lambda + \mathbf{M}\lambda^2) \stackrel{!}{=} 0. \quad (2.29)$$

⁸⁸IWATSUBO UND ISHIMARU, „Consideration of Whirl Frequency Ratio and Effective Damping Coefficient of Seal“, ([35], 2010)

⁸⁹HURWITZ, „Über die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt (1895)“, ([34], 1963)

Geht man von einem System mit vier Freiheitsgraden aus, wie es beispielsweise bei der generalisierten Betrachtung des dynamischen Einflusses axial durchströmter Ringspalte der Fall ist, so hat das charakteristische Polynom die Form

$$\chi = a_8\lambda^8 + a_7\lambda^7 + a_6\lambda^6 + a_5\lambda^5 + a_4\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0. \quad (2.30)$$

Die Eigenwerte des Systems ergeben sich als Nullstellen der charakteristischen Gleichung $\chi \stackrel{!}{=} 0$. Zu jedem Eigenwert λ_i existiert ein nicht trivialer rechts- bzw. linksseitiger Eigenvektor $\hat{\mathbf{q}}_i$ bzw. $\hat{\mathbf{l}}_i$. Die rechtsseitigen Eigenvektoren $\hat{\mathbf{q}}_i$ ergeben sich aus den entsprechenden Eigenwerten λ_i und dem homogenen Gleichungssystem 2.28. Die linksseitigen Eigenvektoren $\hat{\mathbf{l}}_i$ ergeben sich in Analogie aus den Eigenwerten λ_i und dem Linkseigenwertproblem⁹⁰

$$\left(\mathbf{K}^T + \mathbf{C}^T \lambda + \mathbf{M}^T \lambda^2 \right) \hat{\mathbf{l}} = 0. \quad (2.31)$$

Wird, wie im vorliegenden Fall, ein System mit schwacher Dämpfung betrachtet, so sind die Eigenwerte des Systems komplexe Größen und treten in komplex konjugierten Eigenwertpaaren auf. Der Realteil des komplexen Eigenwerts $\Re(\lambda_i)$ ist das Produkt aus dem negativen Dämpfungsmaß $-\xi_i$ und der Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems $\omega_{0,i} := \tilde{\omega}_{0,1}/\tilde{\Omega}$. Der Imaginärteil des komplexen Eigenwerts $\Im(\lambda_i)$ beinhaltet die Eigenkreisfrequenz des gedämpften Systems $\omega_{D,i} := \omega_{0,i}\sqrt{1 - \xi_i^2}$, engl. damped natural frequency

$$\Re(\lambda_i) = -\xi_i\omega_{0,i}, \quad \Im(\lambda_i) = \omega_{D,i} = \omega_{0,i}\sqrt{1 - \xi_i^2}. \quad (2.32)$$

Das von Hurwitz postulierte Kriterium zur Bestimmung der Stabilität eines Systems setzt hierbei auf die Analyse des Vorzeichens der Realteile der Eigenwerte $\Re(\lambda)$ durch die Analyse der Koeffizienten des charakteristischen Polynoms a_i ($i = 1..8$) sowie der Hauptabschnittsdeterminanten D_i der quadratischen Hurwitz-Matrix^{91,90} \mathbf{H}

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad (2.33)$$

$$D_1 = a_1, \quad D_2 = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad D_i = \det(\mathbf{H}).$$

⁹⁰GASCH, KNOTHE UND LIEBICH, *Strukturdynamik*, ([26], 2012)

⁹¹LUNZE, *Regelungstechnik 1*, ([59], 2010)

Ein System ist immer dann asymptotisch stabil, wenn der Realteil aller Eigenwerte negativ ist $\Re(\lambda) < 0$. Dies ist genau dann erfüllt, sobald folgende Bedingungen gelten:

- (i) alle Koeffizienten des charakteristischen Polynoms sind positiv $a_i > 0$,
- (ii) die führenden Hauptabschnittsdeterminanten der quadratischen Hurwitz-Matrix \mathbf{H} sind positiv $D_i > 0$.

Der große Vorteil des Hurwitz-Kriteriums besteht darin, eine Information über die Stabilität des Systems zu erhalten ohne Kenntnisse über die Eigenwerte oder Eigenvektoren durch Lösung der charakteristischen Gleichung erlangen zu müssen. Zusätzlich bietet es im Vergleich zu den im vorangegangenen Kapitel aufgeführten Kennzahlen des Whirl-Frequenzverhältnisses WFR und der effektiven Dämpfung C_{EFF} einen Einblick in das vollständige Systemverhalten und fokussiert sich nicht auf die destabilisierenden und stabilisierenden Effekte eines einzigen Bauteils. Der große Nachteil des Kriteriums hingegen ist, dass keine Aussage über die Entfernung des Systems zur Stabilitätsgrenze zu treffen ist und im Gegensatz zu den einfachen Kennzahlen eine physikalische Interpretation im Hinblick auf stabilisierende und destabilisierende Faktoren schwierig erscheint.

2.3.3 Das logarithmische Dekrement

In Analogie zum Hurwitz-Kriterium stellt die Beurteilung der Stabilität eines Systems mit Hilfe des logarithmischen Dekrements Λ eine Analyse des Realteils der Eigenwerte $\Re(\lambda)$ dar. Hierbei werden ebenfalls die Nullstellen der charakteristischen Gleichung $\chi \stackrel{!}{=} 0$ gesucht und somit die Eigenwerte des Systems berechnet. Ein beispielhaftes System mit vier Freiheitsgraden besitzt acht Eigenwerte, wobei diese bei schwach gedämpften Systemen in komplex konjugierten Paaren auftreten. Im Gegensatz zum Hurwitz-Kriterium werden die Eigenwerte explizit berechnet und anschließend analysiert. Zur Berechnung des logarithmischen Dekrements Λ wird zunächst das Dämpfungsmaß ξ aus dem Verhältnis des negativen Realteils des Eigenwertes $-\Re(\lambda)$ und dessen Betrag $|\lambda| = \sqrt{\Re(\lambda)^2 + \Im(\lambda)^2}$ gebildet

$$\xi = -\frac{\Re(\lambda)}{|\lambda|} = -\frac{\Re(\lambda)}{\sqrt{\Re(\lambda)^2 + \Im(\lambda)^2}}. \quad (2.34)$$

Ein negatives Dämpfungsmaß $\xi < 0$ ist gleichbedeutend mit einem instabilen Systemverhalten. Das logarithmische Dekrement Λ ergibt sich aus dem Dämpfungsmaß ξ bzw. aus dem Real- und Imaginärteil des Eigenwerts $\Re(\lambda)$ und $\Im(\lambda)$

$$\Lambda = 2\pi \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} = -2\pi \frac{\Re(\lambda)}{\Im(\lambda)}. \quad (2.35)$$

Bei einem stabilen Eigenwert ist das logarithmische Dekrement positiv, d.h. $\Lambda > 0$, wohingegen ein negatives logarithmisches Dekrement $\Lambda < 0$ einen instabilen Eigenwert bedeutet. Das logarithmische Dekrement Λ kann somit als Maß für die Stabilität eines Systems gesehen werden. Je größer der Wert des logarithmischen Dekrements Λ , desto weiter ist der Abstand des Systems zur Stabilitätsgrenze. Physikalisch lässt sich das logarithmische Dekrement am zeitlichen Verlauf einer abklingenden Schwingung eines schwach gedämpften Systems erläutern, vgl. Abbildung 2.5.

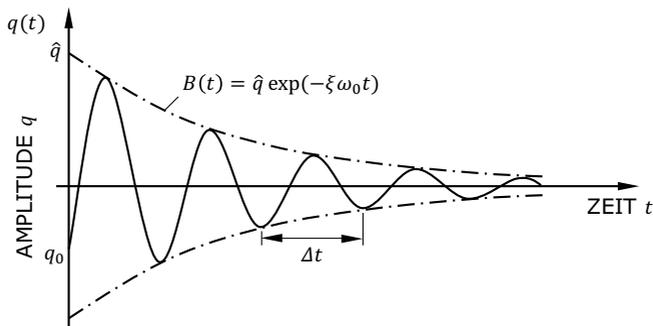


Abbildung 2.5 – Schwach gedämpfte Schwingung [60].

Die dargestellte Schwingung wird von der Abklingkurve $B(t) = \hat{q} \exp(-\xi \omega_0 t)$ eingehüllt. Das Verhältnis aus zwei aufeinander folgenden Schwingungsamplituden $q(t)$ und $q(t + \Delta t)$, welche um die Zeit Δt versetzt sind, ist

$$\frac{q(t)}{q(t + \Delta t)} = \exp\left(2\pi \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \Delta t\right) = \exp(\Lambda). \quad (2.36)$$

Das logarithmische Dekrement Λ bildet gerade den Exponenten des Verhältnisses aus zwei aufeinander folgenden Schwingungen ab. Ist der Exponent negativ, d.h. $\Lambda < 0$, so kommt es zu einem Ansteigen der Amplituden im zeitlichen Verlauf. Ist der Exponent positiv, d.h. $\Lambda > 0$, klingen die Schwingungen

mit der Zeit ab. Dementsprechend ist ein negatives logarithmisches Dekrement Λ gleichbedeutend mit einem instabilen Systemverhalten, wohingegen ein positives logarithmisches Dekrement Λ einen stabilen Zustand des Systems bedeutet. Angemerkt sei an dieser Stelle, dass das logarithmische Dekrement Λ nur für schwach gedämpfte Systeme definiert ist, d.h. $0 < \xi < 1$. Liegt stark gedämpftes Systemverhalten vor, d.h. $\xi \geq 1$, so ist das zugrundeliegende System nicht schwingfähig. Dementsprechend sind die Eigenwerte des Systems rein reell und das logarithmische Dekrement unendlich groß, d.h. $\Lambda \rightarrow \infty$.

Das logarithmische Dekrement Λ wird in vielen Arbeiten als Referenzkriterium zur Beurteilung der Stabilität des Systems herangezogen, vgl. Choudhury⁹² und Iwatsubo & Ishimaru⁹³. Ein großer Vorteil in der Methode, das Verhalten eines Systems mit Hilfe des logarithmischen Dekrements Λ zu untersuchen, geht aus seiner Möglichkeit zur Kombination einzelner logarithmische Dekremente Λ für alle beteiligten Baugruppen hervor. So untersuchen beispielsweise Iwatsubo & Sheng⁹⁴ eine mehrstufige Pumpe mit verschiedenen berührungslosen Fluiddichtungen, Gleitlagern und Impellern. Die einzelnen Komponenten üben entweder einen stabilisierenden oder destabilisierenden Einfluss auf das Gesamtsystem aus. Zur Beurteilung eines jeden Einflusses wird für jede Komponente ein eigenes logarithmisches Dekrement Λ gebildet. Aus der Addition der Teildekremente der Komponenten ergeben sich die logarithmischen Dekremente des Gesamtsystems. Ist die Summe der logarithmischen Dekremente positiv, so ist das System stabil, ist die Summe negativ, ist das Gesamtsystem instabil. Kanemori & Iwatsubo⁹⁵ untersuchen unter Verwendung einer alternativen Formulierung des logarithmischen Dekrements Λ den Beitrag langer Dichtspalte auf die Stabilität einer Tauchpumpe. Hierfür werden für die unterschiedlichen Kräfte und Momente auf den Rotor aus den translatorischen und rotatorischen Bewegungen entsprechende logarithmische Dekremente gebildet. Das logarithmische Dekrement Λ ermöglicht es somit nicht nur das Verhalten eines Gesamtsystems zu bestimmen, sondern beinhaltet auch die Möglichkeit gezielt Teilsysteme und ihre stabilisierende oder destabilisierende Wirkung zu untersuchen, vgl. Kapitel 7.

⁹²CHOUDHURY, „Rotordynamic Stability Case Studies“, ([17], 2004)

⁹³IWATSUBO UND ISHIMARU, „Consideration of Whirl Frequency Ratio and Effective Damping Coefficient of Seal“, ([35], 2010)

⁹⁴IWATSUBO UND SHENG, „Evaluation of Seal Effects on the Stability of Rotating Fluid Machinery“, ([36], 1995)

⁹⁵KANEMORI UND IWATSUBO, „Rotordynamic Analysis of Submerged Motor Pumps : Influence of Long Seal on the Stability of Fluid Machinery“, ([42], 1994)

Kapitel 3

Modellbildung

In den vorherigen Kapiteln wurden die Grundlagen zur Modellierung des dynamischen Einflusses von öl- bzw. fördermediengeschmierten Gleitlagern und berührungslosen, axial durchströmten Fluiddichtungen diskutiert. Zudem wurde der Stand der Forschung zur Berechnung als auch zur experimentellen Identifikation einer generalisierten Betrachtung des dynamischen Einflusses axial durchströmter Ringspalte reflektiert. Den Ausführungen folgend ist eine systematische Untersuchung der rotordynamischen Eigenschaften ausschließlich bei den induzierten Kräften durch translatorische Bewegungen zufriedenstellend durchgeführt. Die Kräfte aus den rotatorischen Bewegungen sowie die Momente durch translatorische und rotatorische Bewegungen sind jedoch sowohl auf theoretischer als auch auf experimenteller Seite nur unzureichend erforscht.

Zur Schließung dieser Wissenslücke wird im Folgenden zunächst ein zeiteffizientes Berechnungswerkzeug zur Ermittlung der rotordynamischen Eigenschaften axial durchströmter Ringspalte erarbeitet. Dieses Modell beruht auf der Erweiterung eines bereits bestehenden Modells zur Berechnung der statischen Eigenschaften axial durchströmter Ringspalte, dem Clearance-Averaged Pressure Model^{1,2} (CAPM). Im Anschluss an die Herleitung des Modells erfolgt ein erster Vergleich der Berechnungsergebnisse mit Daten aus der Literatur. Abschließend wird ein Zwischenfazit über die bisherigen Erkenntnisse und die daraus ableitbaren Ergebnisse in Bezug auf die Forschungsfragen gezogen.

¹ LANG, *Effiziente Berechnung von Gleitlagern und Dichtspalten in Turbomaschinen*, ([50], 2018)

² KUHR, LANG UND PELZ, „Static force characteristic of annular gaps -Experimental and simulation results“, ([47], To be published)

3.1 Das Clearance-Averaged Pressure Model

Wie bereits erwähnt, widmet sich Lang³ der Frage nach einem zeiteffizienten Berechnungswerkzeug für axial durchströmte Ringspalte. Ergebnis der Dissertation ist das auf dem integro-differentiellen Ansatz beruhende Clearance-Averaged Pressure Model, welches das Druckfeld $p(\varphi, z)$ sowie die Geschwindigkeitsfelder in axialer und Umfangsrichtung $c_z(\varphi, z)$ und $c_\varphi(\varphi, z)$ innerhalb des generischen Ringspalts berechnet. Im Gegensatz zu dem in Kapitel 2.2 aufgeführten Bulk-Flow Ansatz zur Berechnung fördermediengeschmierter Gleitlager und axial durchströmter Fluidichtungen, verwendet das CAPM jedoch keine spalthöhengemittelten, vgl. Gleichung 2.18, oder parabelförmigen Geschwindigkeitsprofile, vgl. die Arbeiten von Simon & Frêne⁴. Vielmehr werden zur Beschreibung der Geschwindigkeitsprofile in den Integralen voll ausgebildete Profile auf Basis von Potenzgesetzen verwendet. In Verbindung mit einem empirischen Ansatz nach Hirs⁵, zur Beschreibung der Wandschubspannungen an der Rotor- und Statoroberfläche, erfolgt die empirische Schließung des Gleichungssystems. Im Folgenden wird das Clearance-Averaged Pressure Model in aller Kürze vorgestellt. Für eine detaillierte Herleitung der beschreibenden Gleichungen sowie aller zugrunde liegender Annahmen und der numerischen Lösung des Gleichungssystems sei auf die Dissertation von Lang³ verwiesen.

³ LANG, *Effiziente Berechnung von Gleitlagern und Dichtspalten in Turbomaschinen*, ([50], 2018)

⁴ SIMON UND FRÊNE, „Rotordynamic coefficients for turbulent annular misaligned seals“, ([85], 1992)

⁵ HIRS, „Fundamentals of a bulk-flow theory for turbulent lubricant films“, ([33], 1970)

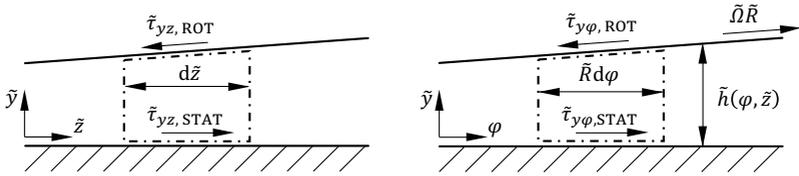


Abbildung 3.1 – Integro-differenzielles Kontrollvolumen im Ringspalt in axialer Richtung (links) und Umfangsrichtung (rechts) nach Lang [50].

Abbildung 3.1 zeigt das Kontrollvolumen zur Beschreibung der Ringspaltströmung. Auf Basis des integro-differenziellen Ansatzes ergibt sich ein System aus nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen, bestehend aus der instationären dimensionslosen Kontinuitätsgleichung und den zugehörigen instationären dimensionslosen Impulsgleichungen in Umfangs- und Axialrichtung

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(h \int_0^1 c_\varphi dy \right) + \frac{\phi}{L} \frac{\partial}{\partial z} \left(h \int_0^1 c_z dy \right) = 0, \quad (3.1a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(h \int_0^1 c_\varphi dy \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(h \int_0^1 c_\varphi^2 dy \right) + \frac{\phi}{L} \frac{\partial}{\partial z} \left(h \int_0^1 c_\varphi c_z dy \right) = \\ = -\frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{1}{2\psi} \tau_{y\varphi}|_0^1, \end{aligned} \quad (3.1b)$$

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial}{\partial t} \left(h \int_0^1 c_z dy \right) + \phi \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(h \int_0^1 c_\varphi c_z dy \right) + \frac{\phi^2}{L} \frac{\partial}{\partial z} \left(h \int_0^1 c_z^2 dy \right) = \\ = -\frac{h}{2L} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{2\psi} \tau_{yz}|_0^1. \end{aligned} \quad (3.1c)$$

Lang betrachtet in seiner Arbeit die stationären Terme der Erhaltungsgleichungen, d.h. $\partial/\partial t = 0$. Zu Schließung des Gleichungssystems werden für die in den Erhaltungsgleichungen auftretenden Geschwindigkeiten c_φ und c_z voll ausgebildete Geschwindigkeitsprofile in Form von Potenzgesetzen angenommen. Zur vereinfachten Beschreibung der Profile wird zusätzlich die von der Rotoroberfläche zählende Hilfskoordinate $y_{\text{ROT}} := 1 - y$ eingeführt

$$c_\varphi := \begin{cases} (C_\varphi - 1) (2 y_{\text{ROT}})^{1/n_\varphi} + 1 & \text{für } y_{\text{ROT}} < 1/2 \\ C_\varphi (2 y)^{1/n_\varphi} & \text{für } y \leq 1/2 \end{cases} \quad (3.2a)$$

$$c_z := \begin{cases} C_z (2 y_{\text{ROT}})^{1/n_z} & \text{für } y_{\text{ROT}} < 1/2 \\ C_z (2 y)^{1/n_z} & \text{für } y \leq 1/2 \end{cases}. \quad (3.2b)$$

Innerhalb der Geschwindigkeitsprofile sind C_φ und C_z die Geschwindigkeiten der Strömung auf halber Ringspalthöhe, engl. centerline velocities, und n_φ und n_z die Exponenten der Ansatzfunktionen. Die Beschreibung der Geschwindigkeitsprofile auf Basis von Potenzgesetzen erlaubt es, durch geschickte Wahl der beschreibenden Exponenten n_φ und n_z , sowohl turbulente als auch laminare Strömungszustände im Ringspalt zu beschreiben. Für den hier behandelten Fall einer turbulenten Strömung im Ringspalt ermittelt Lang⁶ die beschreibenden Exponenten auf Grundlage umfangreicher numerischer Studien unter Verwendung eines dreidimensionalen CFD-Modells mit etwa 10.9 Millionen Zellen und der Verwendung eines RSM⁷-Turbulenzmodells. Die von Lang ermittelten Exponenten $n_\varphi = 5$ und $n_z = 6.5$ zeigen eine gute Übereinstimmung mit dokumentierten Exponenten in der Literatur, vgl. Reichardt⁸ und Siegloch⁹.

Durch die Beschreibung der Geschwindigkeitsprofile auf Basis von Potenzgesetzen ergibt sich die Möglichkeit, die in den Gleichungen auftretenden Integrale auf Basis einer physikalisch motivierten Beschreibungsweise analytisch auszuwerten. Mit den Abkürzungen $n^+ := n_\varphi n_z + n_\varphi + n_z$ und $n^{++} := (n_\varphi n_z)(n_\varphi + 1)$ ergeben sich die Integrale in der Kontinuitätsgleichung sowie den Impulsgleichungen

$$\int_0^1 c_\varphi \, dy = \frac{n_\varphi}{n_\varphi + 1} C_\varphi + \frac{1}{2(n_\varphi + 1)}, \quad \int_0^1 c_z \, dy = \frac{n_z}{n_z + 1} C_z, \quad (3.3)$$

$$\int_0^1 c_\varphi^2 \, dy = \frac{n_\varphi}{n_\varphi + 2} C_\varphi^2 + \frac{n_\varphi}{n^{++}} C_\varphi + \frac{1}{n^{++}}, \quad \int_0^1 c_z^2 \, dy = \frac{n_z}{n_z + 2} C_z^2, \quad (3.4a)$$

$$\int_0^1 c_\varphi c_z \, dy = \frac{n_\varphi n_z}{n^+} C_z C_\varphi + \frac{n_z^2}{2(n^+)(n_z + 1)} C_z. \quad (3.4b)$$

⁶ LANG, *Effiziente Berechnung von Gleitlagern und Dichtspalten in Turbomaschinen*, ([50], 2018)

⁷ Reynolds Stress Model.

⁸ REICHARDT, „Über die Gesetzmäßigkeiten der geradlinigen turbulenten Couetteströmung“, ([75], 1959)

⁹ SIGLOCH, *Technische Fluidmechanik*, ([83], 2017)

Zur Schließung des Gleichungssystems ist neben der Modellierung der Geschwindigkeitsprofile eine Modellierung der Wandschubspannungen $\tau_{y\varphi}|_0^1$ und $\tau_{yz}|_0^1$ notwendig. Aufgrund des integro-differentiellen Ansatzes verbleiben zunächst lediglich die Wandschubspannungen für die entsprechenden Raumrichtungen an den Integrationsgrenzen, d.h. den Oberflächen des Stators und des Rotors

$$\tau_{yi}|_0^1 = \tau_{yi,STAT} - \tau_{yi,ROT}, \quad i = \varphi, z. \quad (3.5)$$

Zur Modellierung der Wandschubspannungen wird in der Arbeit von Lang die aus dem Bulk-Flow Ansatz bekannte Fanning-Widerstandszahl f_k mit $k = \text{ROT}, \text{STAT}$ eingeführt. In Kombination mit der empirischen Grundlagenforschung von Hirs¹⁰ zu Reibungsvorgängen bei Spaltströmungen ergibt sich die Fanning-Widerstandszahl als Funktion der Reynoldszahl Re_φ , der effektiven Relativgeschwindigkeit zwischen der Strömung und der jeweiligen Wand $C_k = \sqrt{C_{\varphi,k}^2 + \phi^2 C_{z,k}^2}$ sowie den empirischen Konstanten m_f und n_f

$$f_k := m_f \left(\frac{h}{2} C_k Re_\varphi \right)^{-n_f} = m_f \left(\frac{h}{2} \sqrt{C_{\varphi,k}^2 + \phi^2 C_{z,k}^2} Re_\varphi \right)^{-n_f}. \quad (3.6)$$

Die empirischen Konstanten m_f und n_f der Widerstandszahl beschreiben im Einklang mit dem Ansatz nach Hirs zunächst beliebige Geraden im doppelt-logarithmischen Moody-Diagramm. Durch geeignete Wahl der Konstanten können sowohl laminare als auch turbulente Strömungen sowie hydraulisch glatte und hydraulisch raue Reibungsregimes beschrieben werden. Zudem tritt durch die Modellierung der Wandschubspannungen mit der Fanning-Widerstandszahl die relative Spaltweite ψ lediglich in Kombination mit der Reynoldszahl Re_φ hoch der empirischen Konstanten n_f in den Impulsgleichungen auf. Dies führt dazu, dass sich die Abhängigkeitsliste des Druckfelds $p(\varphi, z)$ sowie der Geschwindigkeitsfelder in axial und Umfangsrichtung $c_z(\varphi, z)$ und $c_\varphi(\varphi, z)$ weiter reduzieren lässt. In Anlehnung an den charakteristischen Parameter ψRe_φ , vgl. Kapitel 2.1, formuliert Lang¹¹ eine modifizierte Reynoldszahl $Re_\varphi^* := \psi Re_\varphi^{n_f}$. Für den Fall laminarer Strömung, d.h. $n_f = 1$, reduziert sich die modifizierte Reynoldszahl auf den aus der Gleitlagertheorie bekannten charakteristischen Parameter ψRe_φ .

¹⁰HIRS, „A Bulk-Flow Theory for Turbulence in Lubricant Films“, ([32], 1973)

¹¹LANG, *Effiziente Berechnung von Gleitlagern und Dichtspalten in Turbomaschinen*, ([50], 2018)

Die Komponenten der effektiven Relativgeschwindigkeit $C_{\varphi,k}$ und $C_{z,k}$ ergeben sich, in Anlehnung an den Bulk-Flow Ansatz, aus den über die Grenzschichtdicke δ gemittelten Geschwindigkeiten

$$C_{\varphi,\text{ROT}} := \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} c_{\varphi} dy = \frac{n_{\varphi}}{n_{\varphi} + 1} C_{\varphi}, \quad (3.7a)$$

$$C_{\varphi,\text{STAT}} := \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} (c_{\varphi} - 1) dy = \frac{n_{\varphi}}{n_{\varphi} + 1} (C_{\varphi} - 1), \quad (3.7b)$$

$$C_{z,\text{ROT}} := \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} c_z dy = \frac{n_z}{n_z + 1} C_z, \quad (3.7c)$$

$$C_{z,\text{STAT}} := \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} c_z dy = \frac{n_z}{n_z + 1} C_z. \quad (3.7d)$$

Die eigentlichen Wandschubspannungen $\tau_{y\varphi,k}$ und $\tau_{yz,k}$ an den Integrationsgrenzen ergeben sich in Abhängigkeit der Fanning-Widerstandszahl f_k , der effektiven Relativgeschwindigkeit C_k und der über der Grenzschichtdicke δ gemittelten Geschwindigkeiten $C_{\varphi,k}$ und $C_{z,k}$

$$\tau_{y\varphi,k} = f_k C_k C_{\varphi,k}, \quad \tau_{yz,k} = f_k C_k C_{z,k}. \quad (3.8)$$

Neben der empirischen Schließung des Gleichungssystems durch die Beschreibung der Geschwindigkeitsprofile sowie der Wandschubspannungen werden Randbedingungen am Ringspaleintritt und -austritt zur Lösung des Gleichungssystems benötigt. Im vorliegenden Fall werden zwei Arten von Randbedingungen dem Ringspalt aufgebracht: (i) eine Druck-Randbedingung am Ein- und am Auslass des Ringspalts und (ii) eine Geschwindigkeits-Randbedingung in Umfangsrichtung vor Eintritt in den Ringspalt.

Aufgrund der axialen Durchströmung des Ringspalts und der Trägheit des Fluids kommt es bei Eintritt der Strömung in den Ringspalt zur Ausbildung einer umfangsverteilten Ablöseblase, vgl. Kapitel 2.2.1. Der durch die Querschnittsveränderung hervorgerufene Druckverlust wird durch Anwendung der Bernoulli-Gleichung vom Plenum, d.h. dem Bereich direkt vor dem Ringspalt, in den Ringspalt modelliert

$$p|_{z=0} = \Delta p - \left(\phi^2 C_z^2|_{z=0} + C_{\varphi}^2|_{z=0} \right) - p_{\text{CARNOT}}, \quad (3.9a)$$

$$p_{\text{CARNOT}} = \zeta \left(\phi^2 C_z^2|_{z=0} + C_{\varphi}^2|_{z=0} \right). \quad (3.9b)$$

Hierbei ist Δp die axiale Druckdifferenz über den Ringspalt und p_{CARNOT} der durch die Querschnittsveränderung hervorgerufene Carnotsche Stoßverlust. Aufgrund der Tatsache, dass die sich ausbildende Querschnittsveränderung in der Regel unbekannt ist, wird der Carnotsche Stoßverlust als eine Funktion der Geschwindigkeiten der Strömung am Ringspalteintritt auf halber Ring-spalthöhe $C_\varphi|_{z=0}$ und $C_z|_{z=0}$ sowie der Durchflusszahl ϕ und einem konstanten Druckverlustkoeffizienten¹² ζ modelliert.

Im Gegensatz zum Ringspalteintritt wird der Strömung am Ringspaltaustritt der Druck des dortigen Plenums, d.h. des Bereichs direkt nach dem Ringspalt, aufgeprägt. Vereinfacht wird hierbei angenommen, dass der Druck am Austritt des Ringspalts konstant Null ist

$$p|_{z=1} = 0. \quad (3.10)$$

Der Vordrall der Strömung vor Eintritt in den Ringspalt $C_\varphi|_{z=0}$, d.h. die Umfangskomponente der Strömung, wird ebenfalls als konstant angenommen. Hierbei ist es möglich, prinzipiell jedwede reelle Zahl \mathbb{R} vorzugeben. Die in Turbomaschinen auftretenden Vordralle^{13,14} bewegen sich jedoch typischerweise in einem Bereich von $0 \leq C_\varphi|_{z=0} < 1$,

$$C_\varphi|_{z=0} \in \mathbb{R}. \quad (3.11)$$

Mit Hilfe der Randbedingungen, der Beschreibung der Geschwindigkeitsprofile in den Integralen durch Potenzgesetze sowie der empirischen Modellierung der Wandschubspannungen ist es möglich, das System aus nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen numerisch lösen. Zur Lösung des Gleichungssystems verwendet Lang¹⁵ einen eigens programmierten SIMPLE-C (Semi-implicit Method for Pressure Linked Equations-Consistent) Algorithmus¹⁶ auf Basis eines Finite-Differenzen-Verfahrens. Hierfür wird der Ringspalt in ein zweidimensionales, gleichmäßig strukturiertes Gitter mit einer Auflösung von 51×51 Zellen

¹²Im Allgemeinen ist dieser Druckverlustkoeffizient eine Funktion der Ringspalteintrittsgeometrie sowie der relativen Spaltweite ψ und den Betriebsbedingungen, d.h. relativen Exzentrizität des Rotors ε , der Reynoldszahl Re_φ und der Durchflusszahl ϕ . Aufgrund des unbekannt und komplexen funktionellen Zusammenhangs wird innerhalb dieser Arbeit der Druckverlustkoeffizient näherungsweise als konstant behandelt.

¹³CHILDS, *Turbomachinery rotordynamics: Phenomena, modeling, and analysis*, ([13], 1993)

¹⁴MORELAND, CHILDS UND BULLOCK, „Measured Static and Rotordynamic Characteristics of a Smooth-Stator/Grooved-Rotor Liquid Annular Seal“, ([64], 2018)

¹⁵LANG, *Effiziente Berechnung von Gleitlagern und Dichtspalten in Turbomaschinen*, ([50], 2018)

¹⁶VAN DOORMAAL UND RAITHEY, „Enhancements of the Simple Method for Predicting Incompressible Fluid Flows“, ([102], 1984)

aufgeteilt. Die Nichtlinearitäten in den Integralen werden durch Anwendung der Picard-Iteration behandelt und die räumlichen Ableitungen durch Hybridverfahren¹⁷, bestehend aus Linearer- und Aufwind-Interpolation, approximiert. Für eine detailliertere Beschreibung des implementierten Algorithmus sei nochmals auf die Arbeit von Lang¹⁸ verwiesen.

Die statischen Kräfte auf den Rotor F_X und F_Y sowie der aus den Kräften resultierende Verlagerungswinkel θ ergeben sich im Anschluss an die numerische Lösung des Gleichungssystems aus der Integration des Druckfelds p über dem Umfang und der Ringspaltlänge

$$F_X = - \int_0^1 \int_0^{2\pi} p \cos \varphi \, d\varphi \, dz, \quad F_Y = - \int_0^1 \int_0^{2\pi} p \sin \varphi \, d\varphi \, dz, \quad (3.12a)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(- \frac{F_Y}{F_X} \right). \quad (3.12b)$$

Die induzierten Momente auf den Rotor M_X und M_Y ergeben sich, in Analogie zu den Kräften, ebenfalls aus der Integration des Druckfelds p . Im Gegensatz zu den Kräften muss bei der Integration des Druckfelds stets der Momentenangriffspunkt in Form der Lage des Taumelpunkts z_T beachtet werden

$$M_X = \int_0^1 \int_0^{2\pi} p (z - z_T) \sin \varphi \, d\varphi \, dz, \quad (3.13a)$$

$$M_Y = - \int_0^1 \int_0^{2\pi} p (z - z_T) \cos \varphi \, d\varphi \, dz. \quad (3.13b)$$

Die Kräfte und Momente F_X und F_Y bzw. M_X und M_Y sowie die Durchflusszahl ϕ und die axiale Druckdifferenz über den Ringspalt Δp stellen die statischen Eigenschaften des axial durchströmten Ringspalts dar. Es sei angemerkt, dass hierbei stets eine der beiden Größen, d.h. entweder die Durchflusszahl ϕ oder die axiale Druckdifferenz über den Ringspalt Δp , als Eingangsgröße in das Modell fungiert. Dementsprechend ermöglicht das Clearance-Averaged Pressure Model die zeiteffiziente Berechnung der statischen Eigenschaften axial durchströmter Ringspalte. Für die vorliegende Arbeit sind jedoch vor allem die dynamischen Eigenschaften axial durchströmter Ringspalte in Form der rotordynamischen Koeffizienten von Interesse. Eine Validierung des Clearance-Averaged Pressure Models in seiner bisherigen Form ist somit nicht Teil dieser

¹⁷FERZIGER UND PERIC, *Numerische Strömungsmechanik*, ([24], 2008)

¹⁸LANG, *Effiziente Berechnung von Gleitlagern und Dichtspalten in Turbomaschinen*, ([50], 2018)

Arbeit. Für die experimentelle Validierung des CAPM zur Berechnung der statischen Eigenschaften axial durchströmter Ringspalte sei deshalb an dieser Stelle auf die Arbeit von Kuhr et al.¹⁹, die studentischen Arbeiten von Kreuder²⁰ und Schuhmann²¹ sowie auf das IGF²² Projekt unter dem Dach der AiF²³-Forschungsvereinigungen mit der Vorhabensnummer 19225/BG1 verwiesen.

¹⁹KUHR, LANG UND PELZ, „Static force characteristic of annular gaps -Experimental and simulation results“, ([47], To be published)

²⁰KREUDER, „Experimentelle Validierung eines Tools zur Berechnung hydrodynamischer Kräfte“, ([45], 2020)

²¹SCHUHMAN, „Experimentelle Validierung eines Tools zur Berechnung hydrodynamischer Kräfte“, ([82], 2020)

²²Industrielle Gemeinschaftsforschung.

²³Arbeitsgemeinschaft industrieller Forschungsvereinigungen „Otto von Guericke“ e.V..

3.2 Störungsrechnung

Zur Beantwortung der Forschungsfragen ist die Kenntnis der dynamischen Eigenschaften axial durchströmter Ringspalte über einen weiten Parameterbereich unerlässlich. Zur Berechnung der rotordynamischen Koeffizienten im gesamten Parameterbereich axial durchströmter Ringspalte, vgl. Abbildung 2.2 und Kapitel 2.1, wird das Clearance-Averaged Pressure Model im Folgenden mit Hilfe eines Perturbationsansatzes zur Auswertung der instationären Terme in den Erhaltungsgleichungen 3.1 erweitert.

Der Grundgedanke hinter der Anwendung des Perturbationsansatzes auf die Gleichungen besteht darin, infinitesimal kleine Bewegungen des Rotors, um seine statische Ruhelage zu modellieren. Das System antwortet mit den dynamischen Kräften F_X und F_Y sowie den dynamischen Momenten M_X und M_Y auf den Rotor. Das Übertragungsverhalten, d.h. die rotordynamischen Koeffizienten, kann im Anschluss mit Hilfe von Methoden der Parameteridentifikation ermittelt werden.

Abbildung 3.2 zeigt schematisch die aufgeprägte infinitesimal kleine Störung um die statische Ruhelage. Im dargestellten Fall orbitiert der Rotor mit der Kreisfrequenz der Präzessionsbewegung ω und der infinitesimal kleinen Amplitude $\epsilon \ll 1$ in den translatorischen Freiheitsgraden um die statische Ruhelage. Aus Darstellungsgründen wurde auf die Einzeichnung der Präzessionsbewegung in den rotatorischen Freiheitsgraden verzichtet. Diese werden jedoch im Folgenden ebenfalls perturbiert.

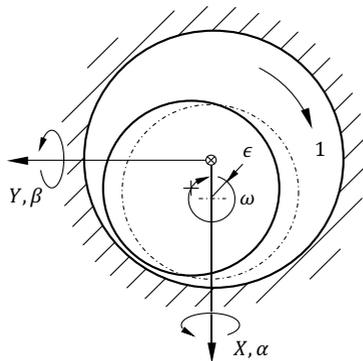


Abbildung 3.2 – Infinitesimal kleine Bewegung des Rotors um seine statische Ruhelage mit der Kreisfrequenz der Präzessionsbewegung ω und der Amplitude ϵ .

Zur Perturbation der Gleichungen und Randbedingungen des Clearance-Averaged Pressure Models wird zunächst angenommen, dass sich jede zeitabhängige Größe des Systems Ξ in einer Reihe entwickeln lässt. Die Reihe setzt sich aus einem stationären Teil 0. Ordnung Ξ_0 sowie zeitabhängigen Termen höherer Ordnung Ξ_n ($n = \mathbb{N}_0$) und dem Störparameter $\epsilon \ll 1$ zusammen

$$\Xi(t) = \Xi_0 + \epsilon \Xi_1(t) + \epsilon^2 \Xi_2(t) + \mathcal{O}(\epsilon^3). \quad (3.14)$$

Für das hier betrachtete Problem eines orbitierenden Rotors in einem axial durchströmten Ringspalt kann der Störparameter ϵ auch als Anregungsamplitude der Präzessionsbewegung interpretiert werden. Dementsprechend sind jeweils die lokale Spaltfunktion $h(\varphi, z, t)$ als auch die abhängigen Größen der Geschwindigkeitsfelder in axialer und Umfangsrichtung $c_\varphi(\varphi, z, y, t)$ und $c_z(\varphi, z, y, t)$ sowie das Druckfeld im Ringspalt $p(\varphi, z, t)$ zeitabhängig. Im Folgenden sollen lediglich die linear abhängigen Terme von der Größenordnung $\mathcal{O}(\epsilon)$ betrachtet werden. Durch Vernachlässigung aller Terme höherer Ordnung folgt

$$h(\varphi, z, t) = h_0(\varphi, z) + \epsilon h_1(\varphi, z, t), \quad (3.15a)$$

$$c_\varphi(\varphi, z, y, t) = c_{\varphi,0}(\varphi, z, y) + \epsilon c_{\varphi,1}(\varphi, z, y, t), \quad (3.15b)$$

$$c_z(\varphi, z, y, t) = c_{z,0}(\varphi, z, y) + \epsilon c_{z,1}(\varphi, z, y, t), \quad (3.15c)$$

$$p(\varphi, z, t) = p_0(\varphi, z) + \epsilon p_1(\varphi, z, t). \quad (3.15d)$$

Die Geschwindigkeitsfelder $c_\varphi(\varphi, z, y, t)$ und $c_z(\varphi, z, y, t)$ können über die als Ansatzfunktion verwendeten Potenzgesetze durch die charakteristischen Geschwindigkeiten auf halber Ringspalthöhe C_φ und C_z ausgedrückt werden. Die perturbierten charakteristischen Geschwindigkeiten ergeben sich zu

$$C_\varphi(\varphi, z, t) = C_{\varphi,0}(\varphi, z) + \epsilon C_{\varphi,1}(\varphi, z, t), \quad (3.16a)$$

$$C_z(\varphi, z, t) = C_{z,0}(\varphi, z) + \epsilon C_{z,1}(\varphi, z, t). \quad (3.16b)$$

Durch Einsetzen der Perturbation in die Erhaltungsgleichungen und Sortieren der Terme nach den Größen 0. bzw. 1. Ordnung ergibt sich je ein Satz partieller Differentialgleichungen für die 0. und 1. Ordnung. Die Lösung des Gleichungssystems 0. Ordnung liefert dabei die statischen Eigenschaften der Ringspaltströmung, d.h. die statisch induzierten Kräfte und Momente auf den Rotor $F_{X,0}$ und $F_{Y,0}$ bzw. $M_{X,0}$ und $M_{Y,0}$ sowie den Verlagerungswinkel θ . Die Lösung des Gleichungssystems 1. Ordnung hingegen ergibt die dynamischen Eigenschaften des Systems.

Beispielhaft wird das Vorgehen der Perturbation der Gleichungen einmalig anhand der Kontinuitätsgleichung aufgezeigt. Einsetzen der Größen aus Gleichung 3.15 in die Kontinuitätsgleichung 3.1a und Sortieren der Terme 0. bzw. 1. Ordnung führt auf

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} h_0 + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(h_0 \int_0^1 c_{\varphi,0} dy \right) + \frac{\phi}{L} \frac{\partial}{\partial z} \left(h_0 \int_0^1 c_{z,0} dy \right) + \\ + \epsilon \left[\frac{\partial}{\partial t} h_1 + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(h_0 \int_0^1 c_{\varphi,1} dy + h_1 \int_0^1 c_{\varphi,0} dy \right) + \right. \\ \left. + \frac{\phi}{L} \frac{\partial}{\partial z} \left(h_0 \int_0^1 c_{z,1} dy + h_1 \int_0^1 c_{z,0} dy \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Dementsprechend ergibt sich die Kontinuitätsgleichung 0. bzw. 1. Ordnung

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(h_0 \int_0^1 c_{\varphi,0} dy \right) + \frac{\phi}{L} \frac{\partial}{\partial z} \left(h_0 \int_0^1 c_{z,0} dy \right) = 0, \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} h_1 + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(h_0 \int_0^1 c_{\varphi,1} dy + h_1 \int_0^1 c_{\varphi,0} dy \right) + \\ + \frac{\phi}{L} \frac{\partial}{\partial z} \left(h_0 \int_0^1 c_{z,1} dy + h_1 \int_0^1 c_{z,0} dy \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Vergleicht man die Gleichungen 0. Ordnung mit den nicht perturbierten Gleichungen des Clearance-Averaged Pressure Models nach Lang²⁴, so ist ersichtlich, dass diese gerade den statischen Fall der Ringspaltströmung, d.h. $\partial/(\partial t) = 0$, abbilden.

²⁴LANG, *Effiziente Berechnung von Gleitlagern und Dichtspalten in Turbomaschinen*, ([50], 2018)

Die Impulsgleichungen 1. Ordnung ergeben sich in Analogie zur Perturbation der Kontinuitätsgleichung

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \left(h_0 \int_0^1 c_{\varphi,1} dy + h_1 \int_0^1 c_{\varphi,0} dy \right) + \\
 & + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(2h_0 \int_0^1 c_{\varphi,0} c_{\varphi,1} dy + h_1 \int_0^1 c_{\varphi,0}^2 dy \right) + \\
 & + \frac{\phi}{L} \frac{\partial}{\partial z} \left(h_0 \int_0^1 c_{\varphi,0} c_{z,1} dy + h_0 \int_0^1 c_{\varphi,1} c_{z,0} dy + h_1 \int_0^1 c_{\varphi,0} c_{z,0} dy \right) = \\
 & = -\frac{1}{2} \left(h_0 \frac{\partial p_1}{\partial \varphi} + h_1 \frac{\partial p_0}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{2\psi} \tau_{y\varphi,1}|_0^1,
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
 & \phi \frac{\partial}{\partial t} \left(h_0 \int_0^1 c_{z,1} dy + h_1 \int_0^1 c_{z,0} dy \right) + \\
 & + \phi \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(h_0 \int_0^1 c_{\varphi,0} c_{z,1} dy + h_0 \int_0^1 c_{\varphi,1} c_{z,0} dy + h_1 \int_0^1 c_{\varphi,0} c_{z,0} dy \right) + \\
 & + \frac{\phi^2}{L} \frac{\partial}{\partial z} \left(2h_0 \int_0^1 c_{z,0} c_{z,1} dy + h_1 \int_0^1 c_{z,1}^2 dy \right) = \\
 & = -\frac{1}{2L} \left(h_0 \frac{\partial p_1}{\partial z} + h_1 \frac{\partial p_0}{\partial z} \right) + \frac{1}{2\psi} \tau_{yz,1}|_0^1.
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Zur Schließung des Systems linearer partieller Differentialgleichungen ist die Perturbation der Geschwindigkeitsprofile in den Integralen der Kontinuitätsgleichung 1. Ordnung und den Impulsgleichungen 1. Ordnung notwendig. Die Integrale ergeben sich durch Perturbation der charakteristischen Geschwindigkeiten auf halber Ringspalthöhe C_φ und C_z

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 c_{\varphi,1} dy &= \frac{n_\varphi}{n_\varphi + 1} C_{\varphi,1}, & \int_0^1 c_{z,1} dy &= \frac{n_z}{n_z + 1} C_{z,1}, \\
 \int_0^1 c_{\varphi,0} c_{\varphi,1} dy &= \frac{n_\varphi}{n_\varphi + 2} C_{\varphi,0} C_{\varphi,1} + \frac{n_\varphi}{2n^+} C_{\varphi,1}, \\
 \int_0^1 c_{\varphi,0} c_{z,1} dy &= \frac{n_\varphi n_z}{n^+} C_{\varphi,0} C_{z,1} + \frac{n_z^2}{2n^+ (n_z + 1)} C_{z,1}, \\
 \int_0^1 c_{\varphi,1} c_{z,0} dy &= \frac{n_z n_\varphi}{n^+} C_{z,0} C_{\varphi,1}, & \int_0^1 c_{z,0} c_{z,1} dy &= \frac{n_z}{n_z + 2} C_{z,0} C_{z,1}.
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Zusätzlich zu den Integralen in den Gleichungen bedarf es eines Ausdruckes für die Wandschubspannungen 1. Ordnung $\tau_{y,\varphi,1}|_0^1$ und $\tau_{yz,1}|_0^1$. Diese ergeben sich aus der Perturbation der zur Modellierung verwendeten Fanning-Widerstandszahl f_k . Hierbei stellt die Form der Widerstandszahl bei der Perturbation jedoch eine Herausforderung dar. Aufgrund des empirischen Exponenten n_f ist eine einfache Trennung in 0. und 1. Ordnung, wie sie beispielsweise bei der Kontinuitätsgleichung möglich war, schwierig. Um dennoch eine einfache Trennung der Fanning-Widerstandszahl f_k in 0. und 1. Ordnung durchführen zu können, wird diese nach Anwendung des Perturbationsansatzes und Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung, d.h. $\mathcal{O}(\epsilon^2)$, mit Hilfe einer Binomialreihe angenähert. Die perturbierete Fanning-Widerstandszahl f_k mit $k = \text{ROT, STAT}$ ergibt sich zu

$$\begin{aligned} f_k &= m_f \left(\frac{h}{2} C_k Re_\varphi \right)^{-n_f} = \\ &= m_f \left[\frac{h_0}{2} C_{k,0} Re_\varphi + \epsilon Re_\varphi \left(\frac{h_1}{2} C_{k,0} + \frac{h_0}{2} C_{k,1} \right) \right]^{-n_f}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Zur einfachen Zerlegung des entstandenen Ausdruckes wird dieser mit Hilfe einer Binomialreihe der Form $(a+x)^b \approx a^b + bxa^{b-1}$ mit $|x| \ll 1$ approximiert

$$\begin{aligned} m_f \left[\frac{h_0}{2} C_{k,0} Re_\varphi + \epsilon Re_\varphi \left(\frac{h_1}{2} C_{k,0} + \frac{h_0}{2} C_{k,1} \right) \right]^{-n_f} &= \\ = m_f \left(\frac{h_0}{2} C_{k,0} Re_\varphi \right)^{-n_f} + \epsilon \left[-n_f m_f \left(\frac{h_0}{2} C_{k,0} Re_\varphi \right)^{-n_f} \left(\frac{h_1}{h_0} + \frac{C_{k,1}}{C_{k,0}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Die Fanning-Widerstandszahl 0. bzw. 1. Ordnung ergibt sich zu

$$f_{k,0} = m_f \left(\frac{h_0}{2} C_{k,0} Re_\varphi \right)^{-n_f}, \quad (3.25a)$$

$$f_{k,1} = -n_f f_{k,0} \left(\frac{h_1}{h_0} + \frac{C_{k,1}}{C_{k,0}} \right). \quad (3.25b)$$

Die darin enthaltenen effektiven Relativgeschwindigkeiten 1. Ordnung $C_{k,1}$ ergeben sich ebenfalls aus einer Annäherung der perturbierten effektiven Relativgeschwindigkeit C_k mit Hilfe der Binomialreihe

$$C_{k,1} = \frac{C_{k,\varphi,0} C_{k,\varphi,1}}{C_{k,0}} + \phi^2 \frac{C_{k,z,0} C_{k,z,1}}{C_{k,0}}. \quad (3.26)$$

Schlussendlich ergeben sich die Wandschubspannungen 1. Ordnung für die entsprechenden Raumrichtungen an den Integrationsgrenzen des Stators und des Rotors $\tau_{y\varphi,k,1}$ und $\tau_{yz,k,1}$ mit den über der Grenzschicht gemittelten Geschwindigkeiten 1. Ordnung $C_{i,k,1}$ mit $k = \text{ROT, STAT}$

$$\tau_{y i, k, 1} = \tau_{y i, k, 0} \left[n_f \left(\frac{h_1}{h_0} + \frac{C_{k,1}}{C_{k,0}} \right) + \frac{C_{k,1}}{C_{k,0}} + \frac{C_{k,\varphi,1}}{C_{k,\varphi,0}} \right], \quad i = \varphi, z \quad (3.27a)$$

$$C_{i,k,1} = \frac{n_i}{n_i + 1} C_{i,1}. \quad (3.27b)$$

Abschließend werden in Analogie zu den Erhaltungsgleichungen die beschreibenden Randbedingungen perturbiert. Aus der Perturbation der Druckrandbedingung 3.9 und 3.10 ergeben sich die Druck-Randbedingungen 1. Ordnung am Ringspaltein- bzw. austritt

$$p_1|_{z=0} = -2(1 + \zeta)(\phi^2 C_{z,0} C_{z,1}) - 2\zeta C_{\varphi,0} C_{\varphi,1}, \quad (3.28a)$$

$$p_1|_{z=1} = 0. \quad (3.28b)$$

Wird zudem vereinfacht angenommen, dass eine infinitesimal kleine Bewegung des Rotors im Sinne der Perturbation keine zeitliche Änderung des Vordralls vor Eintritt in den Ringspalt $C_\varphi|_{z=0}$ hervorruft, kann die Randbedingung der Umfangsgeschwindigkeit der Strömung am Ringspalteintritt 1. Ordnung, d.h. der Vordrall 1. Ordnung, konstant zu Null gesetzt werden

$$C_{\varphi,1}|_{z=0} = 0. \quad (3.29)$$

Modellierung der instationären Terme in den Erhaltungsgleichungen

Bisher wurden lediglich die beschreibenden Gleichungen und Randbedingungen auf Basis des Perturbationsansatzes in Gleichungen und Randbedingungen 0. bzw. 1. Ordnung aufgeteilt. Eine Lösung des Gleichungssystems 1. Ordnung ist jedoch aufgrund der fehlenden Beschreibung der instationären Terme in den Erhaltungsgleichungen noch nicht möglich. Zur Modellierung der instationären Terme und Schließung des Gleichungssystems wird in der vorliegenden Arbeit eine Modellierung auf Basis des Gleichtaktansatzes, d.h. harmonischer Funktionen, gewählt. Hierbei wird angenommen, dass der Rotor kreisförmige Präzessionsbewegungen mit der Kreisfrequenz ω um seine statische Ruhelage ausführt, vgl. Abbildung 3.2. Die Präzessionsbewegung erfolgt hierbei entweder in den translatorischen oder rotatorischen Freiheitsgraden.

Die zugehörigen zeitabhängigen Änderungen der Spaltfunktion, d.h. die Spaltfunktionen 1. Ordnung für die Präzessionsbewegung in den translatorischen bzw. rotatorischen Freiheitsgraden, ergeben sich zu

$$\epsilon h_1 = -\epsilon (\cos \varphi \cos \omega t + \sin \varphi \sin \omega t), \quad (3.30a)$$

$$\gamma h_1 = -\gamma (z - z_T) (\cos \varphi \cos \omega t - \sin \varphi \sin \omega t). \quad (3.30b)$$

Hierin beschreibt ϵ die Amplitude der Präzessionsbewegung in den translatorischen und γ die Amplitude der Präzessionsbewegung in den rotatorischen Freiheitsgraden. Aufgrund der Tatsache, dass die Präzessionsbewegungen in den translatorischen und rotatorischen Freiheitsgraden stets getrennt voneinander betrachtet werden, ist es zweckmäßig, im weiteren Verlauf der Arbeit lediglich die auf die Amplituden bezogene Spaltfunktion 1. Ordnung, d.h. h_1 , zu betrachten. Dies gilt ebenso für die Erhaltungsgleichungen wie auch für die Randbedingungen des axial durchströmten Ringspalts. Bereits bei der Anwendung des Perturbationsansatzes und der Trennung in Gleichungen 0. bzw. 1. Ordnung wurde stets die auf die Anregungsamplitude, d.h. den Störparameter ϵ , bezogene Form der Gleichungen angegeben, vgl. beispielsweise die Trennung der perturbierten Kontinuitätsgleichung 3.17 in die Gleichung 0. bzw. 1. Ordnung.

Dem Gleichtaktansatz folgend ist die Antwort des Systems bei harmonischer Anregung ebenfalls harmonisch. Dementsprechend lassen sich die Geschwindigkeiten 1. Ordnung auf halber Ringspalthöhe $C_{\varphi,1}$ und $C_{z,1}$ sowie der Druck 1. Ordnung p_1 ebenfalls auf Basis harmonischer Funktionen ausdrücken

$$C_{\varphi,1} = C_{\varphi,1,\cos} \cos \omega t + C_{\varphi,1,\sin} \sin \omega t, \quad (3.31a)$$

$$C_{z,1} = C_{z,1,\cos} \cos \omega t + C_{z,1,\sin} \sin \omega t, \quad (3.31b)$$

$$p_1 = p_{1,\cos} \cos \omega t + p_{1,\sin} \sin \omega t. \quad (3.31c)$$

Mit den sechs Amplituden der Geschwindigkeiten und des Druckes für den cos- und den sin-Anteil der Schwingung steht für die instationären Terme in der Kontinuitätsgleichung und den Impulsgleichungen eine mathematische Schließung zur Verfügung. Zur mathematischen Beherrschbarkeit und Reduktion der Berechnungszeiten des erweiterten Clearance-Averaged Pressure Models werden die Gleichungen und ihre beschreibenden Größen mit Hilfe komplexer Zahlen ausgedrückt. Hierbei wird vereinfacht angenommen, dass der cos-Anteil in den beschreibenden Gleichungen den Realteil der komplexen Zahl und der sin-Anteil in den beschreibenden Gleichungen den Imaginärteil derselben darstellt. Die Spaltfunktionen 1. Ordnung h_1 für die translatorischen und rotatorischen Freiheitsgrade lassen sich dementsprechend mit Hilfe der

komplexen Spaltfunktion \underline{h}_1 ausdrücken

$$\underline{h}_1 := -(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad i = \sqrt{-1}, \quad (3.32a)$$

$$\underline{h}_1 := -(z - z_T)(\cos \varphi - i \sin \varphi). \quad (3.32b)$$

Die komplexen charakteristischen Geschwindigkeiten 1. Ordnung auf halber Ringspalthöhe $C_{\varphi,1}$ und $C_{z,1}$ sowie der komplexe Druck 1. Ordnung p_1 im Ringspalt ergeben sich analog

$$\underline{C}_{\varphi,1} = C_{\varphi,1,\cos} + i C_{\varphi,1,\sin}, \quad (3.33a)$$

$$\underline{C}_{z,1} = C_{z,1,\cos} + i C_{z,1,\sin}, \quad (3.33b)$$

$$\underline{p}_1 = p_{1,\cos} + i p_{1,\sin}. \quad (3.33c)$$

Ähnlich zu der Verwendung von Ansatzfunktionen zur Auswertung der Integrale in den Erhaltungsgleichungen führt der Gleichtaktansatz zur Möglichkeit der Auswertung der instationären Terme in den Erhaltungsgleichungen. Die instationären Terme in der Kontinuitätsgleichung 1. Ordnung sowie die instationären Terme in den Impulsgleichungen 1. Ordnung ergeben sich zu

$$\frac{\partial}{\partial t} h_1 = -i \omega (\cos \varphi + i \sin \varphi) = -i \omega \underline{h}_1, \quad (3.34a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(h_0 \int_0^1 c_{\varphi,1} dy + h_1 \int_0^1 c_{\varphi,0} dy \right) = -i h_0 \frac{n_\varphi}{n_\varphi + 1} \underline{C}_{\varphi,1}, \quad (3.34b)$$

$$\phi \frac{\partial}{\partial t} \left(h_0 \int_0^1 c_{z,1} dy + h_1 \int_0^1 c_{z,0} dy \right) = -i \phi h_0 \frac{n_z}{n_z + 1} \underline{C}_{z,1}. \quad (3.34c)$$

Dem Vorgehen bei der Lösung des statischen Clearance-Averaged Pressure Models folgend, kann das perturbierte Gleichungssystem 1. Ordnung nunmehr mit demselben SIMPLE-C Algorithmus aus der Dissertation von Lang²⁵ gelöst werden²⁶.

²⁵LANG, *Effiziente Berechnung von Gleitlagern und Dichtspalten in Turbomaschinen*, ([50], 2018)

²⁶Das detaillierte Vorgehen ist in den studentischen Arbeiten von Bayer [4] und Logan [54] dokumentiert.

Identifikation der rotordynamischen Koeffizienten

Obleich durch die Perturbation der Gleichungen und Randbedingungen sowie der Anwendung des Gleichtaktansatzes das Gleichungssystem 1. Ordnung gelöst werden kann, ist dies nicht gleichbedeutend mit der Berechnung der rotordynamischen Koeffizienten. Vielmehr werden diese mit Hilfe von Methoden der Parameteridentifikation auf Basis von quadratischen Ausgleichsfunktionen ermittelt. Hierbei werden zunächst die dynamischen Kräfte und Momente auf den Rotor bei verschiedenen Kreisfrequenzen ω berechnet. Die Identifikation der rotordynamischen Koeffizienten erfolgt im Anschluss mit Hilfe der Ausgleichsfunktionen durch die berechneten Punkte. Die Präzessionsbewegung in den translatorischen Freiheitsgraden wird hierbei erneut getrennt von der Berechnung der Präzessionsbewegung in den rotatorischen Freiheitsgraden betrachtet. Das Vorgehen zur Identifikation der rotordynamischen Koeffizienten aus den Berechnungen des Clearance-Averaged Pressure Models wird im Folgenden beispielhaft anhand der Kraft auf den Rotor in X -Richtung und dem entsprechenden Moment auf den Rotor um die X -Koordinatenachse erläutert.

Die entsprechende Kraft F_X sowie das Moment M_X infolge rein translatorischer Bewegungen ergibt sich aus der Bewegungsgleichung 2.10

$$-F_X = K_{XX}X + K_{XY}Y + C_{XX}\dot{X} + C_{XY}\dot{Y} + M_{XX}\ddot{X} + M_{XY}\ddot{Y}, \quad (3.35a)$$

$$-M_X = K_{\alpha X}X + K_{\alpha Y}Y + C_{\alpha X}\dot{X} + C_{\alpha Y}\dot{Y} + M_{\alpha X}\ddot{X} + M_{\alpha Y}\ddot{Y}. \quad (3.35b)$$

Mit der translatorischen Bewegung um die statische Ruhelage

$$X = X_0 + \Delta X \cos \omega t = \varepsilon + \varepsilon \cos \omega t, \quad (3.36a)$$

$$Y = \Delta Y \sin \omega t = \varepsilon \sin \omega t, \quad (3.36b)$$

ergibt sich die Bewegungsgleichung für die Kraft in X -Richtung und das Moment um die X -Koordinatenachse in Abhängigkeit der Anregungsamplitude der translatorischen Bewegung ε und der Kreisfrequenz der Präzessionsbewegung ω

$$\begin{aligned} -F_X = & K_{XX}\varepsilon + K_{XX}\varepsilon \cos \omega t + K_{XY}\varepsilon \sin \omega t - \\ & - C_{XX}\varepsilon \omega \sin \omega t + C_{XY}\varepsilon \omega \cos \omega t - \\ & - M_{XX}\varepsilon \omega^2 \cos \omega t - M_{XY}\varepsilon \omega^2 \sin \omega t, \end{aligned} \quad (3.37a)$$

$$\begin{aligned} -M_X = & K_{\alpha X}\varepsilon + K_{\alpha X}\varepsilon \cos \omega t + K_{\alpha Y}\varepsilon \sin \omega t - \\ & - C_{\alpha X}\varepsilon \omega \sin \omega t + C_{\alpha Y}\varepsilon \omega \cos \omega t - \\ & - M_{\alpha X}\varepsilon \omega^2 \cos \omega t - M_{\alpha Y}\varepsilon \omega^2 \sin \omega t. \end{aligned} \quad (3.37b)$$

Hierin beschreiben $K_{XX}\varepsilon$ bzw. $K_{\alpha X}\varepsilon$ die statische Kraft $F_{X,0}$ bzw. das statische Moment $M_{X,0}$ auf den Rotor. Beide Größen werden hierbei aus dem Clearance-Averaged Pressure Model ohne Erweiterung durch den Perturbationsansatz, d.h. dem Gleichungssystem 0. Ordnung, berechnet. Die auf die Anregungsamplitude ϵ bezogene dynamische Kraft $F_{X,1}$ bzw. das dynamische Moment $M_{X,1}$ ergeben sich zu

$$\begin{aligned} -F_{X,1} = & K_{XX} \cos \omega t + K_{XY} \sin \omega t + \\ & - C_{XX} \omega \sin \omega t + C_{XY} \omega \cos \omega t + \\ & - M_{XX} \omega^2 \cos \omega t - M_{XY} \omega^2 \sin \omega t, \end{aligned} \quad (3.38a)$$

$$\begin{aligned} -M_{X,1} = & K_{\alpha X} \cos \omega t + K_{\alpha Y} \sin \omega t + \\ & - C_{\alpha X} \omega \sin \omega t + C_{\alpha Y} \omega \cos \omega t + \\ & - M_{\alpha X} \omega^2 \cos \omega t - M_{\alpha Y} \omega^2 \sin \omega t. \end{aligned} \quad (3.38b)$$

Wird erneut angenommen, dass der \cos -Anteil in den beschreibenden Gleichungen den Realteil einer komplexen Zahl und der \sin -Anteil den Imaginärteil derselben darstellt, ergeben sich die dynamische Kraft $F_{X,1}$ bzw. das dynamische Moment $M_{X,1}$ in komplexer Schreibweise

$$-\underline{F}_{X,1} = K_{XX} + C_{XY} \omega - M_{XX} \omega^2 + i(K_{XY} - C_{XX} \omega - M_{XY} \omega^2), \quad (3.39a)$$

$$-\underline{M}_{X,1} = K_{\alpha X} + C_{\alpha Y} \omega - M_{\alpha X} \omega^2 + i(K_{\alpha Y} - C_{\alpha X} \omega - M_{\alpha Y} \omega^2). \quad (3.39b)$$

Durch die Auswertung des Real- bzw. des Imaginärteils der Kräfte und Momente auf den Rotor $-\underline{F}_{X,1}$ und $-\underline{M}_{X,1}$ ergeben sich die rotordynamischen Koeffizienten aus der rein translatorischen Bewegung

$$\Re(-\underline{F}_{X,1}) = K_{XX} + C_{XY} \omega - M_{XX} \omega^2, \quad (3.40a)$$

$$\Im(-\underline{F}_{X,1}) = K_{XY} - C_{XX} \omega - M_{XY} \omega^2, \quad (3.40b)$$

$$\Re(-\underline{M}_{X,1}) = K_{\alpha X} + C_{\alpha Y} \omega - M_{\alpha X} \omega^2, \quad (3.40c)$$

$$\Im(-\underline{M}_{X,1}) = K_{\alpha Y} - C_{\alpha X} \omega - M_{\alpha Y} \omega^2. \quad (3.40d)$$

Zur Identifikation der rotordynamischen Koeffizienten werden die dynamischen Kräfte und Momente auf den Rotor bei fünf unterschiedlichen Kreisfrequenzen berechnet. Die dynamischen Kräfte und Momente auf den Rotor ergeben sich für jede Kreisfrequenz durch Integration des Drucks 1. Ordnung \underline{p}_1

$$\underline{F}_{X,1} = - \int_0^1 \int_0^{2\pi} \underline{p}_1 \cos \varphi \, d\varphi \, dz, \quad (3.41a)$$

$$\underline{F}_{Y,1} = - \int_0^1 \int_0^{2\pi} \underline{p}_1 \sin \varphi \, d\varphi \, dz, \quad (3.41b)$$

$$\underline{M}_{X,1} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \underline{p}_1 (z - z_T) \sin \varphi \, d\varphi \, dz, \quad (3.41c)$$

$$\underline{M}_{Y,1} = - \int_0^1 \int_0^{2\pi} \underline{p}_1 (z - z_T) \cos \varphi \, d\varphi \, dz. \quad (3.41d)$$

Die Steifigkeiten K , Dämpfungen C und Trägheiten M ergeben sich im Anschluss aus den quadratischen Ausgleichsfunktionen 3.40, vgl. Abbildung 3.3.

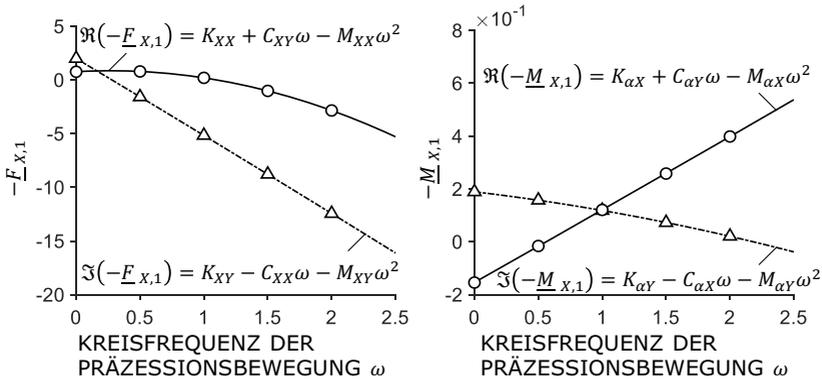


Abbildung 3.3 – Parameteridentifikation der rotordynamischen Koeffizienten aus den dynamischen Kräften (links) und Momenten (rechts) auf den Rotor.

3.3 Voruntersuchungen

Bevor das Clearance-Averaged Pressure Model experimentell validiert und im Anschluss zur Beantwortung der Forschungsfragen verwendet wird, erfolgt eine erste Vorvalidierung auf Basis eines Modellvergleichs zwischen dem CAPM und den veröffentlichten numerischen Ergebnissen von Nordmann & Dietzen²⁷, Nelson & Nguyen^{28,29} sowie Simon & Frêne³⁰. Alle Veröffentlichungen betrachten hierbei den Einfluss der relativen Exzentrizität ε auf die rotordynamischen Koeffizienten aus den Kräften durch translatorische Bewegungen. Alle Autoren betrachten hierbei einen Ringspalt der Länge $L = 0.5$ bei einer modifizierten Reynoldszahl von $Re_{\varphi}^* = 0.043$, einer Druckdifferenz von $\Delta p := 2\Delta\tilde{p} / (\tilde{\rho}\tilde{\Omega}^2\tilde{R}^2) = 1.78$ sowie einem Vordrall von $C_{\varphi}|_{z=0} = 0.3$.

Nordmann & Dietzen verwenden zur Berechnung der rotordynamischen Koeffizienten eine dreidimensionale CFD-Simulation auf Basis eines Finite-Differenzen-Verfahrens in Kombination mit einem k - ϵ -Turbulenzmodell. Die Ergebnisse von Nelson & Nguyen basieren auf einem Bulk-Flow Ansatz. Das nichtlineare Gleichungssystem wird im Gegensatz zu den meisten Veröffentlichungen nicht über einen SIMPLE-Algorithmus gelöst. Vielmehr wird eine Methode vorgestellt, welche die abhängigen Größen der Geschwindigkeiten und des Drucks im Ringspalt auf Basis einer Fourier-Reihe approximiert. Durch Verwendung einer Fast-Fourier-Transformation sowie anschließender Differentiation und Integration können die Kräfte auf den Rotor und die rotordynamischen Koeffizienten ermittelt werden. Die Ergebnisse von Simon & Frêne werden mit einem ähnlichen Ansatz wie dem hier vorgestellten erzeugt. Der Hauptunterschied besteht in der Behandlung der Integrale des partiellen Differentialgleichungssystems, vgl. Kapitel 2.2.1.

²⁷NORDMANN UND DIETZEN, „Finite difference analysis of rotordynamic seal coefficients for an eccentric shaft position“, ([70], 1988)

²⁸NELSON UND NGUYEN, „Analysis of Eccentric Annular Incompressible Seals: Part 2—Effects of Eccentricity on Rotordynamic Coefficients“, ([66], 1988)

²⁹NELSON UND NGUYEN, „Analysis of Eccentric Annular Incompressible Seals: Part 1—A New Solution Using Fast Fourier Transforms for Determining Hydrodynamic Force“, ([65], 1988)

³⁰SIMON UND FRÊNE, „Rotordynamic coefficients for turbulent annular misaligned seals“, ([85], 1992)

In einem weiteren Schritt wird das CAPM mit veröffentlichten numerischen Ergebnissen von Childs et al.³¹ sowie San Andrés³² verglichen. Die Autoren untersuchen den Einfluss der Ringspaltlänge L auf die rotordynamischen Koeffizienten aus den Momenten durch rotatorische Bewegungen. Hierbei wird stets eine berührungslose Fluiddichtung ohne Vordrall $C_\varphi|_{z=0} = 0$ bei einer modifizierten Reynoldszahl von $Re_\varphi^* = 0.029$ und einer axialen Druckdifferenz von $\Delta p = 8.38$ betrachtet. Childs et al. verwenden zur Berechnung ein eindimensionales Bulk-Flow Model für berührungslose Fluiddichtungen endlicher Länge, während San Andrés eine zweidimensionale Variante des Bulk-Flow Models zur Berechnung der dynamischen Eigenschaften verwendet.

³¹CHILDs U. A., „A high-Reynolds-number seal test facility: Facility description and preliminary test data“, ([15], 1982)

³²SAN ANDRÉS, YANG UND CHILDS, „Thermal Effects in Cryogenic Liquid Annular Seals—Part II: Numerical Solution and Results“, ([80], 1993)

3.3.1 Rotordynamische Koeffizienten aus den Kräften auf den Rotor durch translatorische Bewegung

Abbildung 3.4 zeigt den Vergleich des Einflusses der relativen Exzentrizität ε auf die rotordynamischen Koeffizienten aus den Kräften auf den Rotor durch translatorische Bewegungen. Die Linien innerhalb der Diagramme bilden die numerischen Ergebnisse von Nordmann & Dietzen³³, Nelson & Nguyen^{34,35} sowie Simon & Frêne³⁶ ab. Die Marker stellen die Ergebnisse des erweiterten Clearance-Averaged Pressure Models dar. Die Abbildung 3.4 vergleicht die numerisch berechneten Hauptsteifigkeiten K_{XX} und K_{YY} , die Nebensteifigkeiten K_{XY} und K_{YX} , die Hauptdämpfungen C_{XX} und C_{YY} , die Nebendämpfungen C_{XY} und C_{YX} sowie die Hauptträgheiten M_{XX} und M_{YY} der unterschiedlichen Modelle. Alle betrachteten rotordynamischen Koeffizienten zeigen eine gute Übereinstimmung zwischen den veröffentlichten Daten und den Ergebnissen des CAPM. Unterschiede in den Berechnungsmethoden zeigen sich lediglich für die Hauptsteifigkeiten K_{XX} und K_{YY} . Hierbei stimmen die Ergebnisse von Nordmann & Dietzen sowie Simon & Frêne gut mit den Ergebnissen des erweiterten Modells überein. Die Ergebnisse von Nelson & Nguyen weichen bei relativen Exzentrizitäten $\varepsilon > 0.5$ sowohl von den veröffentlichten Daten als auch von den Ergebnissen des CAPM ab.

³³NORDMANN UND DIETZEN, „Finite difference analysis of rotordynamic seal coefficients for an eccentric shaft position“, ([70], 1988)

³⁴NELSON UND NGUYEN, „Analysis of Eccentric Annular Incompressible Seals: Part 1—A New Solution Using Fast Fourier Transforms for Determining Hydrodynamic Force“, ([65], 1988)

³⁵NELSON UND NGUYEN, „Analysis of Eccentric Annular Incompressible Seals: Part 2—Effects of Eccentricity on Rotordynamic Coefficients“, ([66], 1988)

³⁶SIMON UND FRÊNE, „Rotordynamic coefficients for turbulent annular misaligned seals“, ([85], 1992)

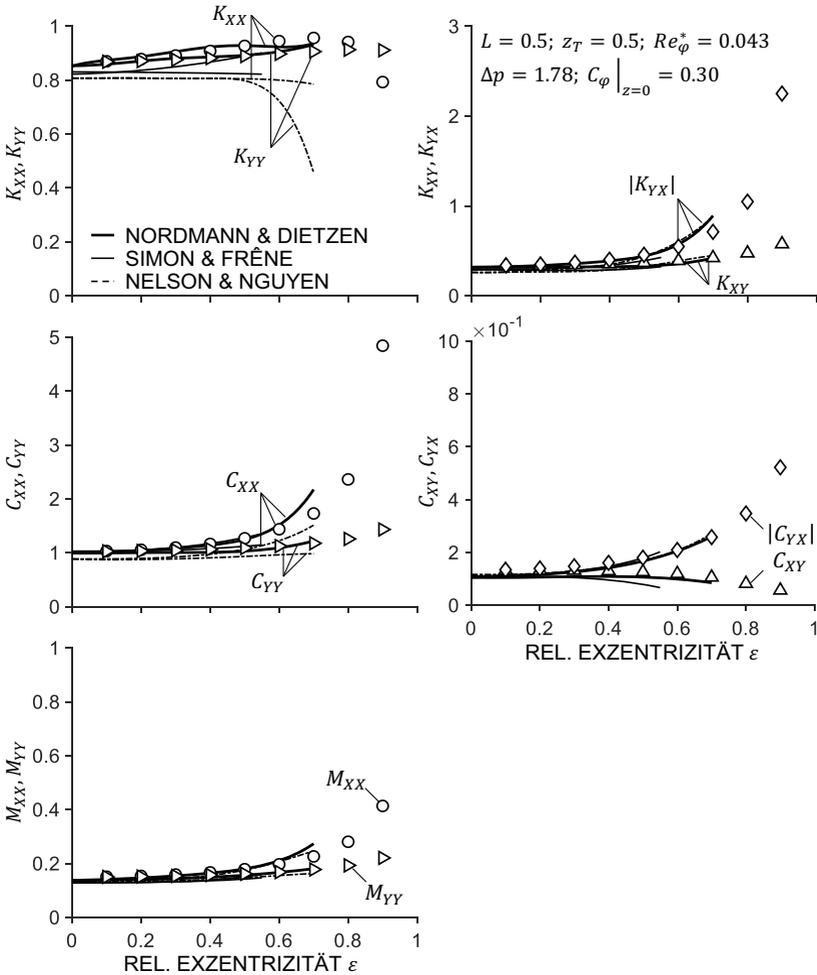


Abbildung 3.4 – Mit dem Clearance-Averaged Pressure Model berechnete rotorodynamische Koeffizienten aus den Kräften auf den Rotor bei translatorischer Bewegung im Vergleich zu den numerischen Ergebnissen von Nordmann & Dietzen [70], Nelson & Nguyen [66, 65] sowie Simon & Frêne [85].

3.3.2 Rotordynamische Koeffizienten aus den Momenten auf den Rotor durch rotatorische Bewegung

Abbildung 3.5 zeigt den Vergleich des Einflusses der Ringspaltlänge L auf die rotordynamischen Koeffizienten aus den Momenten durch rotatorische Bewegungen. Die Abbildung vergleicht die numerischen Ergebnisse der Haupt- und Nebensteifigkeit $|K_{\alpha\alpha}|$ und $K_{\alpha\beta}$, der Haupt- und Nebendämpfung $C_{\alpha\alpha}$ und $C_{\alpha\beta}$ sowie der Haupt- und Nebenträgheit $M_{\alpha\alpha}$ und $M_{\alpha\beta}$. Auch hier zeigt sich eine gute Übereinstimmung der Berechnungsergebnisse des erweiterten Clearance-Averaged Pressure Models im Vergleich zu den veröffentlichten Daten. Geringe Unterschiede in den Berechnungsmethoden zeigen sich lediglich bei dem Vergleich der Hauptdämpfung $C_{\alpha\alpha}$. Hierbei stimmen die von San Andrés³⁷ angegebenen Dämpfungen gut mit den Berechnungen des CAPM überein. Bei einer Ringspaltlänge von $L = 0.33$ weichen die Ergebnisse von Childs³⁸ sowohl von den Ergebnissen von San Andrés als auch von den Vorhersagen des Clearance-Averaged Pressure Models ab. Der von Childs angegebene Wert übersteigt die Ergebnisse von San Andrés und dem CAPM um mehr als das Fünffache. Zudem folgt der Wert nicht dem allgemeinen Trend, d.h. einer Abnahme der Hauptdämpfung $C_{\alpha\alpha}$ bei abnehmender Ringspaltlänge L . Verglichen mit den hier vorgestellten Ergebnissen und den Ergebnissen von San Andrés deutet dies auf eine Inkonsistenz in der Berechnung von Childs hin.

³⁷SAN ANDRÉS, YANG UND CHILDS, „Thermal Effects in Cryogenic Liquid Annular Seals—Part II: Numerical Solution and Results“, ([80], 1993)

³⁸CHILDS U. A., „A high-Reynolds-number seal test facility: Facility description and preliminary test data“, ([15], 1982)

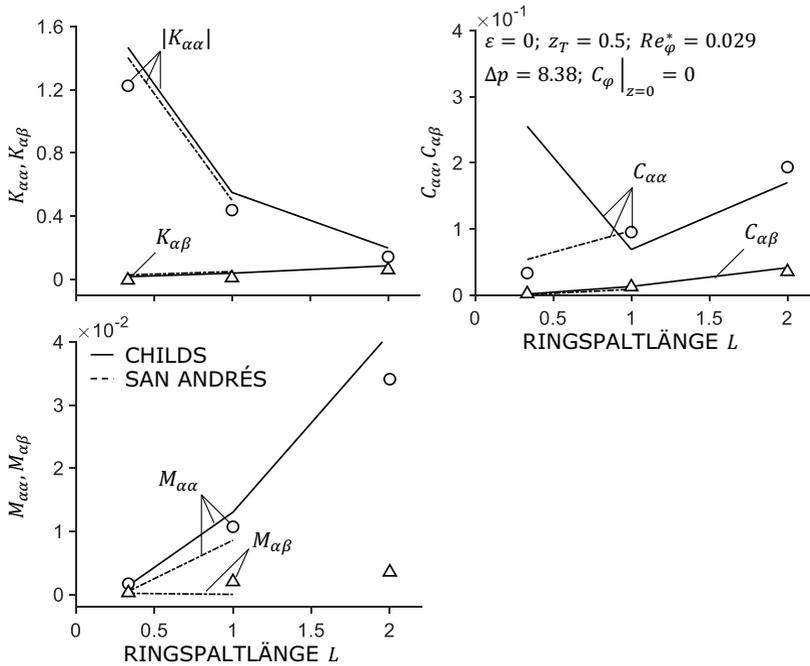


Abbildung 3.5 – Mit dem Clearance-Averaged Pressure Model berechnete rotordynamische Koeffizienten aus den Momenten auf den Rotor durch rotatorische Bewegungen im Vergleich zu den numerischen Ergebnissen von Childs et al. [15] und San Andrés [80].

3.4 Zwischenfazit

Abschließend erfolgt eine kurze Zusammenfassung der vorangegangenen Kapitel und eine Einordnung ihrer Bedeutung für die vorliegende Arbeit. Wie eingangs argumentiert, ist für die Beantwortung der drei Forschungsfragen die Kenntnis der rotordynamischen Koeffizienten axial durchströmter Ringspalte über einen weiten Betriebs- und Geometriebereich notwendig. Da diese umfangreiche Kenntnis nur durch den Einsatz eines zeiteffizienten Berechnungswerkzeugs in angemessener Zeit und Qualität erlangt werden kann, wurde in Kapitel 3.1 zunächst das in der Arbeit von Lang³⁹ entwickelte Clearance-Averaged Pressure Model vorgestellt. In Analogie zum Bulk-Flow Model verwendet das CAPM einen integro-differentiellen Ansatz zur Beschreibung der Strömung im Ringspalt. Zur Beschreibung der Geschwindigkeitsprofile werden jedoch nicht wie üblich spalthöhengemittelte Geschwindigkeiten angenommen. Vielmehr verwendet Lang erstmals Ansatzfunktionen in Form von Potenzgesetzen zur Beschreibung der Geschwindigkeitsprofile. Zur Modellierung der Wandschubspannungen wird die im Bulk-Flow Ansatz übliche Fanning-Widerstandszahl in Verbindung mit einem empirischen Hirs-Reibungsmodell eingeführt. Das System aus nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen wird im Anschluss mit Hilfe des in der Arbeit von Lang erarbeiteten SIMPLE-C-Algorithmus numerisch gelöst.

Aufgrund der Tatsache, dass sich das Clearance-Averaged Pressure Model in seiner bisherigen Form nur für die Berechnung der statischen Eigenschaften axial durchströmter Ringspalte eignet, wurde das CAPM in Kapitel 3.2 mit Hilfe eines Perturbationsansatzes zur Lösung der instationären Terme in den Erhaltungsgleichungen erweitert. Hierbei werden die zeitabhängigen Terme in einer Reihe entwickelt und in Größen 0. und 1. Ordnung aufgeteilt. Die Terme 0. Ordnung bilden die statischen Eigenschaften der Spaltströmung, wohingegen die Terme 1. Ordnung die dynamischen Eigenschaften verkörpern. Durch die Verwendung des Gleichtaktansatzes, d.h. die Annahme harmonischer Störungen, ist es möglich, die instationären Terme in den Erhaltungsgleichungen analytisch auszuwerten. Die Lösung des Systems aus linearen partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung erfolgt erneut über den in der Arbeit von Lang entwickelten numerischen SIMPLE-C-Algorithmus.

Zur Vorvalidierung des Modells werden in den Kapiteln 3.3.1 und 3.3.2 erste Vergleiche des erweiterten Clearance-Averaged Pressure Modells mit veröffentlichten rotordynamischen Koeffizienten durchgeführt. Es zeigt sich eine gute bis sehr gute Übereinstimmung der Berechnungsergebnisse des CAPM mit

³⁹LANG, *Effiziente Berechnung von Gleitlagern und Dichtspalten in Turbomaschinen*, ([50], 2018)

den Daten aus der Literatur. Lediglich vereinzelt kommt es zu Abweichungen, deren Ursachen jedoch in den verwendeten Lösungsverfahren oder Inkonsistenzen der zum Vergleich herangezogenen Literaturquellen gefunden werden konnten.

Zwischenergebnis der bisherigen Arbeiten ist somit ein einsatzbereites, zeiteffizientes und vorvalidiertes Berechnungswerkzeug zur Ermittlung aller 48 rotordynamischen Koeffizienten. Die im nächsten Kapitel folgende Validierung des Clearance-Averaged Pressure Models erfolgt auf Basis eines eigens konzipierten Prüfstandes zur experimentellen Identifikation der dynamischen Eigenschaften axial durchströmter Ringspalte.

Kapitel 4

Der Spaltströmungsprüfstand

Im vorangegangenen Kapitel wurde das von Lang¹ entwickelte Clearance-Averaged Pressure Model zur Berechnung der statischen Eigenschaften axial durchströmter Ringspalte vorgestellt und mit Hilfe eines Perturbationsansatzes zur Berechnung der rotordynamischen Koeffizienten erweitert. Zudem wurde eine erste Vorvalidierung des Modells auf Grundlage veröffentlichter rotordynamischer Koeffizienten durchgeführt. Die begrenzte Verfügbarkeit an verlässlichen und vollständigen Datensätzen verhindert jedoch eine aussagekräftige Validierung des Modells. Vielmehr kann der Vergleich mit den Literaturdaten lediglich als ein erster Schritt in die richtige Richtung verstanden werden. Zur ausführlichen Validierung des erweiterten Clearance-Averaged Pressure Models wird innerhalb dieser Arbeit ein eigens konzipierter und weltweit einzigartiger Prüfstand zur Identifikation der dynamischen Eigenschaften axial durchströmter Ringspalte verwendet. Im Folgenden wird zunächst der verwendete Versuchsaufbau sowie das verwendete Identifikationsverfahren und die sich ergebende Messunsicherheit vorgestellt und diskutiert². Anschließend werden erste Vorversuche zur Verifizierung des Identifikationsverfahrens und Charakterisierung der dynamischen Eigenschaften des Versuchsaufbaus durchgeführt.

¹ LANG, *Effiziente Berechnung von Gleitlagern und Dichtspalten in Turbomaschinen*, ([50], 2018)

² Eine detaillierte Beschreibung der Auslegung und Konstruktion des Prüfstandes in einer frühen Phase ist in der studentischen Arbeit von Vogel [104] zu finden.

4.1 Versuchsaufbau

Zur experimentellen Identifikation der dynamischen Eigenschaften ist es notwendig zum einen den sich im Ringspalt befindenden Rotor mit definierter Amplitude und Kreisfrequenz anzuregen und zum anderen die aufgeprägten Bewegungen sowie die dadurch induzierten Kräfte und Momente auf den Rotor messtechnisch zu erfassen. Den Ausführungen in Kapitel 2.2.1 folgend sind aktive Magnetlager durch ihre inhärente Kraft und Positionsmessung direkt an der Lagerstelle sowie der Möglichkeit zur definierten Aufprägung von Anregungen prädestiniert für die experimentelle Identifikation dynamischer Systeme. Aus diesem Grund wird am Institut für Fluidsystemtechnik der Technischen Universität Darmstadt ein magnetgelagerter Spaltströmungsprüfstand betrieben, vgl. Abbildung³ 4.1. Der mit Wasser betriebene Spaltströ-

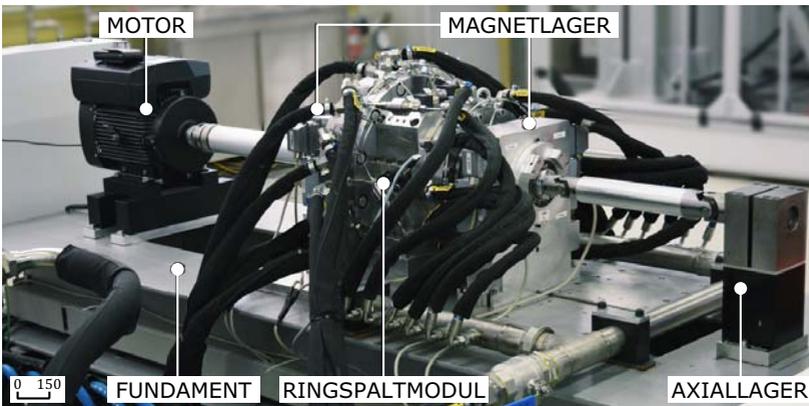


Abbildung 4.1 – Der Spaltströmungsprüfstand des Instituts für Fluidsystemtechnik der Technischen Universität Darmstadt.

mungsprüfstand besteht im Wesentlichen aus einem auf Luftfedern gelagerten stählernen Fundament zur Entkopplung des Prüfstands von Schwingungen der Umgebung, zwei aktiven radialen Magnetlagern zur Lagerung und Anregung des Rotors, einem Asynchronmotor inklusive einer kardanisch gelagerten Gelenkwelle zum Antrieb des Rotors, einem Axiallager inklusive einer kardanisch gelagerten Gelenkwelle zur axialen Lagerung des Rotors sowie dem eigentlichen Ringspaltmodul zur Untersuchung unterschiedlicher Geometrien axial durchströmter Ringspalte. Die Starrkörpereigenfrequenz des Fundaments inkl. der genannten Komponenten beträgt hierbei ca. 6 Hz. Dies ermöglicht

³ Bild: Fluidsystemtechnik, Sarah Ameer.

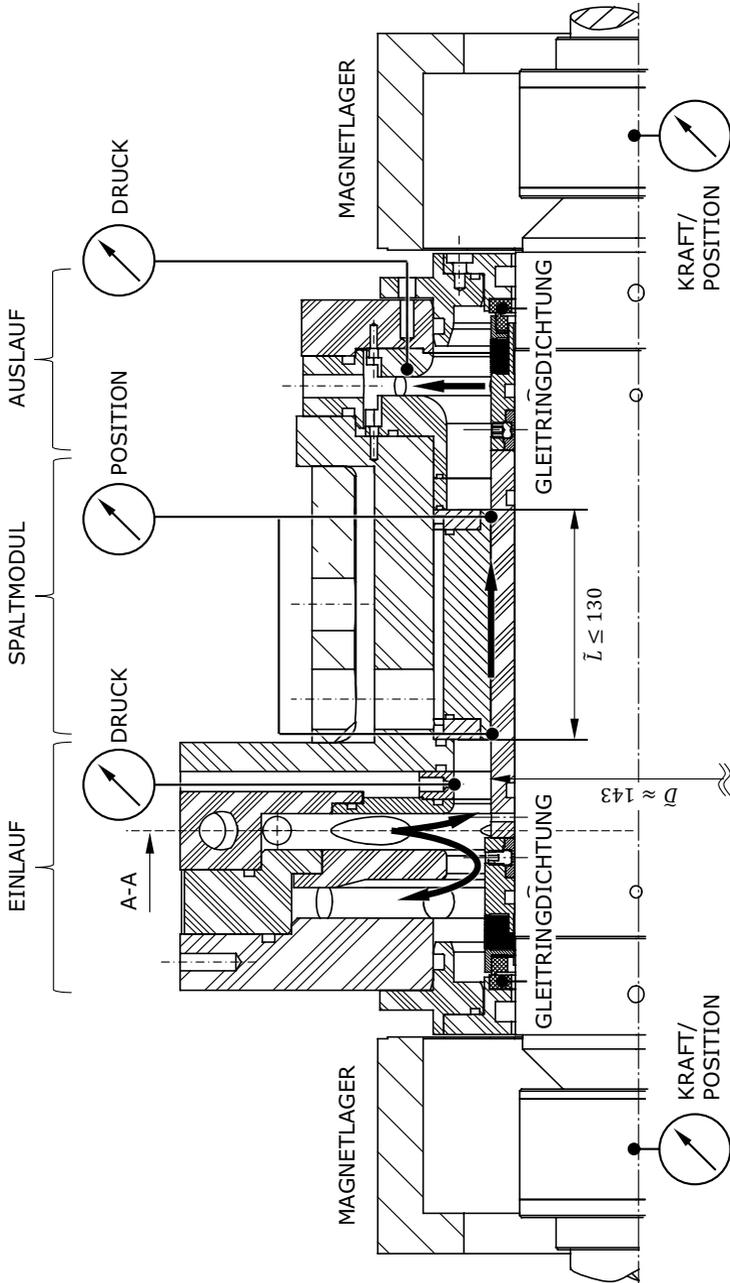


Abbildung 4.2 – Technische Zeichnung des Ringspaltsmoduls zur Untersuchung der dynamischen Eigenschaften axial durchströmter Ringspalte mit schematisch angelegte Position der unterschiedlichen Messstellen.

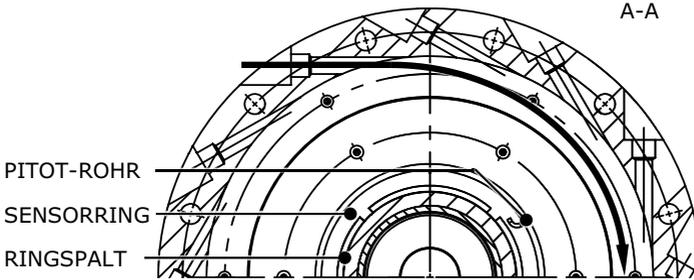


Abbildung 4.3 – Schnittansicht A-A des Einlaufs der technischen Zeichnung des Ringspaltmoduls in Abbildung 4.2. Angedeutet ist hierbei die tangentiale Einstromung des Wassers in den Prüfstand sowie die Position des Pitot-Rohrs und des Sensorrings zur Positionsmessung.

eine experimentelle Identifikation der rotordynamischen Koeffizienten ohne verfälschende Effekte durch das Fundament und die Umgebung. Zur weiteren Reduktion verfälschender Einflüsse des Aufbaus sind die Gelenkwellen zur Verbindung des Asynchronmotors und zur Anbringung des Axiallagers derart gewählt, dass möglichst kleine oder keine rückstellenden Radialkräfte und Drehmomente auf den Rotor bei Auslenkung und Anregung desgleichen induziert werden.

Abbildung 4.2 zeigt eine Schnittansicht des Ringspaltmoduls. Die Pfeile deuten hierbei die Strömung innerhalb des Moduls an. Zusätzlich ist die Position der unterschiedlichen Messstellen innerhalb des Prüfstands angedeutet. Das Ringspaltmodul besteht aus fünf Komponenten: den aktiven radialen Magnetlagern, dem Einlauf, dem Spaltmodul, dem Auslauf sowie den Gleitringdichtungen zur Abdichtung des Ringspaltmoduls gegen die Umgebung. Das Wasser strömt am Einlauf über den Umfang verteilt über zwölf Zuführungen tangential in den Prüfstand ein. Die tangentiale Einstromung, vgl. Abbildung 4.3, resultiert in der Ausbildung einer Umfangskomponente der Strömung vor Eintritt in den Ringspalt. Zur stufenlosen Einstellung der Umfangskomponente der Strömung, d.h. des Vordralls vor Eintritt in den Ringspalt $\tilde{C}'_{\varphi}|_{z=0}$, wird das Wasser im Einlauf des Prüfstands in zwei Teilvolumenströme aufgeteilt. Der erste Teilvolumenstrom tritt in den Ringspalt ein, wohingegen der zweite Teilvolumenstrom eine Trennplatte umströmt und den Prüfstand wieder verlässt. Der so geschaffene Bypass ermöglicht es große Volumenströme im Einlauf des Prüfstands umzusetzen, ohne diese gänzlich durch den Ringspalt zu leiten. Große Volumenströme sind hierbei gleichbedeutend mit hohen Umfangsgeschwindigkeiten der Strömung am Ringspalteintritt, d.h.

hohe Vordralle. Durch eine gezielte Regelung beider Teilvolumenströme mit Hilfe von Armaturen wird eine stufenlose Einstellung sowohl des Vordralls als auch des Ringspaltvolumenstroms erreicht. Die so geschaffene Bypassregelung ermöglicht die experimentelle Untersuchung dimensionsloser Vordralle $C_\varphi|_{z=0}$ und Durchflusszahlen ϕ in Bereichen von $0 \leq C_\varphi|_{z=0} \leq 1.4$ sowie in Bereichen von $0 \leq \phi \leq 6$. Im Anschluss an den Einlauf strömt das Wasser in das Spaltmodul ein. Sowohl die stator- als auch die rotorseitige Wand sind austauschbare Hülsen gestaltet. Dies ermöglicht eine Variation der Geometrie des Ringspalts hinsichtlich der Ringspaltlänge \tilde{L} und dem mittleren Spaltspiel \tilde{h} . Zudem ergibt sich die Möglichkeit den Einfluss von Oberflächenprofilierungen wie beispielsweise Nuten- oder Wabenprofilen, vgl. Kuhr et al.⁴, auf die rotordynamischen Koeffizienten zu untersuchen. Die geschaffene Modularität ermöglicht die experimentelle Untersuchung von Ringspaltlängen im Bereich von $0.16 \leq L \leq 1.81$ sowie die Untersuchung relativer Spaltspiele im Bereich von $10^{-3} < \psi < 10^{-2}$. Nach der Durchströmung des Ringspalts verlässt das Wasser das Ringspaltmodul durch zwölf am Umfang verteilte Bohrungen im Auslauf.

Zur messtechnischen Erfassung aller relevanten Betriebsparameter ist das Ringspaltmodul mit mehreren Sensoren ausgestattet. Hierbei wird neben dem Druck auch die Position des Rotors im Ringspalt erfasst. Eine detaillierte Übersicht über die verwendeten Sensoren und deren Messunsicherheit sowie die mechanischen Eigenschaften der Magnetlager ist in Anhang B zu finden. Im Einlauf wird zunächst der statische sowie der dynamische Druck der Strömung vor Eintritt in den Ringspalt \tilde{p}_{EIN} und \tilde{p}_{DYN} messtechnisch erfasst. Hierzu sind über den Umfang verteilt fünf Wanddruckbohrungen angebracht und mit einem Absolutdrucksensor sowie zwei Differenzdrucksensoren verbunden. Durch eine sechste Bohrung ist eine um 90° gebogene Staudrucksonde (Pitot-Rohr) geführt. Durch Ausrichtung der Sonde in Umfangsrichtung wird der Totaldruck der Strömung vor Eintritt in den Ringspalt erfasst. Durch Anschluss des Pitot-Rohrs an einen der beiden Differenzdrucksensoren wird der dynamische Anteil der Strömung in Umfangsrichtung gemessen. Die Messung des dynamischen Drucks dient hierbei zur Bestimmung der Umfangskomponente der Strömung vor Eintritt in den Ringspalt $\tilde{C}_\varphi|_{z=0}$, d.h. des Vordralls. Der verbleibende zweite Differenzdrucksensor ist an vier um den Umfang verteilten Wanddruckbohrungen im Auslauf des Ringspaltmoduls angeschlossen. Hierdurch kann neben dem statischen und dynamischen Druck der Strömung vor Eintritt in den Ringspalt \tilde{p}_{EIN} und \tilde{p}_{DYN} auch der Differenzdruck $\Delta\tilde{p}$ über dem Ringspalt gemessen werden. Zur Erfassung der Position des Rotors

⁴ KUHR, LUDWIG UND PELZ, „Measurement and simulation of the dynamic characteristics of plain and profiled annular seals“, ([48], 2021)

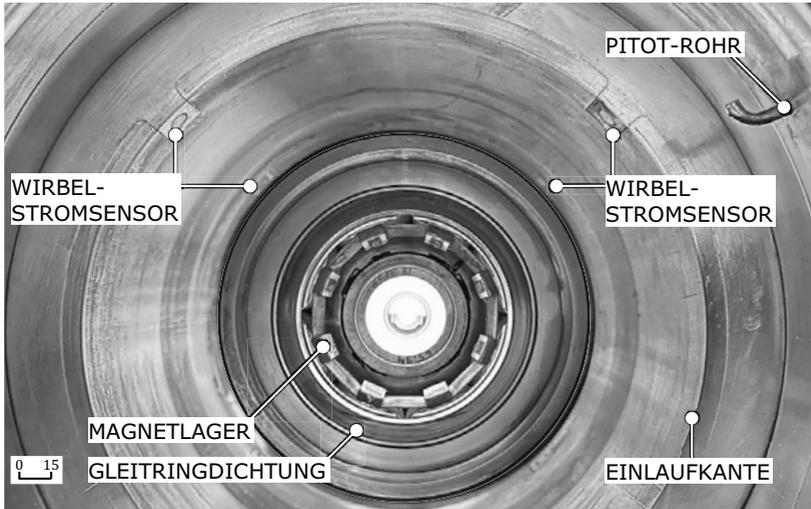


Abbildung 4.4 – Innenansicht des Ringspaltmoduls mit Pitot-Rohr und Wirbelstromsensoren.

im Ringspalt ist die Statorhülle des Ringspaltmoduls mit je zwei um 90° versetzte Wirbelstromsensoren am Ringspaltein- bzw. austritt versehen. Die eingebrachten Wirbelstromsensoren ermöglichen es, neben der Verlagerung des Rotors in radialer Richtung, d.h. der Exzentrizität $\tilde{\epsilon}$, auch die rotatorische Bewegung des Rotors, um einen definierten Taumelpunkt \tilde{z}_T messtechnisch zu erfassen.

Abbildung⁵ 4.4 zeigt die Innenansicht des Ringspaltmoduls. Zu erkennen ist hierbei das verwendete Pitot-Rohr zur Bestimmung des dynamischen Druckes \tilde{p}_{DYN} , die Wirbelstromsensoren zur Erfassung der Position des Rotors innerhalb des Ringspalts sowie im Hintergrund eine der beiden Gleitringdichtungen und der Kern des aktiven Magnetlagers auf Seiten des Auslaufs.

Neben den Sensoren innerhalb des Ringspaltmoduls ist der Prüfstand mit weiteren Sensoren zur Erfassung der Temperatur des Fluids \tilde{T} sowie des Ringspaltvolumenstroms \tilde{Q}_{SPALT} ausgestattet. Beide Messgrößen werden hierbei innerhalb der zur Versorgung notwendigen Peripherie aufgezeichnet. Der Spaltvolumenstrom wird auf Basis eines magnetisch-induktiven Durchflussmessers (MID) gemessen, wohingegen die Temperatur des Fluids auf Basis eines in die Zuleitung eingelassenen Widerstandsthermometers vom Typ PT100 er-

⁵ Bild: Fluidsystemtechnik, Maximilian M. G. Kuhr.

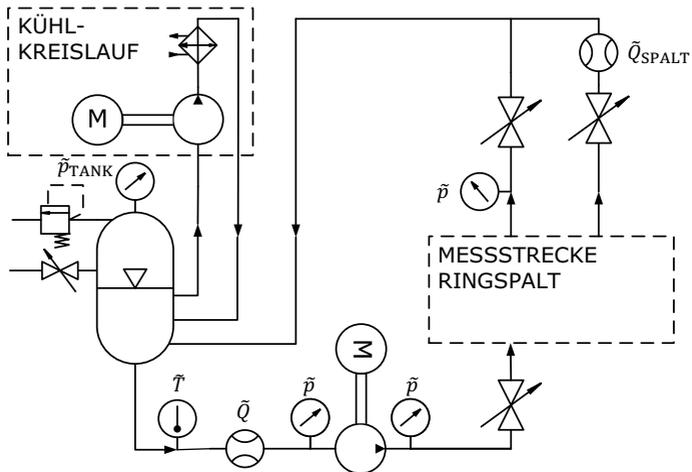


Abbildung 4.5 – Hydraulischer Schaltplan der Peripherie zur Versorgung des Spaltströmungsprüfstands.

fasst wird. Den Hydraulikschaltplan der Prüfstandsperipherie inklusive der vorhandenen Messstellen zeigt Abbildung 4.5. Der Spaltströmungsprüfstand wird über einen geschlossenen Kreislauf mit Wasser versorgt. Eine zehnstufige Kreiselpumpe fördert das Fluid aus einem Drucktank in das Ringspaltmodul. Zur Vermeidung von Phasenwechsel- oder Ausgasungsvorgängen, wie Kavitation im Ringspalt, wird das gesamte Druckniveau des Prüfstands angehoben. Hierfür wird der Drucktank im Betrieb mit einem Überdruck von bis zu 15 bar beaufschlagt. Zur Konditionierung des Wassers auf eine konstante Temperatur ist zusätzlich zum Hauptkreislauf ein Kühlkreislauf an die Peripherie angeschlossen. Hierdurch wird während des Betriebs eine konstante Fluid-Temperatur mit einer Abweichung von $\pm 1\text{ }^\circ\text{C}$ ermöglicht. Neben den relevanten Messgrößen zur Erfassung der Betriebsparameter des Ringspalts werden weitere Größen zur Überwachung des Spaltströmungsprüfstands, wie beispielsweise der statische Druck vor und nach der Kreiselpumpe oder der statische Druck vor der Regelarmatur des Bypasses, messtechnisch erfasst.

Neben den Sensoren zur Bestimmung der Betriebsparameter des Ringspalts werden die aktiven Magnetlager ebenfalls als Sensoren verwendet. Hierbei wird innerhalb der Lager die Position des Rotors sowie die zur Lagerung und Anregung des Rotors erforderlichen Kräfte erfasst. Dementsprechend können mit Hilfe der Magnetlager die durch den Ringspalt induzierten Kräfte auf den Rotor gemessen werden. Die induzierten Momente auf den Rotor um den

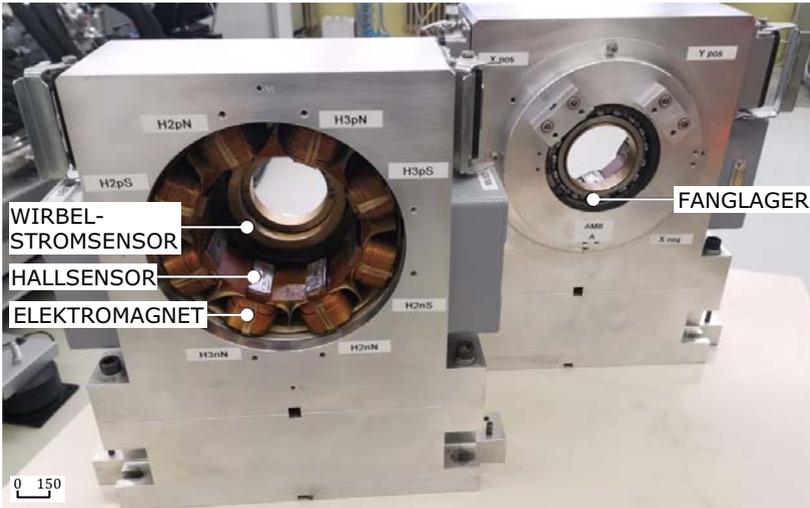


Abbildung 4.6 – Radiale aktive Magnetlager des Spaltströmungsprüfstands.

Taumelpunkt \tilde{z}_r ergeben sich aus den gemessenen Kräften in Kombination mit den geometrischen Abmessungen des Prüfstands.

Die Magnetlager des Spaltströmungsprüfstands, vgl. Abbildung⁶ 4.6, bestehen im Allgemeinen aus je vier Elektromagneten⁷. Zur Messung der Position des Rotors im Magnetlager werden, in Analogie zur Messung der Position des Rotors im Ringspalt, Wirbelstromsensoren verwendet. Die zur Lagerung und Anregung des Rotors benötigten Kräfte werden indirekt mit Hilfe von Hallensoren gemessen. Hierfür wird auf jedem Pol eines Elektromagneten ein Hallensensor aufgebracht⁸. Dieser misst die magnetische Flussdichte \tilde{B} senkrecht zur Fläche des Pols \tilde{A} . Die von jedem Pol aufgeprägte Kraft auf den Rotor $\tilde{F}_{H,i}$ ergibt sich aus der magnetischen Flussdichte \tilde{B} , der Fläche des Pols \tilde{A} sowie der magnetischen Feldkonstante μ_0

$$\tilde{F}_{H,i} = \frac{\tilde{A}}{2\mu_0} \tilde{B}_i^2, \quad i = 1 \dots 8. \quad (4.1)$$

⁶ Bild: Fluidsystemtechnik, Benjamin Hermann.

⁷ Die Magnetlager wurden bereits in den vorangegangenen Dissertationen von Knopf [44] und Krüger [46] erfolgreich zur Identifikation der rotordynamischen Eigenschaften fördermediengeschmierter Gleitlager und Quetschfilmdämpfer eingesetzt.

⁸ Die Anbringung erfolgt mit Hilfe eines temperaturbeständigen Zweikomponentenklebers

Im Allgemeinen ist die magnetische Flussdichte \tilde{B} abhängig von der Position des Rotors innerhalb der Magnetlager. Aus diesem Grund werden die aufgebrachten Hallsensoren vor Betrieb des Prüfstands kalibriert. Hierfür wird innerhalb dieser Arbeit auf ein bereits bestehendes Kalibrationsverfahren, welches ursprünglich in der Dissertation von Krüger⁹ entwickelt wurde, zurückgegriffen. Die Kalibration erfolgt hierbei auf Grundlage der bekannten Größen des Rotorgewichts \tilde{M}_{ROT} und der Lage des Schwerpunktes \tilde{s} des Rotors. Das verwendete Kalibrationsverfahren beruht darauf, dass die Summe der Kräfte der Elektromagneten $\sum_{i=1}^n \tilde{F}_{H,i}$, berechnet aus der gemessenen magnetischen Flussdichte \tilde{B}_i der Hallsensoren, bei einer beliebigen Position des Rotors in den Magnetlagern stets die Gewichtskraft des Rotors $\tilde{G} = \tilde{M}_{\text{ROT}} \tilde{g}$ ergeben muss, d.h. $\sum_{i=1}^n \tilde{F}_{H,i} \stackrel{!}{=} \tilde{G}$. Für eine detaillierte Beschreibung des Kalibrationsverfahrens sei an dieser Stelle auf die Arbeit von Krüger⁹ verwiesen.

⁹ KRÜGER, *Experimentelle Untersuchung von Quetschfilmdämpfern mit Hilfe aktiver Magnetlager*, ([46], 2009)

4.2 Identifikationsverfahren

Die dynamischen Eigenschaften axial durchströmter Ringspalte in Form der rotordynamischen Koeffizienten sind keine direkt messbaren physikalischen Größen. Vielmehr werden sie auf Basis von Methoden der Parameteridentifikation ähnlich der Bestimmung der Koeffizienten aus den Berechnungen des CAPM ermittelt. Zur Identifikation der rotordynamischen Koeffizienten bedarf es der Messung der zur Anregung des Rotors benötigten Kräfte und Momente \tilde{F}_X und \tilde{F}_Y bzw. \tilde{M}_X und \tilde{M}_Y sowie der Messung der Bewegung desselben in den vier Freiheitsgraden

$$\begin{aligned}
 - \begin{bmatrix} \tilde{F}_X \\ \tilde{F}_Y \\ \tilde{M}_X \\ \tilde{M}_Y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \tilde{K}_{XX} & \tilde{K}_{XY} & \tilde{K}_{X\alpha} & \tilde{K}_{X\beta} \\ \tilde{K}_{XY} & \tilde{K}_{YY} & \tilde{K}_{Y\alpha} & \tilde{K}_{Y\beta} \\ \tilde{K}_{\alpha X} & \tilde{K}_{\alpha Y} & \tilde{K}_{\alpha\alpha} & \tilde{K}_{\alpha\beta} \\ \tilde{K}_{\beta X} & \tilde{K}_{\beta Y} & \tilde{K}_{\beta\alpha} & \tilde{K}_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \\ \alpha_X \\ \beta_Y \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} \tilde{C}_{XX} & \tilde{C}_{XY} & \tilde{C}_{X\alpha} & \tilde{C}_{X\beta} \\ \tilde{C}_{XY} & \tilde{C}_{YY} & \tilde{C}_{Y\alpha} & \tilde{C}_{Y\beta} \\ \tilde{C}_{\alpha X} & \tilde{C}_{\alpha Y} & \tilde{C}_{\alpha\alpha} & \tilde{C}_{\alpha\beta} \\ \tilde{C}_{\beta X} & \tilde{C}_{\beta Y} & \tilde{C}_{\beta\alpha} & \tilde{C}_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{X}} \\ \dot{\tilde{Y}} \\ \dot{\alpha}_X \\ \dot{\beta}_Y \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} \tilde{M}_{XX} & \tilde{M}_{XY} & \tilde{M}_{X\alpha} & \tilde{M}_{X\beta} \\ \tilde{M}_{XY} & \tilde{M}_{YY} & \tilde{M}_{Y\alpha} & \tilde{M}_{Y\beta} \\ \tilde{M}_{\alpha X} & \tilde{M}_{\alpha Y} & \tilde{M}_{\alpha\alpha} & \tilde{M}_{\alpha\beta} \\ \tilde{M}_{\beta X} & \tilde{M}_{\beta Y} & \tilde{M}_{\beta\alpha} & \tilde{M}_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\tilde{X}} \\ \ddot{\tilde{Y}} \\ \ddot{\alpha}_X \\ \ddot{\beta}_Y \end{bmatrix}. \tag{4.2}
 \end{aligned}$$

Innerhalb der vorliegenden Arbeit erfolgt die Identifikation der rotordynamischen Koeffizienten durch Transformation der gemessenen Signale in den Frequenzraum¹⁰. Hierfür werden die Kräfte und Momente auf den Rotor \tilde{F}_X und \tilde{F}_Y sowie \tilde{M}_X und \tilde{M}_Y sowie die Bewegungen in den vier Freiheitsgraden \tilde{X} und \tilde{Y} sowie α_X und β_Y mit Hilfe einer diskreten Fourier-Transformation (DFT) in den Frequenzraum überführt. Durch Anwendung der Transformation auf die Bewegungsgleichung 4.2 ergibt sich die komplexe Bewegungsgleichung

$$- \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{F}}_X \\ \tilde{\mathcal{F}}_Y \\ \tilde{\mathcal{M}}_X \\ \tilde{\mathcal{M}}_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{K}}_{XX} & \tilde{\mathcal{K}}_{XY} & \tilde{\mathcal{K}}_{X\alpha} & \tilde{\mathcal{K}}_{X\beta} \\ \tilde{\mathcal{K}}_{XY} & \tilde{\mathcal{K}}_{YY} & \tilde{\mathcal{K}}_{Y\alpha} & \tilde{\mathcal{K}}_{Y\beta} \\ \tilde{\mathcal{K}}_{\alpha X} & \tilde{\mathcal{K}}_{\alpha Y} & \tilde{\mathcal{K}}_{\alpha\alpha} & \tilde{\mathcal{K}}_{\alpha\beta} \\ \tilde{\mathcal{K}}_{\beta X} & \tilde{\mathcal{K}}_{\beta Y} & \tilde{\mathcal{K}}_{\beta\alpha} & \tilde{\mathcal{K}}_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{D}}_X \\ \tilde{\mathcal{D}}_Y \\ \tilde{\mathcal{D}}_{\alpha X} \\ \tilde{\mathcal{D}}_{\beta Y} \end{bmatrix}. \tag{4.3}$$

Hierin beschreiben $\tilde{\mathcal{F}}_X$ und $\tilde{\mathcal{F}}_Y$ bzw. $\tilde{\mathcal{M}}_X$ und $\tilde{\mathcal{M}}_Y$ die Fourier-transformierten Kräfte und Momente auf den Rotor, $\tilde{\mathcal{D}}_X$, $\tilde{\mathcal{D}}_Y$, $\tilde{\mathcal{D}}_{\alpha X}$ und $\tilde{\mathcal{D}}_{\beta Y}$ die Fourier-

¹⁰Eine detaillierte Beschreibung des Identifikationsverfahrens ist in der studentischen Arbeit von Wetterich [107] dokumentiert.

transformierten Bewegungen in den Freiheitsgraden sowie $\tilde{\mathcal{K}}_{ij}$ ($i, j = X, Y, \alpha, \beta$) die komplexen Steifigkeiten. Der Realteil der komplexen Steifigkeiten $\Re(\tilde{\mathcal{K}}_{ij})$ beinhaltet hierbei die Steifigkeiten \tilde{K}_{ij} und Trägheiten \tilde{M}_{ij} des axial durchströmten Ringspalts, wohingegen der Imaginärteil der komplexen Steifigkeiten $\Im(\tilde{\mathcal{K}}_{ij})$ die Dämpfungen \tilde{C}_{ij} beinhaltet

$$\tilde{\mathcal{K}}_{ij} = \tilde{K}_{ij} - \tilde{M}_{ij} \tilde{\omega}^2 + i \tilde{C}_{ij} \tilde{\omega}, \tag{4.4a}$$

$$\Re(\tilde{\mathcal{K}}_{ij}) = \tilde{K}_{ij} - \tilde{M}_{ij} \tilde{\omega}^2, \quad \Im(\tilde{\mathcal{K}}_{ij}) = \tilde{C}_{ij} \tilde{\omega}. \tag{4.4b}$$

Zur Ermittlung aller 16 Einträge der komplexen Steifigkeitsmatrix $\tilde{\mathcal{K}}$ bedarf es vier linear unabhängige Bewegungsformen. Die innerhalb dieser Arbeit gewählten Bewegungsformen sind in Abbildung 4.7 dargestellt.

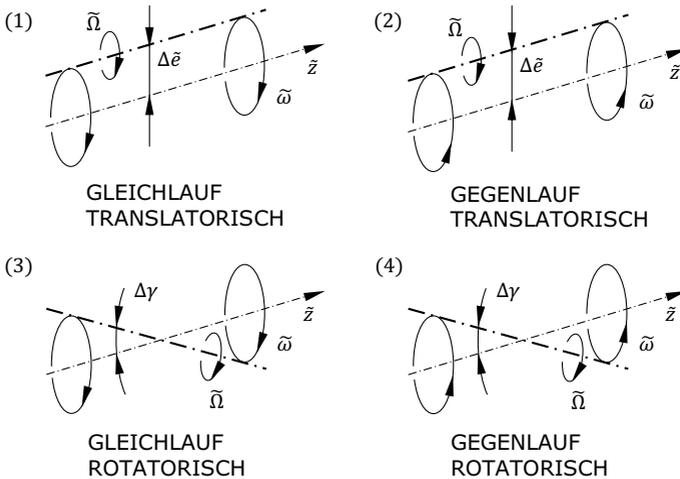


Abbildung 4.7 – Linear unabhängige Bewegungsformen zur Bestimmung der komplexen Steifigkeitsmatrix $\tilde{\mathcal{K}}$ mit 16 Einträgen.

Zur Ermittlung der komplexen Steifigkeiten der translatorischen Bewegungen wird der Rotor mit einer translatorischen Anregung in (1) bzw. entgegen (2) der Drehrichtung, d.h. einem translatorischen Gleich- bzw. Gegenlauf¹¹, beaufschlagt. Die Anregung erfolgt hierbei stets bei einer definierten Amplitude $\Delta\tilde{\epsilon}$ und Kreisfrequenz $\tilde{\omega}$. Die komplexen Steifigkeiten der rotatorischen Bewegungen ergeben sich analog durch eine rotatorische Anregung mit der Amplitude $\Delta\tilde{\gamma}$ in (3) bzw. entgegen (4) der Drehrichtung, d.h. einem rotatorischen Gleich- bzw. Gegenlauf.

¹¹GASCH, NORDMANN UND PFÜTZNER, *Rotordynamik*, ([27], 2002)

Die vier linear unabhängigen Bewegungsformen führen zu insgesamt 16 unabhängigen Gleichungen für die 16 komplexen Steifigkeiten

$$\begin{aligned}
 & - \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{F}}_{X,1} & \tilde{\mathcal{F}}_{X,2} & \tilde{\mathcal{F}}_{X,3} & \tilde{\mathcal{F}}_{X,4} \\ \tilde{\mathcal{F}}_{Y,1} & \tilde{\mathcal{F}}_{Y,2} & \tilde{\mathcal{F}}_{Y,3} & \tilde{\mathcal{F}}_{Y,4} \\ \tilde{\mathcal{M}}_{X,1} & \tilde{\mathcal{M}}_{X,2} & \tilde{\mathcal{M}}_{X,3} & \tilde{\mathcal{M}}_{X,4} \\ \tilde{\mathcal{M}}_{Y,1} & \tilde{\mathcal{M}}_{Y,2} & \tilde{\mathcal{M}}_{Y,3} & \tilde{\mathcal{M}}_{Y,4} \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{K}}_{XX} & \tilde{\mathcal{K}}_{XY} & \tilde{\mathcal{K}}_{X\alpha} & \tilde{\mathcal{K}}_{X\beta} \\ \tilde{\mathcal{K}}_{XY} & \tilde{\mathcal{K}}_{YY} & \tilde{\mathcal{K}}_{Y\alpha} & \tilde{\mathcal{K}}_{Y\beta} \\ \tilde{\mathcal{K}}_{\alpha X} & \tilde{\mathcal{K}}_{\alpha Y} & \tilde{\mathcal{K}}_{\alpha\alpha} & \tilde{\mathcal{K}}_{\alpha\beta} \\ \tilde{\mathcal{K}}_{\beta X} & \tilde{\mathcal{K}}_{\beta Y} & \tilde{\mathcal{K}}_{\beta\alpha} & \tilde{\mathcal{K}}_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{D}}_{X,1} & \tilde{\mathcal{D}}_{X,2} & \tilde{\mathcal{D}}_{X,3} & \tilde{\mathcal{D}}_{X,4} \\ \tilde{\mathcal{D}}_{Y,1} & \tilde{\mathcal{D}}_{Y,2} & \tilde{\mathcal{D}}_{Y,3} & \tilde{\mathcal{D}}_{Y,4} \\ \mathcal{D}_{\alpha X,1} & \mathcal{D}_{\alpha X,2} & \mathcal{D}_{\alpha X,3} & \mathcal{D}_{\alpha X,4} \\ \mathcal{D}_{\beta Y,1} & \mathcal{D}_{\beta Y,2} & \mathcal{D}_{\beta Y,3} & \mathcal{D}_{\beta Y,4} \end{bmatrix}. \quad (4.5)
 \end{aligned}$$

Zu beachten ist hierbei, dass die Messgrößen der Kräfte und Momente auf den Rotor sowie die Messgrößen der Bewegungen in den vier Freiheitsgraden auch nach durchgeführter Fourier-Transformation keine skalaren Größen darstellen. Vielmehr liegen die Messgrößen in einer Spaltenmatrix mit N Einträgen für die positiven und negativen Frequenzanteile vor. Die Parameteridentifikation erfolgt jedoch auf der Basis einzelner Stützstellen bei unterschiedlichen Kreisfrequenzen $\tilde{\omega}$, vgl. Kapitel 3.2. Aus diesem Grund erfolgt vor der Durchführung der eigentlichen Parameteridentifikation eine lineare Regression zur Bildung der skalaren Stützstellen der komplexen Steifigkeiten.

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{K}}_{XX} & \tilde{\mathcal{K}}_{XY} & \tilde{\mathcal{K}}_{X\alpha} & \tilde{\mathcal{K}}_{X\beta} \\ \tilde{\mathcal{K}}_{XY} & \tilde{\mathcal{K}}_{YY} & \tilde{\mathcal{K}}_{Y\alpha} & \tilde{\mathcal{K}}_{Y\beta} \\ \tilde{\mathcal{K}}_{\alpha X} & \tilde{\mathcal{K}}_{\alpha Y} & \tilde{\mathcal{K}}_{\alpha\alpha} & \tilde{\mathcal{K}}_{\alpha\beta} \\ \tilde{\mathcal{K}}_{\beta X} & \tilde{\mathcal{K}}_{\beta Y} & \tilde{\mathcal{K}}_{\beta\alpha} & \tilde{\mathcal{K}}_{\beta\beta} \end{bmatrix} = \\
 & = - \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{F}}_{X,1} & \tilde{\mathcal{F}}_{X,2} & \tilde{\mathcal{F}}_{X,3} & \tilde{\mathcal{F}}_{X,4} \\ \tilde{\mathcal{F}}_{Y,1} & \tilde{\mathcal{F}}_{Y,2} & \tilde{\mathcal{F}}_{Y,3} & \tilde{\mathcal{F}}_{Y,4} \\ \tilde{\mathcal{M}}_{X,1} & \tilde{\mathcal{M}}_{X,2} & \tilde{\mathcal{M}}_{X,3} & \tilde{\mathcal{M}}_{X,4} \\ \tilde{\mathcal{M}}_{Y,1} & \tilde{\mathcal{M}}_{Y,2} & \tilde{\mathcal{M}}_{Y,3} & \tilde{\mathcal{M}}_{Y,4} \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{D}}_{X,1} & \tilde{\mathcal{D}}_{X,2} & \tilde{\mathcal{D}}_{X,3} & \tilde{\mathcal{D}}_{X,4} \\ \tilde{\mathcal{D}}_{Y,1} & \tilde{\mathcal{D}}_{Y,2} & \tilde{\mathcal{D}}_{Y,3} & \tilde{\mathcal{D}}_{Y,4} \\ \mathcal{D}_{\alpha X,1} & \mathcal{D}_{\alpha X,2} & \mathcal{D}_{\alpha X,3} & \mathcal{D}_{\alpha X,4} \\ \mathcal{D}_{\beta Y,1} & \mathcal{D}_{\beta Y,2} & \mathcal{D}_{\beta Y,3} & \mathcal{D}_{\beta Y,4} \end{bmatrix}. \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

Hierbei sei angemerkt, dass die lineare Regression nur auf den negativen Frequenzanteil der transformierten Messgrößen, d.h. den ersten $N/2$ Einträgen der transformierten Signale beruht. Dies begründet sich damit, da durch Summation der Fourier-Transformierten der Signale innerhalb der Regression der Imaginärteil der komplexen Steifigkeiten verschwinden würde.

Im Anschluss an die lineare Regression werden die rotordynamischen Koeffizienten über eine zweite, quadratische Regression identifiziert. Die Regression beruht hierbei auf einer angepassten Version des Regressionsverfahrens nach Jolly¹². Hierbei wird das Regressionsverfahren mit einem iterativen Verfahren zur Elimination eventueller Messwertausreißer auf Basis einer „bisquare“ Gewichtung¹³ erweitert. Die iterativ bestimmten Gewichte W bilden den Beitrag eines jeden Messpunkts zur Regressionskurve ab

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^m W_k & -\sum_{k=1}^m W_k \tilde{\omega}_k^2 \\ -\sum_{k=1}^m W_k \tilde{\omega}_k^2 & \sum_{k=1}^m W_k \tilde{\omega}_k^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{K}_{ij} \\ \tilde{M}_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^m W_k \Re [\tilde{\mathcal{K}}_{ij}(\tilde{\omega}_k)] \\ -\sum_{k=1}^m W_k \tilde{\omega}_k^2 \Re [\tilde{\mathcal{K}}_{ij}(\tilde{\omega}_k)] \end{bmatrix}, \quad (4.7a)$$

$$\tilde{C}_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^m W_k \tilde{\omega}_k \Im [\tilde{\mathcal{K}}_{ij}(\tilde{\omega}_k)]}{\sum_{k=1}^m W_k \tilde{\omega}_k^2}. \quad (4.7b)$$

Liegt ein Wert deutlich außerhalb der Regressionskurve, so wird sein Gewicht im Vergleich zu den anderen vermeintlich korrekten Stützstellen reduziert und so sein Einfluss auf die Regressionskurve verringert. Das Verfahren wird so lange wiederholt, bis die Änderung der Gewichte unter einen zuvor definierten Wert fällt. Innerhalb des Regressionsverfahrens bildet der Index k die Anzahl an einzelnen Kreisfrequenzen der Präzessionsbewegung $\tilde{\omega}_k$ ab.

Zur Lösung des Gleichungssystems 4.7 sind mindestens zwei unterschiedliche Kreisfrequenzen $\tilde{\omega}_k$ notwendig. In der vorliegenden Arbeit werden zur Verbesserung der Genauigkeit der Regression mindestens sieben Kreisfrequenzen zur Identifikation der rotordynamischen Koeffizienten verwendet. In Kombination mit den zur Identifikation notwendigen unabhängigen Bewegungen ergibt sich eine Anzahl von 28 Einzelmessungen zur Identifikation aller 48 rotordynamischen Koeffizienten.

¹²JOLLY U. A., „Experimental and Theoretical Rotordynamic Coefficients of Smooth and Round-Hole Pattern Water-Fed Annular Seals“, ([39], 2018)

¹³THE MATHWORKS, INC., *Least-Squares Fitting*, ([98], 2021)

4.3 Quantifizierung der Messunsicherheit

Die experimentelle Identifikation der rotordynamischen Koeffizienten ist nur dann zur Validierung des Clearance-Averaged Pressure Model geeignet, wenn neben den identifizierten Koeffizienten auch die zugehörige Messunsicherheit angegeben wird. Alle bisher veröffentlichten experimentellen Untersuchungen aller 48 rotordynamischen Koeffizienten, vgl. Kapitel 2.2.1, verzichten jedoch auf eine rigorose Quantifizierung der Messunsicherheit. Aus diesem Grund wird im Folgenden die Berechnung der Messunsicherheit der rotordynamischen Koeffizienten in dieser Arbeit dargelegt. Die Berechnung orientiert sich hierbei vor allem am Leitfaden für den Ausdruck von Messunsicherheiten, engl. Guide to the expression of Uncertainty in Measurement (GUM), des Joint Committee for Guides in Metrology¹⁴.

4.3.1 Systematische und statistische Messunsicherheit

Wie bereits erwähnt bedingt eine saubere wissenschaftliche Praxis die Angabe einer Messgröße \tilde{x} stets mit der ihr zugeordneten Messunsicherheit $\delta\tilde{x}$ des gemessenen Datensatzes $\tilde{x}_i = \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_N$. Für stationäre Messgrößen wird in der Regel der empirische Mittelwert $\tilde{\bar{x}}$ des gemessenen Datensatzes angegeben

$$\tilde{x} = \tilde{\bar{x}} \pm \delta\tilde{x} \quad \text{mit} \quad \tilde{\bar{x}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{x}_i. \quad (4.8)$$

Die Messunsicherheit $\delta(\tilde{x})$ des Datensatzes setzt sich hierbei stets aus einer systematischen $\delta(\tilde{x})_{\text{SYS}}$ und einer statistischen Komponente $\delta(\tilde{x})_{\text{STAT}}$ zusammen¹⁵. Die systematische Messunsicherheit $\delta(\tilde{x})_{\text{SYS}}$ resultiert hierbei in einer wiederholbaren gleichmäßigen Beeinflussung der im Datensatz enthaltenen Werte. Beispielhaft sei hierbei die Benutzung eines Gliedermaßstabs mit fehlerhafter Skala zu nennen. Eine wiederholte Messung der physikalischen Größe \tilde{x} führt demnach nicht zu einer Reduktion der systematischen Messunsicherheit $\delta(\tilde{x})_{\text{SYS}}$. Die statistische Messunsicherheit $\delta(\tilde{x})_{\text{STAT}}$ resultiert im Gegensatz zu der systematischen Messunsicherheit $\delta(\tilde{x})_{\text{SYS}}$ aus zufälligen Schwankungen des Messsignals um den Wert der Messgröße. Die statistische Messunsicherheit $\delta(\tilde{x})_{\text{STAT}}$ kann demnach durch wiederholte Messung der Messgröße \tilde{x} reduziert werden.

¹⁴JOINT COMMITTEE FOR GUIDES IN METROLOGY, *Evaluation of Measurement Data—Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, ([38], 2008)

¹⁵Innerhalb des Guide to the expression of Uncertainty in Measurement (GUM) ist auch von Messunsicherheiten des Typs A und B die Rede.

Systematische Messunsicherheit

Die systematische Messunsicherheit $\delta(\tilde{x})_{\text{SYS}}$ eines Messsignals wird im Allgemeinen aus dem zugehörigen Datenblatt des verwendeten Sensors bestimmt. Hierbei wird die Unsicherheit des Sensors als maximale Abweichung der Linearität des Sensors $\delta(\tilde{x})_{\text{MAX}}$ von der eigentlichen Sensorkennlinie angegeben. Diese Skalenunsicherheit stellt eine maximale Messunsicherheit des Sensors dar. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser maximalen Abweichung ist in den meisten Fällen unbekannt. Aus diesem Grund schlägt der GUM zur Behandlung der systematischen Messunsicherheiten $\delta(\tilde{x})_{\text{SYS}}$ aus Datenblättern stets die Annahme einer Gleichverteilung vor. Diese wird zur Anwendung der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung in eine Normalverteilung auf Basis einer Standardabweichung $\sigma(\tilde{x})_{\text{SYS}}$ umgerechnet

$$\sigma(\tilde{x})_{\text{SYS}} = \frac{\delta(\tilde{x})_{\text{MAX}}}{\sqrt{3}}. \quad (4.9)$$

Die systematische Messunsicherheit $\delta(\tilde{x})_{\text{SYS}}$ ergibt sich durch Multiplikation der Standardabweichung $\sigma(\tilde{x})_{\text{SYS}}$ mit dem Student'schen t -Faktor

$$\delta(\tilde{x})_{\text{SYS}} = t_{\text{VI}} \sigma(\tilde{x})_{\text{SYS}}. \quad (4.10)$$

Der t -Faktor¹⁶ t_{VI} ergibt sich hierbei aus der Anzahl der Messwerte im Datensatz N sowie der Angabe eines Vertrauensintervalls (VI). Die Verwendung des t -Faktor berücksichtigt, dass durch eine stichprobenartige Messung einer physikalischen Größe \tilde{x} streng genommen nur bei einem unendlich langen Datensatz, d.h. $N \rightarrow \infty$, Normalverteilung vorliegt. Bei endlichen Messungen der physikalischen Größe ergibt sich ein t -verteilter Datensatz. Durch Multiplikation der Standardabweichung $\sigma(\tilde{x})_{\text{SYS}}$ mit dem Student'schen t -Faktor t_{VI} wird dies berücksichtigt. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird für die Messunsicherheit stets ein zweiseitiges Vertrauensintervall von 95% angenommen¹⁷. Aufgrund der großen Anzahl an Messpunkten, vgl. Kapitel 4.4, kann für den Student'schen t -Faktor $t_{95\%}$ in guter Näherung der Wert einer Normalverteilung angenommen werden. Die systematische Messunsicherheit $\delta(\tilde{x})_{\text{SYS}}$ ergibt sich zu

$$\delta(\tilde{x})_{\text{SYS}} = t_{95\%} \sigma(\tilde{x})_{\text{SYS}} = 1.96 \sigma(\tilde{x})_{\text{SYS}}. \quad (4.11)$$

¹⁶Innerhalb dieses Kapitels wird t_{VI} für die Darstellung des Student'schen Faktors mit einem definierten Vertrauensintervall (VI) verwendet.

¹⁷Empfehlung des GUM.

Statistische Messunsicherheit

Die statistische Messunsicherheit $\delta(\tilde{x})_{\text{STAT}}$ des gemessenen Datensatzes \tilde{x}_i ermittelt sich mit Hilfe der Standardabweichung des Datensatzes $\sigma(\tilde{x})$, dem Student'schen t -Faktor $t_{95\%}$ und der Anzahl der Messwerte im Datensatz N

$$\delta(\tilde{x})_{\text{STAT}} = \frac{t_{95\%}}{\sqrt{N}} \sigma(\tilde{x}). \quad (4.12)$$

Die Standardabweichung des Datensatzes einer stationären Messgröße $\delta(\tilde{x})_{\text{STAT}}$ berechnet sich unter Zuhilfenahme des empirischen Mittelwerts des Datensatzes $\tilde{\bar{x}}$ zu

$$\sigma(\tilde{x}) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\tilde{x}_i - \tilde{\bar{x}})^2}. \quad (4.13)$$

Für ein instationäres Signal, wie es bei der Anregung des Rotors zur Identifikation der rotordynamischen Koeffizienten der Fall ist, wird die Standardabweichung $\sigma(\tilde{x})$ bei der Bildung über den empirischen Mittelwert $\tilde{\bar{x}}$ deutlich überschätzt. Um dennoch eine statistische Messunsicherheit $\delta(\tilde{x})_{\text{STAT}}$ eines instationären Signales angeben zu können, wird die Standardabweichung $\sigma(\tilde{x})$ in der vorliegenden Arbeit auf anderem Wege gebildet. Prinzipiell wird die Standardabweichung $\sigma(\tilde{x})$ auch hier als Maß der zufälligen Streuung um ein Signal interpretiert. Hierfür wird der Verlauf jedes Signales jedoch nicht durch den empirischen Mittelwert $\tilde{\bar{x}}$, sondern durch eine harmonische Ausgleichskurve \tilde{S} auf Basis einer allgemeinen Sinusfunktion mit definierter Amplitude \tilde{a} , Kreisfrequenz der Anregung $\tilde{\omega}$, Phasenverschiebung γ und Offset \tilde{c} angenähert, vgl. Abbildung 4.8.

$$\tilde{S} = \tilde{a} \sin(\tilde{\omega}t + \gamma) + \tilde{c}. \quad (4.14)$$

Die Standardabweichung des Datensatzes einer instationären Messgröße $\sigma(\tilde{x})$ bildet sich in Analogie zur Standardabweichung des stationären Signals

$$\sigma(\tilde{x}) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\tilde{x}_i - \tilde{S}_i)^2}. \quad (4.15)$$

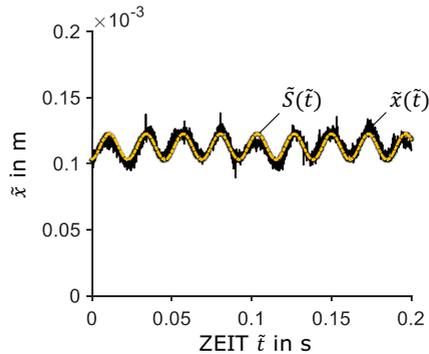


Abbildung 4.8 – Annäherung der zeitabhängigen Messgröße \tilde{x} durch eine harmonische Ausgleichskurve \tilde{S} auf Basis einer allgemeinen Sinusfunktion.

Gesamte Messunsicherheit

Das Quadrat der gesamten Messunsicherheit $\delta(\tilde{x})^2$ ergibt sich aus der Summe der Quadrate der systematischen $\delta(\tilde{x})_{\text{SYS}}$ und der statistischen Messunsicherheit $\delta(\tilde{x})_{\text{STAT}}$

$$\delta(\tilde{x})^2 = \delta(\tilde{x})_{\text{SYS}}^2 + \delta(\tilde{x})_{\text{STAT}}^2. \quad (4.16)$$

Bisher wurde stets von einer direkt messbaren physikalischen Größe ausgegangen. Die zur Identifikation der rotordynamischen Koeffizienten benötigten Größen sind zum Großteil jedoch abgeleitete Größen. Beispielfhaft sei hierbei die aus der magnetischen Flussdichte \tilde{B}_i berechnete Kraft der Elektromagneten in den Magnetlagern $\tilde{F}_{H,i}$ genannt. Im Allgemeinen bestehen abgeleitete Größen \tilde{y} aus m direkt messbaren physikalischen Größen \tilde{x} sowie weiteren, bereits abgeleiteten, Messgrößen. Auf Basis der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung erfolgt die Berechnung der Messunsicherheit einer abgeleiteten Größe aus den Sensitivitäten $\partial\tilde{y}/\partial\tilde{x}$ sowie den zugehörigen gesamten Messunsicherheiten $\delta(\tilde{x})$

$$\delta(\tilde{y}) = \sqrt{\sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial\tilde{y}}{\partial\tilde{x}_j} \delta(\tilde{x}_j) \right)^2}. \quad (4.17)$$

Transformation in den Frequenzraum

Die Identifikation der rotordynamischen Koeffizienten erfolgt im Rahmen dieser Arbeit auf Basis Fourier-transformierter Zeitsignale. Für die Messunsicherheit wird hierbei zunächst angenommen, dass zu jedem diskreten Wert eines Zeitsignals die gesamte Messunsicherheit des Signals $\delta(\tilde{x})$, bestehend aus der systematischen $\delta(\tilde{x})_{\text{SYS}}$ und der statistischen Messunsicherheit $\delta(\tilde{x})_{\text{STAT}}$, zugeordnet werden kann. Dieses Vorgehen stellt eine konservative Abschätzung der Messunsicherheit im Hinblick auf die statistische Messunsicherheit $\delta(\tilde{x})_{\text{STAT}}$ dar, da diese normalerweise nur dem empirischen Mittel des Signals \tilde{x} zugeordnet wird. Eine weitere Annahme bei der Berechnung der Messunsicherheit ist, dass die gesamte Messunsicherheit eines Signals als Skalenunsicherheit betrachtet werden kann. Dementsprechend kann diese, bei Transformation des Signals in den Frequenzraum, auf jede Frequenz des Signals gleichermaßen angewendet werden. Es ergibt sich eine über alle Frequenzen konstante Messunsicherheit $\delta[\mathcal{F}(\tilde{x})] = \text{const}$ des transformierten Signals $\mathcal{F}(\tilde{x})$. Dieses Vorgehen stellt auch hierbei eine konservative Abschätzung der Messunsicherheit dar. Würde hingegen die systematische Messunsicherheit nicht als Skalenfehler, sondern als konstanter Offset interpretiert, so würde die Fourier-Transformierte des Messsignals bei vernachlässigbarer statistischer Messunsicherheit¹⁸ lediglich eine Unsicherheit bei verschwindender Anregung, d.h. $\omega = 0$, aufweisen. Die Messunsicherheit der rotordynamischen Koeffizienten berechnet sich dementsprechend aus der systematischen und statistischen Messunsicherheit der abgeleiteten Größen sowie der Fourier-Transformation der Signale und anschließender Fehlerfortpflanzung auf Basis der Vorschriften des Identifikationsverfahrens, vgl. Kapitel 4.2. Die Berechnung der Messunsicherheit nach der Transformation in den Frequenzraum wird im Rahmen der Arbeit unter Zuhilfenahme der frei verfügbaren Matlab-Bibliothek METAS UncLib¹⁹, des Eidgenössischen Instituts für Metrologie (METAS), durchgeführt.

¹⁸Eine Vernachlässigung der statistischen Messunsicherheit im Vergleich zur systematischen Messunsicherheit wäre durch die lange Messdauer innerhalb dieser Arbeit gerechtfertigt.

¹⁹ZEIER, HOFFMANN UND WOLLENSACK, „Metas.UncLib — a measurement uncertainty calculator for advanced problems“, ([113], 2012)

4.4 Vorversuche

Bevor die eigentlichen experimentellen Untersuchungen zur Validierung des Clearance-Averaged Pressure Models durchgeführt werden, werden umfangreiche Vorversuche durchgeführt. Im Wesentlichen werden hierbei die Validität und Reproduzierbarkeit der Ergebnisse des Identifikationsverfahrens untersucht. Zudem wird der dynamische Einfluss des Prüfstandsbaus auf die zu untersuchenden rotordynamischen Koeffizienten charakterisiert. Die Messdatenerfassung aller Sensoren erfolgt hierbei gleichzeitig auf Basis eines Multifunktions-IO-Moduls der Firma National Instruments vom Typ PXIe-6363 mit einer Abtastrate von 6000 Hz pro Kanal über eine Dauer von fünf Sekunden. Die unterschiedlichen Kreisfrequenzen zur Anregung des Rotors $\tilde{\omega}$ werden so gewählt, dass diese nicht mit der Kreisfrequenz des Rotors $\tilde{\Omega}$ übereinstimmen und einen genügenden Abstand zur Starrkörpereigenfrequenz des Fundaments und des Rotors aufweisen. Die Starrkörpereigenfrequenz des Fundaments liegt bei einer Frequenz von ca. 6 Hz, während sich die Eigenfrequenz des Rotors bei 910 Hz befindet. Für die Frequenzen der Präzessionsbewegung $\tilde{f} = \tilde{\omega}/(2\pi)$ wird dementsprechend ein Bereich zwischen 10 Hz und 910 Hz angestrebt. Um einen ausreichenden Abstand der Anregungsfrequenzen von der Eigenfrequenz des Rotors zu gewährleisten, werden in der vorliegenden Arbeit Anregungsfrequenzen in einem Bereich von 10 Hz bis 50 Hz verwendet.

4.4.1 Validierung des Identifikationsverfahrens

Zunächst wird das in Kapitel 4.2 vorgestellte Identifikationsverfahren anhand bekannter Messgrößen validiert. Im vorliegenden Fall wird die Masse des Rotors \tilde{M}_{ROT} als erste Vergleichsgröße gewählt. Hierfür wird lediglich der Rotor des Spaltströmungsprüfstands inkl. dem rotierenden Teil der Gleitringdichtungen dem Identifikationsverfahren unterzogen. Um Störeinflüsse des Aufbaus sowie weitere Komponenten ausschließen zu können, werden zunächst die Fourier-transformierten Messsignale auf Störeinflüsse und korrekte Abbildung der zur Anregung aufgeprägten Amplitude und Präzessionsfrequenz untersucht.

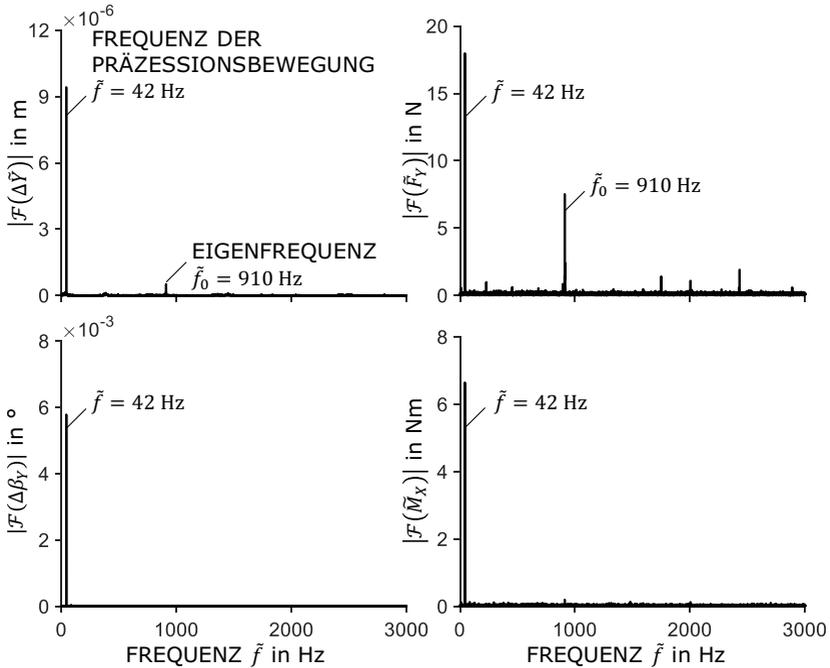


Abbildung 4.9 – Betrag der Fourier-Transformierten $|\mathcal{F}|$ ausgewählter Messsignale für die translatorische und rotatorische Anregung mit einer Präzessionsfrequenz von $\tilde{f} = 42$ Hz.

Abbildung 4.9 zeigt beispielhaft den Betrag der Fourier-Transformierten ausgewählter Messsignale für die translatorische und rotatorische Bewegung in \tilde{Y} - und β_Y -Richtung sowie die zur Anregung notwendigen Kräfte und Momente \tilde{F}_X und \tilde{M}_X . Die Anregung erfolgt im vorliegenden Fall bei einer Präzessionsfrequenz von $\tilde{f} = 42$ Hz sowie bei einer Anregungsamplitude von $\Delta\tilde{Y} = \Delta\tilde{X} = 10 \times 10^{-6}$ m für die translatorischen Freiheitsgrade und einer Anregungsamplitude von $\Delta\beta_Y = \Delta\alpha_X = 5.9 \times 10^{-3}^\circ$ für die rotatorischen Freiheitsgrade. Zu erkennen ist hierbei, dass sowohl die Amplituden als auch die vorgegebenen Präzessionsfrequenzen in den Fourier-transformierten Messsignalen zu erkennen sind. Zusätzlich zeigt sich die Eigenfrequenz des Rotors \tilde{f}_0 als eigenständiger Peak bei einer Frequenz von $\tilde{f}_0 = 910$ Hz in den Signalen der translatorischen Bewegung. Weitere Eigenfrequenzen oder etwaige Störeinflüsse sind nicht zu erkennen.

Die Identifikation der Rotormasse erfolgt im Anschluss durch Anwendung des Identifikationsverfahrens. Die Rotormasse \tilde{M}_{ROT} muss hierbei im Realteil der komplexen Steifigkeiten $\Re(\tilde{\mathcal{K}}_{XX})$ und $\Re(\tilde{\mathcal{K}}_{YY})$ zu erkennen sein. Aufgrund der Tatsache, dass allein der starre Rotor einer Identifikation unterzogen wird, sind die Steifigkeiten und Dämpfungen desselben zu vernachlässigen. Abbildung 4.10 links zeigt beispielhaft den identifizierten Realteil der komplexen Steifigkeit $\Re(\tilde{\mathcal{K}}_{YY})$ sowie die berechnete komplexe Steifigkeit aus der gewogenen Rotormasse, d.h. $-\tilde{M}_{\text{ROT}}\tilde{\omega}^2$. Die Marker repräsentieren die aufgeprägten Kreisfrequenzen der Präzessionsbewegung $\tilde{\omega}$, wohingegen die durchgezogene Linie die Ausgleichskurve und die gestrichelte Linie die berechnete komplexe Steifigkeit der Rotormasse darstellt. Zu erkennen ist, dass die Ausgleichskurve

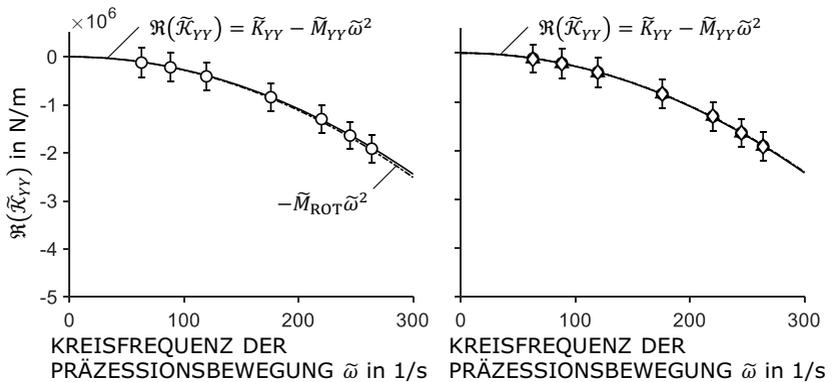


Abbildung 4.10 – Identifikation der Masse des Rotor (links) und Reproduzierbarkeit der Identifikation an unterschiedlichen Messtagen (rechts).

kaum von der berechneten Kurve zu unterscheiden ist. Dementsprechend treten nur geringfügige Unterschiede zwischen der identifizierten Masse des Rotors \tilde{M}_{Y_Y} und der gewogenen Masse des Rotors \tilde{M}_{ROT} auf. Zusätzlich zeigt sich, dass die identifizierten Steifigkeiten des Rotors \tilde{K}_{Y_Y} vernachlässigbar klein sind.

Tabelle 4.1 listet die identifizierte Rotormasse $\tilde{M}_{X_X} = \tilde{M}_{Y_Y}$ sowie die identifizierte Rotorträgheit $\tilde{M}_{\alpha\alpha} = \tilde{M}_{\beta\beta}$ im Vergleich zur gewogenen Rotormasse \tilde{M}_{ROT} und aus der aus einem CAD Modell bestimmten Trägheit des Rotors $\tilde{\Theta}_{\text{ROT}}$ auf. Es zeigt sich, dass die Rotormasse mit einer Abweichung von 2.6% und die Trägheit mit einer Abweichung von 18.6% identifiziert werden kann. Die prozentual höhere Abweichung der identifizierten Rotorträgheit $\tilde{M}_{\alpha\alpha} = \tilde{M}_{\beta\beta}$ erklärt sich durch die Abweichungen des verwendeten CAD Modells. Für die Berechnung der Rotorträgheit wurde die komplexe Geometrie der Gleitringdichtung lediglich durch einfache Zylinderscheiben angenähert.

Tabelle 4.1 – Identifizierte und gewogene Rotormasse \tilde{M}_{Y_Y} und \tilde{M}_{ROT} sowie identifizierte und aus einem CAD Model ermittelte Trägheit des Rotors $\tilde{M}_{\alpha\alpha}$ und $\tilde{\Theta}_{\text{ROT}}$.

$\tilde{M}_{X_X} = \tilde{M}_{Y_Y}$	\tilde{M}_{ROT}	$\tilde{M}_{\alpha\alpha} = \tilde{M}_{\beta\beta}$	$\tilde{\Theta}_{\text{ROT}}$
$(27.16 \pm 0.21) \text{ kg}$	$(27.89 \pm 0.06) \text{ kg}$	$(0.758 \pm 0.02) \text{ kg m}^2$	0.932 kg m^2

Neben der Identifikation der Rotormasse \tilde{M}_{ROT} zeigt Abbildung 4.10 rechts die Reproduzierbarkeit der Identifikation an unterschiedlichen Messtagen. Wie auch schon beim Vergleich zwischen identifizierter und gewogener Rotormasse \tilde{M}_{Y_Y} und \tilde{M}_{ROT} sind die Unterschiede zwischen den einzelnen Messtagen kaum zu erkennen. Das Identifikationsverfahren stellt somit ein valides und reproduzierbares Verfahren zur Identifikation der rotordynamischen Koeffizienten dar und kann für die Identifikation der dynamischen Eigenschaften axial durchströmter Ringspalte angewendet werden.

4.4.2 Dynamische Eigenschaften des Versuchsaufbaus

Mit dem validierten Identifikationsverfahren gilt es nunmehr die dynamischen Eigenschaften axial durchströmter Ringspalte zu identifizieren. Bevor die eigentlichen Parameterstudien durchgeführt werden, wird in einem letzten Schritt der dynamische Einfluss des Prüfstandsbaus ohne Ringspalt charakterisiert. Dieser wird im Anschluss zur Korrektur der eigentlichen Messungen verwendet. Damit ist sichergestellt, dass lediglich die dynamischen Eigenschaften des Ringspalts zur Validierung des CAPM verwendet werden. Zur Charakterisierung der dynamischen Eigenschaften des Versuchsaufbaus wird der Spaltströmungsprüfstand mit Wasser gefüllt und die dynamischen Eigenschaften des Aufbaus ohne eingebaute statorseitige Ringspalthülse identifiziert. Vordergründig soll hierbei die virtuelle Masse des Wassers im Prüfstand \tilde{M}_{VIRT} ermittelt werden. Im Anschluss daran wird der Einfluss weiterer Parameter, wie der Kreisfrequenz des Rotors $\tilde{\Omega}$, auf die dynamischen Eigenschaften des Prüfstandsbaus untersucht.

Zunächst wird der Einfluss der virtuellen Masse des Wassers innerhalb des Ringspaltmoduls \tilde{M}_{VIRT} auf die Messergebnisse untersucht. Die virtuelle Masse des Wassers kann hierbei sowohl analytisch, d.h. mit Hilfe der Methode der Potentialtheorie, als auch experimentell bestimmt werden. Zur analytischen Bestimmung der virtuellen Masse \tilde{M}_{VIRT} wird in Anlehnung an das Vorgehen von Spurk²⁰ zunächst das Potential der Strömung $\tilde{\Phi}$ eines schwingenden, sich drehenden Rotors in einem Gehäuse aufgestellt, vgl. Abbildung 4.11.

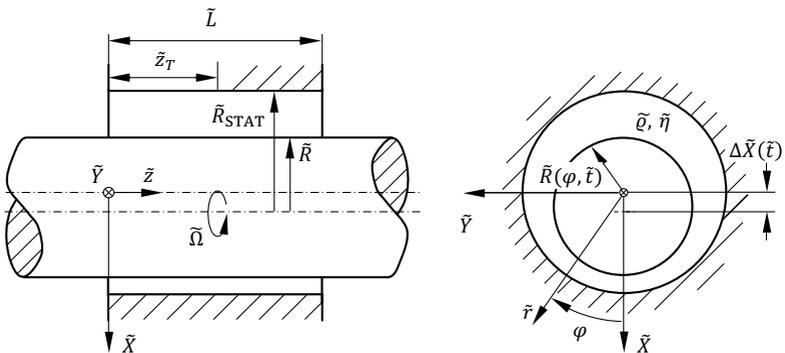


Abbildung 4.11 – Schwingender, drehender Rotor in einer reibungsfreien Flüssigkeit.

²⁰SPURK, *Aufgaben zur Strömungslehre*, ([86], 1995)

Hierbei wird nicht wie bei den bisherigen Betrachtungen die relative Spaltweite $\psi \ll 1$ vorausgesetzt. Zudem soll das Problem als ebene Strömung behandelt werden, was zu der Annahme einer viel größeren Länge des Gehäuses \tilde{L} als der Radius desselben R_{STAT} führt, d.h. $\tilde{L} \gg \tilde{R}_{\text{STAT}}$. Das Potential der Strömung im Ringspalt $\tilde{\Phi}$ ergibt sich zu

$$\tilde{\Phi} = -\Delta\tilde{X} \frac{\tilde{R}^2}{\tilde{R}_{\text{STAT}}^2 - \tilde{R}^2} \left(\tilde{r} + \frac{\tilde{R}_{\text{STAT}}^2}{\tilde{r}} \right) \cos \varphi + \frac{\tilde{\Gamma}}{2\pi} \varphi, \quad \text{für } \tilde{L} \gg \tilde{R}_{\text{STAT}}. \quad (4.18)$$

Hierin bezeichnet $\tilde{\Gamma}\varphi/(2\pi)$ das Potential eines Wirbelfadens mit der Zirkulation $\tilde{\Gamma}$ entlang der z -Achse. Die Radial- und Tangentialgeschwindigkeiten der Strömung \tilde{c}_r und \tilde{c}_φ ergeben sich aus den jeweiligen Ableitungen des Potentials

$$\tilde{c}_r = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{r}} = -\Delta\tilde{X} \frac{\tilde{R}^2}{\tilde{R}_{\text{STAT}}^2 - \tilde{R}^2} \left(1 - \frac{\tilde{R}_{\text{STAT}}^2}{\tilde{r}^2} \right) \cos \varphi, \quad (4.19)$$

$$\tilde{c}_\varphi = \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \varphi} = \Delta\tilde{X} \frac{\tilde{R}^2}{\tilde{R}_{\text{STAT}}^2 - \tilde{R}^2} \left(1 + \frac{\tilde{R}_{\text{STAT}}^2}{\tilde{r}^2} \right) \sin \varphi + \frac{\tilde{\Gamma}}{2\pi} \frac{1}{\tilde{r}}. \quad (4.20)$$

Die virtuelle Masse des Wassers \tilde{M}_{VIRT} lässt sich aus der kinetischen Energie der Strömung \tilde{E}_{KIN} berechnen. Die kinetische Energie \tilde{E}_{KIN} sowie die daraus folgende virtuelle Masse des Wassers im Ringspalt \tilde{M}_{VIRT} ergibt sich mit dem Volumen des Rotors $\tilde{V} = \pi\tilde{L}\tilde{R}^2$ zu

$$\tilde{E}_{\text{KIN}} = \tilde{R} \frac{\tilde{\rho}}{2} \int_0^{\tilde{L}} \int_0^{2\pi} \tilde{\Phi} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{r}} d\varphi d\tilde{z} = \pi\tilde{R}\tilde{L} \Delta\tilde{X}^2 \frac{\tilde{\rho}}{2} \frac{\tilde{R}_{\text{STAT}}^2 + \tilde{R}^2}{\tilde{R}_{\text{STAT}}^2 - \tilde{R}^2} \quad (4.21)$$

$$\tilde{M}_{\text{VIRT}} = \frac{2\tilde{E}_{\text{KIN}}}{\Delta\tilde{X}^2} = \tilde{\rho}\tilde{V} \frac{\tilde{R}_{\text{STAT}}^2 + \tilde{R}^2}{\tilde{R}_{\text{STAT}}^2 - \tilde{R}^2}. \quad (4.22)$$

Zusätzlich zum Einfluss der virtuellen Masse des Wassers \tilde{M}_{VIRT} erfährt der Rotor eine senkrecht zur Anregung gerichtete Kraft \tilde{F}_{LIFT} . Diese Kraft ist aus der Aerodynamik als Auftrieb bekannt und berechnet sich aus dem Integral des dynamischen Drucks \tilde{p}_{DYN} auf der Rotoroberfläche

$$\tilde{F}_{\text{LIFT}} = \tilde{L} \int_0^{2\pi} \tilde{p}_{\text{DYN}} \tilde{R} \sin \varphi d\varphi = \tilde{L}\tilde{R} \frac{\tilde{\rho}}{2} \int_0^{2\pi} \left(\tilde{c}_r^2 \Big|_{r=R} + \tilde{c}_\varphi^2 \Big|_{r=R} \right) \sin \varphi d\varphi. \quad (4.23)$$

Aufgrund der Symmetrie des Rotors verschwindet die Radialkomponente der Geschwindigkeit \tilde{c}_r bei Integration und der auf den Rotor wirkende Auftrieb \tilde{F}_{LIFT} ergibt sich zu

$$\tilde{F}_{\text{LIFT}} = \tilde{L} \frac{\tilde{\rho}}{2} \Delta\tilde{X}^2 \frac{\tilde{R}_{\text{STAT}}^2 + \tilde{R}^2}{\tilde{R}_{\text{STAT}}^2 - \tilde{R}^2} \tilde{\Gamma}. \quad (4.24)$$

Vergleicht man die virtuelle Masse des Wassers \tilde{M}_{VIRT} mit der physikalischen Masse des Wassers im Ringspalt $\pi\tilde{\varrho}\tilde{L}(\tilde{R}_{\text{STAT}}^2 - \tilde{R}^2)$ wird deutlich, dass die virtuelle Masse nicht nur die physikalische Masse des Wassers im Ringspalt darstellt. Vielmehr ergibt sich ein Übersetzungsverhältnis aus den beschreibenden Radien \tilde{R} und \tilde{R}_{STAT} .

Der Auftrieb auf den Rotor lässt sich ebenfalls durch das Übersetzungsverhältnis aus den beschreibenden Radien in Verbindung mit der Zirkulation $\tilde{\Gamma}$ und der Anströmgeschwindigkeit $\Delta\tilde{X}$ beschreiben. Gemäß dem Kutta-Joukowski-Theorem^{21,22} ist der Auftrieb linear proportional zur Zirkulation $\tilde{\Gamma}$ sowie linear proportional zur Anströmgeschwindigkeit $\Delta\tilde{X}$. Die Zirkulation des Rotors lässt sich für den hier betrachteten Fall eines rotierenden Zylinders wie folgt ausdrücken $\tilde{\Gamma} = 2\pi\tilde{\Omega}\tilde{R}^2$. Im Sinne der dynamischen Eigenschaften axial durchströmter Ringspalte lässt sich der Auftrieb \tilde{F}_{LIFT} als eine geschwindigkeitsproportionale Kraft auf den Rotor senkrecht zur Bewegungsrichtung interpretieren. Dementsprechend kann der Auftrieb \tilde{F}_{LIFT} bezogen auf die Anströmgeschwindigkeit $\Delta\tilde{X}$ als Nebendämpfung \tilde{C}_{LIFT} angesehen werden.

$$\tilde{C}_{\text{LIFT}} = \frac{\tilde{F}_{\text{LIFT}}}{\Delta\tilde{X}} = \tilde{L}\frac{\tilde{\varrho}}{2}\frac{\tilde{R}_{\text{STAT}}^2 + \tilde{R}^2}{\tilde{R}_{\text{STAT}}^2 - \tilde{R}^2}\tilde{\Gamma} = \tilde{\varrho}\tilde{\Omega}\tilde{V}\frac{\tilde{R}_{\text{STAT}}^2 + \tilde{R}^2}{\tilde{R}_{\text{STAT}}^2 - \tilde{R}^2}. \quad (4.25)$$

Zur Berechnung der virtuellen Masse \tilde{M}_{VIRT} und der Nebendämpfungen \tilde{C}_{LIFT} des Prüfstands wird dieser durch eine Anzahl von N Hohlzylinderscheiben mit den zugehörigen Radien \tilde{R}_i und $R_{i,\text{STAT}}$ und den Volumina \tilde{V}_i angenähert

$$\tilde{M}_{\text{VIRT}} = \tilde{\varrho}\sum_i^N \tilde{V}_i \frac{\tilde{R}_{i,\text{STAT}}^2 + \tilde{R}_i^2}{\tilde{R}_{i,\text{STAT}}^2 - \tilde{R}_i^2}, \quad \tilde{C}_{\text{LIFT}} = \tilde{\varrho}\tilde{\Omega}\sum_i^N \tilde{V}_i \frac{\tilde{R}_{i,\text{STAT}}^2 + \tilde{R}_i^2}{\tilde{R}_{i,\text{STAT}}^2 - \tilde{R}_i^2}. \quad (4.26)$$

Es ergibt sich eine virtuelle Masse des Ringspaltmoduls von $\tilde{M}_{\text{VIRT}} = 19.0$ kg sowie eine Nebendämpfung von $\tilde{C}_{\text{LIFT}} = 2.61 \times 10^3$ Ns/m bei einer Kreisfrequenz des Rotors von $\tilde{\Omega} = 138.21$ /s. Zusammen mit der Masse des Rotors \tilde{M}_{ROT} bildet die virtuelle Masse \tilde{M}_{VIRT} eine effektive Masse $\tilde{M}_{\text{EFF}} = \tilde{M}_{\text{VIRT}} + \tilde{M}_{\text{ROT}}$, welche experimentell ermittelt werden kann.

²¹SPURK UND AKSEL, *Strömungslehre: Einführung in die Theorie der Strömungen*, ([88], 2006)

²²BACHELOR, *An Introduction to Fluid Dynamics*, ([3], 2012)

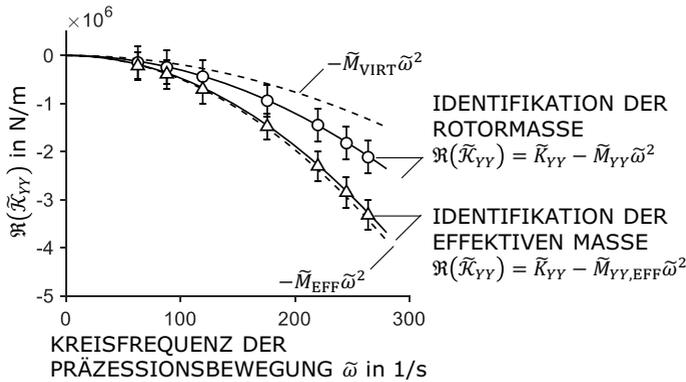


Abbildung 4.12 – Identifikation der effektiven Masse des Ringspaltmoduls \tilde{M}_{EFF} bestehend aus der Masse des Rotors \tilde{M}_{ROT} und der virtuellen Masse des Wassers im Ringspaltmodul \tilde{M}_{VIRT} .

Abbildung 4.12 zeigt in Analogie zur Validierung des Identifikationsverfahrens den Realteil der komplexen Steifigkeit $\Re(\tilde{\mathcal{K}}_{YY})$. Die Marker repräsentieren hierbei die experimentell identifizierten Massen des Rotors \tilde{M}_{YY} sowie die experimentell identifizierte effektive Masse des Spaltströmungsprüfstands $\tilde{M}_{YY,EFF}$, bestehend aus der Rotormasse und der virtuellen Masse des Wassers im Ringspaltmodul. Die durchgezogenen Linien stellen die Ausgleichskurven durch die Marker dar. Die gestrichelten Linien zeigen die berechnete komplexe Steifigkeit der virtuellen Masse des Wassers im Ringspaltmodul $-\tilde{M}_{VIRT}\tilde{\omega}^2$ und die berechnete komplexe Steifigkeit der effektiven Masse $-\tilde{M}_{EFF}\tilde{\omega}^2$, bestehend aus der komplexen Steifigkeit der gewogenen Rotormasse $-\tilde{M}_{ROT}\tilde{\omega}^2$ und der berechneten komplexen Steifigkeit der virtuellen Masse des Wassers im Ringspaltmodul $-\tilde{M}_{VIRT}\tilde{\omega}^2$. Erneut zeigt sich eine gute Übereinstimmung der experimentell identifizierten effektiven Masse $\tilde{M}_{YY,EFF}$ und der berechneten effektiven Masse \tilde{M}_{EFF} . Die Unterschiede in den identifizierten Größen sind mit den Annahmen der potentialtheoretischen Berechnung der virtuellen Masse \tilde{M}_{VIRT} sowie der Annäherung der Prüfstandsgeometrie durch Zylinderscheiben zu erklären. Für den dargestellten Fall ergibt sich eine Abweichung von 6.8 % zwischen berechneter und experimentell identifizierter effektiver Masse.

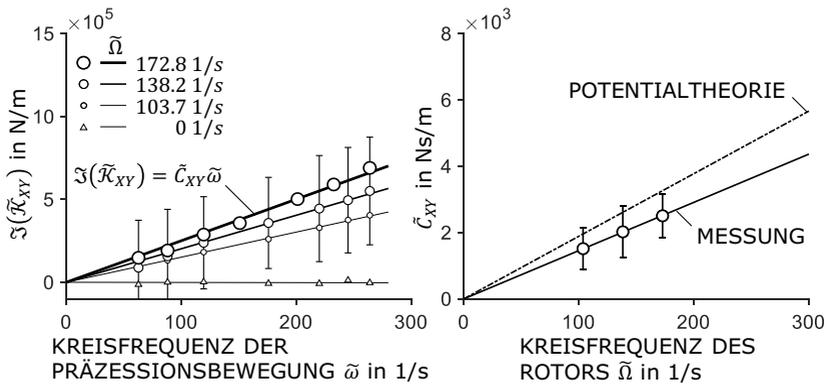


Abbildung 4.13 – Identifikation der Nebendämpfung \tilde{C}_{XY} des Ringspaltmoduls durch translatorische Anregung (links) und Vergleich mit den potentialtheoretischen Vorhersagen (rechts).

Die Identifikation der Nebendämpfung \tilde{C}_{XY} zeigt Abbildung 4.13 links. Hierbei ist nicht wie bisher der Realteil der komplexen Steifigkeit $\Re(\tilde{\mathcal{K}}_{XY})$, sondern der Imaginärteil $\Im(\tilde{\mathcal{K}}_{XY})$ derselben aufgetragen. Die Marker und durchgezogenen Linien repräsentieren die experimentell identifizierten komplexen Steifigkeiten sowie die Ausgleichskurven durch ebendiese. Zur Identifikation des vorhergesagten Einflusses der Kreisfrequenz des Rotors $\tilde{\Omega}$ auf die Nebendämpfung \tilde{C}_{XY} wird diese in drei Stufen variiert. Die Markergröße sowie die Linienstärke korreliert mit der Kreisfrequenz des Rotors $\tilde{\Omega}$, vgl. den Anstieg der Steigungen in Abbildung 4.13 links. Größere Marker und dickere Linienstärken stehen stellvertretend für größere Kreisfrequenzen des Rotors. Aus Darstellungsgründen sind die experimentell identifizierten komplexen Steifigkeiten nur für eine Kreisfrequenz des Rotors von $\tilde{\Omega} = 138.2\text{ 1/s}$ mit Fehlerbalken versehen. Die berechnete Messunsicherheit ist repräsentativ für alle Messungen und kann in guter Näherung auf die identifizierten komplexen Steifigkeiten übertragen werden. Es zeigt sich der vorhergesagte Anstieg der Nebendämpfung \tilde{C}_{XY} bei Erhöhung der Kreisfrequenz des Rotors $\tilde{\Omega}$. Die identifizierte Nebendämpfung des Prüfstands \tilde{C}_{XY} liegt hierbei in typischen Größenordnungen wie die Nebendämpfungen eines axial durchströmten Ringspalts, d.h. $\tilde{C}_{XY} \sim 10^3\text{ Ns/m}$. Abbildung 4.13 rechts zeigt den Vergleich der identifizierten Nebendämpfung \tilde{C}_{XY} , d.h. die Steigungen der Geraden in Abbildung 4.13 links, für die drei Kreisfrequenzen des Rotors im Vergleich mit den potentialtheoretischen Berechnungen. Die experimentell identifizierte Nebendämpfung \tilde{C}_{XY} weist hierbei die vorhergesagte lineare Abhängigkeit von der Kreisfrequenz des Rotors $\tilde{\Omega}$ auf. Im Vergleich zu den potentialtheoretischen Berechnungen zeigt

sich, dass die identifizierte Nebendämpfung unterhalb der berechneten Nebendämpfung liegt. Im vorliegenden Fall ergibt sich eine Abweichung von 28 %. Die Abweichungen lassen sich zum einen auf die bereits angesprochene Annäherung der Prüfstandsgeometrie durch Hohlzylinderscheiben und zum anderen auf die Annahmen der potentialtheoretischen Berechnungen zurückzuführen. Hierbei ist vor allem die Überlagerung des Potentials der Strömung im Ringspalt mit dem Potential eines Wirbelfadens entlang der \tilde{z} -Achse zu nennen. Die daraus ableitbare tangentiale Geschwindigkeitskomponente \tilde{c}_φ erfüllt hierbei nur die Randbedingung an der Rotoroberfläche. Die Randbedingung an der Statoroberfläche, d.h. $\tilde{c}_\varphi|_{r=R_{\text{STAT}}} = 0$, ist hingegen nicht erfüllt. Im Vergleich mit der experimentell identifizierten Nebendämpfung \tilde{C}_{XY} zeigt sich jedoch, dass das Vorgehen in guter Näherung anwendbar ist. Neben dem Einfluss der Kreisfrequenz des Rotors $\tilde{\Omega}$ auf die dynamischen Eigenschaften wurden auch der Einfluss des Drucks innerhalb des Ringspaltmoduls sowie der Einfluss der Anregungsamplitude untersucht²³. Beide Parameter zeigen keinen Einfluss auf die experimentelle Identifikation der rotordynamischen Koeffizienten.

²³Die Ergebnisse der Untersuchungen zum Einfluss des Drucks sowie der Anregungsamplitude sind in der studentischen Arbeit von Hermann [31] dokumentiert

Kapitel 5

Experimentelle Identifikation und Modellvalidierung

Zur Beantwortung der Forschungsfragen ist die Kenntnis der rotordynamischen Koeffizienten über einen weiten Betriebs- und Geometriebereich notwendig. Aus diesem Grund wurde in Kapitel 3 das Clearance-Averaged Pressure Model zunächst mit Hilfe eines Perturbationsansatzes erweitert. Dies ermöglicht es neben den statischen Eigenschaften auch die dynamischen Eigenschaften axial durchströmter Ringspalte zu berechnen. Zur Validierung des Modells wurde in Kapitel 4 ein eigens konzipierter Prüfstand zur experimentellen Identifikation aller 48 rotordynamischen Koeffizienten vorgestellt. Im Folgenden wird das CAPM anhand der Ergebnisse des Prüfstands validiert. Hierfür werden umfassende Parameterstudien zur experimentellen Identifikation der rotordynamischen Koeffizienten durchgeführt und mit den Berechnungen des Clearance-Averaged Pressure Modells verglichen. Die Qualität der Modellvorhersage wird dabei auf Grundlage der Messunsicherheit der experimentell identifizierten Koeffizienten beurteilt. Die experimentelle Identifikation geht dabei stets von einem axial durchströmten Ringspalt mit den in Tabelle 5.1 angegebenen typischen Betriebs- und Geometrieparametern aus.

Tabelle 5.1 – Betriebs- und Geometrieparameter des axial durchströmten Ringspalts.

Parameter	L	z_T	Re_φ^*	ϕ	$C_\varphi _{z=0}$
Wert	1.3	0.5	0.031	0.7	0.5

Innerhalb dieser Grundkonfiguration entspricht die modifizierte Reynoldszahl $Re_\varphi^* = 0.031$ einem relativen Spaltspiel von $\psi = 0.0042$ und einer Reynoldszahl von $Re_\varphi = 4000$. Dementsprechend werden Ringspalte mit turbulenter Strömung untersucht¹. Dies führt, im Gegensatz zu axial durchströmten Ringspalten mit laminarer Strömung, zur Notwendigkeit der Betrachtung der Trägheitseigenschaften, d.h. der Trägheitsmatrix \mathbf{M} in der Bewegungsgleichung. Obgleich mit dem Prüfstand und dem Clearance-Averaged Pressure Model auch laminare Strömungszustände im Ringspalt untersucht werden können, werden diese in der vorliegenden Arbeit nicht weiter behandelt. Zur Untersuchung der dynamischen Eigenschaften axial durchströmter Ringspalte mit laminarer Strömung wird am Institut für Fluidsystemtechnik ein weiterer Spaltströmungsprüfstand betrieben. Für eine detaillierte Beschreibung des Prüfstands sowie der Anpassungen des Clearance-Averaged Pressure Models für die Berechnung laminarer Strömung im Ringspalt sei auf das IGF-Projekt unter dem Dach der AiF-Forschungsvereinigungen mit der Vorhabensnummer 21029 N/1 verwiesen.

Zur Validierung des Clearance-Averaged Pressure Models werden, ausgehend von der Grundkonfiguration, die Ringspaltlänge L , die Lage des Taumelpunkts z_T , die modifizierte Reynoldszahl Re_φ^* , die Durchflusszahl ϕ und der Vordrall $C_\varphi|_{z=0}$ in jeweils drei Stufen variiert. Die Versuche erfolgen hierbei stets über einen Bereich der relativen Exzentrizität von $0 < \varepsilon < 0.8$. Aufgrund der Versuchsdauer zur Aufnahme eines Messpunkts² schwanken die Durchflusszahl ϕ , die modifizierte Reynoldszahl Re_φ^* , der Vordrall $C_\varphi|_{z=0}$ und die Lage des Taumelpunkts³ z_T um den angestrebten Wert. Hierbei schwanken die Durchflusszahl ϕ und die modifizierte Reynoldszahl Re_φ^* um weniger als 1.5% um den Sollwert. Die Werte des Vordralls $C_\varphi|_{z=0}$ und des Taumelpunkts z_T weichen um weniger als 10% vom Sollwert ab. Die zu untersuchenden Ringspalte weisen aufgrund von Fertigungstoleranzen eine Unsicherheit in Länge und Durchmesser auf. Die Unsicherheit der Ringspaltlänge beträgt hierbei $\delta(L) \leq 9.5 \times 10^{-5}$, wohingegen die relative Spaltweite ψ , gebildet aus den Radien des Stators und des Rotors, eine Unsicherheit von $\delta(\psi) = 5.3 \times 10^{-5}$ aufweist. Die Anregungsamplituden der vier linear unabhängigen Bewegungsformen um die statische Ruhelage, vgl. Abbildung 4.7, werden derart gewählt, dass für relative Exzentrizitäten unterhalb $\varepsilon \leq 0.5$ die Amplitude der An-

¹ Zirkelback und San Andrés [114] geben auf Basis eines modifizierten Moody-Diagramms für enge Ringspalte den Bereich laminarer Strömung für Reynoldszahlen $Re_\varphi \leq 1000$ an. Turbulente Strömung im Ringspalt liegt laut den Autoren bei Reynoldszahlen $Re_\varphi \geq 3000$ im Ringspalt vor.

² Die Versuchsdauer zur Aufnahme eines einzigen Messpunkts, bestehend aus 28 Einzelmessungen, beträgt in etwa 45 Minuten.

³ Im Folgenden wird nur noch vom Taumelpunkt z_T gesprochen.

regung in der X - bzw. Y -Achse am Ein- und Austritt des Ringspalts stets $\Delta\tilde{X}|_{z=0,L} = \Delta\tilde{Y}|_{z=0,L} = 0.01$ mm beträgt. Die Anregungsamplitude der rotatorischen Freiheitsgrade ist demnach abhängig von der Ringspaltlänge \tilde{L} . Für den Fall einer Ringspaltlänge von $L = 1.3$ ergibt sich eine Anregungsamplitude der rotatorischen Freiheitsgrade von $\Delta\alpha_x = \Delta\beta_y = 0.012^\circ$. Bei größeren relativen Exzentrizitäten $\varepsilon > 0.5$ erfolgt die Anregung der Freiheitsgrade mit halbiertem Amplitude, d.h. 0.005 mm und 0.006° . Damit wird sichergestellt, dass die Annahme einer linearisierten Betrachtung auf Grundlage der Linearisierung durch Reihenentwicklung, vgl. Kapitel 3.2, gewährleistet ist. Nachteilig ist hierbei, dass die zugehörige Messunsicherheit der rotordynamischen Koeffizienten, aufgrund der größeren relativen Messunsicherheit in den Amplituden der Anregung, ab einer Exzentrizität größer $\varepsilon > 0.5$ ansteigt. Im Folgenden werden lediglich die Validierungsergebnisse der Variation der Ringspaltlänge L , der Durchflusszahl ϕ sowie des Taumelpunkts z_T diskutiert. Diese Auswahl begründet sich damit, dass bei diesen drei Parametern die größten Abhängigkeiten der rotordynamischen Koeffizienten beobachtet werden. Die verbleibenden Ergebnisse der Variation der modifizierten Reynoldszahl Re_φ^* und des Vordralls $C_\varphi|_{z=0}$ sind in Anhang C dargestellt.

5.1 Variation der Ringspaltlänge

Die Abbildungen 5.1 bis 5.3 zeigen die Validierungsergebnisse des Clearance-Averaged Pressure Models für die Steifigkeiten K , Dämpfungen C und Trägheiten M bei Variation der Ringspaltlänge L . Die Ringspaltlänge wird hierbei in drei Stufen $L = 1.0, 1.3$ und 1.6 variiert. Die Auswahl des Bereiches begründet sich hierbei vorrangig auf der angestrebten Untersuchung der zusätzlichen rotordynamischen Koeffizienten, welche laut Literatur erst ab einer Ringspaltlänge von $L = 1.5$ relevant werden.

Die einzelnen Diagramme in den Abbildungen sind in Anlehnung an die Bewegungsgleichung angeordnet. Der Übersicht halber wird diese hier nochmals wiederholt

$$\begin{aligned}
 - \begin{bmatrix} F_X \\ F_Y \\ M_X \\ M_Y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} K_{XX} & K_{XY} & K_{X\alpha} & K_{X\beta} \\ K_{YX} & K_{YY} & K_{Y\alpha} & K_{Y\beta} \\ K_{\alpha X} & K_{\alpha Y} & K_{\alpha\alpha} & K_{\alpha\beta} \\ K_{\beta X} & K_{\beta Y} & K_{\beta\alpha} & K_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} C_{XX} & C_{XY} & C_{X\alpha} & C_{X\beta} \\ C_{YX} & C_{YY} & C_{Y\alpha} & C_{Y\beta} \\ C_{\alpha X} & C_{\alpha Y} & C_{\alpha\alpha} & C_{\alpha\beta} \\ C_{\beta X} & C_{\beta Y} & C_{\beta\alpha} & C_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} M_{XX} & M_{XY} & M_{X\alpha} & M_{X\beta} \\ M_{YX} & M_{YY} & M_{Y\alpha} & M_{Y\beta} \\ M_{\alpha X} & M_{\alpha Y} & M_{\alpha\alpha} & M_{\alpha\beta} \\ M_{\beta X} & M_{\beta Y} & M_{\beta\alpha} & M_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix}, \tag{5.1a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 - \begin{bmatrix} F_X \\ F_Y \\ M_X \\ M_Y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_I & \mathbf{K}_{II} \\ \mathbf{K}_{III} & \mathbf{K}_{IV} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} \mathbf{C}_I & \mathbf{C}_{II} \\ \mathbf{C}_{III} & \mathbf{C}_{IV} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}_I & \mathbf{M}_{II} \\ \mathbf{M}_{III} & \mathbf{M}_{IV} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix}. \tag{5.1b}
 \end{aligned}$$

Die erste Spalte in den Abbildungen stellt die rotordynamischen Koeffizienten durch translatorische und die zweiten Spalte die Koeffizienten durch rotatorische Bewegung dar. Die Zeilen zeigen die Kräfte und Momente auf den Rotor. Hierbei zeigt die erste und zweite Zeile die aus den Kräften F_X und F_Y abgeleiteten Koeffizienten, wohingegen die dritte und vierte Zeile die Koeffizienten aus den Momenten M_X und M_Y darstellt. Dementsprechend stellen jeweils

zwei übereinander angeordnete Diagramme eine Teilmatrix der gesamten Koeffizientenmatrix dar. Innerhalb der Abbildungen bilden die Marker die experimentell identifizierten Koeffizienten ab und die Linien stellen die Berechnungsergebnisse des CAPM dar. Die Markergrößen sowie die Linienstärken korrelieren mit der Länge des Ringspalts. Je größer das Symbol oder je größer die Linienstärke, desto länger die Ringspaltlänge. Die kreisförmigen Marker sowie die durchgezogenen Linien stellen die Hauptdiagonalen der Teilmatrizen dar. Die dreiecksförmigen Marker und die gestrichelten Linien zeigen die Nebendiagonalen der Teilmatrizen. Für die Teilmatrix III, d.h. die Momente auf den Rotor aus der translatorischen Bewegung, bedeutet dies beispielsweise, dass die Hauptkoeffizienten $\square_{\alpha X}$ und $\square_{\beta Y}$ mit kreisförmigen Markern und durchgezogenen Linien dargestellt werden. Die Nebenkoeffizienten $\square_{\alpha Y}$ und $\square_{\beta X}$ werden hingegen mit dreiecksförmigen Markern und gestrichelten Linien abgebildet. Aus Darstellungsgründen sind die experimentell identifizierten Koeffizienten nur an jedem zweiten Messpunkt sowie ausschließlich auf den Ergebnissen der Grundkonfiguration mit Fehlerbalken versehen. Die berechnete Messunsicherheit der Grundkonfiguration ist repräsentativ für alle Messungen und kann in guter Näherung auf die identifizierten Koeffizienten der Variation der beschreibenden Parameter übertragen werden. Die hier beschriebene Darstellung findet im Folgenden bei der Diskussion aller Validierungsergebnisse Anwendung.

5.1.1 Steifigkeiten

Abbildung 5.1 zeigt die Validierungsergebnisse des CAPM für die Steifigkeiten K bei Variation der Ringspaltlänge L . Zunächst wird die Qualität der Modellvorhersage für die Teilmatrizen I und II⁴, d.h. die Steifigkeitskoeffizienten aus den Kräften durch translatorische und rotatorische Bewegungen, betrachtet. Die experimentell identifizierten Steifigkeiten sowie die vom CAPM vorhergesagten Steifigkeiten stimmen für alle untersuchten Ringspaltlängen gut überein. Es zeigt sich sowohl eine qualitative als auch eine quantitative Übereinstimmung der Koeffizienten. Alle berechneten rotodynamischen Koeffizienten befinden sich innerhalb der Messunsicherheit der experimentellen Ergebnisse. Die Variation der Ringspaltlänge L zeigt sich hauptsächlich in den Nebensteifigkeiten K_{XY} und K_{YX} bzw. $K_{x\beta}$ und $K_{x\alpha}$. Die Abhängigkeit der Nebensteifigkeiten K_{XY} und K_{YX} von der Ringspaltlänge L ist dabei größer als die Abhängigkeit der Nebensteifigkeiten $K_{x\beta}$ und $K_{x\alpha}$. Anzumerken ist, dass die Steifigkeitskoeffizienten der Teilmatrix II \mathbf{K}_{II} in der gleichen Größenordnung wie die Steifigkeiten der Teilmatrix I \mathbf{K}_I sind⁵. Dies ist insofern interessant, da mit den Ringspaltlängen von $L = 1.0$ und $L = 1.3$ der in der Literatur angegebene Schwellenwert von $L = 1.5$ zur Vernachlässigung der zusätzlichen 36 rotodynamischen Koeffizienten bereits unterschritten ist. Zudem zeigt sich, dass die Steifigkeitskoeffizienten der Teilmatrix I \mathbf{K}_I bis zu einer relativen Exzentrizität von ca. $\varepsilon \leq 0.4$ in guter Näherung als schiefsymmetrisch, d.h. $\mathbf{K}_I = -\mathbf{K}_I^T$, anzusehen sind. Dieses Verhalten ist repräsentativ für alle Steifigkeits-, Dämpfungs- und Trägheitskoeffizienten und bestätigt den in der Literatur⁶ angegebenen Wert von $\varepsilon \leq 0.5$. Die Koeffizienten der Teilmatrix II \mathbf{K}_{II} zeigen einen schiefsymmetrischen Charakter bis zu einer relativen Exzentrizität von $\varepsilon \leq 0.6$.

Im Anschluss an die Steifigkeitskoeffizienten aus den Kräften wird die Modellvorhersage für die Teilmatrizen III und IV⁷, d.h. die Steifigkeitskoeffizienten aus den Momenten durch translatorische und rotatorische Bewegung, betrachtet. Auffällig hierbei ist zunächst, dass die Steifigkeitskoeffizienten der Teilmatrizen III und IV \mathbf{K}_{III} und \mathbf{K}_{IV} im Allgemeinen ein bis zwei Größenordnungen kleiner sind als die Steifigkeiten der Teilmatrizen I und II \mathbf{K}_I und \mathbf{K}_{II} . Zudem zeigt sich eine gesteigerte Messunsicherheit der Koeffizienten. Diese beruht vor allem auf der Berechnung der induzierten Momente M_X und M_Y

⁴ die oberen vier Diagramme

⁵ Ein direkter Vergleich der Größenordnungen ist auf Basis der Entdimensionierung der rotodynamischen Koeffizienten möglich, vgl. Kapitel 2.1 und Anhang A.

⁶ GÜLICH, *Kreiselpumpen: Handbuch für Entwicklung, Anlagenplanung und Betrieb*, ([28], 2010)

⁷ die unteren vier Diagramme

sowie der gesteigerten Messunsicherheit durch die Verringerung der Anregungsamplitude bei Exzentrizitäten größer $\varepsilon \geq 0.5$. Die Momente M_X und M_Y werden nicht direkt gemessen. Vielmehr ergeben sie sich aus den gemessenen Kräften F_X und F_Y in Kombination mit den geometrischen Abmessungen des Prüfstands, d.h. dem Abstand der Stelle der Kraftmessung in den Magnetlagern zur Lage des Taumelpunkts \tilde{z}_T des Rotors. Dementsprechend wird zur Berechnung der Messunsicherheit der induzierten Momente $\delta(M_X)$ und $\delta(M_Y)$ auch die Messunsicherheit der geometrischen Abmaße mit berücksichtigt. Diese Messunsicherheit der geometrischen Abmaße ist hierbei um zwei Größenordnungen größer als die Messunsicherheit der Ringspaltlänge $\delta(L)$.

Die experimentell identifizierten Steifigkeiten der Teilmatrizen III \mathbf{K}_{III} stimmen gut mit den Modellvorhersagen des CAPM überein. Bei hohen relativen Exzentrizitäten, d.h. $\varepsilon > 0.7$, zeigen sich kleine Unterschiede in den Vorhersagen gegenüber der experimentellen Identifikation. Die identifizierten Steifigkeiten $K_{\beta Y}$ und $K_{\beta X}$ zeigen beispielsweise ein entgegengesetztes Verhalten gegenüber den vorhergesagten Koeffizienten des CAPM.

Abschließend werden die Validierungsergebnisse der Steifigkeiten der Teilmatrix IV \mathbf{K}_{IV} betrachtet. Hierbei zeigen sich die größten Abweichungen zwischen der Modellvorhersage des Clearance-Averaged Pressure Models und der experimentellen Identifikation. Während die berechneten Koeffizienten einen nahezu unabhängigen Verlauf von der relativen Exzentrizität ε aufweisen, steigen die Steifigkeiten der Teilmatrix IV \mathbf{K}_{IV} mit zunehmender relativer Exzentrizität ε an. Die Steifigkeiten der Teilmatrix IV \mathbf{K}_{IV} resultieren direkt aus den induzierten Momenten auf den Rotor M_X und M_Y sowie den rotatorischen Freiheitsgraden α und β . Dementsprechend sind nur die gemessenen Momente sowie die gemessenen Winkel ausschlaggebend für eine Abweichung von den Modellvorhersagen. Die induzierten Momente auf den Rotor M_X und M_Y sind in großem Maße abhängig von der Geometrie der Ringspalthülse. Selbst kleine Abweichungen der Form von einer ideal zylindrischen Geometrie, wie sie beispielsweise das CAPM annimmt, können zu großen Änderungen in den induzierten Momenten auf den Rotor M_X und M_Y führen. Aufgrund der Fertigungstoleranzen der Ringspalthülse sowie des Rotors sind solche Abweichungen innerhalb der experimentellen Identifikation immanent. Eine Bestätigung dieser Hypothese konnte jedoch nicht abschließend erfolgen.

5.1.2 Dämpfungen

Abbildung 5.2 zeigt die Validierungsergebnisse des CAPM für die Dämpfungen C bei Variation der Ringspaltlänge L . Zunächst wird in Analogie zu den Steifigkeiten die Qualität der Modellvorhersage der Teilmatrizen I und II⁸, d.h. die Dämpfungskoeffizienten aus den Kräften durch translatorische und rotatorische Bewegungen, betrachtet. Die experimentell identifizierten Dämpfungen durch translatorische und rotatorische Bewegungen C_I und C_{II} sowie die vom CAPM vorhergesagten dynamischen Eigenschaften stimmen für alle untersuchten Längen gut überein. Anzumerken ist, dass die Dämpfungskoeffizienten der Teilmatrix II C_{II} im Gegensatz zu den zuvor betrachteten Steifigkeiten nicht in der gleichen Größenordnung wie die Dämpfungen der Teilmatrix I C_I sind. Vielmehr sind die Dämpfungskoeffizienten der Teilmatrix II C_{II} um eine Größenordnung kleiner als die Koeffizienten der Teilmatrix I C_I .

Innerhalb der Teilmatrix I C_I sind die Hauptdämpfungen C_{xx} und C_{yy} die dominierenden Terme. Hierbei zeigt sich auch eine deutliche Abhängigkeit der Dämpfungen von der Ringspaltlänge L . Die Nebendämpfungen C_{xy} und C_{yx} sind nur geringfügig von der Ringspaltlänge L abhängig. Eine Korrelation zwischen der Ringspaltlänge L und den Dämpfungskoeffizienten der Teilmatrix II C_{II} ist in den experimentell identifizierten Koeffizienten nicht zu erkennen.

Im Anschluss an die Dämpfungskoeffizienten aus den Kräften wird die Modellvorhersage für die Dämpfungen der Teilmatrizen III und IV, d.h. die Dämpfungskoeffizienten aus den Momenten durch translatorische und rotatorische Bewegungen C_{III} und C_{IV} , betrachtet. Die Dämpfungskoeffizienten der Teilmatrizen III und IV C_{III} und C_{IV} sind eine Größenordnung kleiner als die Dämpfungskoeffizienten der Teilmatrizen I und II C_I und C_{II} . Alle berechneten Koeffizienten befinden sich innerhalb der Messunsicherheit der experimentell identifizierten Koeffizienten. Die größten Abweichungen der Berechnung zu den experimentellen Ergebnissen zeigen hierbei die identifizierten Dämpfungskoeffizienten der Teilmatrix III C_{III} . Hierbei überschätzt das CAPM die Dämpfungen $C_{\alpha x}$ und $C_{\alpha y}$ wohingegen die Dämpfungen $C_{\beta y}$ und $C_{\beta x}$ durch das Clearance-Averaged Pressure Model unterschätzt werden.

⁸ die oberen vier Diagramme

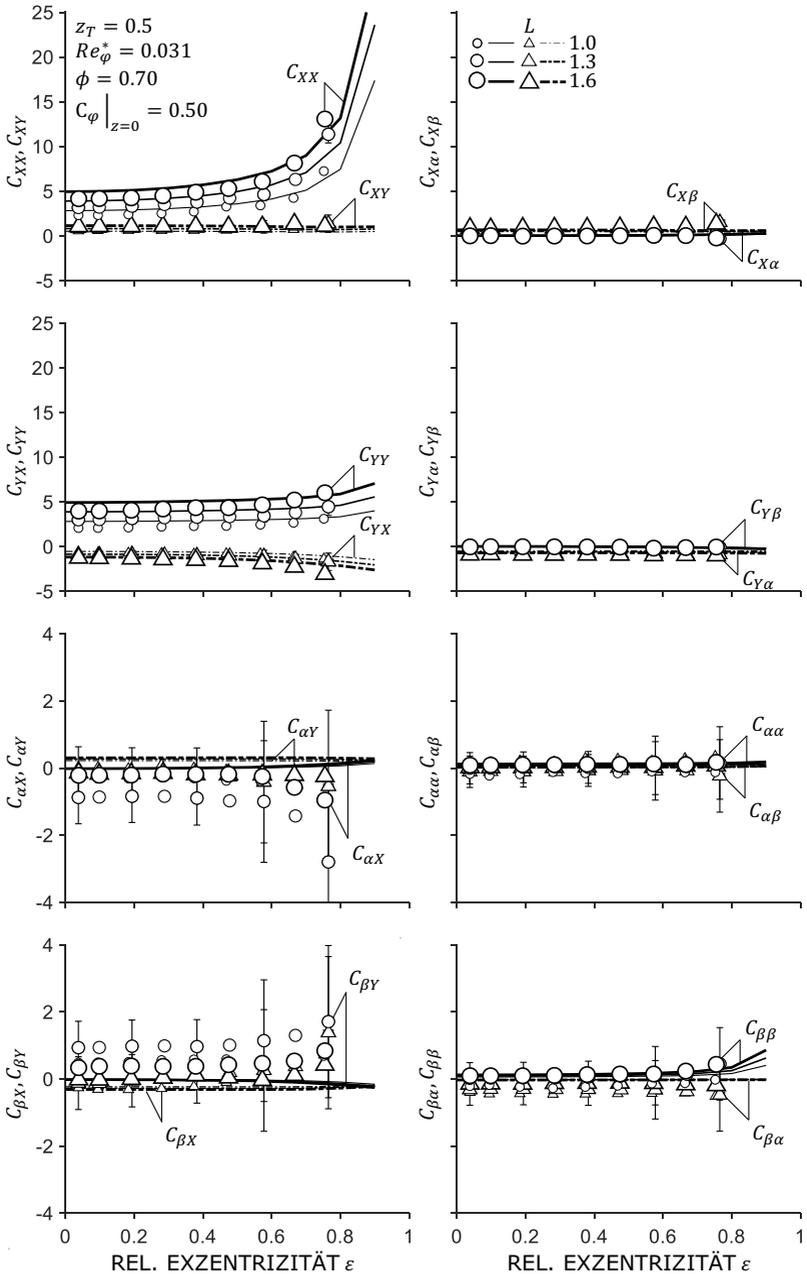


Abbildung 5.2 – Validierungsergebnisse des Clearance-Averaged Pressure Models für die Dämpfungen C bei Variation der Ringspaltlänge L .

5.1.3 Trägheiten

Abschließend werden zur Validierung des Clearance-Averaged Pressure Models bei Variation der Ringspaltlänge L die experimentell identifizierten Trägheiten M mit den Modellvorhersagen verglichen, vgl. Abbildung 5.3. Zunächst wird die Qualität der Modellvorhersage der Teilmatrizen I und II, d.h. die Trägheitskoeffizienten aus den Kräften durch translatorische und rotatorische Bewegungen \mathbf{M}_I und \mathbf{M}_{II} , betrachtet. Die identifizierten Trägheiten der Teilmatrix I \mathbf{M}_I stimmen bis zu einer relativen Exzentrizität von $\varepsilon \leq 0.6$ gut mit den Modellvorhersagen des Clearance-Averaged Pressure Models überein. Bei größeren relativen Exzentrizitäten unterschätzt das CAPM die experimentell identifizierten Hauptträgheiten M_{XX} und M_{YY} . Zudem zeigen die Hauptträgheiten M_{XX} und M_{YY} der kürzesten Ringspaltlänge $L = 1.0$ eine größere Abweichung über den gesamten Bereich der relativen Exzentrizität als die identifizierten Größen bei den Ringspaltlängen $L = 1.3$ und $L = 1.6$. Eine Erklärung der Diskrepanz zwischen der Identifikation und der Modellvorhersage ist hierbei die Korrektur der Messergebnisse auf Basis der Vorversuche und der potentialtheoretischen Berechnungen. Wie in Kapitel 4.4.2 beschrieben, werden die Vorversuche zur Charakterisierung des dynamischen Einflusses des Prüfstandsbaus ohne eingebaute statorseitige Ringspalthülse durchgeführt. Bei eingebautem Ringspalt muss die experimentell ermittelte virtuelle Masse des Ringspaltmoduls \tilde{M}_{VIRT} um die virtuelle Masse der statorseitigen Ringspalthülse korrigiert werden. Diese Korrektur der dynamischen Eigenschaften des Versuchsaufbaus erfolgt anhand der potentialtheoretischen Berechnung der virtuellen Masse des Bereichs, in dem die Ringspalthülse eingesetzt wird. Diese Berechnungen unterliegen jedoch der Annahme einer ebenen Strömung, d.h. $\tilde{L}/\tilde{R}_{\text{STAT}} \gg 1$. Diese Annahme wird bei kürzer werdender Ringspaltlänge L immer stärker verletzt. Dementsprechend sind die Berechnungen nur in guter Näherung für die Korrektur geeignet. Je länger die untersuchte Ringspaltlänge L , desto kleiner werden die Abweichungen zwischen den experimentellen Ergebnissen und dem CAPM.

Im Anschluss werden die Validierungsergebnisse der Trägheiten der Teilmatrix II \mathbf{M}_{II} betrachtet. Hierbei zeigt sich, dass die Trägheiten der Teilmatrix II \mathbf{M}_{II} um eine Größenordnung kleiner sind als die Trägheiten der Teilmatrix I \mathbf{M}_I . Zudem zeigt sich bei kleiner werdenden Ringspaltlängen eine steigende Abweichung der Nebenträgheiten $M_{X\beta}$ und $M_{Y\alpha}$ zu den Berechnungen des CAPM. Diese steigende Abweichung erklärt sich ebenfalls durch die Korrektur der Vorversuche auf Basis der potentialtheoretischen Berechnungen. In Kapitel 4.4.2 wurde lediglich die virtuelle Masse durch translatorische Bewegungen des Rotors behandelt. Aus der Disziplin des Schiffsmaschinenbaus^{9,10} ist jedoch bekannt, dass neben der virtuellen Masse durch translatorische Bewegungen $\tilde{M}_{\text{VIRT}} = \tilde{M}_{XX,\text{VIRT}} = \tilde{M}_{YY,\text{VIRT}}$ auch die virtuellen Massen durch rotatorische Bewegungen $\tilde{M}_{X\beta,\text{VIRT}} = -\tilde{M}_{Y\alpha,\text{VIRT}}$ sowie die virtuellen Trägheiten durch translatorische und rotatorische Bewegungen $\tilde{M}_{\alpha Y,\text{VIRT}} = -\tilde{M}_{\beta X,\text{VIRT}}$ und $\tilde{\Theta}_{\text{VIRT}} = \tilde{M}_{\alpha\alpha,\text{VIRT}} = \tilde{M}_{\beta\beta,\text{VIRT}}$ berücksichtigt werden müssen. Diese ergeben sich laut Newman und Moreau & Korotkin aus der virtuellen Masse durch translatorische Bewegungen \tilde{M}_{VIRT} , den geometrischen Abmaßen des Prüfstands und der Lage des Taumelpunkts z_T

$$\tilde{M}_{X\beta,\text{VIRT}} = \tilde{M}_{\beta X,\text{VIRT}} = \int_{-\tilde{z}_T}^{\tilde{L}-\tilde{z}_T} \tilde{z} \frac{\tilde{M}_{\text{VIRT}}}{\tilde{L}} d\tilde{z}, \quad (5.2a)$$

$$\tilde{M}_{Y\alpha,\text{VIRT}} = \tilde{M}_{\alpha Y,\text{VIRT}} = -\tilde{M}_{X\beta,\text{VIRT}}, \quad (5.2b)$$

$$\tilde{\Theta}_{\text{VIRT}} = \int_{-\tilde{z}_T}^{\tilde{L}-\tilde{z}_T} \tilde{z}^2 \frac{\tilde{M}_{\text{VIRT}}}{\tilde{L}} d\tilde{z}. \quad (5.2c)$$

Dementsprechend bezieht sich die Korrektur der Vorversuche nicht nur auf die Hauptträgheiten M_{XX} und M_{YY} . Vielmehr werden zusätzlich auch die Nebenträgheiten der Teilmatrix II und III $M_{X\beta}$ und $M_{Y\alpha}$ bzw. $M_{\alpha Y}$ und $M_{\beta X}$ sowie Hauptträgheiten der Teilmatrix IV $M_{\alpha\alpha}$ und $M_{\beta\beta}$ korrigiert.

Abschließend wird die Modellvorhersage für die Teilmatrizen III und IV, d.h. die Trägheitskoeffizienten aus den Momenten durch translatorische und rotatorische Bewegung \mathbf{M}_{III} und \mathbf{M}_{IV} , betrachtet. Ähnlich zu den Koeffizienten der Teilmatrix II \mathbf{M}_{II} sind die Trägheitskoeffizienten der Teilmatrix III und IV \mathbf{M}_{III} und \mathbf{M}_{IV} um eine Größenordnung kleiner als die Trägheitskoeffizienten der Teilmatrix I \mathbf{M}_I . Es zeigt sich eine gute Übereinstimmung der experimentell identifizierten Koeffizienten im Vergleich zu den Modellvorhersagen des CAPM. Wie schon zuvor zeigen sich die größten Abweichungen zwischen

⁹ NEWMAN, *Marine hydrodynamics*, ([69], 1986)

¹⁰MOREAU UND KOROTKIN, *Added Masses of Ship Structures*, ([63], 2009)

Modell und Identifikation in den Trägheitskoeffizienten $M_{\alpha Y}$ und $M_{\beta X}$ bzw. $M_{\alpha\alpha}$ und $M_{\beta\beta}$. Die Abweichungen sind mit der oben genannten Korrektur der Vorversuche zu erklären.

5.2 Variation der Durchflusszahl

Die Abbildungen 5.4 bis 5.6 zeigen die Validierungsergebnisse des Clearance-Averaged Pressure Models für die Steifigkeiten K , Dämpfungen C und Trägheiten M bei Variation der Durchflusszahl ϕ . Die Durchflusszahl wird hierbei in drei Stufen von $\phi = 0.45$ bis $\phi = 0.95$ variiert und mit den Berechnungen des CAPM verglichen. Der untersuchte Bereich orientiert sich hierbei an typischen Bereichen innerhalb einer modernen Kreiselpumpe¹¹. Die Darstellung der Ergebnisse ist analog zur Darstellung der Validierungsergebnisse des CAPM bei Variation der Ringspaltlänge L .

5.2.1 Steifigkeiten

Abbildung 5.4 zeigt die Validierungsergebnisse des CAPM für die Steifigkeiten K bei Variation der Durchflusszahl ϕ . Zunächst wird die Qualität der Modellvorhersage für die Teilmatrizen I und II, d.h. die Steifigkeitskoeffizienten aus den Kräften durch translatorische und rotatorische Bewegungen \mathbf{K}_I und \mathbf{K}_{II} , betrachtet. Die experimentell identifizierten Steifigkeiten sowie die vom CAPM vorhergesagten dynamischen Eigenschaften stimmen für alle untersuchten Durchflusszahlen gut überein. Die berechneten Steifigkeitskoeffizienten liegen überwiegend innerhalb der Messunsicherheit der experimentellen Ergebnisse. Lediglich bei kleinen relativen Exzentrizitäten $\varepsilon < 0.3$ liegen die Nebensteifigkeiten der Teilmatrix II $K_{X\beta}$ und $K_{Y\alpha}$ außerhalb der Messunsicherheit der experimentell identifizierten Koeffizienten. Die Variation der Durchflusszahl ϕ beeinflusst die Steifigkeitskoeffizienten der Teilmatrizen I und II gleichermaßen. Lediglich die Hauptsteifigkeiten $K_{X\alpha}$ und $K_{Y\beta}$ der Teilmatrix II zeigen keine ausgeprägte Veränderung bei Steigerung der Durchflusszahl ϕ . Anzumerken ist jedoch, dass durch eine Erhöhung der Durchflusszahl die Nebensteifigkeiten der Teilmatrix II $K_{X\beta}$ und $K_{Y\alpha}$ stärker anwachsen als die Steifigkeiten der Teilmatrix I \mathbf{K}_I . Dies ist insofern interessant, da dies einen steigenden Einfluss der zusätzlichen rotordynamischen Steifigkeitskoeffizienten durch rotatorische Bewegung bedeutet. Dementsprechend ist, neben der in der Literatur aufgeführten Ringspaltlänge L , auch die Durchflusszahl ϕ zur Beurteilung der Relevanz der zusätzlichen 36 Koeffizienten ausschlaggebend.

¹¹GÜLICH, *Kreiselpumpen: Handbuch für Entwicklung, Anlagenplanung und Betrieb*, ([28], 2010)

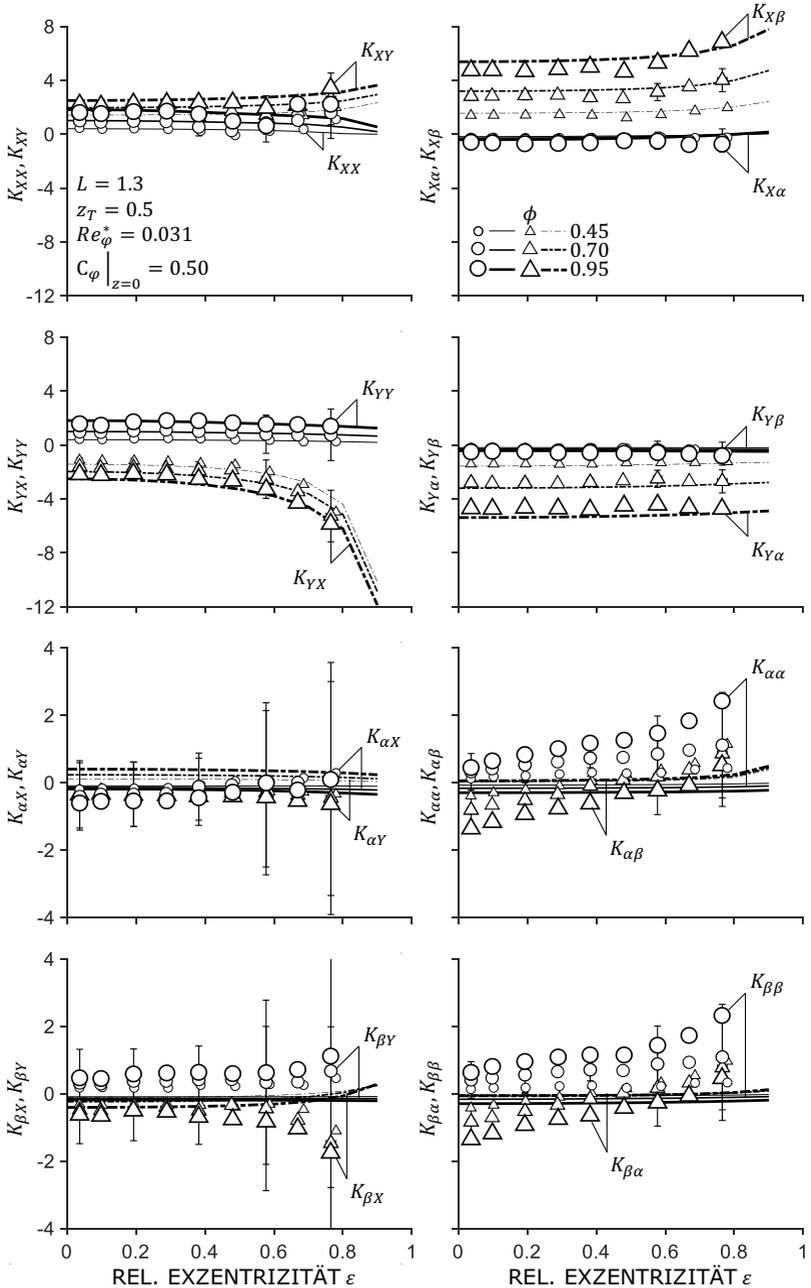


Abbildung 5.4 – Validierungsergebnisse des Clearance-Averaged Pressure Models für die Steifigkeiten K bei Variation der Durchflusszahl ϕ .

Im Anschluss an die Steifigkeitskoeffizienten aus den Kräften wird die Modellvorhersage für die Teilmatrizen III und IV, d.h. die Steifigkeitskoeffizienten aus den Momenten durch translatorische und rotatorische Bewegung \mathbf{K}_{III} und \mathbf{K}_{IV} , betrachtet. Werden zunächst die Steifigkeiten der Teilmatrix III \mathbf{K}_{III} betrachtet, so zeigt sich eine gute Übereinstimmung der Modellvorhersagen des Clearance-Averaged Pressure Models mit den experimentellen Ergebnissen. Alle berechneten Steifigkeiten liegen innerhalb der Messunsicherheit. Das CAPM überschätzt die Nebensteifigkeiten $K_{\alpha Y}$ und $K_{\beta X}$, wohingegen die Nebensteifigkeit $K_{\beta Y}$ unter- und die Hauptsteifigkeit $K_{\beta X}$ überschätzt wird. Die Steifigkeitskoeffizienten der Teilmatrix III \mathbf{K}_{III} zeigen nur eine geringfügige Abhängigkeit von der Durchflusszahl ϕ .

Abschließend werden die Validierungsergebnisse des CAPM für die Steifigkeitskoeffizienten der Teilmatrix IV \mathbf{K}_{IV} betrachtet. In Analogie zur Validierung bei Variation der Ringspaltlänge zeigen sich hier die größten Abweichungen der identifizierten Koeffizienten gegenüber den Modellvorhersagen. Die Abweichungen zwischen Modellvorhersage und experimenteller Identifikation vergrößern sich mit steigender Durchflusszahl ϕ . Die großen Abweichungen zwischen Modell und experimenteller Identifikation sind demnach von der axialen Durchströmung des Ringspalts abhängig.

5.2.2 Dämpfungen

Abbildung 5.5 zeigt die Validierungsergebnisse des CAPM für die Dämpfungen C bei Variation der Durchflusszahl ϕ . Zunächst wird die Qualität der Modellvorhersage der Teilmatrizen I und II, d.h. die Dämpfungskoeffizienten aus den Kräften durch translatorische und rotatorische Bewegungen \mathbf{C}_I und \mathbf{C}_{II} , betrachtet. Die experimentell identifizierten Dämpfungen \mathbf{C}_I und \mathbf{C}_{II} sowie die vom CAPM vorhergesagten dynamischen Eigenschaften stimmen für alle untersuchten Durchflusszahlen ϕ gut überein. Die berechneten Dämpfungskoeffizienten liegen größtenteils innerhalb der Messunsicherheit der experimentellen Ergebnisse. Die Variation der Durchflusszahl ϕ zeigt sich besonders bei den Hauptdämpfungen der Teilmatrix I C_{XX} und C_{YY} . Hierbei führt eine Erhöhung der Durchflusszahl ϕ zu einer Erhöhung der Hauptdämpfungen C_{XX} und C_{YY} . Die Dämpfungskoeffizienten der Teilmatrix II \mathbf{C}_{II} zeigen keine merkliche Abhängigkeit von der Durchflusszahl ϕ .

Im Anschluss an die Dämpfungskoeffizienten aus den Kräften wird die Modellvorhersage für die Teilmatrizen III und IV, d.h. die Dämpfungskoeffizienten aus den Momenten durch translatorische und rotatorische Bewegungen \mathbf{C}_{III} und \mathbf{C}_{IV} , betrachtet. Wie schon zuvor bei der Diskussion der Validierungsergebnisse der Ringspaltlänge L zeigen sich die größten Abweichungen zwischen

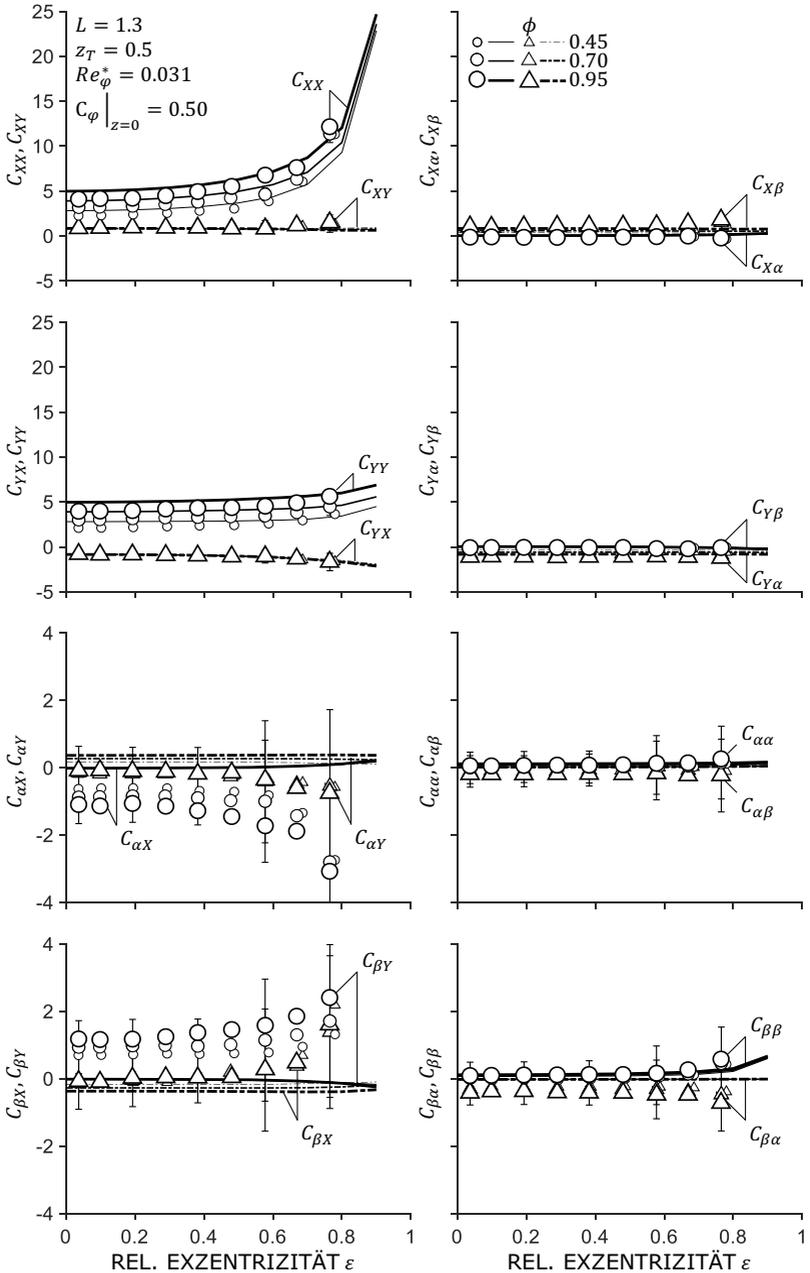


Abbildung 5.5 – Validierungsergebnisse des Clearance-Averaged Pressure Models für die Dämpfungen C bei Variation der Durchflusszahl ϕ .

Modell und experimenteller Identifikation in den Dämpfungskoeffizienten der Teilmatrix III \mathbf{C}_{III} . Hierbei zeigt sich der Einfluss der Durchflusszahl ϕ innerhalb der experimentellen Identifikation besonders in den Hauptdämpfungen $C_{\alpha X}$ und $C_{\beta Y}$. Das Clearance-Averaged Pressure Modell zeigt eine Sensibilität der Koeffizienten auf die Durchflusszahl ϕ hauptsächlich in den Nebendämpfungen $C_{\alpha Y}$ und $C_{\beta X}$. Das CAPM überschätzt hierbei die Dämpfungskoeffizienten $C_{\alpha X}$ und $C_{\alpha Y}$ wohingegen die Koeffizienten $C_{\beta X}$ und $C_{\beta Y}$ unterschätzt werden. Alle berechneten Koeffizienten der Teilmatrix III \mathbf{C}_{III} liegen innerhalb der Messunsicherheit der experimentell identifizierten Dämpfungskoeffizienten.

Abschließend werden die Validierungsergebnisse der Teilmatrix IV \mathbf{C}_{IV} betrachtet. Es zeigt sich eine gute Übereinstimmung zwischen den Vorhersagen des Clearance-Averaged Pressure Modells und den experimentell identifizierten Dämpfungskoeffizienten.

5.2.3 Trägheiten

Abschließend werden zur Validierung des Clearance-Averaged Pressure Modells die experimentell identifizierten Trägheiten M bei Variation der Durchflusszahl ϕ mit den Modellvorhersagen verglichen, vgl. Abbildung 5.6. Alle berechneten Trägheitskoeffizienten zeigen hierbei eine gute Übereinstimmung mit den experimentell identifizierten Koeffizienten. Zudem liegen alle berechneten Koeffizienten innerhalb der Messunsicherheit. Eine Abhängigkeit der Trägheiten M von der Durchflusszahl ϕ ist nur vereinzelt in den identifizierten Koeffizienten zu erkennen, bspw. bei $M_{XX}|_{\varepsilon=0.6}$. Dieses Verhalten begründet sich dadurch, dass die Trägheitskoeffizienten des Ringspalts hauptsächlich von der Ringspaltgeometrie, d.h. der Ringspaltlänge L , und im Falle der Teilmatrizen II bis IV von der Lage des Taumelpunkts z_T , vgl. Kapitel 5.3, abhängig sind. Beide Parameter wurden bei der Variation der Durchflusszahl ϕ jedoch konstant gehalten.

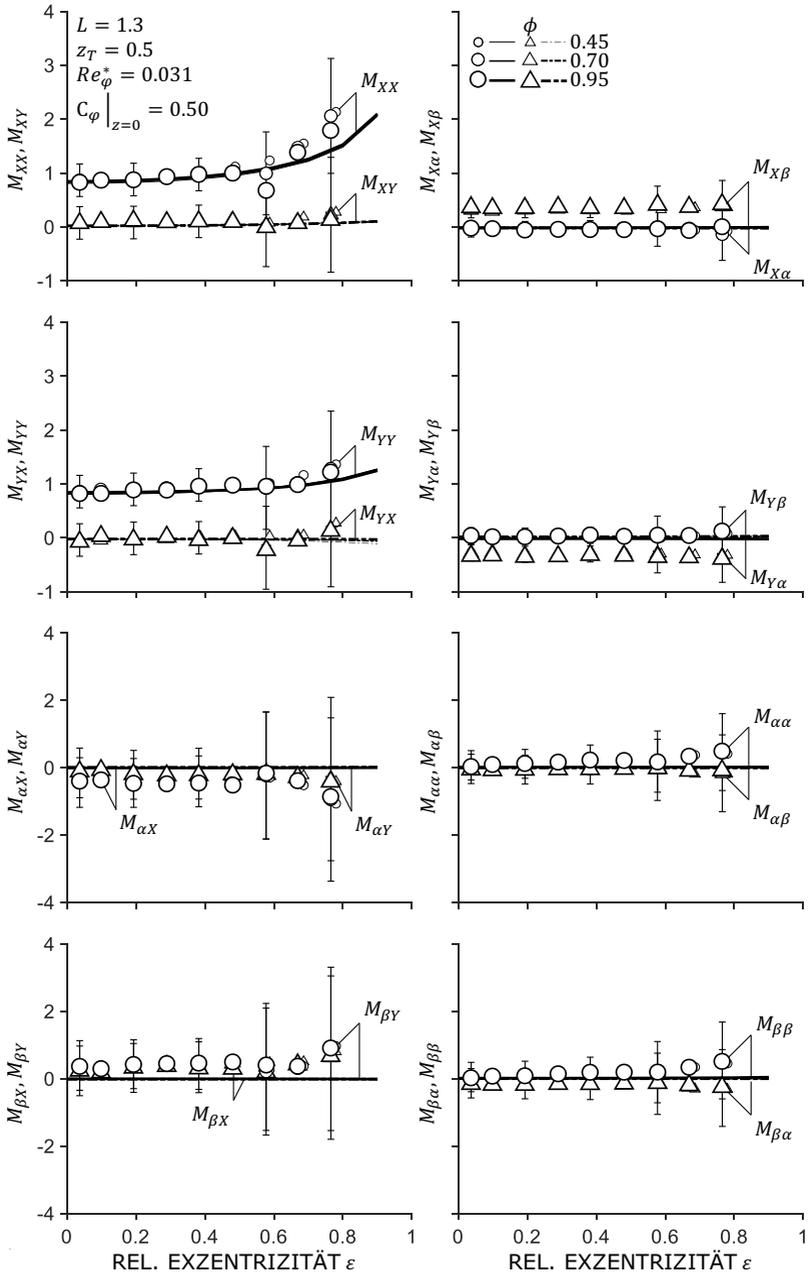


Abbildung 5.6 – Validierungsergebnisse des Clearance-Averaged Pressure Models für die Trägheiten M bei Variation der Durchflusszahl ϕ .

5.3 Variation des Taumelpunkts

Zum Abschluss der Validierung des Clearance-Averaged Pressure Models werden die Modellvorhersagen mit den experimentell identifizierten Koeffizienten bei einer Variation der Lage des Taumelpunkts z_T verglichen. Die Abbildungen 5.7 bis 5.9 zeigen die Validierungsergebnisse für die Steifigkeiten K , Dämpfungen C und Trägheiten M . Die Lage des Taumelpunkts z_T wird hierbei in drei Stufen von $z_T = 0$ bis $z_T = 1$ variiert. Die Variation beeinflusst dabei in erster Linie die rotordynamischen Koeffizienten der Teilmatrizen II bis IV, d.h. die Koeffizienten aus den Kräften durch rotatorische Bewegungen sowie die Koeffizienten aus den Momenten durch translatorische und rotatorische Bewegungen. Die Abhängigkeit der rotordynamischen Koeffizienten der Teilmatrix III resultiert hierbei aus der Verschiebung des Momentenangriffspunkts, welcher durch die Lage des Taumelpunkts selbst bestimmt wird, vgl. Kapitel 3 und 4.2. Die Darstellung der Ergebnisse erfolgt analog zur Darstellung in den vorherigen Kapiteln.

5.3.1 Steifigkeiten

Abbildung 5.7 zeigt die Validierungsergebnisse des CAPM für die Steifigkeiten K bei Variation der Lage des Taumelpunkts z_T . Zunächst wird die Qualität der Modellvorhersage für die Teilmatrizen I und II, d.h. die Steifigkeitskoeffizienten aus den Kräften durch translatorische und rotatorische Bewegungen \mathbf{K}_I und \mathbf{K}_{II} , betrachtet. Wie erwartet zeigt sich die Variation der Lage des Taumelpunkts z_T lediglich in den Steifigkeitskoeffizienten der Teilmatrix II \mathbf{K}_{II} . Die Steifigkeiten der Teilmatrix I \mathbf{K}_I sind dementsprechend unabhängig von der Lage des Taumelpunkts z_T und werden nicht weiter betrachtet. Für die Steifigkeitskoeffizienten der Teilmatrix II \mathbf{K}_{II} zeigt sich eine gute Übereinstimmung der Modellvorhersagen des CAPM mit den experimentellen Ergebnissen. Die Variation der Lage des Taumelpunkts z_T zeigt sich am ausgeprägtesten in den Hauptsteifigkeiten $K_{X\alpha}$ und $K_{Y\beta}$. Eine Verschiebung des Taumelpunkts in Richtung des Ringspaltaustritts, d.h. $z_T \rightarrow 1$, führt hierbei zu einer Vergrößerung der Hauptsteifigkeiten $K_{X\alpha}$ und $K_{Y\beta}$. Die Nebensteifigkeiten der Teilmatrix II $K_{X\beta}$ und $K_{Y\alpha}$ sind nur in geringem Maße abhängig von der Lage des Taumelpunkts z_T . Während die Nebensteifigkeit $K_{X\beta}$ mit Verschiebung des Taumelpunkts in Richtung Ringspaltaustritt abnimmt, steigt die Nebensteifigkeit $K_{Y\alpha}$ an. Alle berechneten Koeffizienten liegen innerhalb der Messunsicherheit der experimentellen Ergebnisse.

Im Anschluss an die Steifigkeitskoeffizienten aus den Kräften wird die Modellvorhersage für die Teilmatrizen III und IV, d.h. die Steifigkeitskoeffizienten aus den Momenten durch translatorische und rotatorische Bewegungen \mathbf{K}_{III} und \mathbf{K}_{IV} , betrachtet. Es zeigt sich eine akzeptable Übereinstimmung der Modellvorhersagen mit den experimentell identifizierten Koeffizienten. Die Modellvorhersagen des CAPM liegen hierbei erneut innerhalb der Messunsicherheit. Die Steifigkeitskoeffizienten beider Matrizen werden gleichermaßen durch die Lage des Taumelpunkts z_T beeinflusst. Des Weiteren zeigen die Steifigkeitskoeffizienten der Teilmatrix IV \mathbf{K}_{IV} das bereits beschriebene Verhalten einer ansteigenden Steifigkeit bei Erhöhung der relativen Exzentrizität ε . Hierbei kommt es sowohl zu einem Unter- als auch zu einem Überschätzen der Steifigkeitskoeffizienten durch das CAPM.

5.3.2 Dämpfungen

Abbildung 5.8 zeigt die Validierungsergebnisse des CAPM für die Dämpfungen C bei Variation der Lage des Taumelpunkts z_T . Zunächst wird die Qualität der Modellvorhersage für die Teilmatrizen I und II, d.h. die Dämpfungskoeffizienten aus den Kräften durch translatorische und rotatorische Bewegungen \mathbf{C}_{I} und \mathbf{C}_{II} , betrachtet. In Analogie zu den Validierungsergebnissen der Steifigkeiten K zeigt sich keine Abhängigkeit der Teilmatrix I \mathbf{C}_{I} von der Lage des Taumelpunkts. Die Modellvorhersagen der Teilmatrix II \mathbf{C}_{II} zeigen eine gute Übereinstimmung im Vergleich zu den experimentell identifizierten Koeffizienten. Die Variation der Lage des Taumelpunkts z_T zeigt sich hierbei besonders in den Nebendämpfungen $C_{X\beta}$ und $C_{Y\alpha}$, wohingegen die Hauptdämpfungen $C_{X\alpha}$ und $C_{Y\beta}$ nur geringfügig auf die Lage des Taumelpunkts z_T reagieren.

Im Anschluss an die Dämpfungen aus den Kräften wird die Modellvorhersage für die Teilmatrizen III und IV, d.h. die Dämpfungskoeffizienten aus den Momenten durch translatorische und rotatorische Bewegungen \mathbf{C}_{III} und \mathbf{C}_{IV} , betrachtet. Es zeigt sich erneut eine akzeptable Übereinstimmung der Modellvorhersage mit den experimentell identifizierten Koeffizienten. Die Variation der Lage des Taumelpunkts z_T zeigt sich vor allem in den Nebendämpfungen $C_{\alpha Y}$ und $C_{\beta X}$ der Teilmatrix III und den Hauptdämpfungen $C_{\alpha\alpha}$ und $C_{\beta\beta}$ der Teilmatrix IV. Das CAPM überschätzt hierbei die Nebendämpfungen $C_{\alpha Y}$ und $C_{\beta X}$ bei Taumelpunkten nahe dem Ringspaltaustritt, d.h. $z_T \rightarrow 1$. Die Hauptdämpfung $C_{\alpha X}$ wird hingegen über- und die Hauptdämpfung $C_{\beta Y}$ unterschätzt. Alle berechneten Koeffizienten liegen innerhalb der Messunsicherheit der experimentell identifizierten Koeffizienten.

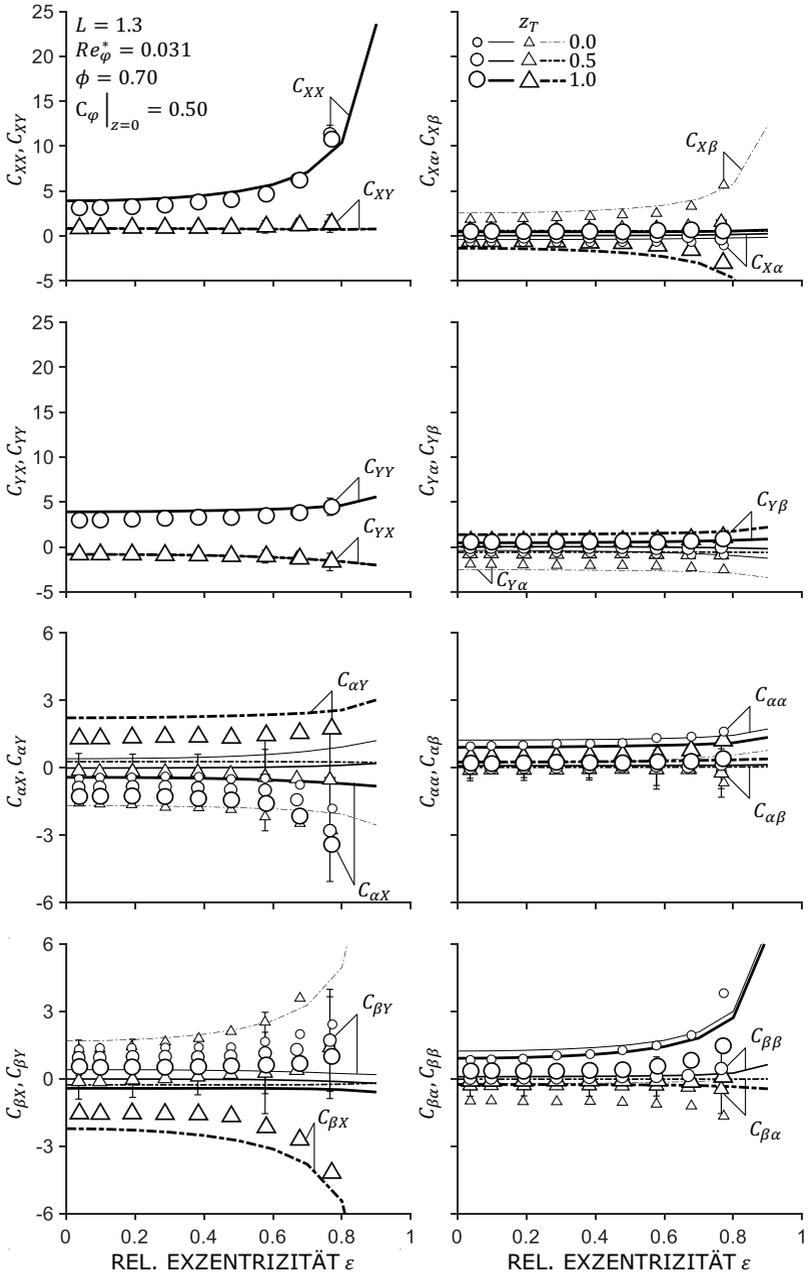


Abbildung 5.8 – Validierungsergebnisse des Clearance-Averaged Pressure Models für die Dämpfungen C bei Variation des Taumelpunkts z_T .

5.3.3 Trägheiten

Abschließend werden zur Validierung des Clearance-Averaged Pressure Models bei Variation des Taumelpunkts z_T die experimentell identifizierten Trägheiten M mit den Modellvorhersagen verglichen, vgl. Abbildung 5.9. Zunächst wird die Modellvorhersage der Teilmatrizen I und II, d.h. die Trägheitskoeffizienten aus den Kräften durch translatorische und rotatorische Bewegungen \mathbf{M}_I und \mathbf{M}_{II} , betrachtet. Wie zu erwarten sind die Trägheitskoeffizienten der Teilmatrix I \mathbf{M}_I unabhängig von der Wahl des Taumelpunkts z_T . Die Trägheitskoeffizienten der Teilmatrix II \mathbf{M}_{II} zeigen eine gute Übereinstimmung mit den experimentell identifizierten Koeffizienten. Die Variation der Lage des Taumelpunkts z_T ist hierbei besonders in den Nebenträgheiten $M_{Y\alpha}$ und $M_{X\beta}$ zu erkennen. Auffällig ist, dass die Nebenträgheit $M_{X\beta}$ durch Variation des Taumelpunkts in Richtung des Ringspalteintritts, d.h. $z_T \rightarrow 0$, die gleiche Größenordnung aufweist wie die Hauptträgheiten der Teilmatrix I, d.h. M_{XX} und M_{YY} . Die Modellvorhersagen des Clearance-Averaged Pressure Models unter- bzw. überschätzen die identifizierten Nebenträgheiten $M_{X\beta}$ und $M_{Y\alpha}$. Alle berechneten Koeffizienten liegen innerhalb der Messunsicherheit der experimentellen Ergebnisse.

Abschließend wird die Modellvorhersage für die Teilmatrizen III und IV, d.h. die Trägheitskoeffizienten aus den Momenten durch translatorische und rotatorische Bewegungen \mathbf{M}_{III} und \mathbf{M}_{IV} , betrachtet. Erneut zeigt sich eine akzeptable Übereinstimmung der experimentell identifizierten Koeffizienten im Vergleich zu den Modellvorhersagen des CAPM. In Analogie zu den Trägheitskoeffizienten der Teilmatrix II \mathbf{M}_{II} zeigt sich die Variation des Taumelpunkts z_T hauptsächlich in den Nebenträgheiten $M_{\alpha\gamma}$ und $M_{\beta\chi}$ der Teilmatrix III. Die Modellvorhersagen unter- bzw. überschätzen hierbei die experimentellen Ergebnisse für Punkte nahe des Ringspaltein- bzw. austritts, d.h. $z_T \rightarrow 0$ bzw. $z_T \rightarrow 1$. Alle berechneten Koeffizienten liegen innerhalb der Messunsicherheit der experimentell identifizierten Koeffizienten.

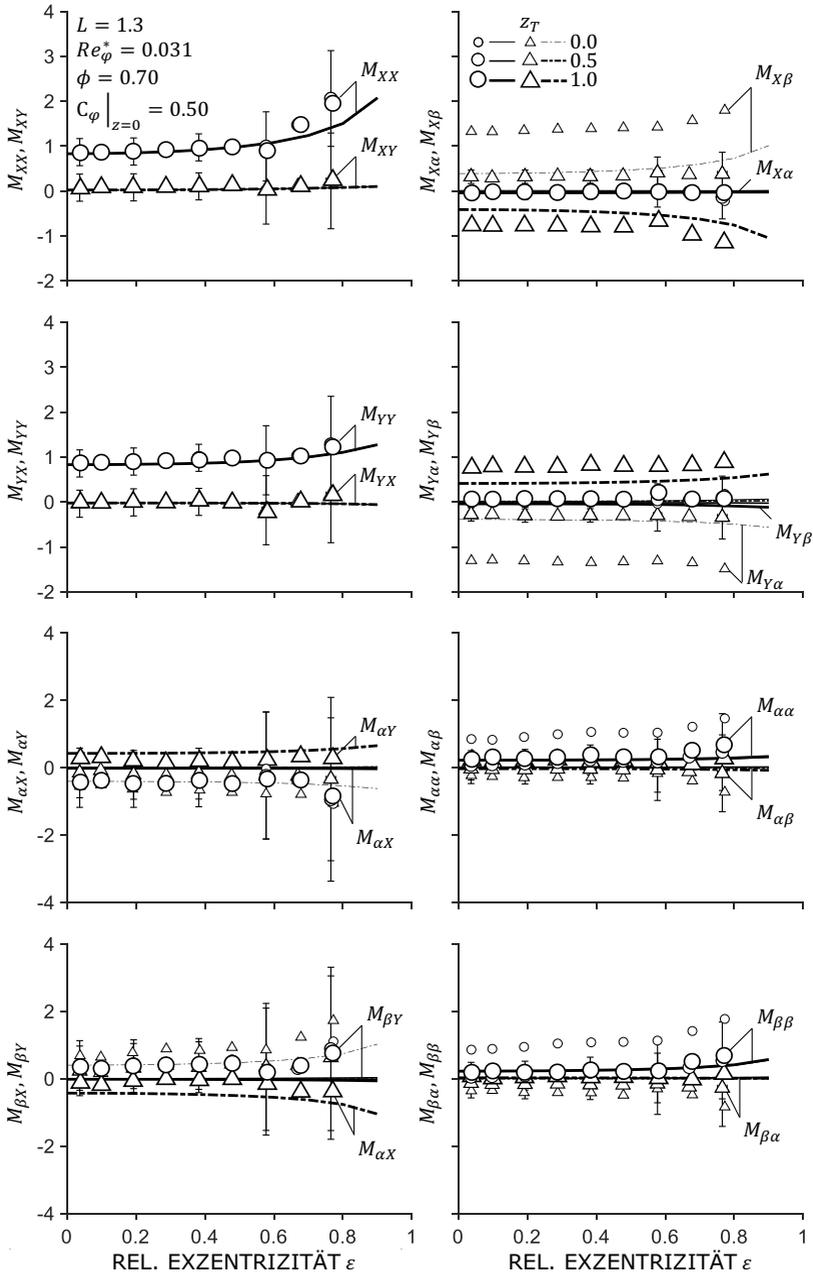


Abbildung 5.9 – Validierungsergebnisse des Clearance-Averaged Pressure Modells für die Trägheiten M bei Variation des Taupunkts z_T .

5.4 Zwischenfazit

Abschließend erfolgt eine kurze Zusammenfassung des Kapitels sowie eine Einordnung der Bedeutung für die vorliegende Arbeit. Wie eingangs argumentiert, ist für die Beantwortung der drei Forschungsfragen die Kenntnis der rotordynamischen Koeffizienten über einen weiten Betriebs- und Geometriebereich notwendig. Aufgrund des immensen zeitlichen Aufwands experimenteller oder numerischer Untersuchungen wurde in Kapitel 3 ein zeiteffizientes Berechnungswerkzeug zur Bestimmung aller 48 rotordynamischen Koeffizienten erarbeitet. Dieses Modell wurde innerhalb des vorangegangenen Kapitels auf Basis umfassender Parameterstudien mit Hilfe eines Prüfstands, vgl. Kapitel 4, validiert.

Zwischenergebnis der bisherigen Arbeiten ist somit ein einsatzbereites, zeiteffizientes und validiertes Berechnungswerkzeug zur Ermittlung des dynamischen Einflusses axial durchströmter Ringspalte. Zusätzlich zur Validierung des CAPM bilden die Ergebnisse der experimentellen Untersuchungen nach Kenntnisstand des Autors eine weltweit einzigartige Datenbasis im Hinblick auf die zusätzlichen 36 rotordynamischen Koeffizienten einer generalisierten Betrachtung. Dementsprechend geben die Identifikations- und Validierungsergebnisse eine erste Antwort auf die Forschungsfrage

- (i) *Welchen Einfluss haben die Betriebs- und Geometrieparameter des Ringspalts auf die 48 rotordynamischen Koeffizienten?*

Diese erste Antwort beinhaltet jedoch lediglich Betriebs- und Geometrieparameter innerhalb der untersuchten Ringspalte und physikalischen Grenzen des Prüfstandes. Zur weiteren Vertiefung der Antwort auf die Forschungsfrage sowie Beantwortung der zweiten Forschungsfrage

- (ii) *Bei welchen Randbedingungen werden die induzierten Momente durch translatorische sowie die induzierten Kräfte und Momente durch rotatorische Bewegungen relevant?*

wird im Folgenden das Clearance-Averaged Pressure Model dazu genutzt, weitere Geometrie- und Betriebsbereiche auch außerhalb der physikalischen Grenzen des Spaltströmungsprüfstandes zu untersuchen.

Kapitel 6

Weiterführende Untersuchungen und Relevanz einer generalisierten Betrachtung

Im vorangegangenen Kapitel wurde das Clearance-Averaged Pressure Model umfassend validiert und dadurch eine erste Antwort auf die Forschungsfrage

- (i) *Welchen Einfluss haben die Betriebs- und Geometrieparameter des Ringspalts auf die 48 rotordynamischen Koeffizienten?*

gegeben. Im Folgenden wird das CAPM verwendet, um Geometrie- und Betriebsbereiche außerhalb der physikalischen Möglichkeiten des Prüfstandes zu untersuchen. Im Wesentlichen soll hierbei die Antwort auf die erste Forschungsfrage weiter vertieft werden. Die Ermittlung der rotordynamischen Koeffizienten über einen weiten Geometrie- und Betriebsbereich ermöglicht es zudem eine Antwort auf die zweite Forschungsfrage

- (ii) *Bei welchen Randbedingungen werden die induzierten Momente durch translatorische sowie die induzierten Kräfte und Momente durch rotatorische Bewegungen relevant?*

zu geben. Die Untersuchungen beziehen sich hierbei erneut auf die Variation der Ringspaltlänge L , der modifizierten Reynoldszahl Re_φ^* , der Durchflusszahl ϕ , des Vordralls $C_\varphi|_{z=0}$, der relativen Exzentrizität ε und der Lage des Taupunkts z_T . Vordergründig werden im Folgenden die Parameterstudien zur Ringspaltlänge L , der Durchflusszahl ϕ und der modifizierten Reynoldszahl Re_φ^* diskutiert. Wie sich zeigen wird, haben diese drei Parameter den größten Einfluss bei der Beurteilung der Relevanz der zusätzlichen 36 rotordynamischen Koeffizienten. Als Basis dient hierbei erneut der in Tabelle 5.1 beschriebene typische Ringspalt. Die Variation der modifizierten Reynoldszahl Re_φ^*

beruht im Allgemeinen auf der Variation des relativen Spaltspiels ψ in den typischen Bereichen $10^{-3} < \psi < 10^{-2}$, vgl. Kapitel 2.1. Die Reynoldszahl Re_φ wird hierbei stets konstant gehalten. In Anlehnung an die experimentellen Untersuchungen und der Fokussierung auf turbulente Strömung im Ringspalt wird erneut eine Reynoldszahl von $Re_\varphi = 4000$ gewählt.

Im Anschluss an die Variation der Parameter werden die Ergebnisse verwendet, um Rückschlüsse auf die Relevanz der zusätzlichen 36 rotordynamischen Koeffizienten in einer generalisierten Betrachtung zu ziehen. Im Wesentlichen sollen hierbei einfache Diagramme zur Beurteilung einer notwendigen Betrachtung der zusätzlichen 36 Koeffizienten erstellt werden. Dementsprechend kann mit Hilfe dieser Diagramme über die Art der Modellierung des dynamischen Einflusses axial durchströmter Ringspalte, d.h. der Modellierung auf Basis von zwei oder vier Freiheitsgraden, entschieden werden.

6.1 Einfluss der Ringspaltlänge

Die Abbildungen 6.1 bis 6.3 zeigen den Einfluss der Ringspaltlänge L auf die Steifigkeiten K , Dämpfungen C und Trägheiten M . Die Variation der Ringspaltlänge L erfolgt hierbei in einem Bereich von $L = 0.2$ bis $L = 2.5$. Der gewählte Bereich bildet hierbei die typischen Ringspaltlängen von öl- bzw. fördermediengeschmierten Gleitlagern sowie von berührungslosen Fluidichtungen in Turbomaschinen ab. Im Gegensatz zur Validierung des CAPM bilden die Marker nicht wie zuvor die experimentell identifizierten Koeffizienten ab, sondern zeigen die Berechnungsergebnisse des Clearance-Averaged Pressure Models. Die einzelnen Diagramme in diesem Kapitel sind erneut in Anlehnung an die Bewegungsgleichung angeordnet. Der Übersicht halber wird diese hier nochmals in ihrer vereinfachten Darstellung wiederholt:

$$\begin{aligned}
 - \begin{bmatrix} F_X \\ F_Y \\ M_X \\ M_Y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_I & \mathbf{K}_{II} \\ \mathbf{K}_{III} & \mathbf{K}_{IV} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} \mathbf{C}_I & \mathbf{C}_{II} \\ \mathbf{C}_{III} & \mathbf{C}_{IV} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}_I & \mathbf{M}_{II} \\ \mathbf{M}_{III} & \mathbf{M}_{IV} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix}. \tag{6.1}
 \end{aligned}$$

Die erste und zweite Spalte stellen hierbei erneut die rotordynamischen Koeffizienten durch translatorische bzw. rotatorische Bewegung dar. Dementsprechend stehen die Zeilen stellvertretend für die Kräfte bzw. Momente auf den Rotor. Jedes Diagramm in den Abbildungen zeigt somit eine Teilmatrix der gesamten Koeffizientenmatrix.

6.1.1 Steifigkeiten

Abbildung 6.1 zeigt den Einfluss der Ringspaltlänge L auf die Steifigkeiten K des axial durchströmten Ringspalts. Zunächst werden die Steifigkeitskoeffizienten der Teilmatrix I \mathbf{K}_I betrachtet. Hierbei nehmen die Nebensteifigkeiten K_{XY} und $|K_{YX}|$ mit zunehmender Ringspaltlänge linear zu, während die Hauptsteifigkeiten K_{XX} und K_{YY} zunächst ansteigen und bei einer Ringspaltlänge von $L \approx 0.6$ ein Maximum erreichen. Bei weiterer Vergrößerung der Ringspaltlänge nehmen die Hauptsteifigkeiten K_{XX} und K_{YY} nach Überschreiten des Maximums linear mit der Ringspaltlänge L ab. Es ist zu beachten, dass mit zunehmender Ringspaltlänge L die Nebensteifigkeiten K_{XY} und $|K_{YX}|$ stärker als die Hauptsteifigkeiten K_{XX} und K_{YY} anwachsen. Ab einer Ringspaltlänge von $L = 0.86$ übersteigen die Nebensteifigkeiten K_{XY} und K_{YX} sogar die Hauptsteifigkeiten K_{XX} und K_{YY} . Hierbei sei angemerkt, dass große Nebensteifigkeiten oftmals mit wachsenden Instabilitäten des Ringspalts einhergehen und dementsprechend für die Stabilität eines Systems, vgl. Kapitel 2.3, entscheidend sind.

Im Gegensatz zu den Haupt- und Nebensteifigkeiten der Teilmatrix I \mathbf{K}_I zeigen die Haupt- und Nebensteifigkeiten der Teilmatrix II \mathbf{K}_{II} ein asymptotisches Verhalten bei zunehmender Ringspaltlänge L . Hierbei nehmen die Hauptsteifigkeiten $K_{X\alpha}$ und $K_{Y\beta}$ mit steigender Ringspaltlänge L ab, während die Nebensteifigkeiten $K_{X\beta}$ und $|K_{Y\alpha}|$ bis zu einer Ringspaltlänge von $L = 1.5$ ansteigen. Wird die Ringspaltlänge weiter erhöht, so streben die Nebensteifigkeiten asymptotisch gegen einen Wert von $K_{X\beta} = |K_{Y\alpha}| = 3.40$. Es ist zu beachten, dass die Nebensteifigkeiten der Teilmatrix II $K_{X\beta}$ und $|K_{Y\alpha}|$ in der gleichen Größenordnung wie die Nebensteifigkeiten der Teilmatrix I K_{XY} und $|K_{YX}|$ sind. Dieses Verhalten wurde bereits bei den experimentellen Untersuchungen festgestellt und zeigt sich auch bei kurzen Ringspaltlängen L . Besonders interessant ist hierbei, dass die Nebensteifigkeiten der Teilmatrix II $K_{X\beta}$ und $|K_{Y\alpha}|$ bei der Herleitung des in der Literatur angegebenen Schwellenwerts zur Vernachlässigung der zusätzlichen 36 rotordynamischen Koeffizienten eine entscheidende Rolle spielen, vgl. Kapitel 6.4.

Die Haupt- und Nebensteifigkeiten der Teilmatrix III \mathbf{K}_{III} verhalten sich ähnlich wie die Steifigkeiten der Teilmatrix II \mathbf{K}_{II} . Anzumerken ist hierbei, dass die Steifigkeiten der Teilmatrix III \mathbf{K}_{III} um eine Größenordnung kleiner sind als die Steifigkeit der Teilmatrix II \mathbf{K}_{II} . Die Hauptsteifigkeiten $K_{\alpha X}$ und $K_{\beta Y}$ nehmen mit zunehmender Ringspaltlänge L ab, während die Nebensteifigkeiten $K_{\alpha Y}$ und $|K_{\beta X}|$ zunächst bis zu einer Ringspaltlänge von $L = 0.75$ ansteigen. Bei weiterer Erhöhung der Ringspaltlänge L nehmen die Nebensteifigkeiten $K_{\alpha Y}$ und $|K_{\beta X}|$ leicht mit der Ringspaltlänge L ab. Betrachtet man die Steifigkeiten der Teilmatrix IV \mathbf{K}_{IV} , so nehmen sowohl

die Hauptsteifigkeiten $K_{\alpha\alpha}$ und $K_{\beta\beta}$ als auch die Nebensteifigkeiten $|K_{\beta\alpha}|$ und $K_{\alpha\beta}$ mit zunehmender Ringspaltlänge L zu.

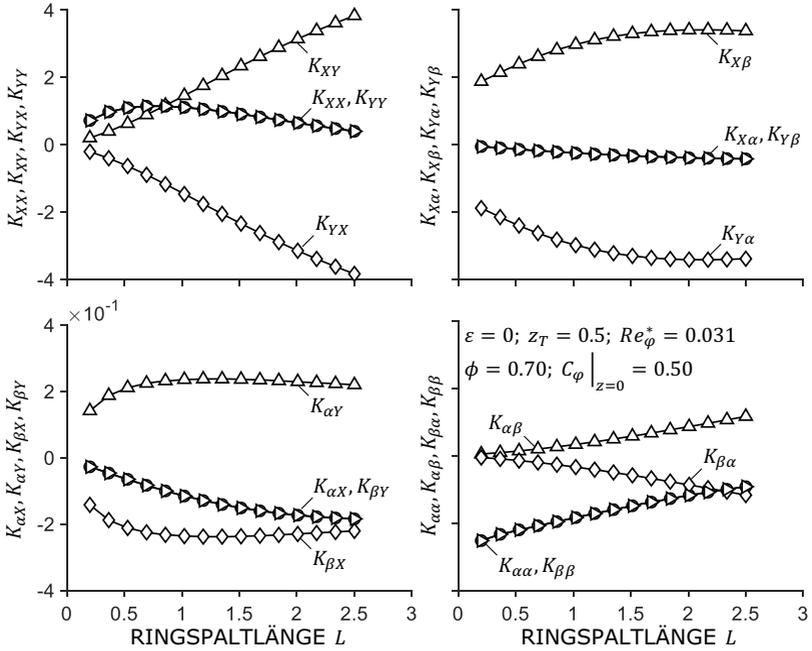


Abbildung 6.1 – Einfluss der Ringspaltlänge L auf die mit dem CAPM berechneten Steifigkeiten K des axial durchströmten Ringspalts.

6.1.2 Dämpfungen

Abbildung 6.2 zeigt den Einfluss der Ringspaltlänge L auf die Dämpfungen C des axial durchströmten Ringspalts. Es zeigt sich, dass die Dämpfungskoeffizienten infolge der Kräfte durch die translatorischen Bewegungen \mathbf{C}_I , d.h. der Teilmatrix I, um eine Größenordnung größer sind als die anderen Dämpfungskoeffizienten der Teilmatrizen II bis IV. Werden zuerst die Koeffizienten der Teilmatrix I \mathbf{C}_I betrachtet, so zeigt sich, dass sowohl die Haupt- als auch die Nebendämpfungen linear mit der Ringspaltlänge zunehmen. Die Hauptdämpfungen C_{XX} und C_{YY} weisen hierbei eine deutlich größere Steigung als die Nebendämpfungen C_{XY} und $|C_{YX}|$ auf. Es sei darauf hingewiesen, dass den Hauptdämpfungen ein ähnlich hoher Stellenwert bei der Analyse von Instabilitäten zukommt wie den Nebensteifigkeiten, vgl. Kapitel 2.3.

Wie bereits erwähnt sind die Dämpfungskoeffizienten der Teilmatrix II \mathbf{C}_{II} um eine Größenordnung kleiner als die Dämpfungen der Teilmatrix I \mathbf{C}_I . Der Einfluss der Ringspaltlänge L zeigt sich besonders bei der Betrachtung der Nebendämpfungen $C_{X\beta}$ und $C_{Y\alpha}$. Diese steigen mit zunehmender Ringspaltlänge L leicht an, wohingegen die Hauptdämpfungen $C_{X\alpha}$ und $C_{Y\beta}$ nur unwesentlich durch eine zunehmende Ringspaltlänge L beeinflusst werden. Die Dämpfungskoeffizienten der Teilmatrix III \mathbf{C}_{III} liegen in der gleichen Größenordnung wie die Koeffizienten der Teilmatrix II \mathbf{C}_{II} . Ähnlich wie bei den Hauptdämpfungen der Teilmatrix II $C_{X\alpha}$ und $C_{Y\beta}$ sind die Hauptdämpfungen der Teilmatrix III $C_{\alpha X}$ und $C_{\beta Y}$ nahezu unabhängig von der Ringspaltlänge L . Im Gegensatz dazu nehmen die Nebendämpfungen $C_{\alpha Y}$, $|C_{\beta X}|$ mit zunehmender Ringspaltlänge L zu.

Abschließend wird der Einfluss der Ringspaltlänge auf die Dämpfungskoeffizienten der Teilmatrix IV \mathbf{C}_{IV} betrachtet. Sowohl die Hauptdämpfungen $C_{\alpha\alpha}$ und $C_{\beta\beta}$ als auch die Nebendämpfungen $C_{\alpha\beta}$ und $|C_{\beta\alpha}|$ nehmen mit zunehmender Ringspaltlänge L zu. Ähnlich zu den Dämpfungskoeffizienten der Teilmatrix I \mathbf{C}_I weisen die Hauptdämpfungen der Teilmatrix IV \mathbf{C}_{IV} eine größere Steigung im Vergleich zu den Nebendämpfungen auf.

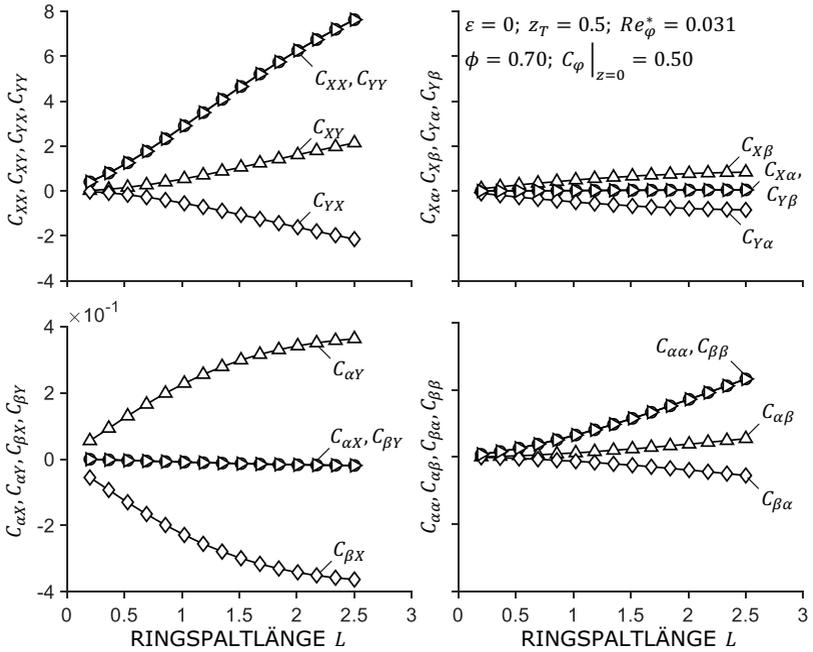


Abbildung 6.2 – Einfluss der Ringspaltlänge L auf die Dämpfungen C des axial durchströmten Ringspalts.

6.1.3 Trägheiten

Abschließend wird der Einfluss der Ringspaltlänge L auf die Trägheiten M des axial durchströmten Ringspalts diskutiert, vgl. Abbildung 6.3. Es zeigt sich, dass die Trägheitskoeffizienten der Teilmatrix I \mathbf{M}_I um zwei Größenordnungen größer sind als die Trägheitskoeffizienten der Teilmatrizen II bis IV. Werden in Analogie zu den Steifigkeiten K und Dämpfungen C zunächst die Koeffizienten der Teilmatrix I \mathbf{M}_I betrachtet, zeigt sich, dass sowohl die Haupt- als auch die Nebenträgheiten linear mit der Ringspaltlänge L zunehmen. Dabei sind die Nebenträgheiten M_{XY} und $|M_{YX}|$ um zwei Größenordnungen kleiner als die Hauptträgheiten M_{XX} und M_{YY} . Aus diesem Grund werden die Nebenträgheiten der Teilmatrix I in der Literatur oftmals vernachlässigt¹. Die Trägheiten der Teilmatrix II \mathbf{M}_{II} sind in der gleichen Größenordnung wie die Nebenträgheiten der Teilmatrix I M_{XY} und $|M_{YX}|$. Dementsprechend ist ein signifikanter Trend bei der Variation der Ringspaltlänge L nur schwer zu erkennen.

Die Trägheitskoeffizienten der Teilmatrix III \mathbf{M}_{III} liegen in der gleichen Größenordnung wie die Koeffizienten der Teilmatrix II \mathbf{M}_{II} . Die Hauptträgheiten $M_{\alpha X}$ und $M_{\beta Y}$ nehmen mit zunehmender Ringspaltlänge L leicht ab, wohingegen die Nebenträgheiten $M_{\alpha Y}$ und $|M_{\beta X}|$ mit steigender Ringspaltlänge L zunehmen. Der Verlauf der Koeffizienten lässt vermuten, dass die Haupt- und Nebenträgheiten der Teilmatrix III \mathbf{M}_{III} ähnlich zu den Steifigkeiten \mathbf{K}_{III} bei weiterer Erhöhung der Ringspaltlänge L , über den hier betrachteten Bereich hinaus, asymptotisch gegen einen Wert streben.

Abschließend wird der Einfluss der Ringspaltlänge auf die Trägheitskoeffizienten der Teilmatrix IV \mathbf{M}_{IV} untersucht. Sowohl die Hauptträgheiten $M_{\alpha\alpha}$ und $M_{\beta\beta}$ als auch die Nebenträgheiten $|M_{\alpha\beta}|$ und $M_{\beta\alpha}$ nehmen mit zunehmender Ringspaltlänge L zu. Die Hauptträgheiten sind hierbei um eine Größenordnung größer als die Nebenträgheiten.

¹ CHILDS, *Turbomachinery rotordynamics: Phenomena, modeling, and analysis*, ([13], 1993)

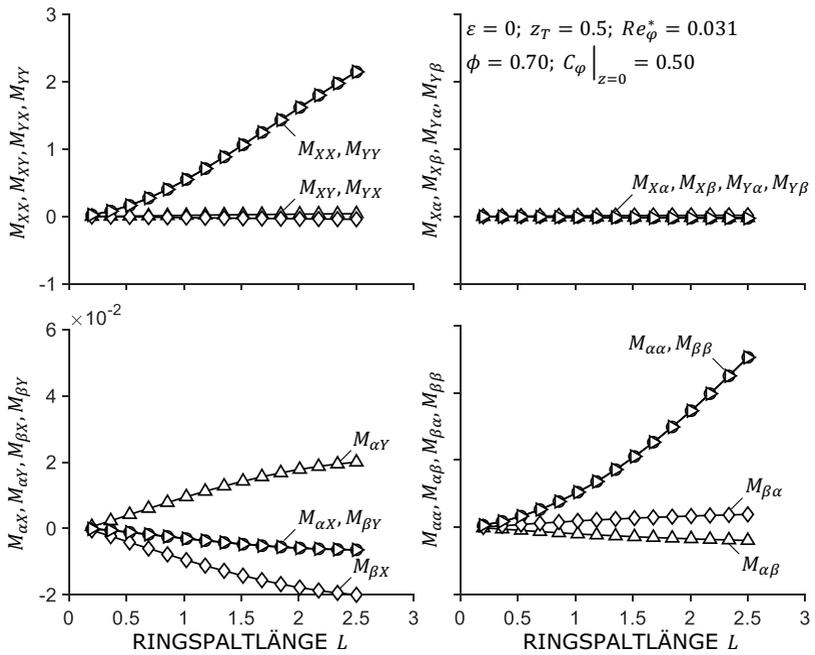


Abbildung 6.3 – Einfluss der Ringspaltlänge L auf die Trägheiten M des axial durchströmten Ringspalts.

6.2 Einfluss der Durchflusszahl

Im Anschluss an den Einfluss der Ringspaltlänge L wird der Einfluss der Durchflusszahl ϕ auf die rotordynamischen Koeffizienten betrachtet. Die Abbildungen 6.4 bis 6.6 zeigen den Einfluss der Durchflusszahl ϕ auf die Steifigkeiten K , Dämpfungen C und Trägheiten M . Die Variation der Durchflusszahl ϕ erfolgt hierbei in einem für Bereich von $\phi = 0.1$ bis $\phi = 5$. Dies ist damit begründet, auch Betriebspunkte außerhalb des für Turbomaschinen typischen Bereich von $0 < \phi < 1$ zu untersuchen. Durchflusszahlen von $\phi \geq 2.5$ sind dabei charakteristisch für hochbelastete berührungslose Fluiddichtungen, wie sie beispielsweise in den Treibstoffpumpen von Raketentriebwerken vorkommen².

6.2.1 Steifigkeiten

Abbildung 6.4 zeigt den Einfluss der Durchflusszahl ϕ auf die Steifigkeiten K des axial durchströmten Ringspalts. Zunächst werden die Steifigkeitskoeffizienten der Teilmatrix I \mathbf{K}_I betrachtet. Es zeigt sich, dass die Hauptsteifigkeiten K_{XX} und K_{YY} für den hier untersuchten Fall eines axial durchströmten Ringspalts mit den in Tabelle 5.1 aufgeführten Betriebs- und Geometrieparametern proportional ϕ^2 ansteigen. Die Nebensteifigkeiten K_{XY} und $|K_{YX}|$ steigen ebenfalls mit der Durchflusszahl ϕ an. Im Gegensatz zu den quadratisch proportional ansteigenden Hauptsteifigkeiten K_{XX} und K_{YY} weisen die Nebensteifigkeiten K_{XY} und $|K_{YX}|$ eine lineare Abhängigkeit von der Durchflusszahl ϕ auf. Der Unterschied ist hierbei auf eine Erhöhung des Lomakin-Effekts, vgl. Kapitel 2.2.1, bei Erhöhung des axialen Durchflusses, d.h. der Durchflusszahl ϕ , zurückzuführen. Der Lomakin-Effekt resultiert in einer zentrierenden Kraft F_{LOMAKIN} auf den Rotor und beeinflusst dementsprechend hauptsächlich die Hauptsteifigkeiten K_{XX} und K_{YY} sowie die Nebensteifigkeiten der Teilmatrix II $K_{X\beta}$ und $|K_{Y\alpha}|$.

Ebendieses Verhalten zeigt sich bei der Betrachtung der Steifigkeitskoeffizienten der Teilmatrix II \mathbf{K}_{II} . Während die Hauptsteifigkeiten $K_{X\alpha}$ und $K_{Y\beta}$ nahezu unabhängig von der Durchflusszahl ϕ sind, steigen die Nebensteifigkeiten $K_{X\beta}$ und $|K_{Y\alpha}|$ quadratisch proportional zu Durchflusszahl ϕ^2 an. Hierbei sei angemerkt, dass die Nebensteifigkeiten der Teilmatrix II $K_{X\beta}$ und $|K_{Y\alpha}|$ in der gleichen Größenordnung wie die Hauptsteifigkeiten der Teilmatrix I K_{XX} und K_{YY} sind. Bei großen Durchflusszahlen, d.h. $\phi \rightarrow 5$, übersteigen die Steifigkeitskoeffizienten der Kräfte auf den Rotor durch rotatorische Be-

² CHILDS U. A., „A high-Reynolds-number seal test facility: Facility description and preliminary test data“, ([15], 1982)

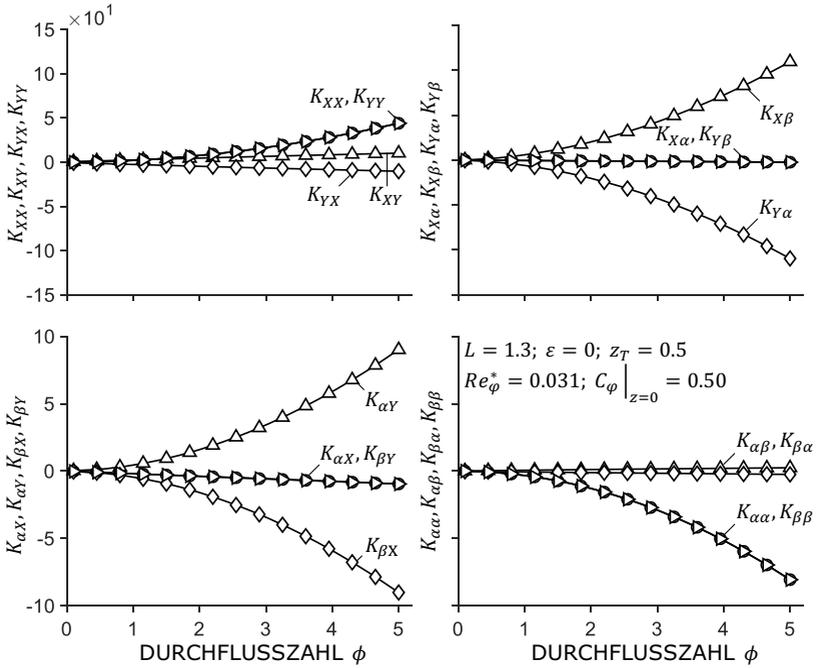


Abbildung 6.4 – Einfluss der Durchflusszahl ϕ auf die mit dem CAPM berechneten Steifigkeiten K des axial durchströmten Ringspalts.

wegung \mathbf{K}_{II} , d.h. Teilmatrix II, die Steifigkeitskoeffizienten der Teilmatrix I \mathbf{K}_I sogar um ein Vielfaches. Dies ist besonders bei der Beurteilung der Relevanz der zusätzlichen rotordynamischen Koeffizienten im Hinblick auf eine generalisierte Betrachtung des dynamischen Einflusses von Interesse. Neben der Ringspaltlänge L scheint somit die Durchflusszahl ϕ ein weiterer Parameter für die Beurteilung der Relevanz der zusätzlichen rotordynamischen Koeffizienten zu sein. Dieses Verhalten deutete sich bereits innerhalb der experimentellen Identifikation der dynamischen Eigenschaften an und wird mit den hier dargestellten Verläufen untermauert. Damit stehen die Ergebnisse im Widerspruch zur gängigen Meinung, dass die Relevanz der rotordynamischen Koeffizienten einzig anhand der Ringspaltlänge L beurteilt werden kann.

Abschließend wird der Einfluss der Durchflusszahl ϕ auf die Steifigkeitskoeffizienten der Teilmatrizen III und IV \mathbf{K}_{III} und \mathbf{K}_{IV} betrachtet. Es zeigt sich, dass die Hauptsteifigkeiten der Teilmatrix III $K_{\alpha X}$ und $K_{\beta Y}$ und die Nebensteifigkeiten der Teilmatrix IV $K_{\alpha\beta}$ und $|K_{\beta\alpha}|$ nahezu unabhängig von der Durchflusszahl ϕ sind. Die Nebensteifigkeiten der Teilmatrix III $K_{\alpha Y}$ und $|K_{\beta X}|$ nehmen proportional zu ϕ^2 zu, wohingegen die Hauptsteifigkeiten der Teilmatrix IV $K_{\alpha\alpha}$ und $K_{\beta\beta}$ mit $-\phi^2$ abnehmen.

6.2.2 Dämpfungen

Abbildung 6.5 zeigt den Einfluss der Durchflusszahl ϕ auf die Dämpfungen C des axial durchströmten Ringspalts. Zunächst werden die Dämpfungen der Teilmatrix I \mathbf{C}_I betrachtet. Es zeigt sich, dass die Dämpfungskoeffizienten der Teilmatrix I \mathbf{C}_I auch bei großer Steigerung der Durchflusszahl ϕ die dominierenden Dämpfungen des Ringspalts bilden. Zudem ist zu erkennen, dass die Hauptdämpfungen C_{XX} und C_{YY} linear mit der Durchflusszahl ϕ ansteigen, wohingegen die Nebendämpfungen C_{XY} und $|C_{YX}|$ unabhängig von der Durchflusszahl ϕ sind. Ein umgekehrtes Verhalten zeigen die Dämpfungskoeffizienten der Teilmatrizen II und III. Hierbei sind die Hauptdämpfungen $C'_{X\alpha}$ und $C'_{Y\beta}$ sowie $C_{\alpha X}$ und $C_{\beta Y}$ nahezu unabhängig von der Durchflusszahl ϕ , während die Nebendämpfungen $C_{X\beta}$ und $|C_{Y\alpha}|$ sowie $|C_{\beta X}|$ und $C_{\alpha Y}$ linear mit der Durchflusszahl ϕ ansteigen.

Abschließend werden die Dämpfungskoeffizienten der Teilmatrix IV \mathbf{C}_{IV} betrachtet. Die Dämpfungskoeffizienten verhalten sich hierbei analog zu den Dämpfungen der Teilmatrix I \mathbf{C}_I . Dementsprechend steigen die Hauptdämpfungen $C'_{\alpha\alpha}$ und $C'_{\beta\beta}$ linear mit Durchflusszahl ϕ , wohingegen die Nebendämpfungen $|C'_{\alpha\beta}|$ und $C'_{\beta\alpha}$ unabhängig von einer Variation derselben sind.

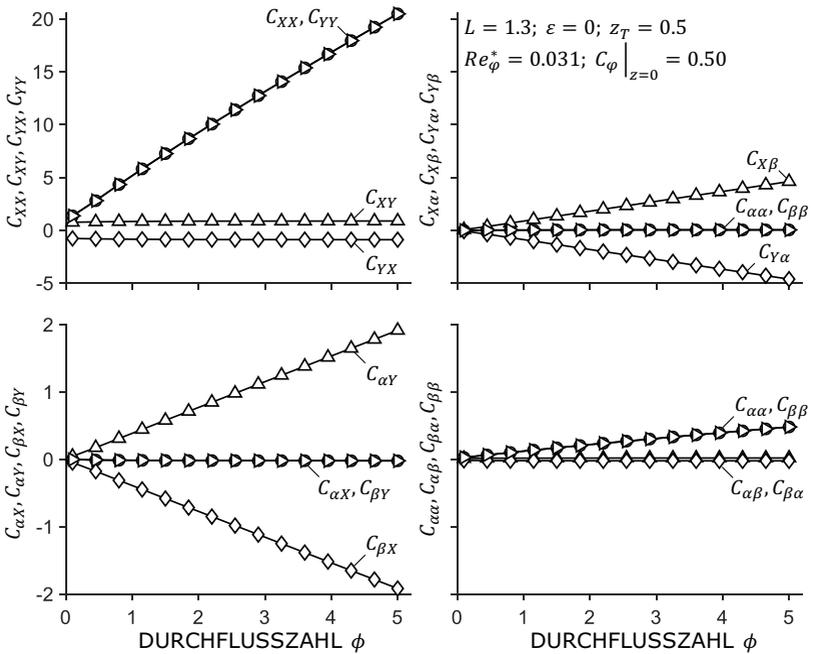


Abbildung 6.5 – Einfluss der Durchflusszahl ϕ auf die Dämpfungen C .

6.2.3 Trägheiten

Abschließend wird der Einfluss der Durchflusszahl ϕ auf die Trägheiten M des axial durchströmten Ringspalts betrachtet, vgl. Abbildung 6.6. Es zeigt sich, dass die Trägheiten der Teilmatrizen I und II \mathbf{M}_I und \mathbf{M}_{II} nahezu unabhängig von der Durchflusszahl ϕ sind. Dieses Verhalten hatte sich bereits im Zuge der Validierung des Clearance-Averaged Pressure Models angedeutet und begründet sich damit, dass die Trägheitskoeffizienten maßgeblich von der Ringspaltlänge L abhängen. Lediglich die Hauptträgheiten der Teilmatrix I M_{XX} und M_{YY} zeigen einen Einfluss bei Durchflusszahlen kleiner $\phi \leq 1$. Abschließend werden die Trägheitskoeffizienten der Teilmatrizen III und IV \mathbf{M}_{III} und \mathbf{M}_{IV} betrachtet. Es zeigt sich, dass die Hauptträgheiten $M_{\alpha X}$ und $M_{\beta Y}$ sowie $M_{\alpha\alpha}$, $M_{\beta\beta}$ mit steigender Durchflusszahl ϕ leicht zunehmen. Die Nebenträgheiten der Teilmatrix III $M_{\alpha Y}$ und $|M_{\beta X}|$ steigen ebenfalls mit zunehmender Durchflusszahl ϕ , wohingegen die Nebenträgheiten der Teilmatrix IV $|M_{\alpha\beta}|$ und $M_{\beta\alpha}$ zunächst ansteigen und bei einer Durchflusszahl von $\phi = 0.8$ ein Maximum erreichen. Bei weiterer Erhöhung der Durchflusszahl $\phi > 0.8$ zeigt sich eine leichte Abnahme der Nebenträgheiten der Teilmatrix IV $|M_{\alpha\beta}|$ und $M_{\beta\alpha}$.

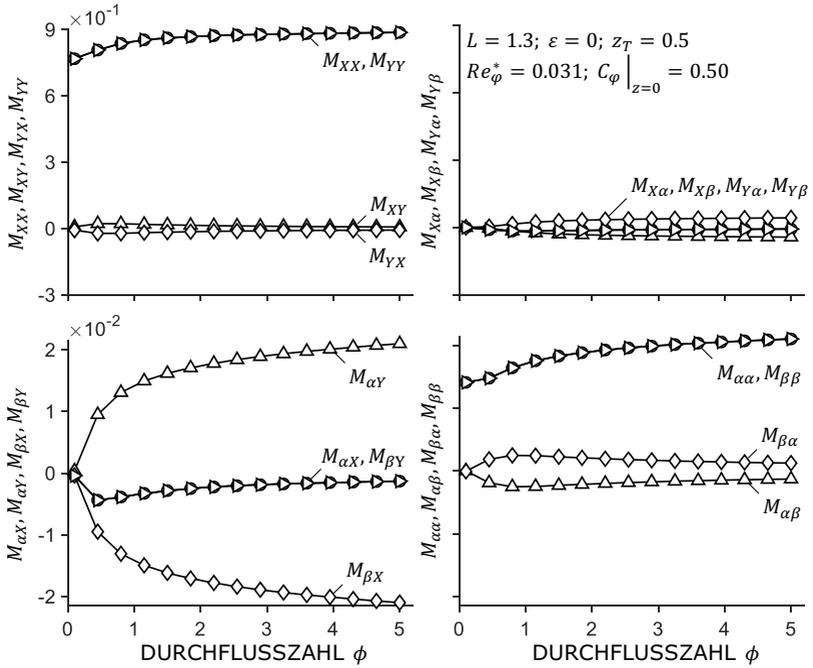


Abbildung 6.6 – Einfluss der Durchflusszahl ϕ auf die Trägheiten M des axial durchströmten Ringspalts.

6.3 Einfluss der modifizierten Reynoldszahl

Zum Abschluss der weiterführenden Untersuchungen wird der Einfluss der modifizierten Reynoldszahl Re_φ^* auf die rotordynamischen Koeffizienten betrachtet. Die Abbildungen 6.7 bis 6.9 zeigen den Einfluss der modifizierten Reynoldszahl Re_φ^* auf die Steifigkeiten K , Dämpfungen C und Trägheiten M . Die modifizierte Reynoldszahl Re_φ^* wird hierbei in einem typischen Bereich von $Re_\varphi^* = 0.007$ bis $Re_\varphi^* = 0.073$ variiert, vgl. Einleitung des Kapitels 6.

6.3.1 Steifigkeiten

Abbildung 6.7 zeigt den Einfluss der modifizierten Reynoldszahl Re_φ^* auf die Steifigkeiten K des axial durchströmten Ringspalts. Werden zunächst die Steifigkeitskoeffizienten der Teilmatrix I \mathbf{K}_I betrachtet, so zeigt sich, dass die Hauptsteifigkeiten K_{XX} und K_{YY} sich nur unwesentlich mit steigender modifizierter Reynoldszahl Re_φ^* verändern. Die Nebensteifigkeiten K_{XY} und $|K_{YX}|$ hingegen nehmen mit steigender modifizierter Reynoldszahl Re_φ^* ab. Die Abnahme ist hierbei reziprok proportional zur modifizierten Reynoldszahl, d.h. $1/Re_\varphi^*$.

In Analogie hierzu werden die Steifigkeitskoeffizienten der Teilmatrix II \mathbf{K}_{II} betrachtet. Ähnlich zu den Hauptsteifigkeiten der Teilmatrix I K_{XX} und K_{YY} sind die Hauptsteifigkeiten der Teilmatrix II $K_{X\alpha}$ und $K_{Y\beta}$ nahezu unabhängig von der modifizierten Reynoldszahl Re_φ^* . Die Nebensteifigkeiten $K_{X\beta}$ und $|K_{Y\alpha}|$ nehmen ähnlich zu den Nebensteifigkeiten der Teilmatrix I K_{XY} und $|K_{YX}|$ reziprok proportional, d.h. mit $1/Re_\varphi^*$, ab. Anzumerken ist hierbei, dass die Nebensteifigkeiten der Teilmatrix II $K_{X\beta}$ und $|K_{Y\alpha}|$ bei kleiner werdender modifizierter Reynoldszahl Re_φ^* , d.h. einem abnehmenden relativen Spaltspiel ψ oder einer abnehmenden Reynoldszahl Re_φ , die Nebensteifigkeiten der Teilmatrix I K_{XY} und $|K_{YX}|$ deutlich übersteigen. Dies ist besonders für die Beurteilung der Relevanz der zusätzlichen rotordynamischen Koeffizienten interessant, da neben der Ringspaltlänge L und der Durchflusszahl ϕ somit ein weiterer Parameter für die Beurteilung der Relevanz einer generalisierten Betrachtung auf Basis aller 48 rotordynamischen Koeffizienten bereitsteht.

Die Steifigkeitskoeffizienten der Teilmatrizen III und IV \mathbf{K}_{III} und \mathbf{K}_{IV} sind, wie auch schon zuvor bei der Betrachtung des Einflusses der Ringspaltlänge L und der Durchflusszahl ϕ , um eine Größenordnung kleiner als die Steifigkeiten der Teilmatrizen I und II \mathbf{K}_I und \mathbf{K}_{II} . Die Hauptsteifigkeiten der Teilmatrix III $K_{\alpha\alpha}$ und $K_{\beta\beta}$ sowie die Hauptsteifigkeiten der Teilmatrix IV $K_{\alpha\alpha}$ und $K_{\beta\beta}$ sind nahezu unabhängig von der modifizierten Reynoldszahl Re_φ^* . Die Nebensteifigkeiten beider Teilmatrizen III und IV $K_{\alpha\gamma}$ und $|K_{\beta\gamma}|$ sowie $K_{\alpha\beta}$

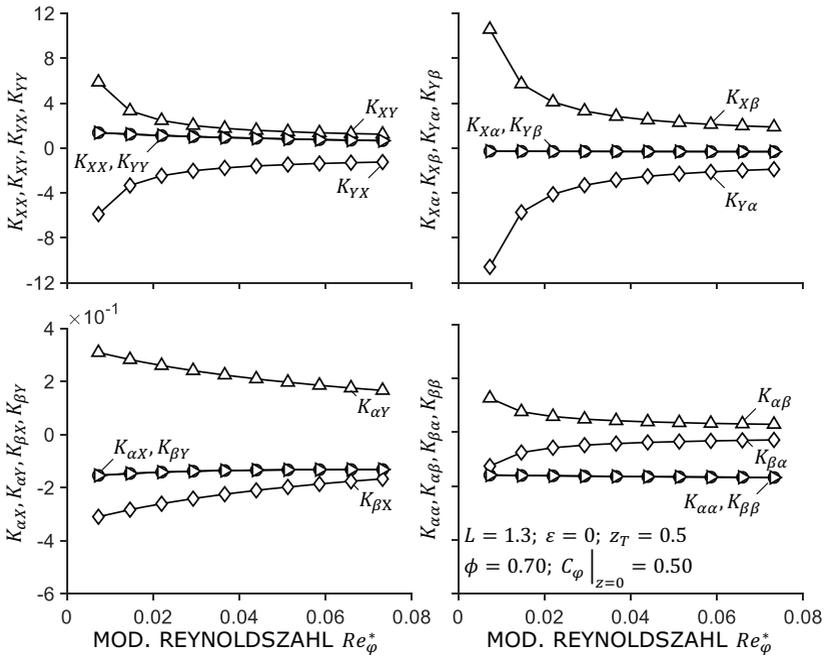


Abbildung 6.7 – Einfluss der modifizierten Reynoldszahl Re_φ^* auf die mit dem CAPM berechneten Steifigkeiten K des axial durchströmten Ringspalts.

und $|K_{\beta\alpha}|$ nehmen mit steigender modifizierter Reynoldszahl erneut reziprok proportional, d.h. mit $1/Re_\varphi^*$, ab.

6.3.2 Dämpfungen

Abbildung 6.8 zeigt den Einfluss der modifizierten Reynoldszahl Re_φ^* auf die Dämpfung C des axial durchströmten Ringspalts. In Analogie zur Betrachtung des Einflusses der Ringspaltlänge L zeigt sich, dass die Dämpfungskoeffizienten der Teilmatrix I \mathbf{C}_I die dominierenden Dämpfungskoeffizienten des Ringspalts sind. Ähnlich zu den Nebensteifigkeiten der Teilmatrix I K_{XY} und $|K_{YX}|$ nehmen die Hauptdämpfungen der Teilmatrix I C_{XX} und C_{YY} reziprok proportional zur modifizierten Reynoldszahl, d.h. $1/Re_\varphi^*$, ab. Zudem sind die Nebendämpfungen C_{XY} und $|C_{YX}|$ nahezu unabhängig von der modifizierten Reynoldszahl Re_φ^* .

Im Gegensatz zu den Steifigkeitskoeffizienten der Teilmatrix II \mathbf{K}_{II} zeigen die Haupt- und Nebendämpfungen der Teilmatrix II $C_{X\alpha}$ und $C_{Y\beta}$ keine merkliche Abhängigkeit von der modifizierten Reynoldszahl Re_φ^* . Dieses Verhalten ist auch in den Dämpfungskoeffizienten der Teilmatrix III \mathbf{C}_{III} zu beobachten. Hierbei zeigt sich lediglich eine leichte Abhängigkeit der Dämpfungen von der modifizierten Reynoldszahl Re_φ^* . Die Haupt- bzw. Nebendämpfungen $C_{\alpha X}$, $C_{\beta Y}$ bzw. $C_{\alpha Y}$, $|C_{\beta X}|$ nehmen mit steigender modifizierter Reynoldszahl Re_φ^* leicht ab.

Abschließend wird der Einfluss der modifizierten Reynoldszahl Re_φ^* auf die Dämpfungskoeffizienten der Teilmatrix IV \mathbf{C}_{IV} betrachtet. Es zeigt sich ein ähnlicher Verlauf wie bei der Betrachtung der Dämpfungskoeffizienten der Teilmatrix I \mathbf{C}_I . Die Nebendämpfungen $C_{\alpha\beta}$ und $|C_{\beta\alpha}|$ sind hierbei nahezu unabhängig von der modifizierten Reynoldszahl Re_φ^* . Die Hauptdämpfungen $C_{\alpha\beta}$ und $C_{\beta\beta}$ hingegen nehmen reziprok proportional mit $1/Re_\varphi^*$ ab.

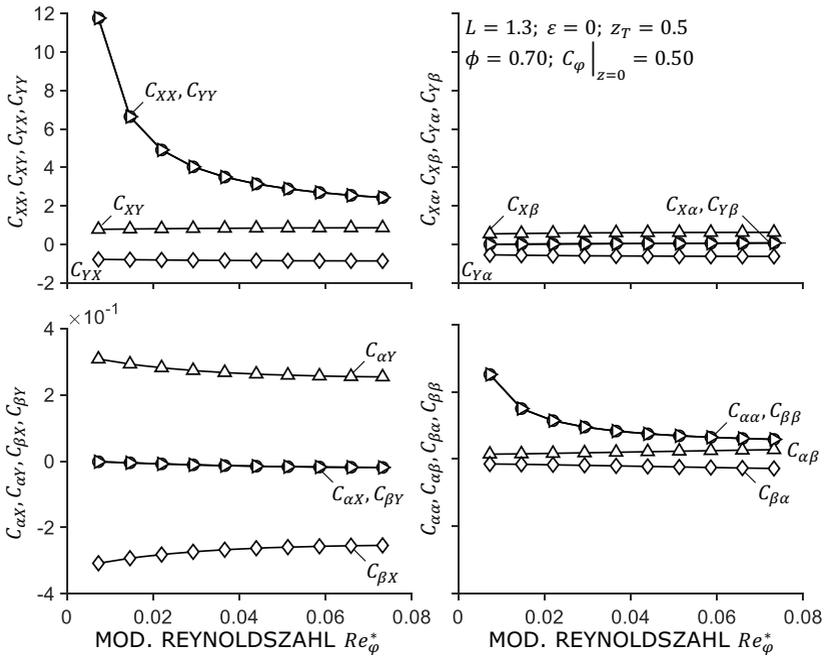


Abbildung 6.8 – Einfluss der modifizierten Reynoldszahl Re_ϕ^* auf die Dämpfungen C des axial durchströmten Ringspalts.

6.3.3 Trägheiten

Abschließend wird der Einfluss der modifizierten Reynoldszahl Re_φ^* auf die Trägheiten M des axial durchströmten Ringspalts diskutiert, vgl. Abbildung 6.9. Die dominierenden Trägheitskoeffizienten bilden, ähnlich wie bei den Dämpfungen, die Koeffizienten der Teilmatrix I. Es zeigt sich, dass die Hauptträgheiten M_{XX} und M_{YY} sowie die Nebenträgheiten M_{XY} und $|M_{YX}|$ leicht mit der modifizierten Reynoldszahl Re_φ^* ansteigen. Die Nebenträgheiten sind dabei um eine bis zwei Größenordnungen kleiner als die Hauptträgheiten. Die geringe Abhängigkeit der Trägheiten von der modifizierten Reynoldszahl Re_φ^* war zu erwarten. Wie bereits im Zuge der experimentellen Validierung erläutert, sind die Trägheiten des axial durchströmten Ringspalts hauptsächlich von der Ringspaltlänge L bestimmt. Aufgrund der Tatsache, dass für den hier betrachteten Fall die Reynoldszahl Re_φ jeweils so gewählt wird, dass turbulente Strömung im Ringspalt vorliegt, ist der Einfluss der modifizierten Reynoldszahl Re_φ^* gering. Dies zeigt sich ebenfalls bei der Betrachtung der Trägheitskoeffizienten der Teilmatrix II. Sowohl die Haupt- als auch die Nebenträgheiten sind nahezu unabhängig von der modifizierten Reynoldszahl Re_φ^* .

Abschließend werden die Trägheitskoeffizienten der Teilmatrizen III und IV betrachtet. Die Hauptträgheiten der Teilmatrix III $M_{\alpha X}$ und $M_{\beta Y}$ nehmen linear mit der modifizierten Reynoldszahl ab. Im Gegensatz dazu nehmen die Nebenträgheiten $M_{\alpha Y}$ und $|M_{\beta X}|$ mit steigender modifizierter Reynoldszahl Re_φ^* zu. Ähnlich hierzu zeigen auch die Nebenträgheiten der Teilmatrix IV $|M_{\alpha\beta}|$ und $M_{\beta\alpha}$ einen mit der modifizierten Reynoldszahl Re_φ^* zunehmenden Verlauf, wohingegen die Hauptträgheiten $M_{\alpha\alpha}$ und $M_{\beta\beta}$ einen leicht parabolischen Verlauf aufweisen.

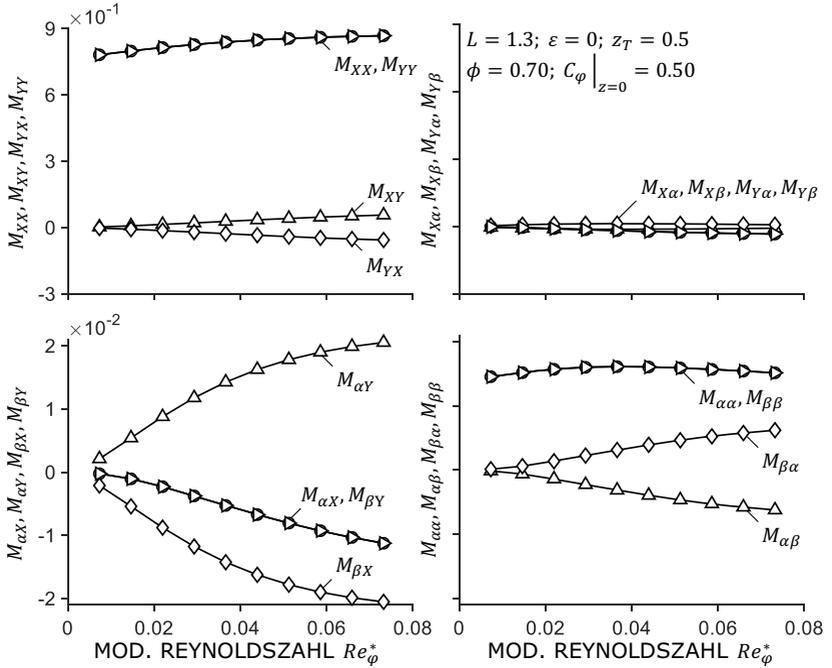


Abbildung 6.9 – Einfluss der modifizierten Reynoldszahl Re_φ^* auf die Trägheiten M des axial durchströmten Ringspalts.

6.4 Beurteilung der Relevanz der zusätzlichen rotordynamischen Koeffizienten

Im vorangegangenen Kapitel wurde durch die ausführliche Parameterstudie eine detailliertere Antwort auf die erste Forschungsfrage gegeben, als es durch die experimentellen Untersuchungen möglich war. Im Folgenden werden diese Ergebnisse genutzt, um die zweite Forschungsfrage

- (ii) *Bei welchen Randbedingungen werden die induzierten Momente durch translatorische sowie die induzierten Kräfte und Momente durch rotatorische Bewegungen relevant?*

zu beantworten. Das Vorgehen stützt sich hierbei auf die von Childs³ durchgeführte Analyse zur Bewertung der Relevanz der zusätzlichen 36 rotordynamischen Koeffizienten. Childs schlussfolgert, dass ab einer Ringspaltlänge von $L \geq 1.5$ die zusätzlichen Koeffizienten durch die Momente durch translatorische sowie durch die Kräfte und Momente durch rotatorische Bewegungen als relevant angesehen werden müssen. Angemerkt sei an dieser Stelle, dass im Folgenden das Vorgehen in Anlehnung an Childs zwar angewandt, jedoch die zugrundeliegenden Annahmen und Ergebnisse kritisch bewertet werden.

Childs motiviert seine Untersuchungen der Relevanz der zusätzlichen rotordynamischen Koeffizienten anhand der experimentellen Untersuchungen von Falco et al.⁴. Die Autoren gehen, den Annahmen in Kapitel 2 folgend, zunächst von einem reduzierten Detaillierungsgrad, d.h. 12 Koeffizienten, bei der Betrachtung der dynamischen Eigenschaften einer berührungslosen Fluiddichtung aus. Die experimentell identifizierten Hauptsteifigkeiten K_{xx} und K_{yy} der Teilmatrix I übersteigen die durch ein Bulk-Flow Model vorhergesagten Steifigkeiten hierbei um ein Vielfaches. Falco et al. weisen darauf hin, dass zur Anregung des Rotors eine Kombination aus translatorischen und rotatorischen Freiheitsgraden verwendet wird. Dementsprechend ist es nicht verwunderlich, dass die von ihnen gemessenen Steifigkeiten gleichzeitig Beiträge aus translatorischer sowie rotatorischer Bewegung beinhalten.

Den Schwellenwert, ab welchem die zusätzlichen 36 rotordynamischen Koeffizienten beachtet werden müssen, identifiziert Childs anhand des Verhältnisses aus den Kräften durch rotatorische und den Kräften durch translatorische Bewegungen. Zur einfacheren Handhabung vereinfacht Childs zuerst die generalisierte Bewegungsgleichung 2.10 mit Hilfe weitreichender Annahmen. So

³ CHILDS, *Turbomachinery rotordynamics: Phenomena, modeling, and analysis*, ([13], 1993)

⁴ FALCO, DIANA UND MARENCO, „Experimental research on the behaviour of hydrodynamic plain seals by means of a specific testing device (A. P. S. A. L.)“, ([21], 1982)

wird beispielsweise angenommen, dass die rotordynamischen Koeffizienten durch die Momente auf den Rotor, d.h. die Teilmatrizen III und IV, im Vergleich zu den rotordynamischen Koeffizienten durch die Kräfte auf den Rotor, d.h. die Teilmatrizen I und II, vernachlässigbar sind. Zudem wird davon ausgegangen, dass der Rotor lediglich eine Anregung in den Freiheitsgraden Y und α erfährt. Des Weiteren betrachtet Childs lediglich die Steifigkeitskoeffizienten sowie die Kraft in Y -Richtung auf den Rotor. Die generalisierte Bewegungsgleichung reduziert sich dementsprechend auf

$$-F_Y = K_{YY}Y + K_{Y\alpha}\alpha. \quad (6.2)$$

Childs beurteilt die Relevanz der zusätzlichen rotordynamischen Koeffizienten somit lediglich auf Basis der Kraft durch die zwei Steifigkeitskoeffizienten K_{YY} und $K_{Y\alpha}$.

Die von Childs getroffenen Annahmen werden im Folgenden kritisch diskutiert. Zunächst wird die Annahme der Vernachlässigung der gesamten Teilmatrizen III und IV, d.h. der rotordynamischen Koeffizienten durch die Momente auf den Rotor, sowie die Fokussierung auf die Steifigkeiten der Teilmatrizen I und II \mathbf{K}_I und \mathbf{K}_{II} betrachtet. Obgleich Childs seine Annahmen unbegründet postuliert, sind sowohl die Vernachlässigung der gesamten Koeffizientenmatrizen III und IV als auch die Fokussierung auf die Steifigkeiten der Teilmatrizen I und II \mathbf{K}_I und \mathbf{K}_{II} gerechtfertigt. Die im vorherigen Kapitel durchgeführten Parameterstudien sowie die experimentellen Untersuchungen zeigen, dass die Steifigkeits-, Dämpfungs- und Trägheitskoeffizienten der Teilmatrizen III und IV ein bis zwei Größenordnungen kleiner sind als ihr Pendant der Teilmatrizen I und II. Zusätzlich beeinflussen die Momente auf den Rotor die Stabilität des Systems nur unwesentlich, vgl. Kapitel 7. Dementsprechend können die Teilmatrizen III und IV bei der Beurteilung der Relevanz der zusätzlichen rotordynamischen Koeffizienten vernachlässigt werden.

Die Vernachlässigung der Dämpfungs- und Trägheitsmatrizen der Teilmatrix II \mathbf{C}_{II} und \mathbf{M}_{II} beruht vor allem auf ihrer Größenordnung im Vergleich zu den Dämpfungen und Trägheiten der Teilmatrix I \mathbf{C}_I und \mathbf{M}_I , vgl. Kapitel 5 sowie Kapitel 6.1 bis 6.3. Dementsprechend ist es ausreichend lediglich die Steifigkeiten der Teilmatrizen I und II \mathbf{K}_I und \mathbf{K}_{II} miteinander zu vergleichen. Die verbleibenden Annahmen, der Betrachtung der Kraftkomponente in Y -Richtung F_Y sowie die reine Bewegung des Rotors in den Freiheitsgraden Y und α sind nicht eindeutig zu begründen. Während die Fokussierung auf die Kraft in Y -Richtung F_Y ansatzweise durch ihre besondere Bedeutung für die Stabilität eines Systems begründet werden kann, ist die Annahme einer reinen Anregung in den zwei Freiheitsgraden Y und α in realen Maschinen nicht erfüllt. Hierbei handelt es sich vielmehr um eine Vereinfachung des

komplexen Problems als um eine gerechtfertigte Annahme im Sinne realer Betriebsbedingungen.

Der von Childs angegebene Schwellenwert einer Ringspaltlänge von $L = 1.5$ wird im Folgenden anhand des Verhältnisses der Kraft durch die rotatorische und der Kraft durch die translatorische Bewegung hergeleitet. Zur Formulierung dieses Verhältnisses bildet Childs⁵ zunächst eine effektive Steifigkeit K_{EFF}

$$-F_Y = K_{YY}Y + K_{Y\alpha}\alpha = K_{\text{EFF}}Y, \quad (6.3a)$$

$$K_{\text{EFF}} := K_{YY} \left(1 + \frac{K_{Y\alpha}\alpha}{K_{YY}Y} \right) = K_{YY} \left(1 + \frac{K_{Y\alpha} L \alpha_X}{K_{YY} \psi Y} \right). \quad (6.3b)$$

Die effektive Steifigkeit K_{EFF} beinhaltet dabei das Verhältnis der Kräfte aus den rotatorischen und translatorischen Bewegungen $K_{Y\alpha}\alpha/(K_{YY}Y)$. Ist das Verhältnis klein, so dominieren die Kräfte aus der translatorischen Bewegung und eine Vernachlässigung der Kräfte durch die rotatorischen Bewegungen erscheint angemessen. Übersteigt das Verhältnis hingegen einen zuvor definierten Wert, so müssen die Kräfte durch die rotatorische Bewegung mit berücksichtigt werden. Die Vernachlässigung bzw. Miteinbeziehung der rotatorischen Kräfte ist nach Childs hierbei gleichbedeutend mit der Vernachlässigung oder Betrachtung der rotatorischen Freiheitsgrade. Dementsprechend kann das Verhältnis aus der Kraft durch die rotatorische und der Kraft durch die translatorische Bewegung zur Beurteilung der Relevanz einer generalisierten Betrachtung mit 48 rotordynamischen Koeffizienten herangezogen werden. Childs definiert für die Notwendigkeit der Betrachtung der zusätzlichen rotordynamischen Koeffizienten einen Wert des Verhältnisses von $K_{Y\alpha}\alpha/(K_{YY}Y) \geq 0.648 = 81/125$. Anschaulich bedeutet dies, dass die Kraft auf den Rotor zu 81 Teilen aus der rotatorischen und zu 125 Teilen aus der translatorischen Bewegung resultiert. Dies entspricht einem Anteil von 39 % der Kraft aus der rotatorischen Bewegung.

Den Schwellenwert einer Ringspaltlänge von $L = 1.5$ ermittelt Childs im Anschluss mit Hilfe der Berechnungen eines Bulk-Flow Models⁶. Hierbei werden zuerst die dynamischen Koeffizienten der von Falco et al.⁷ untersuchten Fluiddichtungen⁸ für die Längen $L = 0.5, 1, 1.5, 2$ und 2.5 berechnet. Das Verhältnis der Kräfte ist neben den Steifigkeitskoeffizienten K_{YY} und $K_{Y\alpha}$

⁵ CHILDS, *Turbomachinery rotordynamics: Phenomena, modeling, and analysis*, ([13], 1993)

⁶ CHILDS, „Rotordynamic moment coefficients for finite-length turbulent seals“, ([12], 1982)

⁷ FALCO, DIANA UND MARENCO, „Experimental research on the behaviour of hydrodynamic plain seals by means of a specific testing device (A. P. S. A. L.)“, ([21], 1982)

⁸ Die Fluiddichtung wird bei einer modifizierten Reynoldszahl von $Re_\varphi^* = 0.043$, einer dimensionslosen Druckdifferenz von $\Delta p = 3.42$ und ohne Vordrall $C_\varphi|_{z=0} = 0$ betrieben.

zusätzlich vom Verhältnis der Anregungsamplituden der translatorischen und rotatorischen Freiheitsgrade α_x/Y sowie dem Kehrwert des Schlankheitsgrades des Ringspalts L/ψ abhängig. Zur Bestimmung des Verhältnisses der Kraft aus der rotatorischen zur Kraft aus der translatorischen Bewegung wählt Childs ein konstantes Anregungsverhältnis von $\alpha_x/Y = 0.55 \times 10^{-3}$. Wird die in den experimentellen Untersuchungen verwendete Amplitude der translatorischen Freiheitsgrade von $X = Y = 0.033$ zugrunde gelegt, ergibt sich eine Anregungsamplitude der rotatorischen Freiheitsgrade von $\alpha_x = 1.04 \times 10^{-3}^\circ$. Bei der von Falco et al. betrachteten Fluidichtung überschreitet das Verhältnis $K_{Y\alpha}/(K_{YY}Y)$ ab einer Ringspaltlänge von $L = 1.5$ den zuvor definierten Wert. Dementsprechend folgert Childs, dass ab einer Ringspaltlänge von $L = 1.5$ die zusätzlichen rotordynamischen Koeffizienten berücksichtigt werden müssen.

Obgleich die Analyse von Childs in seinem Vorgehen gerechtfertigt ist, ergeben sich drei wesentliche Kritikpunkte: (i) Die eigentliche Auswahl des Wertes des Verhältnisses der Kräfte $K_{Y\alpha}/(K_{YY}Y) = 0.648$ bleibt unbegründet, (ii) der Einfluss des Amplitudenverhältnisses α_x/Y bleibt unberücksichtigt und (iii) der Einfluss der Betriebs- und Geometrieparameter, d.h. der Einfluss der Durchflusszahl ϕ , der modifizierten Reynoldszahl Re_φ^* , des Vordralls $C_\varphi|_{z=0}$, der relativen Exzentrizität ε und des Taumelpunkts z_T , auf die betrachteten Steifigkeitskoeffizienten K_{YY} und $K_{Y\alpha}$ wird außer Acht gelassen. Aufgrund der hier aufgeführten Punkte ist eine alleinige Betrachtung der Relevanz der zusätzlichen 36 rotordynamischen Koeffizienten auf Basis der Ringspaltlänge ungenügend. Vielmehr ist die Wahl des Verhältnisses $K_{Y\alpha}/(K_{YY}Y)$ sowie der Betriebspunkt des Ringspalts und das Amplitudenverhältnis α_x/Y ausschlaggebend für die Relevanz der zusätzlichen Koeffizienten. Im Folgenden werden die Ergebnisse der weiterführenden Untersuchungen zur Beurteilung der Relevanz der zusätzlichen rotordynamischen Koeffizienten verwendet.

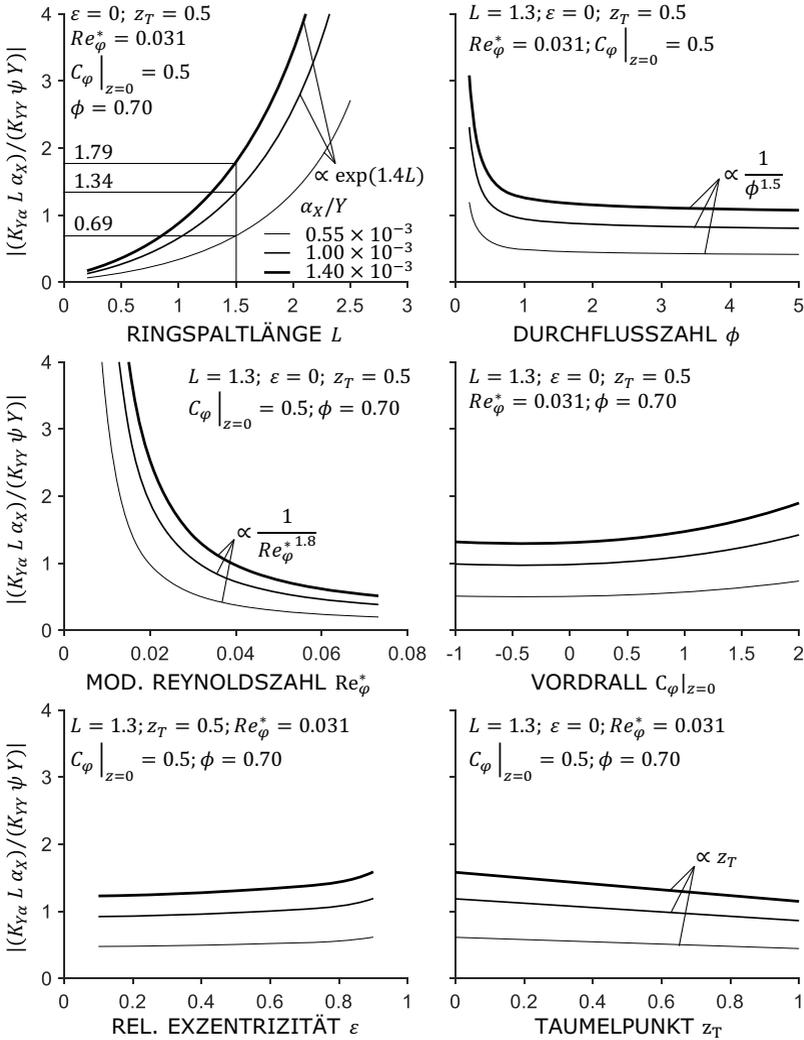


Abbildung 6.10 – Einfluss der Ringspaltlänge L , der Durchflusszahl ϕ , der modifizierten Reynoldszahl Re_φ^* , des Vordralls $C_\varphi|_{z=0}$, der relativen Exzentrizität ε und des Taumelpunkts z_T auf das Verhältnis der Kräfte durch rotorische und translatorische Bewegung $|(K_{Y\alpha} L \alpha_X)/(K_{YY} \psi Y)|$.

Abbildung 6.10 zeigt den Betrag des Verhältnisses $|(K_{Y\alpha}L\alpha_x)/(K_{YY}\psi Y)|$ über dem jeweiligen Betriebs- oder Geometrieparameter. Das Verhältnis der Anregungsamplituden der rotatorischen und translatorischen Freiheitsgrade α_x/Y wird hierbei in drei Stufen variiert. Neben dem von Childs verwendeten Verhältnis von $\alpha_x/Y = 0.55 \times 10^{-3}$ wird eine Steigerung des Verhältnisses auf $\alpha_x/Y = 1.00 \times 10^{-3}$ und $\alpha_x/Y = 1.40 \times 10^{-3}$ untersucht. Angemerkt sei hierbei, dass das Verhältnis der Amplituden in den experimentellen Untersuchungen bereits $\alpha_x/Y = 6.3 \times 10^{-3}$ beträgt. Die Linienstärke der Diagramme korreliert mit der Größe des Scharparameters. Wie bereits bei der Diskussion der weiterführenden Untersuchungen angedeutet zeigt sich, dass die Parameter der Ringspaltlänge L , der Durchflusszahl ϕ sowie der modifizierten Reynoldszahl Re_φ^* den größten Einfluss auf das Verhältnis $|(K_{Y\alpha}L\alpha_x)/(K_{YY}\psi Y)|$ haben. Zudem ist das Verhältnis der Kräfte in starkem Maße vom Verhältnis der Anregungsamplituden der rotatorischen und translatorischen Freiheitsgrade α_x/Y abhängig. Diese Erkenntnis kann prinzipiell auch aus der Bewegungsgleichung gewonnen werden. Ein Rotor, welcher nur achsparallel verschoben wird, kann auch keine Kräfte aus der rotatorischen Bewegung erfahren.

Die Auswirkung des Amplitudenverhältnisses α_x/Y wird besonders beim Einfluss der Ringspaltlänge L deutlich. Wird das von Childs gewählte Amplitudenverhältnis von $\alpha_x/Y = 0.55 \times 10^{-3}$ zugrunde gelegt, so ergibt sich bei einer Ringspaltlänge von $L = 1.5$ und einem relativen Spaltspiel von $\psi = 0.042$ das Verhältnis $|(K_{Y\alpha}L\alpha_x)/(K_{YY}\psi Y)| = 0.69$. Das bedeutet, dass die Kraft auf den Rotor F_Y zu 69 Teilen aus der rotatorischen Bewegung und zu 100 Teilen aus der translatorischen Bewegung resultiert. Dementsprechend ist der aus der rotatorischen Bewegung resultierende Anteil der Kraft für etwa 41 % der Kraft auf den Rotor F_Y verantwortlich. Wird das Verhältnis der Anregungsamplituden auf $\alpha_x/Y = 1.0 \times 10^{-3}$ gesteigert, so erhöht sich der Anteil der aus der rotatorischen Bewegung kommenden Kraft auf 57 %. Dies bedeutet bei einer konstant bleibenden Anregungsamplitude der translatorischen Freiheitsgrade von $X = Y = 0.033$ lediglich eine Steigerung der Anregungsamplitude der rotatorischen Freiheitsgrade von $\alpha_x = 1.04 \times 10^{-3}^\circ$ auf $\alpha_x = 1.90 \times 10^{-3}^\circ$. Der Einfluss der Ringspaltlänge L auf das Verhältnis der Kräfte $|(K_{Y\alpha}L\alpha_x)/(K_{YY}\psi Y)|$ steigt proportional $\exp(1.4L)$. Werden die übrigen Diagramme des Einflusses der Betriebsparameter betrachtet zeigt sich, dass der Einfluss der Durchflusszahl ϕ mit $1/\phi^{1.5}$ und der Einfluss der modifizierten Reynoldszahl mit $1/Re_\varphi^{*1.8}$ abnimmt. Die verbleibenden Parameter des Vordralls $C_\varphi|_{z=0}$, der relativen Exzentrizität ε und der Lage des Taumelpunkts z_T haben nur eine geringe Auswirkung auf das Verhältnis der Kraft aus der rotatorischen und der Kraft aus der translatorischen Bewegung.

Die Erkenntnis, dass neben der Ringspaltlänge L auch die Durchflusszahl ϕ , die modifizierte Reynoldszahl Re_φ^* und das Verhältnis der Anregungsamplituden der rotatorischen und translatorischen Freiheitsgrade α_X/Y zur Beurteilung der Relevanz einer generalisierten Betrachtung notwendig sind, stellt für sich genommen bereits eine Antwort auf die Forschungsfrage (ii) dar. Aufgrund der Tatsache, dass die verbleibenden Parameter nur einen geringen Einfluss auf das Verhältnis der Kräfte $|(K_{Y_\alpha}L\alpha_X)/(K_{YY}\psi Y)|$, d.h. die Beurteilung der Relevanz der zusätzlichen rotordynamischen Koeffizienten, haben, ist es möglich, die drei Parameter der Ringspaltlänge L , der Durchflusszahl ϕ und der modifizierten Reynoldszahl Re_φ^* bei einem konstanten Verhältnis der Kräfte $|(K_{Y_\alpha}L\alpha_X)/(K_{YY}\psi Y)| = \text{const}$ dreidimensional darzustellen.

Beispielhaft wird hierfür ein Verhältnis von $|(K_{Y_\alpha}L\alpha_X)/(K_{YY}\psi Y)| = 0.25$, d.h. die Kraft auf den Rotor F_Y resultiert zu einem Teil aus der Kraft durch die rotatorische Bewegung und zu 4 Teilen aus der Kraft durch die translatorische Bewegung, als Grenze für die Notwendigkeit einer generalisierten Betrachtung mit 48 rotordynamischen Koeffizienten gewählt. Weitere Abbildungen mit den zugrunde liegenden Verhältnissen von $|(K_{Y_\alpha}L\alpha_X)/(K_{YY}\psi Y)| = 0.5, 0.75$ und 1.00 sind in Anhang D dargestellt. Die dreidimensionale Darstellung der Parameter der Ringspaltlänge L , der Durchflusszahl ϕ und der modifizierten Reynoldszahl Re_φ^* bei einem konstanten Verhältnis von $|(K_{Y_\alpha}L\alpha_X)/(K_{YY}\psi Y)| = 0.25$ sowie eine entsprechende Darstellung der entstehenden Fläche mit Isolinien zeigt Abbildung 6.11. Es wird deutlich, dass die Ringspaltlänge L , die Durchflusszahl ϕ sowie die modifizierte Reynoldszahl Re_φ^* eine Ebene im dreidimensionalen Raum beschreiben. Diese Ebene unterteilt den Raum in zwei Bereiche. Ein axial durchströmter Ringspalt, dessen Ringspaltlänge L , Durchflusszahl ϕ und modifizierte Reynoldszahl Re_φ^* sich hinter der Ebene befinden, muss auf Basis einer generalisierten Betrachtung mit allen vier Freiheitsgraden berücksichtigt werden. Liegen die Parameter vor der Ebene, so ist eine Betrachtung des dynamischen Einflusses auf Basis eines reduzierten Detaillierungsgrades ausreichend. Die Relevanz der generalisierten Betrachtung mit den zusätzlichen 36 rotordynamischen Koeffizienten steigt dabei besonders stark mit steigender Durchflusszahl ϕ und zunehmender Ringspaltlänge L an. Die modifizierte Reynoldszahl Re_φ^* führt im Gegensatz dazu zu einer abnehmenden Relevanz der zusätzlichen 36 rotordynamischen Koeffizienten. Anhand dieser einfachen Darstellung ist es möglich, die Notwendigkeit einer Modellierung mit oder ohne Betrachtung der zusätzlichen 36 rotordynamischen Koeffizienten anhand der Geometrie- und Betriebsbedingungen des Ringspalts zu bewerten.

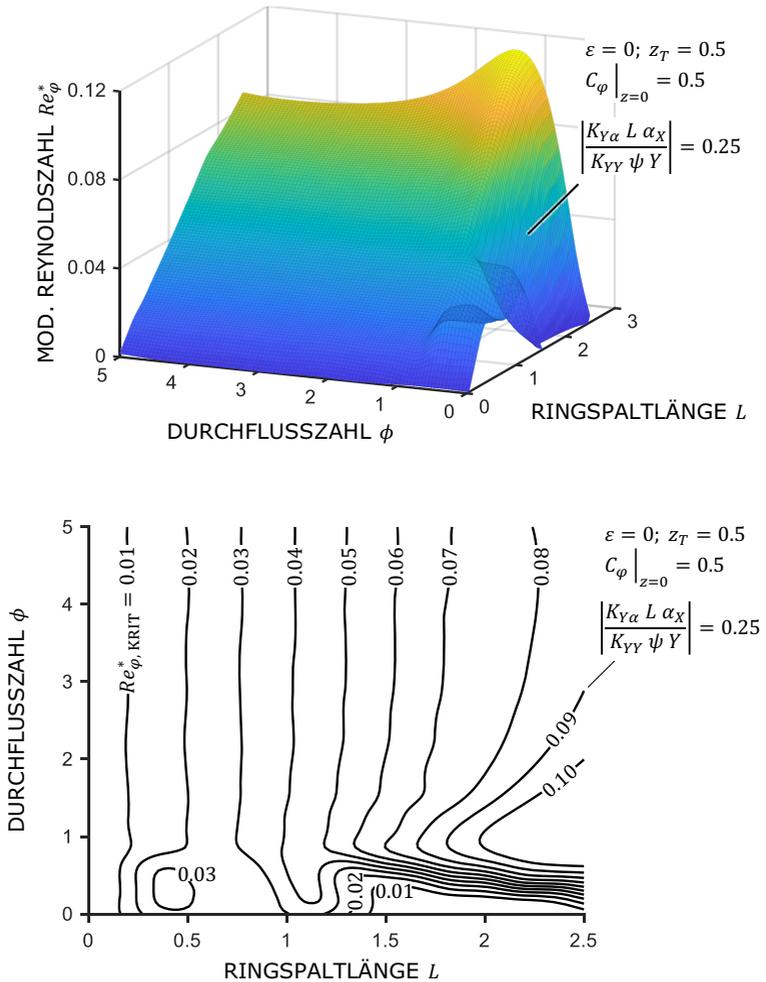


Abbildung 6.11 – Dreidimensionale Darstellung zur Beurteilung der Relevanz einer generalisierten Betrachtung des dynamischen Einflusses axial durchströmter Ringspalte (oben) sowie eine entsprechende Darstellung der entstehenden Fläche mit Isolinien (unten). Für Betriebspunkte hinter der Ebene ist eine Betrachtung des dynamischen Einflusses auf Basis der generalisierten Betrachtung notwendig. Für Betriebspunkte vor der Ebene ist eine Betrachtung auf Basis eines reduzierten Detaillierungsgrades ausreichend.

6.5 Zwischenfazit

Abschließend erfolgt eine kurze Zusammenfassung des Kapitels sowie eine Einordnung der Bedeutung für die vorliegende Arbeit. Das in Kapitel 5 validierte Clearance-Averaged Pressure Model wird verwendet, um eine detaillierte Antwort auf die erste Forschungsfrage nach dem Einfluss der Betriebs- und Geometrieparameter auf die rotordynamischen Koeffizienten außerhalb der physikalischen Grenzen des Spaltströmungsprüfstandes zu geben. Hierfür werden in Kapitel 6.1 bis 6.3 umfangreiche Parameterstudien hinsichtlich des Einflusses der Ringspaltlänge L , der Durchflusszahl ϕ und der modifizierten Reynoldszahl Re_φ^* durchgeführt. Innerhalb der Untersuchungen zeigt sich, dass die Steifigkeiten der Teilmatrix II, d.h. die Steifigkeiten aus den Kräften durch rotatorische Bewegung \mathbf{K}_{II} , oftmals die gleichen Größenordnungen wie die Steifigkeiten der Teilmatrix I, d.h. den Steifigkeiten aus den Kräften durch translatorische Bewegung \mathbf{K}_I , aufweisen. Die verbleibenden Steifigkeiten der Teilmatrix III und IV \mathbf{K}_{III} und \mathbf{K}_{IV} spielen im Vergleich dazu lediglich eine untergeordnete Rolle. Im Hinblick auf die Dämpfungen C und Trägheiten M des axial durchströmten Ringspaltes zeigt sich, dass die Dämpfungen und Trägheiten der Teilmatrix I, d.h. die Dämpfungen und Trägheiten aus den Kräften durch translatorische Bewegung \mathbf{C}_I und \mathbf{M}_I , die dominierenden Terme in den Bewegungsgleichungen sind.

Diese Unterschiede in den Größenordnungen ermöglichen es in Kapitel 6.4 die Relevanz der zusätzlichen 36 rotordynamischen Koeffizienten einer generalisierten Betrachtung auf Grundlage des Verhältnisses der Kräfte durch rotatorische und translatorische Bewegung $|(K_{Y\alpha}L\alpha_x)/(K_{YY}\psi Y)|$ zu beurteilen. Es zeigt sich, dass neben der in der Literatur verwendeten Größe der Ringspaltlänge L auch die Durchflusszahl ϕ sowie die modifizierte Reynoldszahl Re_φ^* für die Beurteilung der Relevanz einer generalisierten Betrachtung ausschlaggebend sind.

Kapitel 6 gibt somit eine detaillierte Antwort auf die Forschungsfrage:

- (i) *Welchen Einfluss haben die Betriebs- und Geometrieparameter des Ringspalts auf die 48 rotordynamischen Koeffizienten?*

Zudem gibt die Beurteilung der Relevanz einer generalisierten Betrachtung anhand eines einzigen Quotienten $|(K_{Y\alpha}L\alpha_x)/(K_{YY}\psi Y)|$ eine Antwort auf die Forschungsfrage:

- (ii) *Bei welchen Randbedingungen werden die induzierten Momente durch translatorische sowie die induzierten Kräfte und Momente durch rotatorische Bewegungen relevant?*

Durch die klare und einfache Darstellung der Parameter in Abbildung 6.11 ist es möglich schnell und einfach zu entscheiden, ob eine generalisierte Betrachtung des rotodynamischen Einflusses notwendig ist oder ob die Beschreibung auf Basis einer Bewegungsgleichung mit reduziertem Detaillierungsgrad ausreicht.

Kapitel 7

Systemverhalten

In den vorangegangenen Kapiteln wurde mit Hilfe des Spaltströmungsprüfstands das Clearance-Averaged Pressure Model zuerst validiert und im Anschluss zur Beantwortung der ersten beiden Forschungsfragen verwendet. Es zeigte sich, dass besonders die Ringspaltlänge L , die Durchflusszahl ϕ sowie die modifizierte Reynoldszahl Re_ϕ^* ausschlaggebend für die Relevanz der zusätzlichen 36 rotordynamischen Koeffizienten sind. Die Kenntnis der dynamischen Eigenschaften des Ringspalts ist jedoch nicht gleichbedeutend mit der Kenntnis des Verhaltens eines rotordynamischen Systems, vgl. Kapitel 2.3. Zur Beantwortung der dritten Forschungsfrage

- (iii) *Welche Auswirkung hat eine Betrachtung aller 48 rotordynamischen Koeffizienten auf die Analyse des Systemverhaltens?*

werden im Folgenden die zuvor gewonnenen Ergebnisse der weiterführenden Untersuchungen genutzt, um das Systemverhalten mit und ohne Berücksichtigung der zusätzlichen 36 rotordynamischen Koeffizienten zu untersuchen. Von besonderem Interesse ist es hierbei stabilisierende und destabilisierende Phänomene durch die Betrachtung der zusätzlichen Koeffizienten auf das System zu identifizieren. Hierfür wird zunächst eine alternative Formulierung des logarithmischen Dekrements Λ , vgl. Kapitel 2.3.3, hergeleitet. Diese auf den Arbeiten von Kurohashi¹ sowie Kanemori & Iwatsubo² beruhende Formulierung erlaubt es den Einfluss der einzelnen Teilmatrizen I bis IV auf das Verhalten des Systems zu bewerten. Im Anschluss werden die Ergebnisse der weiterführenden Untersuchungen, vgl. Kapitel 6, verwendet und auf ein

¹ KUROHASHI U. A., „Energetic Evaluation of Stability in Rotor-bearing System : Contribution of Each Element to Logarithmic Decrement“, ([49], 1983)

² KANEMORI UND IWATSUBO, „Rotordynamic Analysis of Submerged Motor Pumps : Influence of Long Seal on the Stability of Fluid Machinery“, ([42], 1994)

Beispielsystem übertragen. Die Analyse des Systemverhaltens erfolgt neben dem logarithmischen Dekrement Λ auch auf Basis des Dämpfungsmaßes ξ und der Eigenkreisfrequenz des gedämpften Systems $\omega_D = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} = \Im(\lambda)$. Die Verwendung des Dämpfungsmaß ξ als zusätzliche Größe begründet sich dadurch, dass das logarithmische Dekrement Λ nur für schwach gedämpfte Systeme, d.h. $0 < \xi < 1$, definiert ist. Werden jedoch kritisch³, d.h. $\xi = 1$, oder stark gedämpfte Systeme, d.h. $\xi > 1$, betrachtet, so sind die Eigenwerte des Systems rein reell und das logarithmische Dekrement strebt gegen unendlich, d.h. $\Lambda \rightarrow \infty$. Zur Veranschaulichung des logarithmischen Dekrements Λ sei an dieser Stelle nochmals die physikalische Interpretation aus Kapitel 2.3.3 wiederholt.

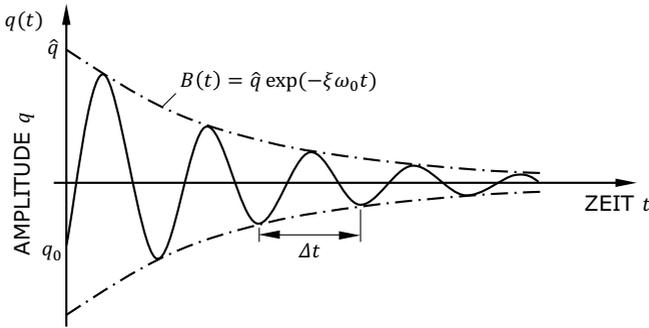


Abbildung 7.1 – Schwach gedämpfte Schwingung [60].

Das logarithmische Dekrement Λ bildet gerade den Exponenten des Verhältnisses aus zwei aufeinander folgenden Schwingungen ab.

$$\frac{q(t)}{q(t + \Delta t)} = \exp\left(2\pi \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}\right) = \exp(\Lambda). \quad (7.1)$$

Es ergibt sich aus dem Dämpfungsmaß ξ bzw. aus dem Real- und Imaginärteil des Eigenwerts $\Re(\lambda)$ und $\Im(\lambda)$

$$\Lambda = 2\pi \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} = -2\pi \frac{\Re(\lambda)}{\Im(\lambda)}. \quad (7.2)$$

³ Im Englischen ist auch von critical damping die Rede.

7.1 Alternative Formulierung des logarithmischen Dekrements

Die alternative Formulierung des logarithmischen Dekrements Λ wird anhand eines rotordynamischen Beispielsystems hergeleitet. Die folgende Herleitung beruht im Wesentlichen auf den Arbeiten von Kurohashi⁴ sowie Kanemori & Iwatsubo⁵. Hierfür wird innerhalb der vorliegenden Arbeit ein System bestehend aus einem Ringspalt und einem starren Rotor mit der dimensionslosen Masse M_{ROT} und der dimensionslosen Trägheit Θ_{ROT} betrachtet⁶. Die Bewegungsgleichung des Systems aus Rotor und Ringspalt um die statische Ruhelage ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} K_{XX} & K_{XY} & K_{X\alpha} & K_{X\beta} \\ K_{YX} & K_{YY} & K_{Y\alpha} & K_{Y\beta} \\ K_{\alpha X} & K_{\alpha Y} & K_{\alpha\alpha} & K_{\alpha\beta} \\ K_{\beta X} & K_{\beta Y} & K_{\beta\alpha} & K_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + \\
 & + \begin{bmatrix} C_{XX} & C_{XY} & C_{X\alpha} & C_{X\beta} \\ C_{YX} & C_{YY} & C_{Y\alpha} & C_{Y\beta} \\ C_{\alpha X} & C_{\alpha Y} & C_{\alpha\alpha} & C_{\alpha\beta} \\ C_{\beta X} & C_{\beta Y} & C_{\beta\alpha} & C_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} + \\
 & + \begin{bmatrix} M_{XX} & M_{XY} & M_{X\alpha} & M_{X\beta} \\ M_{YX} & M_{YY} & M_{Y\alpha} & M_{Y\beta} \\ M_{\alpha X} & M_{\alpha Y} & M_{\alpha\alpha} & M_{\alpha\beta} \\ M_{\beta X} & M_{\beta Y} & M_{\beta\alpha} & M_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} + \\
 & + \begin{bmatrix} M_{\text{ROT}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{\text{ROT}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_{\text{ROT}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Theta_{\text{ROT}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_X \\ F_Y \\ M_X \\ M_Y \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{7.3}$$

In Anlehnung an die Herleitung der klassischen Formulierung des logarithmischen Dekrements Λ , vgl. Kapitel 2.3.3, wird die homogene Bewegungsgleichung des rotordynamischen Systems betrachtet und unter Verwendung der Ansatzfunktion $\mathbf{q} = \hat{\mathbf{q}} \exp(\lambda t)$ in ein Eigenwertproblem überführt

$$\mathbf{K} \hat{\mathbf{q}} + \lambda \mathbf{C} \hat{\mathbf{q}} + \lambda^2 \mathbf{M}_{\text{SYS}} \hat{\mathbf{q}} = 0. \tag{7.4}$$

⁴ KUROHASHI U. A., „Energetic Evaluation of Stability in Rotor-bearing System : Contribution of Each Element to Logarithmic Decrement“, ([49], 1983)

⁵ KANEMORI UND IWATSUBO, „Rotordynamic Analysis of Submerged Motor Pumps : Influence of Long Seal on the Stability of Fluid Machinery“, ([42], 1994)

⁶ Vergleiche hierzu auch die studentischen Arbeiten von Wetterich [107] und Logan [54].

Die Trägheitsmatrix des Systems \mathbf{M}_{SYS} beinhaltet hierbei sowohl die Trägheiten des axial durchströmten Ringspalts \mathbf{M} als auch die Trägheiten des Rotors \mathbf{M}_{ROT} , d.h. $\mathbf{M}_{\text{SYS}} = \mathbf{M} + \mathbf{M}_{\text{ROT}}$. Aufgrund der Tatsache, dass bei schwach gedämpften Systemen, wie dem hier betrachteten Fall eines axial durchströmten Ringspalts, die Eigenwerte stets in konjugiert komplexen Paaren auftreten, ist Gleichung 7.4 für beide Eigenwerte eines komplex konjugierten Eigenwertpaares gültig. Im Gegensatz zu der klassischen Formulierung des logarithmischen Dekrements Λ erfolgt die Bildung der alternativen Formulierung nicht über das Verhältnis der Real- und Imaginärteile der Eigenwerte $\Re(\lambda_i)$ und $\Im(\lambda_i)$. Vielmehr wird der Realteil des Eigenwerts $\Re(\lambda_i)$ mit Hilfe der rotordynamischen Koeffizienten und des Imaginärteils des Eigenwerts $\Im(\lambda_i)$ ausgedrückt. Hierfür werden zunächst die Steifigkeits- \mathbf{K} , Dämpfungs- \mathbf{C} und Trägheitsmatrizen \mathbf{M}_{SYS} des rotordynamischen Systems in einen symmetrischen \square_{Σ} und schiefsymmetrischen Teil \square_{\flat} zerlegt

$$\mathbf{K}_{\Sigma} = \frac{1}{2}(\mathbf{K} + \mathbf{K}^T), \quad \mathbf{K}_{\flat} = \frac{1}{2}(\mathbf{K} - \mathbf{K}^T), \quad (7.5a)$$

$$\mathbf{C}_{\Sigma} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} + \mathbf{C}^T), \quad \mathbf{C}_{\flat} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{C}^T), \quad (7.5b)$$

$$\mathbf{M}_{\Sigma} = \frac{1}{2}(\mathbf{M}_{\text{SYS}} + \mathbf{M}_{\text{SYS}}^T), \quad \mathbf{M}_{\flat} = \frac{1}{2}(\mathbf{M}_{\text{SYS}} - \mathbf{M}_{\text{SYS}}^T). \quad (7.5c)$$

Die Zerlegung der beschreibenden Matrizen kann laut Adams & Padovan⁷, Adams⁸ & Yu und Adams⁹ als eine Zerlegung in konservative und nichtkonservative Kraftkomponenten angesehen werden. Hierbei führt beispielsweise die symmetrische Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_{Σ} zu einer konservativen, die schiefsymmetrische Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_{\flat} jedoch zu einer nicht konservativen Kraft auf den Rotor. Werden die symmetrischen und schiefsymmetrischen Matrizen von links mit der Transponierten des rechtsseitigen Eigenvektors $\hat{\mathbf{q}}_i^T$ und von rechts mit dem rechtsseitigen Eigenvektor $\hat{\mathbf{q}}_i$ multipliziert, so reduzieren sich die Matrizen auf skalare Größen^{10,11}

$$\hat{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{K} \hat{\mathbf{q}}_i = \hat{\mathbf{q}}_i^T (\mathbf{K}_{\Sigma} + \mathbf{K}_{\flat}) \hat{\mathbf{q}}_i = k_{\Sigma,i} + k_{\flat,i}, \quad (7.6a)$$

⁷ ADAMS UND PADOVAN, „Insights into linearized rotor dynamics“, ([2], 1981)

⁸ ADAMS, „Insights into linearized rotor dynamics, Part 2“, ([1], 1987)

⁹ YU UND ADAMS, „The linear model for rotor-dynamic properties of journal bearings and seals with combined radial and misalignment motions“, ([111], 1989)

¹⁰ KUROHASHI U. A., „Energetic Evaluation of Stability in Rotor-bearing System : Contribution of Each Element to Logarithmic Decrement“, ([49], 1983)

¹¹ KANEMORI UND IWATSUBO, „Rotordynamic Analysis of Submerged Motor Pumps : Influence of Long Seal on the Stability of Fluid Machinery“, ([42], 1994)

$$\hat{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{C} \hat{\mathbf{q}}_i = \hat{\mathbf{q}}_i^T (\mathbf{C}_\Sigma + \mathbf{C}_\nu) \hat{\mathbf{q}}_i = c_{\Sigma,i} + c_{\nu,i}, \quad (7.6b)$$

$$\hat{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{M}_{\text{SYS}} \hat{\mathbf{q}}_i = \hat{\mathbf{q}}_i^T (\mathbf{M}_\Sigma + \mathbf{M}_\nu) \hat{\mathbf{q}}_i = m_{\Sigma,i} + m_{\nu,i}. \quad (7.6c)$$

Angemerkt sei hierbei, dass bei der Betrachtung schwach gedämpfter Systeme die Eigenvektoren $\hat{\mathbf{q}}_i$ komplex sind. Dementsprechend sind auch die skalaren Größen komplex. Die skalaren Größen der symmetrischen Matrizen $k_{\Sigma,i}$, $c_{\Sigma,i}$ und $m_{\Sigma,i}$ bilden hierbei den Realteil, wohingegen die skalaren Größen der schiefsymmetrischen Matrizen $k_{\nu,i}$, $c_{\nu,i}$ und $m_{\nu,i}$ den Imaginärteil darstellen. Des Weiteren sei angemerkt, dass es sich bei genauer Betrachtung der Reduktion der Matrizen auf skalare Größen nicht um eine Entkopplung der Freiheitsgrade im Sinne einer modalen Zerlegung¹² handelt¹³. Vielmehr stellt die von Kurohashi sowie Kanemori & Iwatsubo vorgestellte Methode lediglich eine mathematische Umformung der Gleichungen dar. Gleichung 7.4 lässt sich nunmehr mit den skalaren Größen neu formulieren

$$(k_{\Sigma,i} + k_{\nu,i}) + \lambda_i (c_{\Sigma,i} + c_{\nu,i}) + \lambda_i^2 (m_{\Sigma,i} + m_{\nu,i}) = 0, \quad (7.7a)$$

$$(k_{\Sigma,i} - k_{\nu,i}) + \lambda_i^* (c_{\Sigma,i} - c_{\nu,i}) + \lambda_i^{*2} (m_{\Sigma,i} - m_{\nu,i}) = 0. \quad (7.7b)$$

Hierin ist λ_i^* der konjugiert komplexe Eigenwert des auftretenden Eigenwertpaares. Mit der Definition des komplex konjugierten Eigenwertpaares $\lambda_i = \Re(\lambda_i) + i\Im(\lambda_i)$ und $\lambda_i^* = \Re(\lambda_i) - i\Im(\lambda_i)$ lässt sich der Realteil der Eigenwerte $\Re(\lambda_i)$ aus den Gleichungen 7.7a und 7.7b in Abhängigkeit des Imaginärteils der Eigenwerte $\Im(\lambda_i)$ ausdrücken

$$-\Re(\lambda_i) = \frac{\Im(\lambda_i) (c_{\Sigma,i} m_{\Sigma,i} - c_{\nu,i} m_{\nu,i}) + i (k_{\Sigma,i} m_{\nu,i} - k_{\nu,i} m_{\Sigma,i})}{2 \Im(\lambda_i) (m_{\Sigma,i}^2 - m_{\nu,i}^2) + i (c_{\Sigma,i} m_{\nu,i} - c_{\nu,i} m_{\Sigma,i})}. \quad (7.8)$$

Die alternative Formulierung des logarithmischen Dekrements Λ_i ergibt sich aus der alternativen Formulierung des Realteils $\Re(\lambda_i)$ und dem Imaginärteil des jeweiligen Eigenwerts $\Im(\lambda_i)$

$$\begin{aligned} \Lambda_i &= -2\pi \frac{\Re(\lambda_i)}{\Im(\lambda_i)} = \\ &= \frac{\pi}{\Im(\lambda_i)} \frac{\Im(\lambda_i) (c_{\Sigma,i} m_{\Sigma,i} - c_{\nu,i} m_{\nu,i}) + i (k_{\Sigma,i} m_{\nu,i} - k_{\nu,i} m_{\Sigma,i})}{\Im(\lambda_i) (m_{\Sigma,i}^2 - m_{\nu,i}^2) + i (c_{\Sigma,i} m_{\nu,i} - c_{\nu,i} m_{\Sigma,i}) / 2}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

¹²GASCH, KNOTHE UND LIEBICH, *Strukturdynamik*, ([26], 2012)

¹³Für die modale Zerlegung eines schwingfähigen Systems mit allgemein besetzten Matrizen bedarf es der Multiplikation sowohl der rechts- als auch der linksseitigen Eigenvektoren.

Es sei angemerkt, dass die alternative Formulierung des logarithmischen Dekrements Λ_i durch das Auftreten des Imaginärteils des Eigenwerts $\Im(\lambda_i)$ in den Gleichungen 7.8 und 7.9 stets die Lösung des Eigenwertproblems 7.4 voraussetzt. Die alternative Formulierung dient vor allem als Werkzeug zur vertiefenden Analyse des Realteils der Eigenwerte $\Re(\lambda_i)$ in Abhängigkeit der skalaren Größen in Gleichung 7.6.

Logarithmische Dekremente der Teilmatrizen

Bisher stellt die alternative Formulierung des logarithmischen Dekrements Λ lediglich eine komplexere Variante der klassischen Definition aus Kapitel 2.3.3 dar. Wie bereits erwähnt ist es jedoch möglich, mit Hilfe der alternativen Formulierung den Realteil der Eigenwerte $\Re(\lambda_i)$ weiter zu analysieren. Besonders der Einfluss der einzelnen Teilmatrizen I bis IV ist hierbei von Interesse. Aus diesem Grund wird im Folgenden für jede Teilmatrix ein eigenes logarithmisches Dekrement Λ hergeleitet. Die Herleitung erfolgt hierbei analog zur Herleitung der alternativen Formulierung des logarithmischen Dekrements Λ . Aufgrund der Linearität des Eigenwertproblems 7.7 ist es unerheblich, ob die in ihm enthaltenen skalaren Größen als Ganzes oder als Summe ihrer Teilmatrizen enthalten sind. Zur Berechnung der skalaren Größen der Teilmatrizen werden im Folgenden zunächst die Steifigkeits-, Dämpfungs und Trägheitsmatrizen des ursprünglichen Eigenwertproblems 7.4 in die Summe ihrer Teilmatrizen zerlegt

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{K}_I + \mathbf{K}_{II} + \mathbf{K}_{III} + \mathbf{K}_{IV} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{K}_{II} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{III} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{IV} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (7.10a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{C}_I + \mathbf{C}_{II} + \mathbf{C}_{III} + \mathbf{C}_{IV} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C}_{II} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{III} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{IV} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (7.10b)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{M}_I + \mathbf{M}_{II} + \mathbf{M}_{III} + \mathbf{M}_{IV} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{M}_I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M}_{II} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{III} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{IV} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7.10c)$$

In Analogie zur Herleitung der alternativen Formulierung des logarithmischen Dekrements Λ , werden die Teilmatrizen im Anschluss in ihre symmetrischen und schiefsymmetrischen Teile aufgespalten. Beispielhaft wird das Vorgehen an den Teilmatrizen der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} aufgezeigt

$$\mathbf{K}_I = \mathbf{K}_{\Sigma,I} + \mathbf{K}_{\nu,I} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\Sigma,I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\nu,I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (7.11a)$$

$$\mathbf{K}_{\text{II}} = \mathbf{K}_{\Sigma, \text{II}} + \mathbf{K}_{\text{p}, \text{II}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{K}_{\text{II}} \\ \mathbf{K}_{\text{II}}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{K}_{\text{II}} \\ -\mathbf{K}_{\text{II}}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (7.11b)$$

$$\mathbf{K}_{\text{III}} = \mathbf{K}_{\Sigma, \text{III}} + \mathbf{K}_{\text{p}, \text{III}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{K}_{\text{III}} \\ \mathbf{K}_{\text{III}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{K}_{\text{III}} \\ \mathbf{K}_{\text{III}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (7.11c)$$

$$\mathbf{K}_{\text{IV}} = \mathbf{K}_{\Sigma, \text{IV}} + \mathbf{K}_{\text{p}, \text{IV}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\Sigma, \text{IV}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\text{p}, \text{IV}} \end{bmatrix}. \quad (7.11d)$$

Im Anschluss an die Zerlegung werden die symmetrischen und schiefsymmetrischen Teilmatrizen mit Hilfe der Transponierten des rechtsseitigen Eigenvektors $\hat{\mathbf{q}}_i^T$ und dem rechtsseitigen Eigenvektor $\hat{\mathbf{q}}_i$ erneut auf skalare Größen reduziert. Hierbei bildet die Summe der einzelnen Skalare der Teilmatrizen stets den Skalar der gesamten Koeffizientenmatrix ab

$$k_{\Sigma, i} = k_{\Sigma, \text{I}, i} + k_{\Sigma, \text{II}, i} + k_{\Sigma, \text{III}, i} + k_{\Sigma, \text{IV}, i}, \quad (7.12a)$$

$$k_{\text{p}, i} = k_{\text{p}, \text{I}, i} + k_{\text{p}, \text{II}, i} + k_{\text{p}, \text{III}, i} + k_{\text{p}, \text{IV}, i}, \quad (7.12b)$$

$$c_{\Sigma, i} = c_{\Sigma, \text{I}, i} + c_{\Sigma, \text{II}, i} + c_{\Sigma, \text{III}, i} + c_{\Sigma, \text{IV}, i}, \quad (7.12c)$$

$$c_{\text{p}, i} = c_{\text{p}, \text{I}, i} + c_{\text{p}, \text{II}, i} + c_{\text{p}, \text{III}, i} + c_{\text{p}, \text{IV}, i}, \quad (7.12d)$$

$$m_{\Sigma, i} = m_{\Sigma, \text{I}, i} + m_{\Sigma, \text{II}, i} + m_{\Sigma, \text{III}, i} + m_{\Sigma, \text{IV}, i}, \quad (7.12e)$$

$$m_{\text{p}, i} = m_{\text{p}, \text{I}, i} + m_{\text{p}, \text{II}, i} + m_{\text{p}, \text{III}, i} + m_{\text{p}, \text{IV}, i}. \quad (7.12f)$$

Die logarithmischen Dekremente der Teilmatrizen $\Lambda_{\text{I}, i}$ bis $\Lambda_{\text{IV}, i}$ ergeben sich aus den skalaren Größen der Teilmatrizen und der alternativen Formulierung des logarithmischen Dekrements Λ_i , vgl. Gleichung 7.9. Beispielfhaft ergibt sich das logarithmische Teildekrement der ersten Teilmatrix $\Lambda_{\text{I}, i}$ zu

$$\Lambda_{\text{I}, i} = \frac{\pi}{\Im(\lambda_i)} \frac{\Re(\lambda_i) (c_{\Sigma, \text{I}, i} m_{\Sigma, \text{I}, i} - c_{\text{p}, \text{I}, i} m_{\text{p}, \text{I}, i}) + i (k_{\Sigma, \text{I}, i} m_{\text{p}, \text{I}, i} - k_{\text{p}, \text{I}, i} m_{\Sigma, \text{I}, i})}{\Im(\lambda_i) (m_{\Sigma, \text{I}, i}^2 - m_{\text{p}, \text{I}, i}^2) + i (c_{\Sigma, \text{I}, i} m_{\text{p}, \text{I}, i} - c_{\text{p}, \text{I}, i} m_{\Sigma, \text{I}, i}) / 2}. \quad (7.13)$$

Die Summe der Teildekremente ergibt das logarithmische Dekrement des rotordynamischen Systems

$$\Lambda_i = \Lambda_{\text{I}, i} + \Lambda_{\text{II}, i} + \Lambda_{\text{III}, i} + \Lambda_{\text{IV}, i}. \quad (7.14)$$

Die Zerlegung des logarithmischen Dekrements in die Teildekremente ermöglicht es somit neben der Analyse des Verhaltens des gesamten Systems auch den Beitrag der einzelnen Teilmatrizen zu ebendiesem zu untersuchen. Hierdurch entsteht ein Werkzeug, welches es erlaubt, die Teilmatrizen des Systems hinsichtlich ihres stabilisierenden oder destabilisierenden Charakters zu beurteilen.

7.2 Einfluss einer generalisierten Betrachtung auf das Systemverhalten

Im Folgenden wird das Systemverhalten des Beispielsystems anhand des logarithmischen Dekrements Λ sowie dem Dämpfungsmaß ξ und der Eigenkreisfrequenz des gedämpften Systems ω_D analysiert. Im Wesentlichen wird hierbei das Systemverhalten mit und ohne Betrachtung der zusätzlichen 36 rotordynamischen Koeffizienten verglichen. Hierfür werden die Ergebnisse der weiterführenden Parameterstudien verwendet und der Einfluss einer Variation der Ringspaltlänge L sowie des Vordralls $C_\varphi|_{z=0}$ auf das System untersucht. Die Auswahl der Parameter ist dadurch begründet, dass die Ringspaltlänge L sowie der Vordrall $C_\varphi|_{z=0}$ einen besonders großen Einfluss auf das Systemverhalten im Hinblick auf die Stabilität aufweisen. Die Ergebnisse der Variation der verbleibenden Parameter der relativen Exzentrizität ε , der Lage des Taumelpunkts z_T , der modifizierten Reynoldszahl Re_φ^* und der Durchflusszahl ϕ sind im Anhang E aufgeführt.

7.2.1 Einfluss der Ringspaltlänge

Abbildung 7.2 zeigt den Einfluss der Variation der Ringspaltlänge L auf das logarithmische Dekrement Λ , das Dämpfungsmaß ξ sowie die Eigenkreisfrequenz des gedämpften Systems ω_D . Die Variation der Ringspaltlänge L erfolgt hierbei in einem Bereich von $L = 0.2$ bis $L = 2.5$. Die Anordnung der Diagramme ist hierbei so gewählt, dass die linke Seite das Systemverhalten mit und die rechte Seite das Systemverhalten ohne die Betrachtung der zusätzlichen 36 rotordynamischen Koeffizienten darstellt. Vereinfacht wird zur weiteren Unterscheidung der Diagramme der Index $\square_{4 \times 4}$ für die Verwendung aller 48 Koeffizienten und der Index $\square_{2 \times 2}$ für die Beschreibung des dynamischen Einflusses auf Basis von 12 rotordynamischen Koeffizienten eingeführt. Innerhalb der Abbildung wird zunächst das logarithmische Dekrement Λ , gebildet aus der gesamten Koeffizientenmatrix, d.h. 48 bzw. 12 rotordynamischen Koeffizienten, betrachtet. Die Darstellung des logarithmischen Dekrements Λ erfolgt halb-logarithmisch für die Y-Achse. Aufgrund dessen wird stets der Betrag des Dekrements $|\Lambda|$ aufgetragen. In der gesamten Abbildung stehen schwarze Marker für ein instabiles Systemverhalten, d.h. $\Lambda, \xi < 0$. Zur vereinfachten Orientierung sind auch die entsprechenden Marker der Eigenkreisfrequenzen ω_D schwarz hervorgehoben.

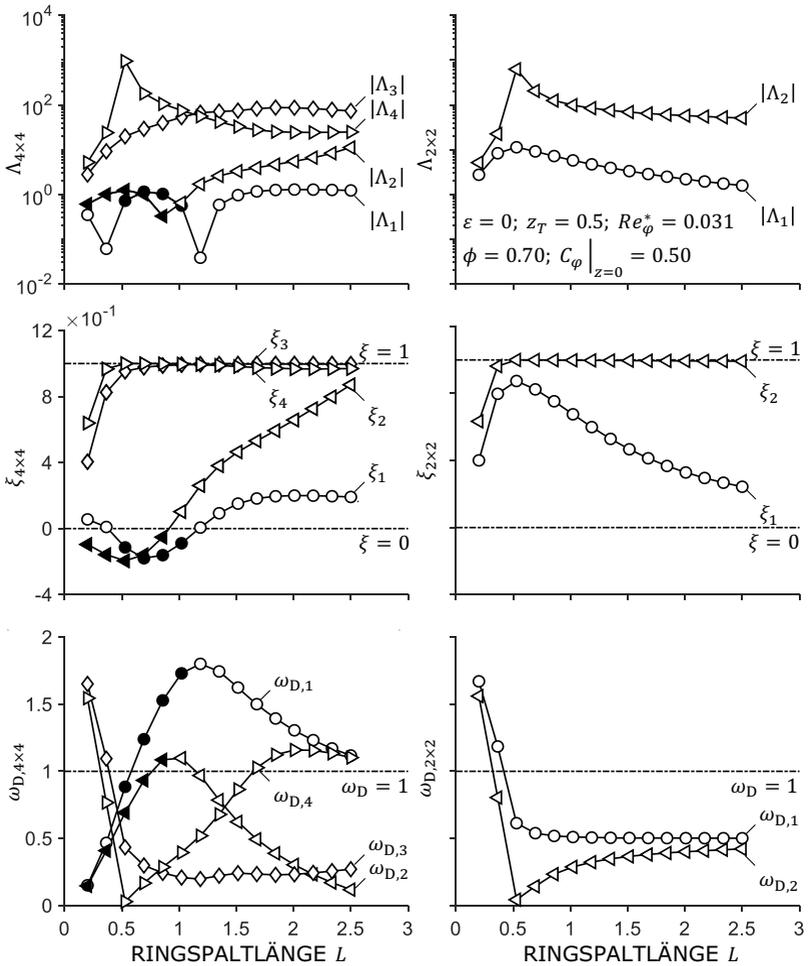


Abbildung 7.2 – Einfluss der Ringspaltlänge L auf das logarithmische Dekrement Λ , das Dämpfungsmaß ξ und die Eigenkreisfrequenz des gedämpften Systems ω_D . Schwarze Marker stehen hierbei stellvertretend für ein instabiles Systemverhalten, d.h. $\Lambda, \xi < 0$. Die linke Seite zeigt das System unter Betrachtung aller 48 rotordynamischen Koeffizienten, wohingegen die rechte Seite das Systemverhalten auf Basis von 12 Koeffizienten darstellt.

Zunächst wird das Systemverhalten mit Hilfe des logarithmischen Dekrements Λ betrachtet. Hierbei zeigt sich, dass für das System unter Betrachtung aller 48 rotordynamischen Koeffizienten vier anstatt zwei logarithmische Dekremente Λ berechnet werden. Dies begründet sich durch die gestiegene Anzahl an Eigenwerten. Das System mit 12 rotordynamischen Koeffizienten besitzt zwei konjugiert komplexe Eigenwertpaare. Durch die zusätzliche Betrachtung der rotatorischen Freiheitsgrade erhöht sich die Anzahl auf vier komplex konjugierte Eigenwertpaare. Es zeigt sich, dass das System mit 48 rotordynamischen Koeffizienten ab einer Ringspaltlänge von $L < 1.0$ instabil wird. Hierbei wird sowohl das logarithmische Dekrement Λ_1 sowie bei weiterer Reduktion der Ringspaltlänge L das logarithmische Dekrement Λ_2 negativ¹⁴. Im Vergleich dazu ist das System mit 12 Koeffizienten über den gesamten betrachteten Bereich stabil.

Das gleiche Verhalten zeigt sich auch bei der Betrachtung des Dämpfungsmaßes ξ . Dies ist nicht verwunderlich, da das Dämpfungsmaß ξ aus dem logarithmischen Dekrement Λ berechnet werden kann, vgl. Gleichung 7.2. Während eine Reduktion der Ringspaltlänge L zu instabilem Verhalten des Systems mit 48 Koeffizienten führt, ist das System mit 12 rotordynamischen Koeffizienten über den gesamten Bereich stabil. Neben der Information über das Auf- bzw. Abklingen von Schwingungen, d.h. $\xi < 0$ bzw. $\xi > 0$, beinhaltet das Dämpfungsmaß ξ zusätzlich die Information über die Art der Systemdämpfung. Liegt ein schwach gedämpftes System vor, so weist das Dämpfungsmaß ξ Werte zwischen 0 und 1 auf, d.h. $0 < \xi < 1$. Ist ein System hingegen stark gedämpft, ist das Dämpfungsmaß $\xi > 1$. Ein stark gedämpftes System ist nicht schwingfähig. Dementsprechend sind die Eigenwerte des Systems rein reell und das logarithmische Dekrement Λ strebt gegen unendlich, d.h. $\Lambda \rightarrow \infty$. Es zeigt sich, dass bei dem System mit 48 rotordynamischen Koeffizienten zwei der vier Eigenwertpaare λ_3 und λ_4 ab einer Ringspaltlänge von $L > 0.6$ stark gedämpft sind, d.h. $\xi_3, \xi_4 \approx 1$. Das System mit 12 rotordynamischen Koeffizienten weist hingegen nur ein Eigenwertpaar mit starker Dämpfung auf, d.h. $\xi_2 \approx 1$. Im Hinblick auf den Einfluss der Ringspaltlänge L auf das Systemverhalten gilt, dass bei einer Vergrößerung der Ringspaltlänge L das System mit 48 rotordynamischen Koeffizienten steigende bzw. konstante logarithmische Dekremente Λ_i bzw. Dämpfungsmaße ξ_i aufweist. Dementsprechend entfernt sich das System von der Stabilitätsgrenze, d.h. $\Lambda_i, \xi_i = 0$. Das System mit reduziertem Detaillierungsgrad, d.h. 12 rotordynamischen Koeffizienten, weist hingegen mit zunehmender Ringspaltlänge L abnehmende bzw. konstante logarithmische Dekremente Λ_i und Dämpfungsmaße ξ_i auf.

¹⁴Logarithmische Dekremente kleiner Null $\Lambda < 0$ sind durch schwarze Marker gekennzeichnet.

Bevor im nächsten Absatz auf den Einfluss der Teilmatrizen auf das System eingegangen wird, werden die Eigenkreisfrequenzen der Systeme ω_D betrachtet. Die Eigenkreisfrequenzen des Systems mit 12 rotodynamischen Koeffizienten liegen hierbei in einem weiten Bereich unterhalb der Eigenkreisfrequenz $\omega_D = 1$. Diese Grenze ist insofern interessant, da hierbei die Kreisfrequenz des Rotors $\tilde{\Omega}$ gerade der Eigenkreisfrequenz des gedämpften Systems $\tilde{\omega}_D$ entspricht, d.h. $\omega_D = \tilde{\omega}_D/\tilde{\Omega} = 1$. Im Gegensatz dazu liegen die Eigenkreisfrequenzen des Systems mit 48 rotodynamischen Koeffizienten sowohl oberhalb als auch unterhalb der kritischen Eigenkreisfrequenz $\omega_D = 1$. Zu erkennen ist zudem, dass die Übereinstimmung der Eigenkreisfrequenzen ω_D mit der kritischen Frequenz ω_D nicht gleichbedeutend mit einem instabilen Systemverhalten ist. Beispielhaft ist dieses Verhalten bei einer Ringspaltlänge von $L \approx 1.75$ und der Eigenkreisfrequenz $\omega_{D,4}$ zu erkennen. Aufgrund des großen Dämpfungsmaßes ξ_4 ist hierbei lediglich mit einer Amplitudenüberhöhung des Systems zu rechnen¹⁵.

¹⁵GASCH, NORDMANN UND PFÜTZNER, *Rotordynamik*, ([27], 2002)

Einfluss der Teilmatrizen auf das Systemverhalten

Abschließend wird nochmals auf die Analyse des Systemverhaltens mit Hilfe des logarithmischen Dekrements Λ eingegangen. Wie bereits erwähnt, zeigt das System unter Betrachtung aller 48 rotordynamischen Koeffizienten sowohl stabile als auch instabile Betriebszustände. Bisher wurde jedoch keine Aussage über den Einfluss der Teilmatrizen auf das Systemverhalten, d.h. ihre stabilisierende oder destabilisierende Wirkung, getroffen. Hierfür wird im Folgenden die alternative Formulierung des logarithmischen Dekrements Λ und die damit einhergehende Möglichkeit der Betrachtung der logarithmischen Teildekremente Λ_I bis Λ_{IV} verwendet. Hierbei werden lediglich die Dekremente, welche das Systemverhalten am stärksten beeinflussen, d.h. die logarithmischen Dekremente Λ_1 und Λ_2 , betrachtet. Die Betrachtung der logarithmischen Dekremente Λ_3 und Λ_4 ist im Anhang E dargestellt. Abbildung 7.3 zeigt die logarithmischen Dekremente Λ_1 und Λ_2 sowie die Zerlegung desselben in die Dekremente der Teilmatrizen I bis IV. Die logarithmischen Dekremente der Teilmatrizen I und II $\Lambda_{I,i}$ und $\Lambda_{II,i}$ sowie die Dekremente der Teilmatrizen III und IV $\Lambda_{III,i}$ und $\Lambda_{IV,i}$ werden unterhalb des zerlegten Dekrements Λ_i dargestellt. Schwarze Marker stehen hierbei erneut stellvertretend für negative Werte der logarithmischen Dekremente, d.h. $\Lambda < 0$.

Wird zunächst die Zerlegung des logarithmischen Dekrements Λ_1 betrachtet, so zeigt sich, dass die Teildekremente $\Lambda_{I,1}$ und $\Lambda_{II,1}$ sowie die Dekremente $\Lambda_{III,1}$ und $\Lambda_{IV,1}$ in den gleichen Größenordnungen liegen. Die Dekremente der Teilmatrizen I und II sind hierbei um eine Größenordnung größer als die Dekremente der Teilmatrizen III und IV. Dementsprechend sind vor allem die Kräfte auf den Rotor ausschlaggebend für das Systemverhalten. Dieses Erkenntnis wurde bereits bei der Analyse der Relevanz der zusätzlichen 36 rotordynamischen Koeffizienten verwendet, vgl. Kapitel 6.

Des Weiteren zeigt sich, dass die Teildekremente $\Lambda_{I,1}$ sowie $\Lambda_{IV,1}$ über einen weiten Bereich der untersuchten Ringspaltlänge L positiv sind. Dementsprechend wirken die Teilmatrizen I und IV stabilisierend auf das System. Die Teildekremente $\Lambda_{II,1}$ und $\Lambda_{III,1}$ sind hingegen über einen weiten Bereich negativ und wirken somit destabilisierend auf das System ein. Physikalisch interpretiert bedeutet dies, dass die Kräfte durch translatorische Bewegungen sowie die Momente durch rotatorische Bewegungen stabilisierend auf das System wirken. Die Kräfte durch rotatorische Bewegungen sowie die Momente durch translatorische Bewegungen haben hingegen einen destabilisierenden Einfluss.

Das zerlegte logarithmische Dekrement Λ_1 wird immer dann kleiner Null, wenn die Summe der Teildekremente kleiner als Null wird, d.h. $\Lambda_1 = \Lambda_{I,1} +$

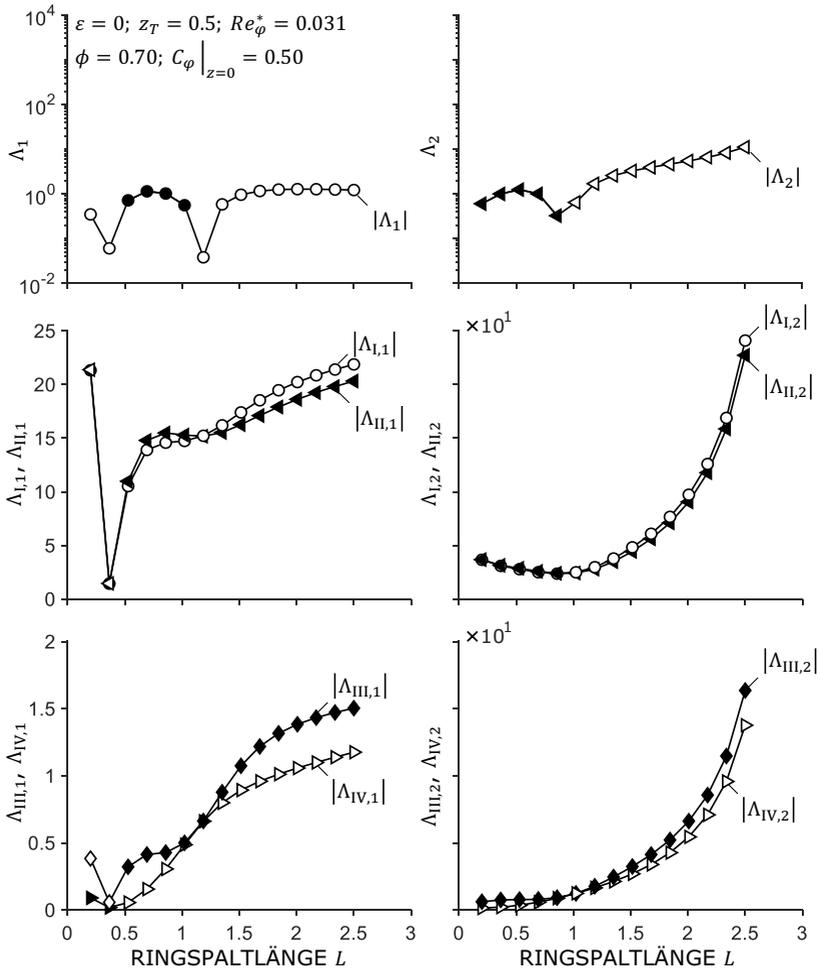


Abbildung 7.3 – Einfluss der Ringspaltlänge L auf das logarithmische Dekrement Λ_i mit $i = 1, 2$ und die logarithmischen Teildekrement $\Lambda_{I,i}$ bis $\Lambda_{IV,i}$. Die linke Seite zeigt das logarithmische Dekrement Λ_1 sowie die Zerlegung desselben in die Teildekrement $\Lambda_{I,1}$ bis $\Lambda_{IV,1}$, wohingegen die rechte Seite das logarithmische Dekrement Λ_2 und die Zerlegung desselben in die Teildekrement $\Lambda_{I,2}$ bis $\Lambda_{IV,2}$ darstellt. Schwarze Marker stehen hierbei stellvertretend für eine destabilisierende Wirkung auf das System, d.h. $\Lambda_{I...IV,i} < 0$.

$\Lambda_{II,1} + \Lambda_{III,1} + \Lambda_{IV,1} < 0$. Für den hier betrachteten Fall ist dies bei einer Ringspaltlänge von $L \approx 1$ der Fall. Hierbei übersteigt die destabilisierende Wirkung der Teilmatrix II die stabilisierende Wirkung der Teilmatrix I, d.h. $|\Lambda_{II,1}| > |\Lambda_{I,1}|$.

Das gleiche Verhalten zeigt sich auch bei der Betrachtung der Zerlegung des logarithmischen Dekrements Λ_2 . Erneut haben jeweils die Teildekremente $\Lambda_{I,2}$ und $\Lambda_{II,2}$ sowie die Teildekremente $\Lambda_{III,2}$ und $\Lambda_{IV,2}$ die gleiche Größenordnung. Zudem zeigt sich erneut, dass die Teildekremente $\Lambda_{I,2}$ und $\Lambda_{IV,2}$ stabilisierend auf das System wirken. Die Teildekremente $\Lambda_{II,2}$ und $\Lambda_{III,2}$ hingegen üben erneut einen destabilisierenden Einfluss auf das System aus. Übersteigt der stabilisierende Einfluss der Teilmatrix I den destabilisierenden Einfluss der Teilmatrix II, d.h. $|\Lambda_{I,2}| > |\Lambda_{II,2}|$, wird das logarithmische Dekrement Λ_1 positiv. Angemerkt sei an dieser Stelle, dass für die logarithmischen Dekremente Λ_3 und Λ_4 ein umgekehrtes Verhalten beobachtet werden kann. Hierbei wirken die Teildekremente $\Lambda_{II,3...4}$ und $\Lambda_{III,3...4}$ stabilisierend, während die Teildekremente $\Lambda_{I,3...4}$ und $\Lambda_{IV,3...4}$ destabilisierend auf das System wirken, vgl. Anhang E.

7.2.2 Einfluss des Vordralls

Im Anschluss wird der Einfluss des Vordralls $C_\varphi|_{z=0}$ auf das Systemverhalten untersucht, vgl. Abbildung 7.4. Die Variation des Vordralls $C_\varphi|_{z=0}$ erfolgt in einem Bereich von $C_\varphi|_{z=0} = -1$ bis $C_\varphi|_{z=0} = 2$. Zunächst wird das Systemverhalten mit Hilfe des logarithmischen Dekrements Λ betrachtet. Ähnlich wie bei der Betrachtung des Einflusses der Ringspaltlänge L weist das System mit 48 rotordynamischen Koeffizienten sowohl stabile als auch instabile Betriebszustände auf. Hierbei führt sowohl ein positiver Vordrall von $C_\varphi|_{z=0} > 0.9$ als auch ein negativer Vordrall $C_\varphi|_{z=0} < 0$ zur Instabilität des betrachteten Systems. Erneut sind die logarithmischen Dekremente Λ_1 und Λ_2 ausschlaggebend für das Systemverhalten. Das logarithmische Dekrement Λ_1 wird bei einem Vordrall von $C_\varphi|_{z=0} > 0.9$ negativ, wohingegen das Dekrement Λ_2 bei einem Vordrall von $C_\varphi|_{z=0} < 0$ kleiner Null wird. Im Vergleich dazu ist das System mit 12 Koeffizienten über den gesamten betrachteten Bereich stabil. Eine Erhöhung des Vordralls $C_\varphi|_{z=0}$ ist hierbei gleichbedeutend mit einer Abnahme des logarithmischen Dekrements, d.h. das System nähert sich der Stabilitätsgrenze.

Das gleiche Verhalten zeigt sich auch bei der Betrachtung des Dämpfungsmaßes ξ . Eine Erhöhung des Vordralls $C_\varphi|_{z=0}$ führt hierbei zu einer Reduktion des Dämpfungsmaßes ξ_1 , wohingegen das Dämpfungsmaß ξ_2 einen ansteigenden Verlauf bei Erhöhung des Vordralls $C_\varphi|_{z=0}$ aufweist. Ähnlich zur Betrachtung des Einflusses der Ringspaltlänge L sind die Eigenwertpaare λ_3 und λ_4 des Systems mit 48 rotordynamischen Koeffizienten stark gedämpft, d.h. $\xi_3, \xi_4 \approx 1$. Im Gegensatz dazu ist bei der Betrachtung des Systems mit 12 Koeffizienten nur das Eigenwertpaar λ_2 stark gedämpft, d.h. $\xi_2 \approx 1$.

Bevor abschließend auf den Einfluss der Teilmatrizen auf das Systemverhalten eingegangen wird, werden die Eigenkreisfrequenzen des gedämpften Systems ω_D betrachtet. Während bei der Betrachtung des Systems mit 12 rotordynamischen Koeffizienten die Eigenkreisfrequenzen ω_D in einem weiten Bereich unterhalb der kritischen Eigenkreisfrequenz von $\omega_D = 1$ liegen, zeigt das System mit 48 rotordynamischen Koeffizienten sowohl Eigenkreisfrequenzen ω_D unterhalb als auch oberhalb der kritischen Eigenkreisfrequenz $\omega_D = 1$. Eine Erhöhung des Vordralls $C_\varphi|_{z=0}$ führt hierbei zu einer Reduktion der Eigenkreisfrequenzen $\omega_{D,2}$ bis $\omega_{D,4}$. Die Eigenkreisfrequenz $\omega_{D,1}$ zeigt hingegen ein gegensätzliches Verhalten. Hierbei kommt es zu einer Erhöhung der Eigenkreisfrequenz $\omega_{D,1}$ bei Erhöhung des Vordralls $C_\varphi|_{z=0}$.

Die Eigenkreisfrequenzen des Systems mit 12 rotordynamischen Koeffizienten nehmen zunächst mit zunehmendem Vordrall $C_\varphi|_{z=0}$ ab. Ab einem Vordrall von $C_\varphi|_{z=0} \approx -0.6$ bzw. einem Vordrall von $C_\varphi|_{z=0} \approx 1.5$ erfolgt eine Umkehr des Trends. Dementsprechend steigt die Eigenkreisfrequenz $\omega_{D,1}$ ab einem

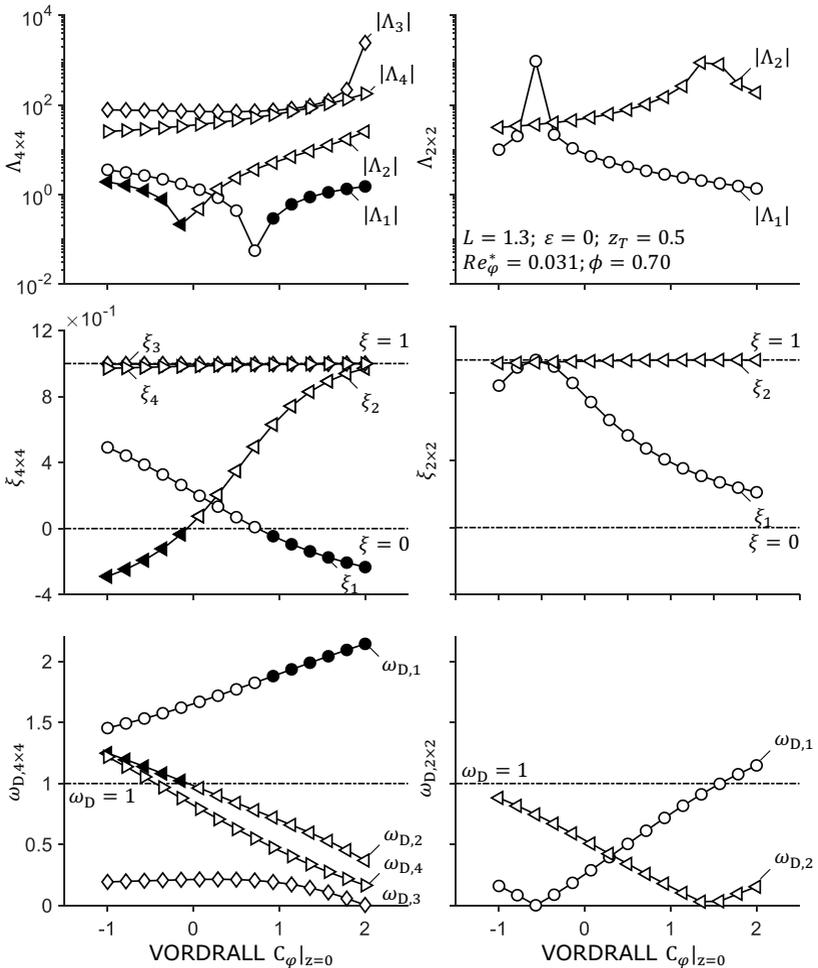


Abbildung 7.4 – Einfluss des Vordralls $C_\varphi|_{z=0}$ auf das logarithmische Dekrement Λ , das Dämpfungsmaß ξ und die Eigenkreisfrequenz des gedämpften Systems ω_D . Schwarze Marker stehen hierbei stellvertretend für ein instabiles Systemverhalten, d.h. $\Lambda, \xi < 0$. Die linke Seite zeigt das Systemverhalten unter Betrachtung aller 48 rotordynamischen Koeffizienten, wohingegen die rechte Seite das Systemverhalten auf Basis von 12 Koeffizienten darstellt.

Vordrall von $C_\varphi|_{z=0} > -0.6$ und die Eigenkreisfrequenz $\omega_{D,2}$ ab einem Vordrall von $C_\varphi|_{z=0} > 1.5$ an.

Einfluss der Teilmatrizen auf das Systemverhalten

Abschließend wird der Einfluss der Teilmatrizen I bis IV auf das Systemverhalten untersucht. Abbildung 7.5 zeigt die Zerlegung der logarithmischen Dekremente Λ_1 und Λ_2 in ihre Teildekremente Λ_I bis Λ_{IV} . Die Zerlegung der logarithmischen Dekremente Λ_1 und Λ_2 zeigt hierbei das gleiche Verhalten wie bei der Betrachtung des Einflusses der Ringspaltlänge L . Es zeigt sich, dass die logarithmischen Dekremente der Teilmatrizen I und IV $\Lambda_{I,i}$ und $\Lambda_{IV,i}$ mit $i = 1, 2$ stabilisierend auf das System einwirken. Die Dekremente der Teilmatrizen II und III $\Lambda_{II,i}$ und $\Lambda_{III,i}$ hingegen wirken destabilisierend. Physikalisch interpretiert bedeutet das erneut, dass die Kräfte durch translatorische und die Momente durch rotatorische Bewegung stabilisierend auf das System einwirken. Die Kräfte durch rotatorische und die Momente durch translatorische Bewegung wirken hingegen destabilisierend.

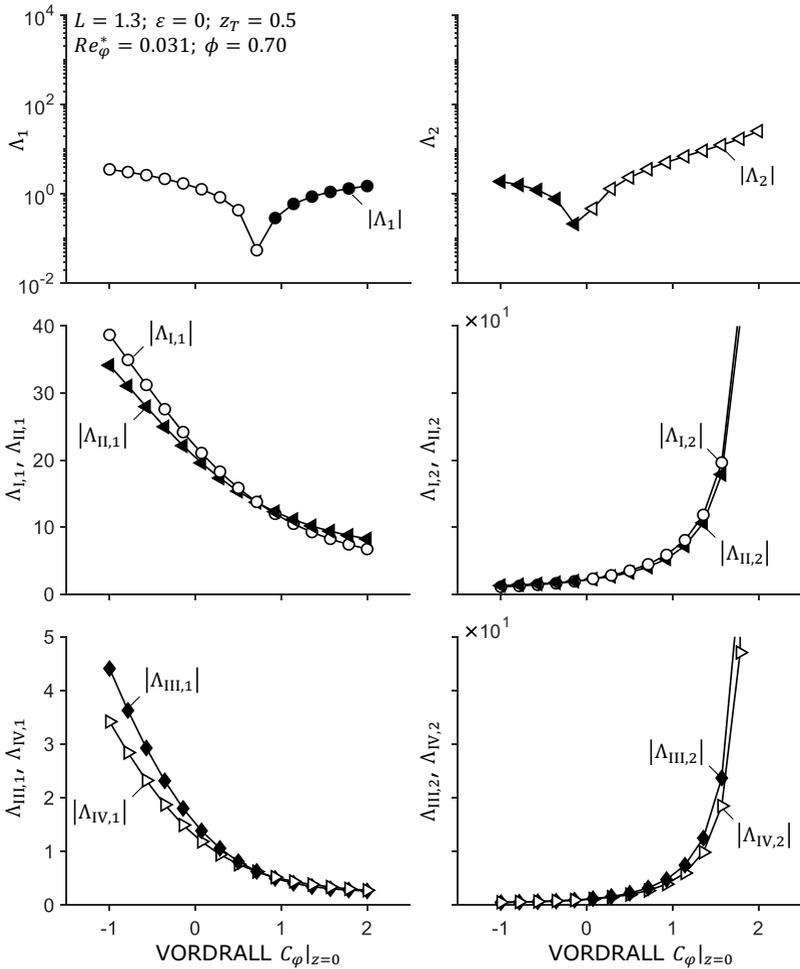


Abbildung 7.5 – Einfluss des Vordralls $C_{\varphi}|_{z=0}$ auf das logarithmische Dekrement Λ_i mit $i = 1, 2$ und die logarithmischen Teildekrement $\Lambda_{I,i}$ bis $\Lambda_{IV,i}$. Die linke Seite zeigt das logarithmische Dekrement Λ_1 sowie die Zerlegung desselben in die Teildekrement $\Lambda_{I,1}$ bis $\Lambda_{IV,1}$, wohingegen die rechte Seite das logarithmische Dekrement Λ_2 und die Zerlegung desselben in die Teildekrement $\Lambda_{I,2}$ bis $\Lambda_{IV,2}$ darstellt. Schwarze Marker stehen hierbei stellvertretend für eine destabilisierende Wirkung auf das System, d.h. $\Lambda_{I...IV,i} < 0$.

7.3 Zwischenfazit

Abschließend erfolgt eine kurze Zusammenfassung des Kapitels sowie eine Einordnung der Bedeutung für die vorliegende Arbeit. Die in Kapitel 6 gewonnenen Ergebnisse werden in Kapitel 7 zur Analyse des Verhaltens eines beispielhaften rotordynamischen Systems verwendet. Hierbei wird das Systemverhalten unter Betrachtung aller 48 rotordynamischen Koeffizienten dem Systemverhalten auf Basis eines reduzierten Detaillierungsgrades, d.h. 12 Koeffizienten, gegenübergestellt.

Zur Identifikation destabilisierender und stabilisierender Phänomene wird in Kapitel 7.1 zunächst eine alternative Formulierung des logarithmischen Dekrements Λ hergeleitet. Diese alternative Formulierung erlaubt es, den Einfluss der Teilmatrizen I bis IV auf das Systemverhalten zu charakterisieren und stabilisierende bzw. destabilisierende Phänomene zu identifizieren. Im Anschluss daran werden in Kapitel 7.2 die Berechnungsergebnisse des Clearance-Averaged Pressure Models zur Analyse des Systemverhaltens verwendet. Im Wesentlichen wird hierbei der Einfluss der Ringspaltlänge L sowie des Vordralls $C_\varphi|_{z=0}$ betrachtet. Es zeigt sich ein deutlich unterschiedliches Verhalten der Systeme mit und ohne Betrachtung der zusätzlichen 36 rotordynamischen Koeffizienten. Kapitel 7 gibt somit eine Antwort auf die Forschungsfrage:

- (iii) *Welche Auswirkung hat eine Betrachtung aller 48 rotordynamischen Koeffizienten auf die Analyse des Systemverhaltens?*

Das unterschiedliche Verhalten ist hierbei auf die stabilisierenden und destabilisierenden Phänomene der Kräfte und Momente auf den Rotor durch translatorische und rotatorische Bewegungen zurückzuführen. Hierbei zeigt sich, dass für die logarithmischen Dekremente, welche das Systemverhalten maßgeblich bestimmen, d.h. Λ_1 und Λ_2 , die Kräfte aus der translatorischen Bewegung sowie die Momente aus der rotatorischen Bewegung, d.h. die Teilmatrizen I und IV, einen stabilisierenden Einfluss auf das System aufweisen. Die Kräfte aus der rotatorischen Bewegung und die Momente aus der translatorischen Bewegung, d.h. die Teilmatrizen II und III, wirken hingegen destabilisierend auf das System.

Kapitel 8

Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassung

Die dynamischen Eigenschaften axial durchströmter Ringspalte sind maßgeblich für das rotordynamische Verhalten moderner Fluidenergiemaschinen verantwortlich. Durch strömungsmechanische Effekte innerhalb der Ringspalte werden bewegungsabhängige Kräfte und Momente auf den Rotor induziert. Das detaillierte Verständnis und die Vorhersage dieser dynamischen Eigenschaften sind von essentieller Bedeutung zur Vermeidung unkontrollierbarer Maschinenschwingungen. Obgleich der dynamische Einfluss axial durchströmter Ringspalte unbestritten ist, vernachlässigt der Großteil der theoretischen und experimentellen Untersuchungen in der Literatur die induzierten Momente durch translatorische sowie die durch die rotatorischen Freiheitsgrade induzierten Kräfte und Momente. Begründet wird diese Reduktion des Detaillierungsgrads bei der Betrachtung des dynamischen Einflusses mit einer zu vernachlässigenden Relevanz der Koeffizienten unterhalb einer pauschalen Ringspaltlänge von 1.5 mal dem Radius des Rotors. Die Herleitung dieses pauschalen geometrischen Schwellenwerts vernachlässigt jedoch jedweden andere Parameter des Ringspalts gänzlich. Zudem ist eine systematische theoretische und vor allem experimentelle Untersuchung des Einflusses der Betriebs- und Geometrieparameter des Ringspalts auf alle 48 rotordynamischen Koeffizienten nach Kenntnisstand des Autors nicht vorhanden. Die fehlenden Kenntnisse über das systematische Verhalten der rotordynamischen Koeffizienten führt zudem zu einem limitierten Verständnis über die Auswirkungen auf das dynamische Verhalten eines rotordynamischen Systems.

Die vorliegende Arbeit liefert einen maßgeblichen Beitrag zur Schließung dieser Forschungslücke. Aufbauend auf der zentralen Frage nach der Kenntnis der dynamischen Eigenschaften axial durchströmter Ringspalte beantwortet diese Arbeit die drei Forschungsfragen:

- (i) *Welchen Einfluss haben die Betriebs- und Geometrieparameter des Ringspalts auf die 48 rotordynamischen Koeffizienten?*
- (ii) *Bei welchen Randbedingungen werden die induzierten Momente durch translatorische sowie die induzierten Kräfte und Momente durch rotatorische Bewegungen relevant?*
- (iii) *Welche Auswirkung hat eine Betrachtung aller 48 rotordynamischen Koeffizienten auf die Analyse des Systemverhaltens?*

Zur Beantwortung der Forschungsfragen werden innerhalb dieser Arbeit sowohl theoretische als auch experimentelle Untersuchungen durchgeführt.

Zunächst wird der Stand der Forschung hinsichtlich der dynamischen Eigenschaften enger Ringspalte wie Gleitlager und berührungsloser Fluidichtungen aufgearbeitet. Besonders die Annahmen zur Vernachlässigung der zusätzlichen induzierten Momente durch translatorische sowie durch die rotatorischen Freiheitsgrade induzierten Kräfte und Momente werden hervorgehoben und kritisch diskutiert. Eine wesentliche Erkenntnis der Aufarbeitung ist, dass die Annahmen zur Vernachlässigung der zusätzlichen rotordynamischen Koeffizienten zum einen nicht alle geometrischen und betrieblichen Parameter eines Ringspalts mit einschließen und zum anderen in realen Maschinen so gut wie nie erfüllt sind. Daraus resultiert die Notwendigkeit einer generalisierten Betrachtung des rotordynamischen Einflusses inklusive der induzierten Momente durch translatorische sowie der durch die rotatorischen Freiheitsgrade induzierten Kräfte und Momente.

Ebendiese Kräfte aus den rotatorischen Bewegungen sowie die Momente auf den Rotor durch translatorische und rotatorische Bewegungen sind sowohl auf theoretischer als auch auf experimenteller Ebene nur unzureichend erforscht. Zur Schließung dieser Wissenslücke wird ein zeiteffizientes Berechnungswerkzeug, das Clearance-Averaged Pressure Model, zur Berechnung der rotordynamischen Eigenschaften axial durchströmter Ringspalte erweitert. Das auf den Arbeiten von Lang¹ aufbauende Modell wird hierbei um einen Perturbationsansatz erweitert und mit Daten aus der Literatur verglichen.

¹ LANG, *Effiziente Berechnung von Gleitlagern und Dichtspalten in Turbomaschinen*, ([50], 2018)

Die begrenzte Verfügbarkeit an verlässlichen und vollständigen Datensätzen verhindert jedoch eine aussagekräftige Validierung des Modells. Zur ausführlichen Validierung wird ein eigens konzipierter Prüfstand zur Identifikation der dynamischen Eigenschaften axial durchströmter Ringspalte vorgestellt. Der weltweit einzigartige magnetgelagerte Prüfstand ermöglicht es sowohl die statischen als auch dynamischen Eigenschaften axial durchströmter Ringspalte in den relevanten Parameterbereichen zu identifizieren. Kern des Prüfstands bilden zwei aktive Magnetlager. Durch ihre inhärente Kraft- und Positionsmessung direkt an der Lagerstelle sowie der Möglichkeit zur definierten Aufprägung von Anregungen auf den Rotor eignen sich Magnetlager in hohem Maße für den Einsatz in experimentellen Untersuchungen im Hinblick auf die Identifikation dynamischer Systeme. Zur Sicherstellung der Validität und Reproduzierbarkeit der experimentellen Untersuchungen werden zunächst ausführliche Voruntersuchungen durchgeführt. Ein besonderes Augenmerk liegt hierbei auf der Identifikation bekannter physikalischer Größen wie der Masse des verwendeten Rotors, der virtuellen Masse des Wassers im Prüfstandskern und dem generierten Auftrieb des Rotors bei Anregung durch die Magnetlager. Zur Quantifizierung der Messunsicherheit der identifizierten rotordynamischen Koeffizienten wird eine rigorose Quantifizierung der Unsicherheit des Prüfstands durchgeführt.

Im Anschluss an die Vorstellung des Prüfstands wird dieser verwendet, um das erweiterte Clearance-Averaged Pressure Model zu validieren. Die experimentellen Parameterstudien zur Identifikation der dynamischen Eigenschaften axial durchströmter Ringspalte werden mit den Berechnungen des Clearance-Averaged Pressure Models verglichen. Die Validität der Modellvorhersage wird dabei auf Grundlage der berechneten Messunsicherheit der rotordynamischen Koeffizienten beurteilt. Es zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung der experimentell identifizierten rotordynamischen Koeffizienten mit den Vorhersagen des Clearance-Averaged Pressure Models.

Im Anschluss daran wird das Clearance-Averaged Pressure Model verwendet, um Betriebsbereiche außerhalb der physikalischen Möglichkeiten des Spaltströmungsprüfstands zu untersuchen und eine Antwort auf die Forschungsfragen (i) und (ii) zu geben. Die Relevanz einer generalisierten Betrachtung auf Basis aller 48 rotordynamischen Koeffizienten wird hierbei in Anlehnung an die Ausführungen von Childs² durchgeführt. Es zeigt sich, dass neben der allgemein verwendeten Größe der Ringspaltlänge auch die Durchflusszahl und die modifizierte Reynoldszahl ausschlaggebend für die Beurteilung der Relevanz der zusätzlichen rotordynamischen Koeffizienten ist. Auf Basis dieser Größen lässt sich ein einfaches Diagramm zur Beurteilung des Einflusses der

² CHILDS, *Turbomachinery rotordynamics: Phenomena, modeling, and analysis*, ([13], 1993)

zusätzlichen induzierten Momente durch translatorische sowie die durch die rotatorischen Freiheitsgrade induzierten Kräfte und Momente ableiten. Dieses Diagramm ermöglicht eine schnelle Beurteilung, ob bei der Betrachtung des dynamischen Einflusses von axial durchströmten Ringspalten eine generalisierte Betrachtung notwendig ist oder von einem reduziertem Detaillierungsgrad ausgegangen werden kann.

Die Antworten auf die Forschungsfragen (i) und (ii) sind jedoch nicht gleichbedeutend mit der Kenntnis des Verhaltens eines rotordynamischen Systems hinsichtlich stabiler oder instabiler Betriebsbereiche. Zur Beantwortung der Forschungsfrage (iii) werden die zuvor gewonnenen Ergebnisse genutzt, um das Systemverhalten bei einer generalisierten Betrachtung des rotordynamischen Einflusses axial durchströmter Ringspalte im Vergleich zu einer Betrachtung mit reduziertem Detaillierungsgrad zu untersuchen. Hierfür wird zunächst eine alternative Formulierung des logarithmischen Dekrements hergeleitet, welche es ermöglicht, die stabilisierende bzw. destabilisierende Wirkung der auf den Rotor wirkenden Kräfte und Momente durch translatorische bzw. rotatorische Bewegungen zu identifizieren. Anschließend erfolgt die Gegenüberstellung des Systems mit generalisierter Betrachtung, d.h. 48 Koeffizienten, und reduziertem Detaillierungsgrad, d.h. 12 Koeffizienten, auf Basis des logarithmischen Dekrements, des Dämpfungsmaßes und der Eigenfrequenz des gedämpften Systems. Es zeigen sich deutliche Unterschiede des Verhaltens zwischen den Systemen mit generalisierter und reduzierter Betrachtung des dynamischen Einflusses axial durchströmter Ringspalte. Während das System mit reduziertem Detaillierungsgrad über den gesamten untersuchten Parameterraum stabile Betriebszustände aufweist, zeigen sich bei der generalisierten Betrachtung des dynamischen Einflusses instabile Betriebszustände. Diese resultieren vornehmlich aus den Kräften aus der rotatorischen Bewegung und den Momenten aus der translatorischen Bewegung. Im Allgemeinen gilt, dass die Kräfte aus der translatorischen Bewegung sowie die Momente aus der rotatorischen Bewegung einen stabilisierenden Einfluss auf das System aufweisen. Die Kräfte aus der rotatorischen Bewegung und die Momente aus der translatorischen Bewegung wirken hingegen destabilisierend auf das System.

Ausblick

Die in dieser Arbeit beantworteten Forschungsfragen stellen nur einen kleinen Teil der offenen Fragen auf dem Gebiet axial durchströmter Ringspalte dar. Das Clearance-Averaged Pressure Model sowie der Spaltströmungsprüfstand bieten eine Vielzahl von Möglichkeiten für zukünftige Forschung.

Die in dieser Arbeit durchgeführten experimentellen und theoretischen Untersuchungen beziehen sich ausschließlich auf glatte, nicht profilierte Ringspaltgeometrien. Typische berührungslose Fluiddichtungen wie Labyrinthdichtungen weisen jedoch zum Teil komplexe Oberflächenstrukturen auf. Diese Strukturen beeinflussen zum einen die axiale Druckdifferenz und zum anderen die dynamischen Eigenschaften des axial durchströmten Ringspalts. Eine systematische experimentelle und theoretische Untersuchung der dynamischen Eigenschaften profilierter Fluiddichtungen mit allen 48 rotordynamischen Koeffizienten ist nach Kenntnisstand des Autors jedoch nicht vorhanden. Der hier vorgestellte Spaltströmungsprüfstand sowie das Clearance-Averaged Pressure Model bieten eine ideale Basis zur Untersuchung der statischen und dynamischen Eigenschaften dieser Maschinenelemente. Hierbei könnte das CAPM beispielsweise auf Basis eines Mesoskalenmodells zur Beschreibung der Oberflächenprofilierungen erweitert werden.

Weiterhin wird innerhalb dieser Arbeit von einer turbulenten Strömung innerhalb des Ringspalts ausgegangen. Besonders klassische, ölgeschmierte Gleitlager sowie bestimmte fördermediengeschmierte Gleitlager sind jedoch charakterisiert durch das Auftreten laminarer Strömung im Ringspalt. Eine Betrachtung der dynamischen Eigenschaften axial durchströmter Ringspalte mit laminarer Strömung erscheint vor diesem Gesichtspunkt als logisch. Durch die Anpassung der Ansatzfunktionen und der Modellierung der Schubspannungen des Clearance-Averaged Pressure Model zeigt bereits Lang³, dass das Modell grundsätzlich auch zur Betrachtung laminarer Strömung geeignet ist. Auf Seiten der experimentellen Untersuchung existiert am Institut für Fluidsystemtechnik zudem ein weiterer magnetgelagerter Prüfstand zur Untersuchung der statischen und dynamischen Eigenschaften axial durchströmter Ringspalte mit laminarer Strömung.

Eine weitere innerhalb dieser Arbeit getätigte Annahme ist die Vernachlässigung von Phasenwechsel- oder Ausgasungsvorgängen wie Kavitation im Ringspalt. Besonders in klassischen, ölgeschmierten Gleitlagern ist diese Annahme nicht erfüllt. Die Mehrphasigkeit der Strömung und die damit einhergehende Präsenz einer gasförmigen, kompressiblen Phase wirkt sich besonders auf

³ LANG, *Effiziente Berechnung von Gleitlagern und Dichtspalten in Turbomaschinen*, ([50], 2018)

die dynamischen Eigenschaften des Ringspalts aus. Den Ausführungen in Kapitel 2.1 folgend sind die rotordynamischen Koeffizienten bei Auftreten von Phasenwechsel- und Ausgasungsvorgängen auch eine Funktion der Kreisfrequenz der Präzessionsbewegung $\tilde{\omega}$. Der hier vorgestellte Prüfstands Aufbau eignet sich ebenfalls zur Untersuchung der statischen und dynamischen Eigenschaften kavitierender Ringspaltströmungen. Zur Detektion dieser sind lediglich kleine Umbauten, welche die optische Zugänglichkeit ermöglichen, erforderlich.

Abschließend sei die Erweiterung des Prüfstands und des Clearance-Averaged Pressure Models hin zur Beschreibung radial durchströmter Spalte wie Axialschub-Entlastungselemente oder axiale Gleitlager zu erwähnen. Besonders hierbei ist, dass durch die radiale Durchströmung des Spalts neben den translatorischen und rotatorischen Freiheitsgraden auch der axiale Freiheitsgrad z in das Modell und den Prüfstand eingebracht wird. Die rotordynamischen Koeffizientenmatrizen erweitern sich dementsprechend von ursprünglich 16 Koeffizienten für die Steifigkeiten, Dämpfungen und Trägheiten auf 25 Koeffizienten pro Matrix. Systematische theoretische und experimentelle Untersuchungen des dynamischen Verhaltens auf Basis aller 75 rotordynamischen Koeffizienten sind nach Kenntnisstand des Autors nicht vorhanden.

Mit dem in dieser Arbeit vorgestellten erweiterten Clearance-Averaged Pressure Model sowie dem weltweit einzigartigen Spaltströmungsprüfstand stehen zwei validierte und zuverlässige Instrumente zur Verfügung, die auch in Zukunft erfolgversprechend für die Forschung auf dem Gebiet durchströmter Ringspalte eingesetzt werden können.

Literatur

- [1] M. L. Adams. „Insights into linearized rotor dynamics, Part 2“. In: *Journal of Sound and Vibration* 112.1 (1987), S. 97–110.
- [2] M. L. Adams und J. Padovan. „Insights into linearized rotor dynamics“. In: *Journal of Sound and Vibration* 76.1 (1981), S. 129–142.
- [3] G. K. Batchelor. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 2012.
- [4] T. Bayer. „Erweiterung eines 2D-Modells zur Berechnung rotordynamischer Koeffizienten in engen Ringspalten“. Bachelorthesis. Darmstadt: Technische Universität Darmstadt, 2019.
- [5] P. Beckerle, H. Schaede und S. Rinderknecht. „Fault Diagnosis and State Detection in Centrifugal Pumps—A Review of Applications“. In: *Proceedings of the 9th IFToMM International Conference on Rotor Dynamics*. Hrsg. von P. Pennacchi. Bd. 21. Mechanisms and Machine Science. Cham: Springer International Publishing, 2015, S. 387–398.
- [6] C. E. Brennen. „A Review of Added Mass and Fluid Inertial Forces“. In: *Department of the Navy, Port Hueneme, CA, USA* (1982).
- [7] D. E. Brewe. „Theoretical Modeling of the Vapor Cavitation in Dynamically Loaded Journal Bearings“. In: *Journal of Tribology* 108.4 (1986), S. 628–637.
- [8] P. W. Bridgman. *Dimensional Analysis*. New Haven, USA: Yale University Press, 1922.
- [9] P. D. Brown und D. W. Childs. „Measurement Versus Predictions of Rotordynamic Coefficients of a Hole-Pattern Gas Seal With Negative Preswirl“. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 134.12 (2012), S. 122503.
- [10] E. Buckingham. „On Physically Similar Systems; Illustrations of the Use of Dimensional Equations“. In: *Physical Review* 4.4 (1914), S. 345–376.

- [11] D. W. Childs. „Finite-Length Solutions for Rotordynamic Coefficients of Turbulent Annular Seals“. In: *Journal of Lubrication Technology* 105.3 (1983), S. 437–444.
- [12] D. W. Childs. „Rotordynamic moment coefficients for finite-length turbulent seals“. In: *Proceedings of the IFToMM Conference on Rotordynamic Problems in Power Plants* (1982), S. 371–378.
- [13] D. W. Childs. *Turbomachinery rotordynamics: Phenomena, modeling, and analysis*. A Wiley Interscience publication. New York: Wiley, 1993.
- [14] D. W. Childs, S. Arthur und N. J. Mehta. „The Impact of Hole Depth on the Rotordynamic and Leakage Characteristics of Hole-Pattern-Stator Gas Annular Seals“. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 136.4 (2014), S. 042501.
- [15] D. W. Childs, C. C. Nelson, T. Noyes und J. B. Dressman. „A high-Reynolds-number seal test facility: Facility description and preliminary test data“. In: *NASA. Lewis Research Center Rotordyn. Instability Probl. in High-Performance Turbomachinery* (1982).
- [16] D. W. Childs und J. L. Wade. „Rotordynamic-Coefficient and Leakage Characteristics for Hole-Pattern-Stator Annular Gas Seals - Measurements Versus Predictions“. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 126.2 (2004), S. 326.
- [17] P. de Choudhury. „Rotordynamic Stability Case Studies“. In: *International Journal of Rotating Machinery* 10.3 (2004), S. 203–211.
- [18] V. N. Constantinescu. „On Turbulent Lubrication“. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers* 173.1 (1959), S. 881–900.
- [19] V. N. Constantinescu und S. Galetuse. „On the Possibilities of Improving the Accuracy of the Evaluation of Inertia Forces in Laminar and Turbulent Films“. In: *Journal of Lubrication Technology* 96.1 (1974), S. 69–77.
- [20] B. H. Ertas, A. Delgado und G. Vannini. „Rotordynamic Force Coefficients for Three Types of Annular Gas Seals With Inlet Preswirl and High Differential Pressure Ratio“. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 134.4 (2012), S. 042503.
- [21] M. Falco, G. Diana und G. Marengo. „Experimental research on the behaviour of hydrodynamic plain seals by means of a specific testing device (A. P. S. A. L.)“ In: *Energ. Elettr.* LIX:10 (1982), S. 355–360.

- [22] H. Feng und S. Jiang. „Dynamics of a motorized spindle supported on water-lubricated bearings“. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science* 231.3 (2017), S. 459–472.
- [23] H. Feng, S. Jiang und A. Ji. „Investigations of the static and dynamic characteristics of water-lubricated hydrodynamic journal bearing considering turbulent, thermohydrodynamic and misaligned effects“. In: *Tribology International* 130 (2019), S. 245–260.
- [24] J. H. Ferziger und M. Peric. *Numerische Strömungsmechanik*. 1. Aufl. Berlin: Springer, 2008.
- [25] H. C. Garg, H. B. Sharda und V. Kumar. „On the design and development of hybrid journal bearings: a review“. In: *Tribotest* 12.1 (2006), S. 1–19.
- [26] R. Gasch, K. Knothe und R. Liebich. *Strukturdynamik*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- [27] R. Gasch, R. Nordmann und H. Pfützner. *Rotordynamik*. 2., vollst. Neubearb. und erw. Aufl. Berlin u.a.: Springer, 2002.
- [28] J. F. Gülich. *Kreiselpumpen: Handbuch für Entwicklung, Anlagenplanung und Betrieb*. 3. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2010.
- [29] A. C. Hagg. „The Influence of Oil-Film Journal Bearings on the Stability of Rotating Machines“. In: *Journal of Applied Mechanics* 13.3 (1946), A211–A220.
- [30] A. C. Hagg und G. O. Sankey. „Some Dynamic Properties of Oil-Film Journal Bearings With Reference to the Unbalance Vibration of Rotors“. In: *Journal of Applied Mechanics* 23.2 (1956), S. 302–306.
- [31] B. Hermann. „Identifikation der dynamischen Eigenschaften axial durchströmter Ringspalte“. Masterthesis. Darmstadt: Technische Universität Darmstadt, 2021.
- [32] G. G. Hirs. „A Bulk-Flow Theory for Turbulence in Lubricant Films“. In: *Journal of Lubrication Technology* 95.2 (1973), S. 137–145.
- [33] G. G. Hirs. „Fundamentals of a bulk-flow theory for turbulent lubricant films“. Dissertation. Delft: Technische Universität Delft, 1970.
- [34] A. Hurwitz. „Über die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt (1895)“. In: *Mathematische Werke*. Hrsg. von A. Hurwitz. Basel: Springer Basel, 1963, S. 533–545.

- [35] T. Iwatsubo und H. Ishimaru. „Consideration of Whirl Frequency Ratio and Effective Damping Coefficient of Seal“. In: *Journal of System Design and Dynamics* 4.1 (2010), S. 177–188.
- [36] T. Iwatsubo und B. C. Sheng. „Evaluation of Seal Effects on the Stability of Rotating Fluid Machinery“. In: *International Journal of Rotating Machinery* 2.2 (1995), S. 85–92.
- [37] B. O. Jacobson und B. J. Hamrock. „High-Speed Motion Picture Camera Experiments of Cavitation in Dynamically Loaded Journal Bearings“. In: *Journal of Lubrication Technology* 105.3 (1983), S. 446–452.
- [38] Joint Committee for Guides in Metrology. *Evaluation of Measurement Data—Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*. Hrsg. von Bureau International des Poids et Mesures. 2008.
- [39] P. Jolly, M. Arghir, O. Bonneau und M.-A. Hassini. „Experimental and Theoretical Rotordynamic Coefficients of Smooth and Round-Hole Pattern Water-Fed Annular Seals“. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 140.11 (2018).
- [40] Y. Kanemori und T. Iwatsubo. „Experimental Study of Dynamic Fluid Forces and Moments for a Long Annular Seal“. In: *Journal of Tribology* 114.4 (1992), S. 773–778.
- [41] Y. Kanemori und T. Iwatsubo. „Forces and Moments Due to Combined Motion of Conical and Cylindrical Whirls for a Long Seal“. In: *Journal of Tribology* 116.3 (1994), S. 489–498.
- [42] Y. Kanemori und T. Iwatsubo. „Rotordynamic Analysis of Submerged Motor Pumps : Influence of Long Seal on the Stability of Fluid Machinery“. In: *JSME international journal. Ser. C, Dynamics, control, robotics, design and manufacturing* 37.1 (1994), S. 193–201.
- [43] E. Kim und A. B. Palazzolo. „Rotordynamic Stability Effects of Shrouded Centrifugal Impellers With Combined Whirl and Precession“. In: *Journal of Vibration and Acoustics* 140.2 (2018), S. 021007.1–12.
- [44] E. Knopf. *Identifikation der Dynamik turbulenter Gleitlager mit aktiven Magnetlagern*. Forschungsberichte Mechatronik & Maschinenakustik. Aachen: Shaker, 2001.
- [45] L. Kreuder. „Experimentelle Validierung eines Tools zur Berechnung hydrodynamischer Kräfte“. Masterthesis. Darmstadt: Technische Universität Darmstadt, 2020.

- [46] T. Krüger. *Experimentelle Untersuchung von Quetschfilmdämpfern mit Hilfe aktiver Magnetlager*. Forschungsberichte Mechatronik & Maschinenakustik. Aachen: Shaker, 2009.
- [47] M. M. G. Kuhr, S. R. Lang und P. F. Pelz. „Static force characteristic of annular gaps -Experimental and simulation results“. In: *Journal of Tribology* (To be published).
- [48] M. M. G. Kuhr, G. Ludwig und P. F. Pelz. „Measurement and simulation of the dynamic characteristics of plain and profiled annular seals“. In: *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science* 774.1 (2021), S. 012073.
- [49] M. Kurohashi, T. Iwatsubo, R. Kawai und T. Fujikawa. „Energetic Evaluation of Stability in Rotor-bearing System : Contribution of Each Element to Logarithmic Decrement“. In: *Bulletin of JSME* 26.212 (1983), S. 276–282.
- [50] S. R. Lang. *Effiziente Berechnung von Gleitlagern und Dichtspalten in Turbomaschinen*. Bd. Band 18. Forschungsberichte zur Fluidsystemtechnik. Aachen: Shaker Verlag, 2018.
- [51] S. R. Lang und P. F. Pelz. „Unified Prediction of Hydrodynamic Forces in Plain Annular Seals and Journal Bearings by means of an Analytically Derived Design Tool“. In: *3rd International Rotating Equipment Conference (IREC) Pumps, Compressors and Vacuum Technology 2016, Duesseldorf, Germany* (2016).
- [52] B. E. Launder und M. A. Leschziner. „Flow in Finite-Width Thrust Bearings Including Inertial Effects: II—Turbulent Flow“. In: *Journal of Lubrication Technology* 100.3 (1978), S. 339–345.
- [53] B. E. Launder und M. A. Leschziner. „Flow in Finite-Width, Thrust Bearings Including Inertial Effects: I—Laminar Flow“. In: *Journal of Lubrication Technology* 100.3 (1978), S. 330–338.
- [54] K. T. Logan. „Erweiterung eines Modells zur Berechnung rotordynamischer Koeffizienten in engen Ringspalten“. Masterthesis. Darmstadt: Technische Universität Darmstadt, 2020.
- [55] A. A. Lomakin. „Calculation of the critical speed and the conditions to ensure dynamic stability of the rotors in high pressure hydraulic machines, taking account of the forces in the seals (in Russian). Energomashinostroenie, 14“. In: *Energo Mashinostroenie* 14.4 (1958), S. 1–5.

- [56] J. W. Lund. *Rotor-Bearing Dynamics Design technology. Part VII: The Three Lobe Bearing and Floating Ring Bearing: Technical Report AFAPL- TR-65-4l, Part VII*. Wright-Patterson Air Force Base, Ohio: Air Force Aero Propulsion Laboratory Air Force Systems Command, 1968.
- [57] J. W. Lund. „Stability and Damped Critical Speeds of a Flexible Rotor in Fluid-Film Bearings“. In: *Journal of Engineering for Industry* 96.2 (1974), S. 509–517.
- [58] J. W. Lund. „The Stability of an Elastic Rotor in Journal Bearings With Flexible, Damped Supports“. In: *Journal of Applied Mechanics* 32.4 (1965), S. 911.
- [59] J. Lunze. *Regelungstechnik 1*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2010.
- [60] R. Markert. *Strukturodynamik: Skript zur Vorlesung Strukturodynamik für Maschinenbauer*. 1., verb. Aufl. Darmstadt: Techn. Univ. Darmstadt Fachgebiet Strukturodynamik, 2010.
- [61] M. Matros, A. Ziegler und R. Nordmann. „Fluid Structure Interactions in Annular Seals of Centrifugal Pumps“. In: *Tribology Transactions* 38.2 (1995), S. 353–363.
- [62] L. F. Moody und N. J. Princeton. „Friction Factors for Pipe Flow“. In: *Transactions of the ASME* 66 (1944), S. 671–684.
- [63] R. Moreau und A. I. Korotkin. *Added Masses of Ship Structures*. Bd. 88. Fluid Mechanics and Its Applications. Dordrecht: Springer Netherlands, 2009.
- [64] J. A. Moreland, D. W. Childs und J. T. Bullock. „Measured Static and Rotordynamic Characteristics of a Smooth-Stator/Grooved-Rotor Liquid Annular Seal“. In: *Journal of Fluids Engineering* 140.10 (2018).
- [65] C. C. Nelson und D. T. Nguyen. „Analysis of Eccentric Annular Incompressible Seals: Part 1—A New Solution Using Fast Fourier Transforms for Determining Hydrodynamic Force“. In: *Journal of Tribology* 110.2 (1988), S. 354–359.
- [66] C. C. Nelson und D. T. Nguyen. „Analysis of Eccentric Annular Incompressible Seals: Part 2—Effects of Eccentricity on Rotordynamic Coefficients“. In: *Journal of Tribology* 110.2 (1988), S. 361–366.

- [67] T. Neumer. *Entwicklung einer Versuchsanlage mit aktiver Magnetlagerung zur Parameteridentifikation von Fluid-Struktur-Interaktionen in Strömungsmaschinen: Zugl.: Kaiserslautern, Univ., Diss. Bd. 203*. Fortschritt-Berichte VDI Reihe 11, Schwingungstechnik. Düsseldorf: VDI-Verl., 1994.
- [68] B. L. Newkirk und H. D. Taylor. „Shaft whipping due to oil action in journal bearings“. In: *General Electric Review* 28.8 (1925), S. 559–568.
- [69] J. N. Newman. *Marine hydrodynamics*. 5. printing. Cambridge, Mass.: MIT Press, 1986.
- [70] R. Nordmann und F.-J. Dietzen. „Finite difference analysis of rotordynamic seal coefficients for an eccentric shaft position“. In: *NASA, Lewis Research Center, Rotordynamic Instability Problems in High-Performance Turbomachinery* (1988), S. 269–284.
- [71] P. F. Pelz, P. Groche, M. E. Pfetsch und M. Schaeffner. *Mastering Uncertainty in Mechanical Engineering*. Berlin: Springer Germany, 2021.
- [72] A. Picardo und D. W. Childs. „Rotordynamic Coefficients for a Tooth-on-Stator Labyrinth Seal at 70 Bar Supply Pressures: Measurements Versus Theory and Comparisons to a Hole-Pattern Stator Seal“. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 127.4 (2005), S. 843.
- [73] O. Pinkus. „The Reynolds Centennial: A Brief History of the Theory of Hydrodynamic Lubrication“. In: *Journal of Tribology* 109.1 (1987), S. 2–15.
- [74] S. B. Pope. *Turbulent flows*. 12th ed. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2015.
- [75] H. Reichardt. „Über die Gesetzmäßigkeiten der geradlinigen turbulenten Couetteströmung“. In: *Mitteilungen aus dem Max-Planck-Institut für Strömungsforschung* (1959).
- [76] O. Reynolds. „On the theory of lubrication and its application to Mr. Beauchamp tower’s experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 177 (1886), S. 157–234.
- [77] L. San Andrés. „Effect of Shaft Misalignment on the Dynamic Force Response of Annular Pressure Seals“. In: *Tribology Transactions* 36.2 (1993), S. 173–182.

- [78] L. San Andrés. „The Effect of Journal Misalignment on the Operation of a Turbulent Flow Hydrostatic Bearing“. In: *Journal of Tribology* 115.3 (1993), S. 355–363.
- [79] L. San Andrés. „Turbulent Hybrid Bearings With Fluid Inertia Effects“. In: *Journal of Tribology* 112.4 (1990), S. 699–707.
- [80] L. San Andrés, Z. Yang und D. W. Childs. „Thermal Effects in Cryogenic Liquid Annular Seals—Part II: Numerical Solution and Results“. In: *Journal of Tribology* 115.2 (1993), S. 277–284.
- [81] J. T. Sawicki, R. J. Capaldi und M. L. Adams. „Experimental and Theoretical Rotordynamic Characteristics of a Hybrid Journal Bearing“. In: *Journal of Tribology* 119.1 (1997), S. 132–141.
- [82] L. Z. Schuhmann. „Experimentelle Validierung eines Tools zur Berechnung hydrodynamischer Kräfte“. Bachelorthesis. Darmstadt: Technische Universität Darmstadt, 2020.
- [83] H. Sigloch. *Technische Fluidmechanik*. 10., aktualisierte Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer Vieweg, 2017.
- [84] F. Simon und J. Frêne. „Analysis for Incompressible Flow in Annular Pressure Seals“. In: *Journal of Tribology* 114.3 (1992), S. 431–438.
- [85] F. Simon und J. Frêne. „Rotordynamic coefficients for turbulent annular misaligned seals“. In: *Rotating machinery - Dynamics; Proceedings of the 3rd International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery (ISROMAC-3)* (1992), S. 207–222.
- [86] J. H. Spurk. *Aufgaben zur Strömungslehre*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1995.
- [87] J. H. Spurk. *Dimensionsanalyse in der Strömungslehre*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1992.
- [88] J. H. Spurk und N. Aksel. *Strömungslehre: Einführung in die Theorie der Strömungen*. 7. Aufl. Springer-Lehrbuch. Berlin u.a., 2006.
- [89] B. Sternlicht. „Elastic and Damping Properties of Cylindrical Journal Bearings“. In: *Journal of Basic Engineering* 81.2 (1959), S. 101–107.
- [90] B. Sternlicht, H. Poritsky und E. Arwas. „Dynamic Stability Aspects of Cylindrical Journal Bearings using Compressible and Incompressible Fluids“. In: *First International Symposium on Gas-Lubricated Bearings* (1959).
- [91] B. Sternlicht und N. F. Rieger. „Rotor Stability“. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Conference Proceedings* 182.1 (1967), S. 82–99.

- [92] G. G. Stokes, Hrsg. *Mathematical and Physical Papers*. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
- [93] E. Storteig. „Dynamic characteristics and leakage performance of Dynamic characteristics and leakage performance of liquid annular seals in centrifugal pumps“. Dissertation. Trondheim: Norwegian University of Science and Technology, NTNU, 1999.
- [94] D. C. Sun und D. E. Brewe. „A High Speed Photography Study of Cavitation in a Dynamically Loaded Journal Bearing“. In: *Journal of Tribology* 113.2 (1991), S. 287–292.
- [95] D. C. Sun und D. E. Brewe. „Two Reference Time Scales for Studying the Dynamic Cavitation of Liquid Films“. In: *Journal of Tribology* 114.3 (1992), S. 612–615.
- [96] D. C. Sun, D. E. Brewe und P. B. Abel. „Simultaneous Pressure Measurement and High-Speed Photography Study of Cavitation in a Dynamically Loaded Journal Bearing“. In: *Journal of Tribology* 115.1 (1993), S. 88–95.
- [97] A. Z. Szeri. *Fluid film lubrication: Theory and design*. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.
- [98] The MathWorks, Inc. *Least-Squares Fitting*. 2021.
- [99] R. Tiwari. *Rotor Systems: Analysis and identification*. 1. Aufl. Boca Raton, FL, London und New York: CRC Press, 2018.
- [100] R. Tiwari, A. W. Lees und M. I. Friswell. „Identification of Dynamic Bearing Parameters: A Review“. In: *The Shock and Vibration Digest* 36.2 (2004), S. 99–124.
- [101] R. Tiwari, S. Manikandan und S. K. Dwivedy. „A Review of the Experimental Estimation of the Rotor Dynamic Parameters of Seals“. In: *The Shock and Vibration Digest* 37.4 (2005), S. 261–284.
- [102] J. P. van Doormaal und G. D. Raithby. „Enhancements of the Simple Method for Predicting Incompressible Fluid Flows“. In: *Numerical Heat Transfer* 7.2 (1984), S. 147–163.
- [103] M. Vannarsdall und D. W. Childs. „Static and Rotordynamic Characteristics for a New Hole-Pattern Annular Gas Seal Design Incorporating Larger Diameter Holes“. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 136.2 (2014), S. 022507.
- [104] S. Vogel. „Auslegung, Konstruktion und Aufbau eines Prüfstandes zur rotordynamischen Untersuchung von Dichtspalten“. Masterthesis. Darmstadt: Technische Universität Darmstadt, 2016.

- [105] L. Wang, S. Pei, X. Xiong und H. Xu. „Investigation of the combined influence of turbulence and thermal effects on the performance of water-lubricated hybrid bearings with circumferential grooves and stepped recesses“. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology* 228.1 (2013), S. 53–68.
- [106] M. Weatherwax und D. W. Childs. „Theory Versus Experiment for the Rotordynamic Characteristics of a High Pressure Honeycomb Annular Gas Seal at Eccentric Positions“. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 125.2 (2003), S. 422.
- [107] P. Wetterich. „Entwicklung einer experimentellen Methodik zur Bestimmung der vollständigen rotordynamischen Koeffizientenmatrix enger Ringspalte“. Masterthesis. Darmstadt: Technische Universität Darmstadt, 2019.
- [108] C. M. Woods und D. E. Brewe. „The Solution of the Elrod Algorithm for a Dynamically Loaded Journal Bearing Using Multigrid Techniques“. In: *Journal of Tribology* 111.2 (1989), S. 302–308.
- [109] X. Yan, K. He, J. Li und Z. Feng. „A Generalized Prediction Method for Rotordynamic Coefficients of Annular Gas Seals“. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 137.9 (2015).
- [110] X. Yan, K. He, J. Li und Z. Feng. „Numerical Investigations on Rotordynamic Characteristic of Hole-Pattern Seals With Two Different Hole-Diameters“. In: *Journal of Turbomachinery* 137.7 (2015), S. 071011.
- [111] H. Yu und M. L. Adams. „The linear model for rotor-dynamic properties of journal bearings and seals with combined radial and misalignment motions“. In: *Journal of Sound and Vibration* 131.3 (1989), S. 367–378.
- [112] S. M. Zakharov. „Hydrodynamic lubrication research: Current situation and future prospects“. In: *Journal of Friction and Wear* 31.1 (2010), S. 56–67.
- [113] M. Zeier, J. Hoffmann und M. Wollensack. „Metas.UncLib —a measurement uncertainty calculator for advanced problems“. In: *Metrologia* 49.6 (2012), S. 809–815.
- [114] N. Zirkelback und L. San Andrés. „Bulk-Flow Model for the Transition to Turbulence Regime in Annular Pressure Seals“. In: *Tribology Transactions* 39.4 (1996), S. 835–842.

Anhang A

Dimensionsanalyse

Im Folgenden wird die Herleitung der dimensionslosen rotordynamischen Koeffizienten der Steifigkeiten K , Dämpfungen C und Trägheiten M im Detail erläutert. Im Vordergrund steht hierbei die intelligente Entdimensionierung der Koeffizienten, sodass diese auch untereinander quantitativ verglichen werden können. Es ergeben sich vier unterschiedliche Definitionen für die vier unterschiedlichen Kombinationen: (I) induzierte Kräfte auf den Rotor aus der translatorischen Bewegung, (II) induzierte Kräfte auf den Rotor aus der rotatorischen Bewegung, (III) induzierte Momente auf den Rotor aus der translatorischen Bewegung und (IV) induzierte Momente auf den Rotor aus der rotatorischen Bewegung. Die Entdimensionierung wird hierbei mit Hilfe der dimensionsbehafteten Bewegungsgleichung durchgeführt

$$\begin{aligned}
 - \begin{bmatrix} \tilde{F}_X \\ \tilde{F}_Y \\ \tilde{M}_X \\ \tilde{M}_Y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \tilde{K}_{XX} & \tilde{K}_{XY} & \tilde{K}_{X\alpha} & \tilde{K}_{X\beta} \\ \tilde{K}_{XY} & \tilde{K}_{YY} & \tilde{K}_{Y\alpha} & \tilde{K}_{Y\beta} \\ \tilde{K}_{\alpha X} & \tilde{K}_{\alpha Y} & \tilde{K}_{\alpha\alpha} & \tilde{K}_{\alpha\beta} \\ \tilde{K}_{\beta X} & \tilde{K}_{\beta Y} & \tilde{K}_{\beta\alpha} & \tilde{K}_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \\ \alpha_X \\ \beta_Y \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} \tilde{C}_{XX} & \tilde{C}_{XY} & \tilde{C}_{X\alpha} & \tilde{C}_{X\beta} \\ \tilde{C}_{XY} & \tilde{C}_{YY} & \tilde{C}_{Y\alpha} & \tilde{C}_{Y\beta} \\ \tilde{C}_{\alpha X} & \tilde{C}_{\alpha Y} & \tilde{C}_{\alpha\alpha} & \tilde{C}_{\alpha\beta} \\ \tilde{C}_{\beta X} & \tilde{C}_{\beta Y} & \tilde{C}_{\beta\alpha} & \tilde{C}_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{X}} \\ \dot{\tilde{Y}} \\ \dot{\alpha}_X \\ \dot{\beta}_Y \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} \tilde{M}_{XX} & \tilde{M}_{XY} & \tilde{M}_{X\alpha} & \tilde{M}_{X\beta} \\ \tilde{M}_{XY} & \tilde{M}_{YY} & \tilde{M}_{Y\alpha} & \tilde{M}_{Y\beta} \\ \tilde{M}_{\alpha X} & \tilde{M}_{\alpha Y} & \tilde{M}_{\alpha\alpha} & \tilde{M}_{\alpha\beta} \\ \tilde{M}_{\beta X} & \tilde{M}_{\beta Y} & \tilde{M}_{\beta\alpha} & \tilde{M}_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\tilde{X}} \\ \ddot{\tilde{Y}} \\ \ddot{\alpha}_X \\ \ddot{\beta}_Y \end{bmatrix}. \tag{A.1}
 \end{aligned}$$

Hierin enthalten sind zum einen die dimensionsbehafteten Kräfte und Momente auf den Rotor \tilde{F}_X und \tilde{F}_Y bzw. \tilde{M}_X und \tilde{M}_Y sowie die Bewegungen und deren zeitliche Ableitungen in den vier Freiheitsgraden \tilde{X} , \tilde{Y} , α_X und β_Y . In ihrer dimensionsbehafteten Form haben die Steifigkeiten der vier Teilmatrizen die Einheiten $[\tilde{\mathbf{K}}_I] = \text{N/m}$, $[\tilde{\mathbf{K}}_{II}] = \text{N}$, $[\tilde{\mathbf{K}}_{III}] = \text{N}$ und $[\tilde{\mathbf{K}}_{IV}] = \text{Nm}$. Dementsprechend sind in ihrer dimensionsbehafteten Form lediglich die Steifigkeiten der Teilmatrix II und III $\tilde{\mathbf{K}}_{II}$ und $\tilde{\mathbf{K}}_{III}$ vergleichbar. Gleiches gilt für die Dämpfungen $\tilde{\mathbf{C}}$ und Trägheiten $\tilde{\mathbf{M}}$. Um dennoch alle Einträge in den Teilmatrizen vergleichen zu können, werden die dimensionslosen Koeffizienten im Folgenden physikalisch motiviert hergeleitet. Den Ausführungen in Kapitel 2.1 folgend wird der Druck innerhalb des Ringspalts \tilde{p} mit dem dynamischen Druck, gebildet aus der Dichte des Fluids $\tilde{\rho}$ und der Umfangsgeschwindigkeit des Rotors $\tilde{\Omega}\tilde{R}$, entdimensioniert. Die Kräfte und Momente auf den Rotor ergeben sich aus der Integration des Druckes auf der Rotoroberfläche

$$\tilde{F}_X = -\tilde{R} \int_0^{\tilde{L}} \int_0^{2\pi} \tilde{p} \cos \varphi \, d\tilde{\varphi} \, d\tilde{z}, \quad \tilde{F}_Y = -\tilde{R} \int_0^{\tilde{L}} \int_0^{2\pi} \tilde{p} \sin \varphi \, d\tilde{\varphi} \, d\tilde{z} \quad (\text{A.2a})$$

$$\tilde{M}_X = \tilde{R} \int_0^{\tilde{L}} \int_0^{2\pi} (\tilde{z} - \tilde{z}_T) \tilde{p} \sin \varphi \, d\tilde{\varphi} \, d\tilde{z}, \quad (\text{A.2b})$$

$$\tilde{M}_Y = -\tilde{R} \int_0^{\tilde{L}} \int_0^{2\pi} (\tilde{z} - \tilde{z}_T) \tilde{p} \cos \varphi \, d\tilde{\varphi} \, d\tilde{z}.$$

Wird die \tilde{z} -Koordinate und die Lage des Taumelpunkts \tilde{z}_T mit Hilfe der Ringspaltlänge \tilde{L} entdimensioniert, so ergeben sich die Definitionen der dimensionslosen Kräfte und Momente auf den Rotor

$$F_X := \frac{2\tilde{F}_X}{\tilde{\rho}\tilde{\Omega}^2\tilde{R}^3\tilde{L}}, \quad F_Y := \frac{2\tilde{F}_Y}{\tilde{\rho}\tilde{\Omega}^2\tilde{R}^3\tilde{L}}, \quad (\text{A.3a})$$

$$M_X := \frac{2\tilde{M}_X}{\tilde{\rho}\tilde{\Omega}^2\tilde{R}^3\tilde{L}^2}, \quad M_Y := \frac{2\tilde{M}_Y}{\tilde{\rho}\tilde{\Omega}^2\tilde{R}^3\tilde{L}^2}. \quad (\text{A.3b})$$

Wie bereits in Kapitel 2.1 beschrieben werden die physikalischen Größen der Freiheitsgrade in der Bewegungsgleichung derart entdimensioniert, dass diese einen Wertebereich von 0 bis 1 aufweisen. Konkret wird hierbei bei den translatorischen Freiheitsgraden die mittlere Spaltweite \tilde{h} und bei den rotatorischen Freiheitsgraden der maximal mögliche Winkel bei konzentrischer Rotorlage $\alpha_{\text{MAX}} = \beta_{\text{MAX}} = \tilde{h}/\tilde{L}$ zur Entdimensionierung verwendet. Es ergeben sich die dimensionslosen translatorischen und normierten rotatorischen Bewegungen

$$X := \frac{\tilde{X}}{\tilde{h}}, \quad Y := \frac{\tilde{Y}}{\tilde{h}}, \quad \alpha := \frac{\alpha_X}{\alpha_{\text{MAX}}} = \frac{\tilde{L}}{\tilde{h}} \alpha_X, \quad \beta := \frac{\beta_Y}{\beta_{\text{MAX}}} = \frac{\tilde{L}}{\tilde{h}} \beta_Y. \quad (\text{A.4})$$

Wird die zeitliche Ableitung der Freiheitsgrade $d/(d\tilde{t})$ mit Hilfe der Kreisfrequenz des Rotors $\tilde{\Omega}$ entdimensioniert, ist es möglich, die dimensionslose Form der rotordynamischen Koeffizienten aus der Bewegungsgleichung herzuleiten. Es ergeben sich die dimensionslosen Steifigkeiten K

$$\begin{aligned} K_{\text{I}} &:= \frac{2\tilde{h}\tilde{K}_{\text{I}}}{\tilde{\varrho}\tilde{\Omega}^2\tilde{R}^3\tilde{L}^2}, & K_{\text{II}} &:= \frac{2\tilde{h}\tilde{K}_{\text{II}}}{\tilde{\varrho}\tilde{\Omega}^2\tilde{R}^3\tilde{L}^2}, \\ K_{\text{III}} &:= \frac{2\tilde{h}\tilde{K}_{\text{III}}}{\tilde{\varrho}\tilde{\Omega}^2\tilde{R}^3\tilde{L}^2}, & K_{\text{IV}} &:= \frac{2\tilde{h}\tilde{K}_{\text{IV}}}{\tilde{\varrho}\tilde{\Omega}^2\tilde{R}^3\tilde{L}^3}, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Dämpfungen C

$$\begin{aligned} C_{\text{I}} &:= \frac{2\tilde{h}\tilde{C}_{\text{I}}}{\tilde{\varrho}\tilde{\Omega}\tilde{R}^3\tilde{L}^2}, & C_{\text{II}} &:= \frac{2\tilde{h}\tilde{C}_{\text{II}}}{\tilde{\varrho}\tilde{\Omega}\tilde{R}^3\tilde{L}^2}, \\ C_{\text{III}} &:= \frac{2\tilde{h}\tilde{C}_{\text{III}}}{\tilde{\varrho}\tilde{\Omega}\tilde{R}^3\tilde{L}^2}, & C_{\text{IV}} &:= \frac{2\tilde{h}\tilde{C}_{\text{IV}}}{\tilde{\varrho}\tilde{\Omega}\tilde{R}^3\tilde{L}^3}, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

und Trägheiten M

$$\begin{aligned} M_{\text{I}} &:= \frac{2\tilde{h}\tilde{M}_{\text{I}}}{\tilde{\varrho}\tilde{R}^3\tilde{L}^2}, & M_{\text{II}} &:= \frac{2\tilde{h}\tilde{M}_{\text{II}}}{\tilde{\varrho}\tilde{R}^3\tilde{L}^2}, \\ M_{\text{III}} &:= \frac{2\tilde{h}\tilde{M}_{\text{III}}}{\tilde{\varrho}\tilde{R}^3\tilde{L}^2}, & M_{\text{IV}} &:= \frac{2\tilde{h}\tilde{M}_{\text{IV}}}{\tilde{\varrho}\tilde{R}^3\tilde{L}^3}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Die bereits angesprochene Vergleichbarkeit der dimensionslosen Koeffizienten wird anhand einer Betrachtung der Größenordnung der Terme in den Gleichungen deutlich. Vereinfacht soll hierbei lediglich die Kraft auf den Rotor in X -Richtung F_X betrachtet werden. Zudem werden der Übersicht halber lediglich die Steifigkeitskoeffizienten K_{XX} und $K_{X\alpha}$ betrachtet. In dimensionsbehafteter Form haben die Steifigkeiten die physikalische Einheit $[\tilde{K}_{XX}] = \text{N/m}$ und $[\tilde{K}_{X\alpha}] = \text{N}$. Die typischen Größenordnungen ergeben sich zu

$$\tilde{F}_X = \underbrace{\tilde{K}_{XX}}_{\sim 1 \times 10^6 \text{ N/m} \dots \sim 1 \times 10^7 \text{ N/m}} \underbrace{\tilde{X}}_{\sim 1 \times 10^{-4} \text{ m}} + \underbrace{\tilde{K}_{X\alpha}}_{\sim 1 \times 10^5 \text{ N}} \underbrace{\alpha_X}_{\sim 1 \times 10^{-3} \text{ °}}. \quad (\text{A.8})$$

Hierin ist direkt ersichtlich, dass in dimensionsbehafteter Form die rotordynamischen Koeffizienten nicht miteinander verglichen werden dürfen. Wird die dimensionslose Form der Gleichungen betrachtet

$$F_X = K_{XX} \underbrace{\tilde{X}}_{\sim 1} + K_{X\alpha} \underbrace{\alpha_X}_{\sim 1}, \quad (\text{A.9})$$

zeigt sich, dass durch die physikalisch motivierte Entdimensionierung mit der mittleren Spaltweite \bar{h} sowie dem maximal möglichen Winkel bei konzentrischer Rotorlage $\alpha_{\text{MAX}} = \beta_{\text{MAX}}$ die Freiheitsgrade in der Größenordnung $\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(\alpha) = 1$ liegen. Dementsprechend können auch die dimensionslosen rotordynamischen Koeffizienten K_{XX} und $K_{X\alpha}$ untereinander verglichen werden. Die Ausführungen gelten hierbei sowohl für die Dämpfungen C und Trägheiten M als auch für die rotordynamischen Koeffizienten der Momente auf den Rotor. Der Vergleich der rotordynamischen Koeffizienten in Teilmatrix II und III ist von der Dimensionsanalyse unberührt. Dementsprechend können alle dimensionslosen rotordynamischen Koeffizienten der Teilmatrix I bis IV untereinander verglichen werden.

Anhang B

Der Spaltströmungsprüfstand

B.1 Komponenten

Tabelle B.1 – Technische Daten des Magnetlagers.

Parameter	Wert
Anzahl an Windungen	306
Polschuhbreite	18 mm
Polschuhlänge	48 mm
Ruheluftspalt ohne Hallsensoren	1.3 mm
Ruheluftspalt mit Hallsensoren	0.8 mm
Vormagnetisierungsstrom	4 A
Magnetlagerkraft pro Achse und Lager	700 N

Tabelle B.2 – Übersicht der Komponenten des Spaltströmungsprüfstands.

Komponente	Typenbezeichnung
Luftfedern	Bilz Vibration Technology AG FAEBI 125 Standard + BR7-1
Magnetlager	MECOS Traxler AG MARS 2
Asynchronmotor Spaltströmungsprüfstand	Grundfos MGE 132SB2
kardanisch gelagerte Gelenkwelle (motorseitig)	R+W ZAE / 150 / 545
kardanisch gelagerte Gelenkwelle (axiallagerseitig)	MÄDLER WEN 50 & WEN 63
Gleitringdichtung (Metallfaltenbalgdichtung)	METAX GmbH G-SMUA21-120-X001 & X002
Frequenzumrichter Versorgungspumpe	Danfoss A/S VLT HVAC Drive FC-102P55
Asynchronmotor Versorgungspumpe	Brown, Boveri & Cie. UQU 250 M2AC
Versorgungspumpe	KSB SE & Co. KGaA MTC A 50 / 10B
Kühlpumpe	Wilo SE MHIE 803N
Wärmetauscher	HYDAC International GmbH HEX S400-40-00/G3/4

B.2 Messtechnik

Tabelle B.3 – Übersicht der verwendeten Sensoren des Spaltströmungsprüfstands (FS: Full Scale, MW: Messwert).

Messgröße	Sensor	Messbereich	max. Messabw.
Druck \tilde{p}_{EIN}	Keller PAA-33X	0 – 30 bar	0.05 % FS
Druck $\Delta\tilde{p}$	Keller PD-23	0 – 20 bar	0.5 % FS
Druck \tilde{p}_{DYN}	Keller PD-23	0 – 5 bar	0.5 % FS
Volumenstrom \tilde{Q}_{SPALT}	ABB DM4311	0 – 36 m ³ /h	0.2 % MW
Temperatur \tilde{T}	JUMO dTRANS T04	0 – 100 °C	0.1 % FS
Position \tilde{X}, \tilde{Y}	eddylab CM05	0 – 1 mm	0.04 % FS
magnetische Flussdichte \tilde{B}	Asensor Technology AB HE144T	0 – 1 T	0.1 % FS

Anhang C

Experimentelle Identifikation und Modellvalidierung

Im Folgenden werden die verbleibenden Validierungsergebnisse des Clearance-Averaged Pressure Models bei Variation der modifizierten Reynoldszahl Re_φ^* sowie bei Variation des Vordralls $C_\varphi|_{z=0}$ dargestellt, vgl. Kapitel 5. Die identifizierten rotodynamischen Koeffizienten stimmen gut mit den Vorhersagen des CAPM überein. Die Variation der modifizierten Reynoldszahl wird in den Bereichen $0.029 \leq Re_\varphi^* \leq 0.033$ in drei Schritten durchgeführt. Durch das während der Versuche konstant gehaltene relative Spaltspiel von $\psi = 0.0042$ entspricht eine modifizierte Reynoldszahl von $Re_\varphi^* = 0.029$ einer Reynoldszahl von $Re_\varphi = 3000$, während eine modifizierte Reynoldszahl von $Re_\varphi^* = 0.033$ eine Reynoldszahl von $Re_\varphi = 5000$ bedeutet.

Die Variation des Vordralls erfolgt ebenfalls in drei Stufen in einem Bereich von $0.3 \leq C_\varphi|_{z=0} \leq 0.7$. Es zeigt sich eine gute Übereinstimmung der identifizierten Steifigkeits-, Dämpfungs- und Trägheitskoeffizienten im Vergleich mit den Modellvorhersagen des CAPM. Die Variation des Vordralls $C_\varphi|_{z=0}$ zeigt sich am deutlichsten in den Nebensteifigkeiten der Teilmatrix I, d.h. K_{xy} und $|K_{yx}|$.

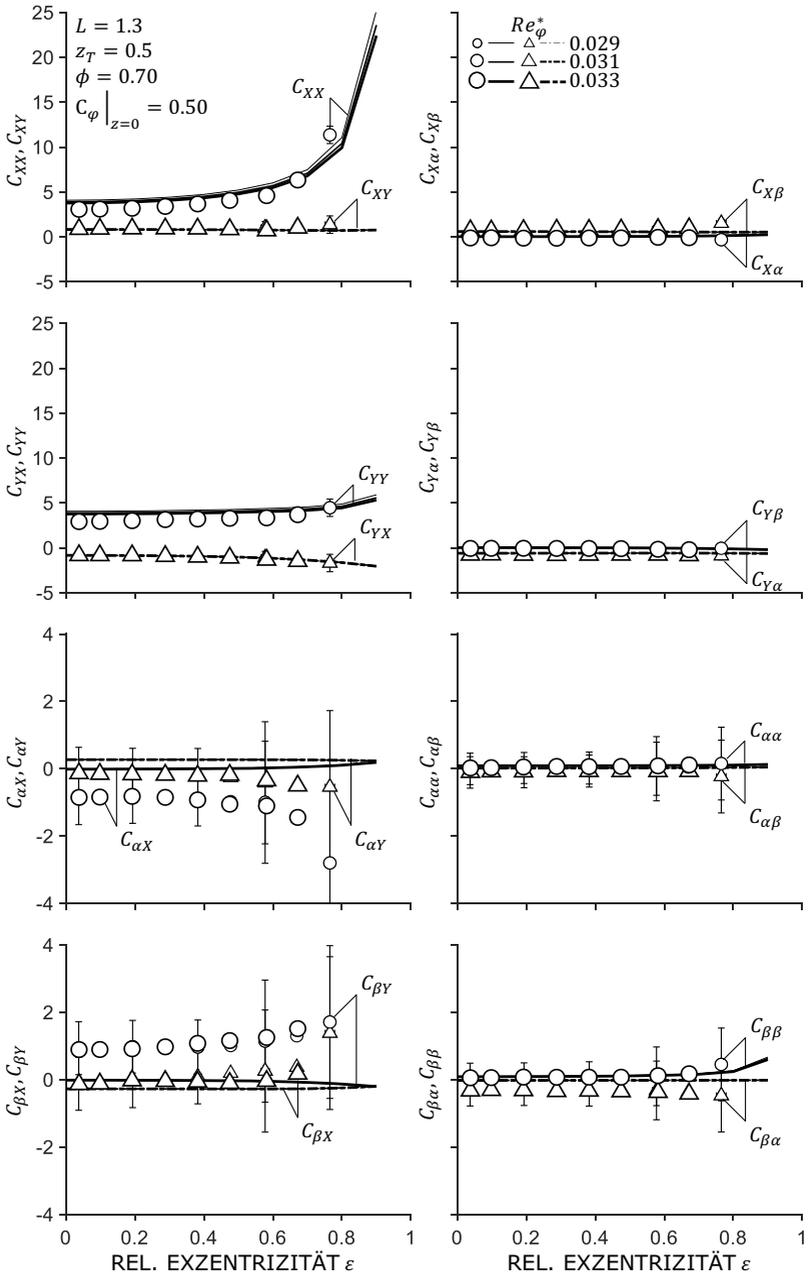


Abbildung C.2 – Validierungsergebnisse des Clearance-Averaged Pressure Modells für die Dämpfungen C bei Variation der modifizierten Reynoldszahl Re_φ^* .

C.2 Variation des Vordralls

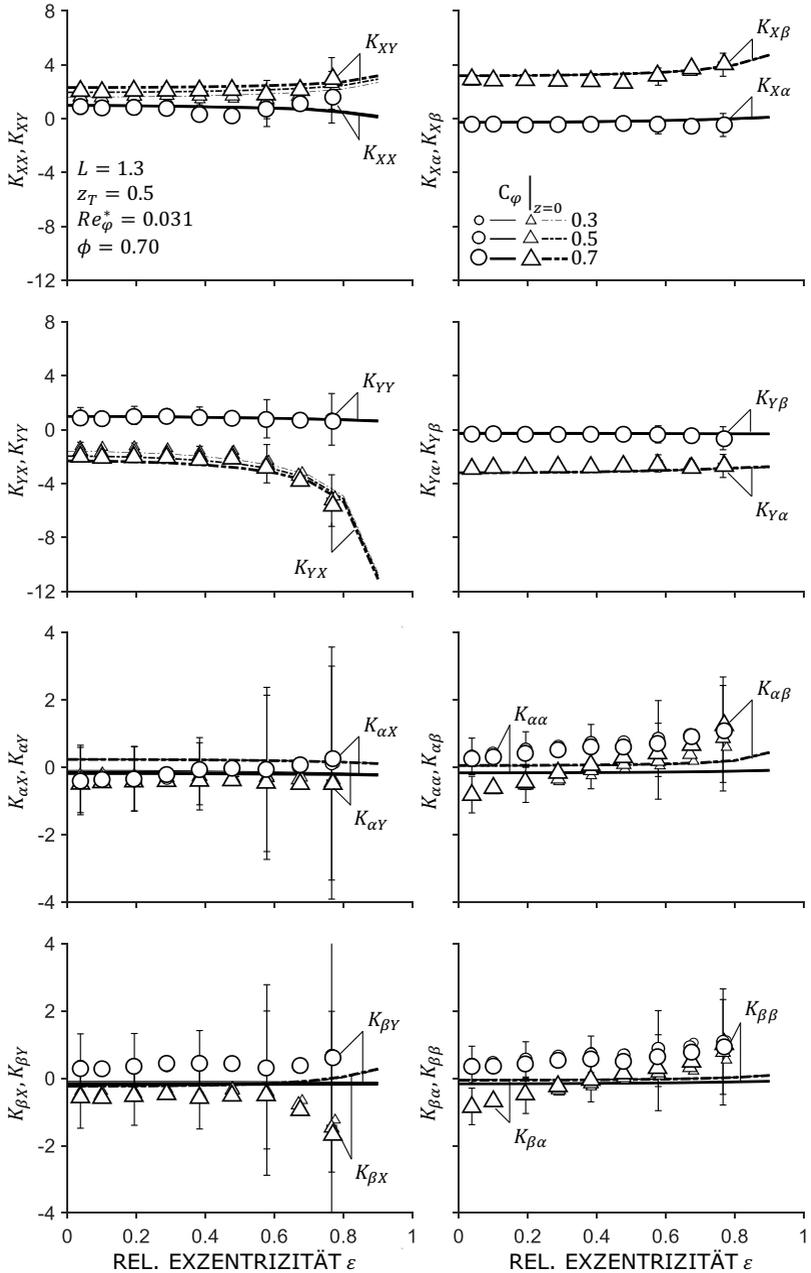


Abbildung C.4 – Validierungsergebnisse des Clearance-Averaged Pressure Models für die Steifigkeiten K bei Variation des Vordralls $C_{\varphi}|_{z=0}$.

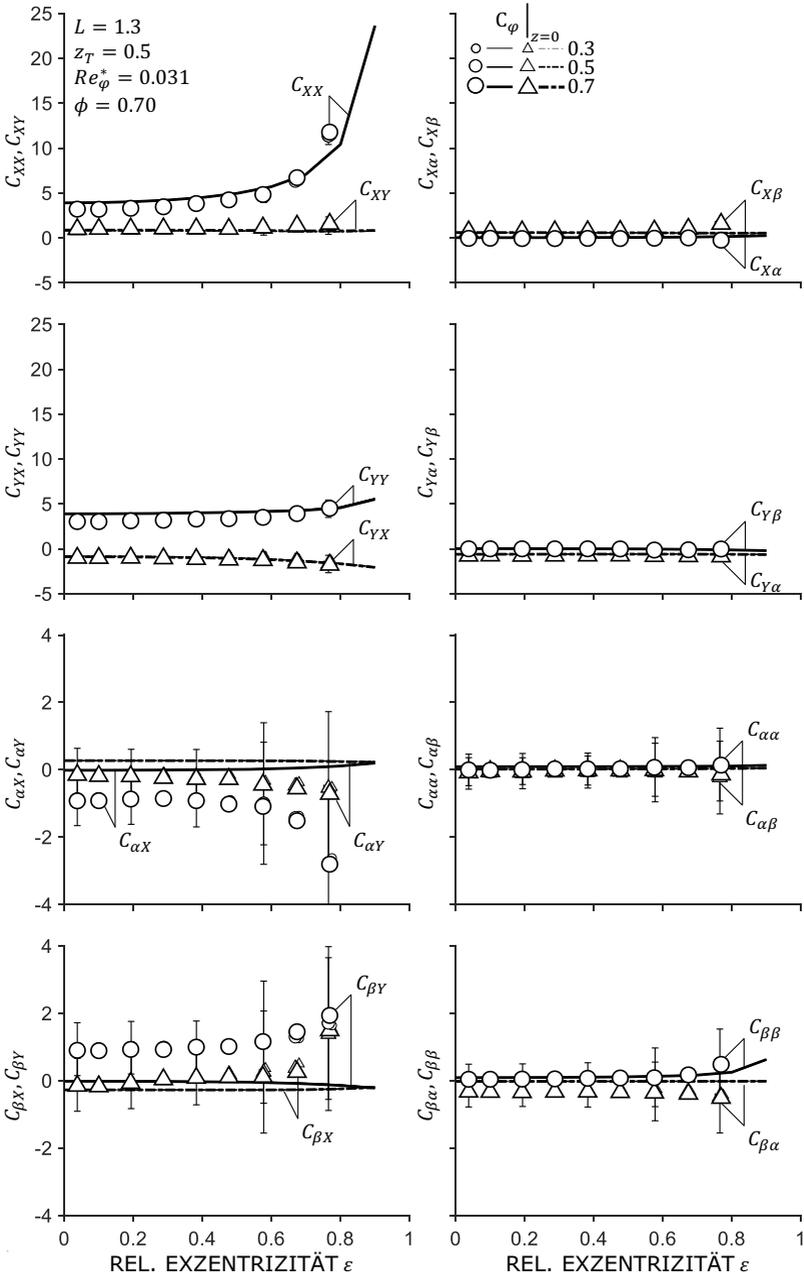


Abbildung C.5 – Validierungsergebnisse des Clearance-Averaged Pressure Models für die Dämpfungen C bei Variation des Vordralls $C_{\phi}|_{z=0}$.

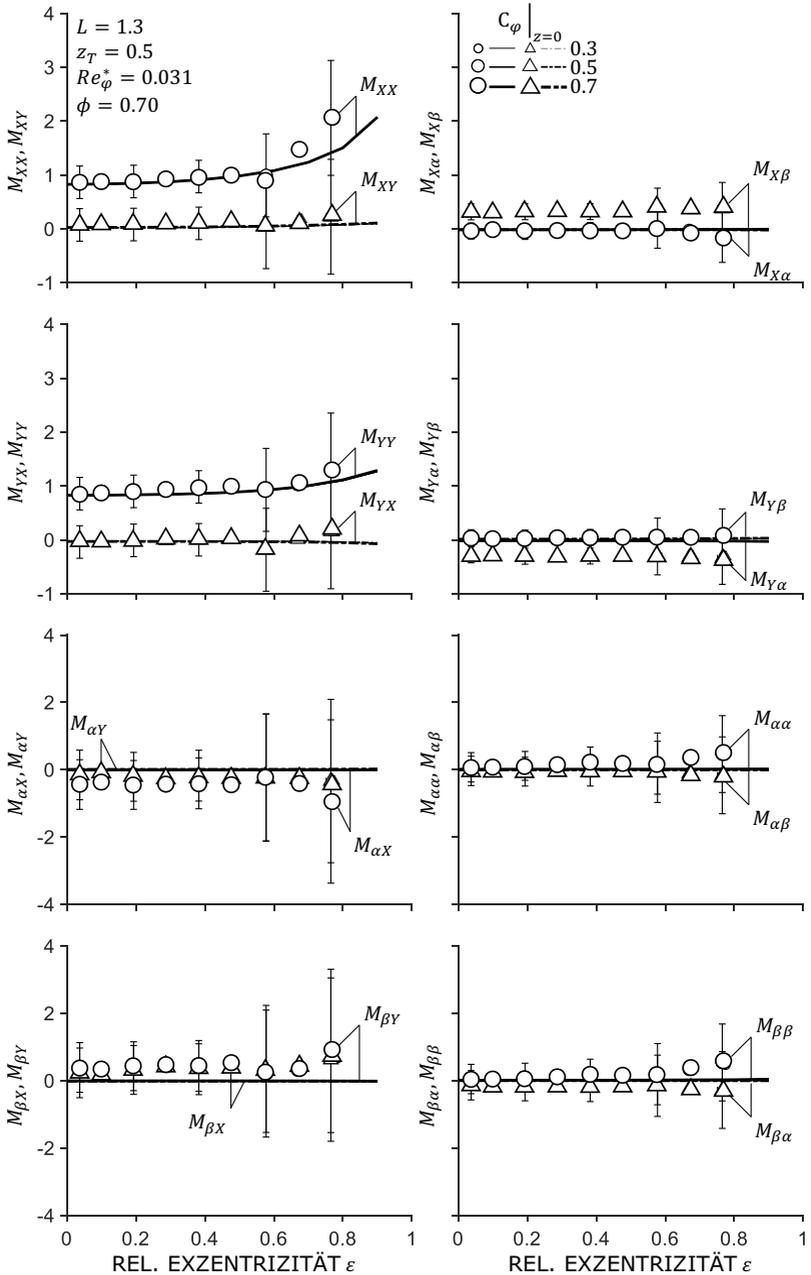


Abbildung C.6 – Validierungsergebnisse des Clearance-Averaged Pressure Models für die Trägheiten M bei Variation des Vordralls $C_\phi|_{z=0}$.

Anhang D

Weiterführende Untersuchungen und Relevanz einer generalisierten Betrachtung

Im Folgenden werden die verbleibenden Ergebnisse der Parameterstudien zum Einfluss der relativen Exzentrizität ε , des Taumelpunkts z_T und des Vordralls $C_\varphi|_{z=0}$ auf die rotordynamischen Koeffizienten dargestellt, vgl. Kapitel 6.

D.1 Einfluss der relativen Exzentrizität

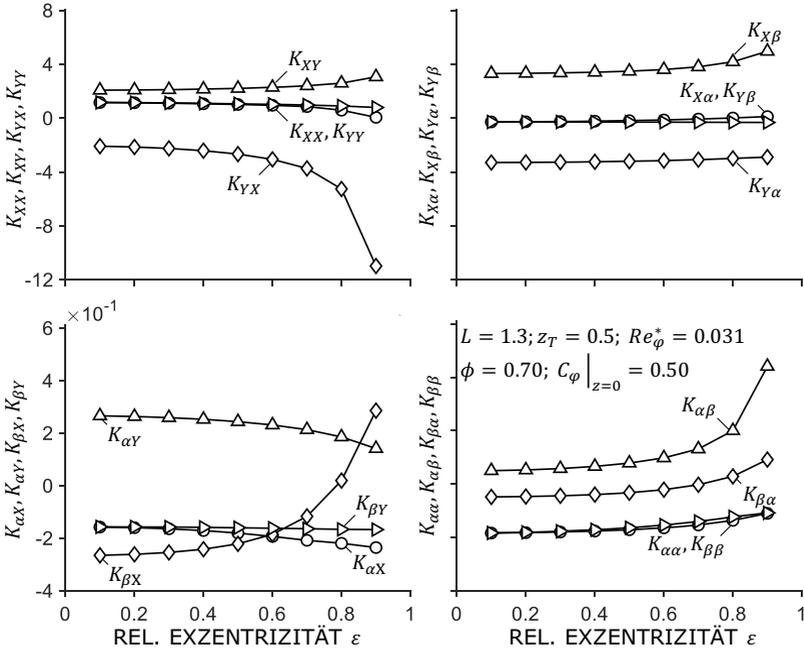


Abbildung D.1 – Einfluss der relativen Exzentrizität ε auf die Steifigkeiten K des axial durchströmten Ringspalts.

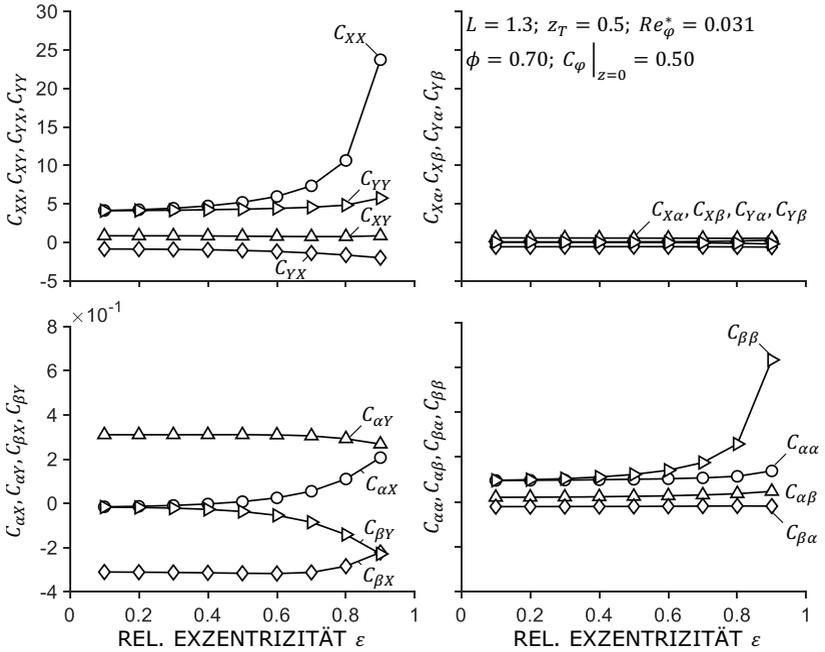


Abbildung D.2 – Einfluss der relativen Exzentrizität ε auf die Dämpfungen C des axial durchströmten Ringspalts.

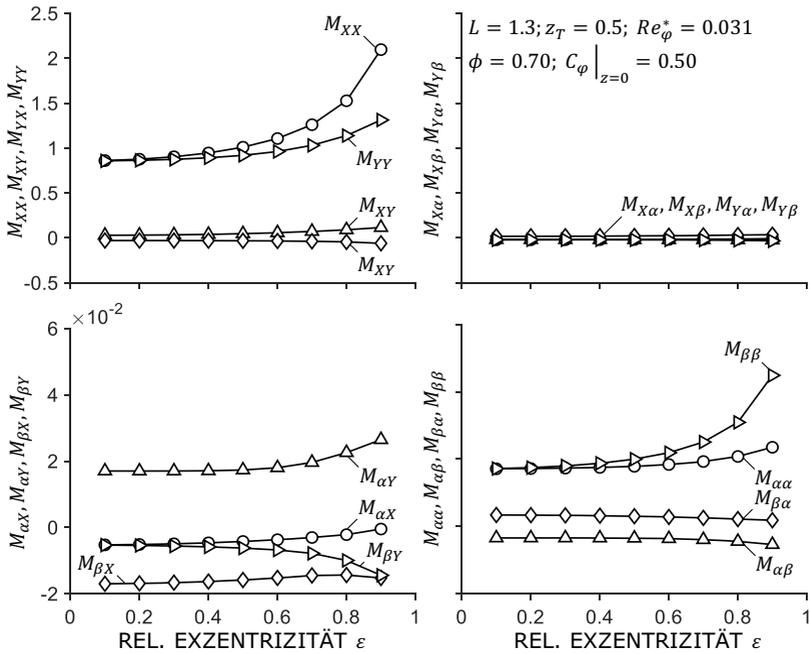


Abbildung D.3 – Einfluss der relativen Exzentrizität ε auf die Trägheiten M des axial durchströmten Ringspalts.

D.2 Einfluss des Taumpunkts

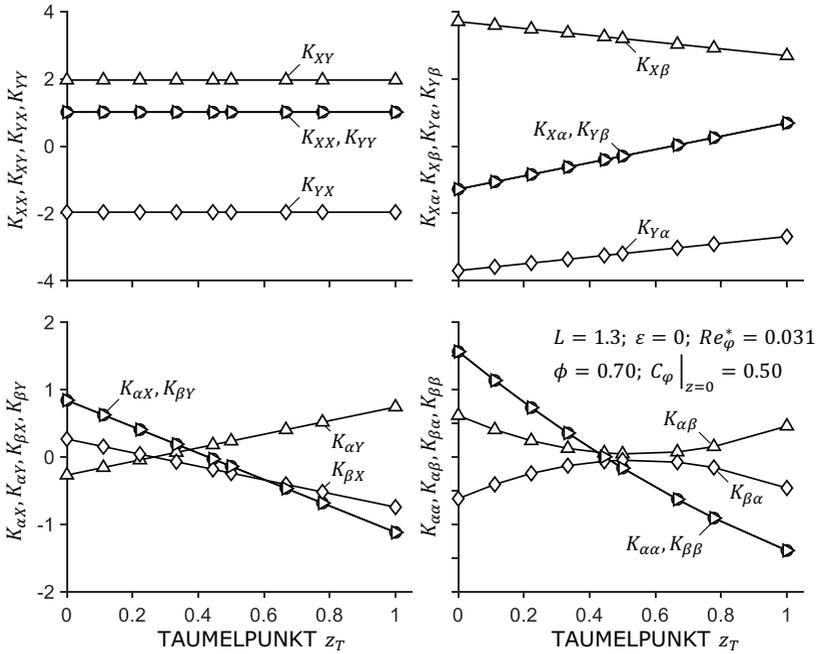


Abbildung D.4 – Einfluss des Taumpunkts z_T auf die Steifigkeiten K des axial durchströmten Ringspalts.

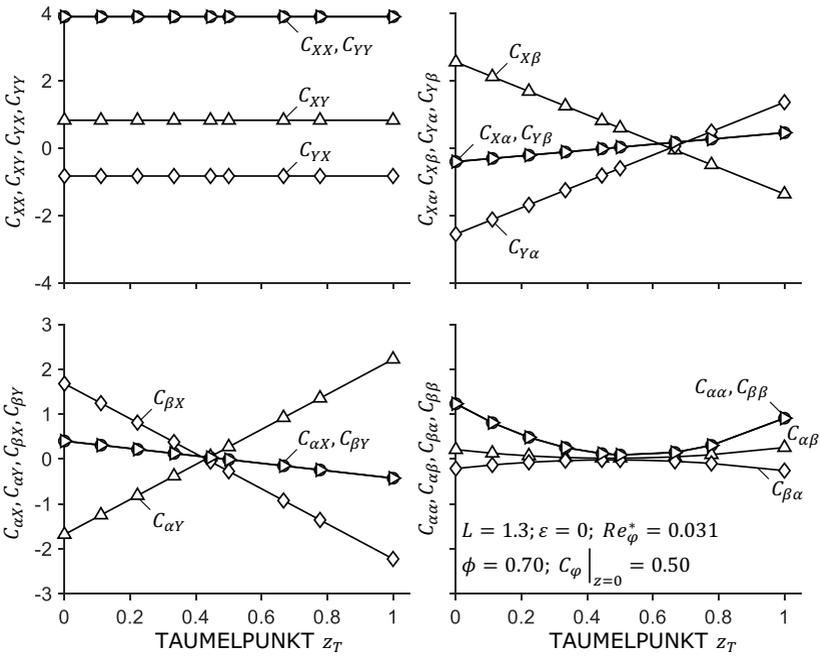


Abbildung D.5 – Einfluss des Taumpunkts z_T auf die Dämpfungen C des axial durchströmten Ringspalts.

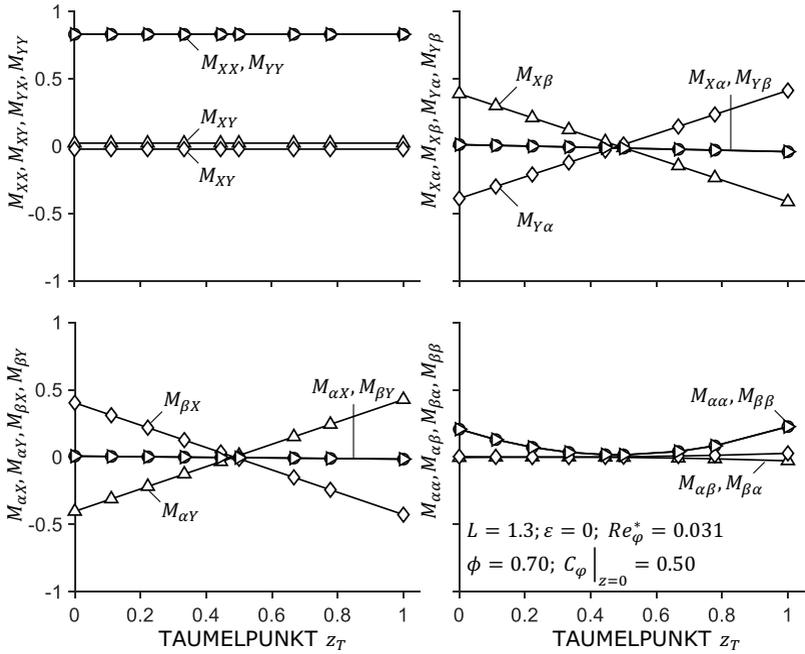


Abbildung D.6 – Einfluss des Taumpunkts z_T auf die Trägheiten M des axial durchströmten Ringspalts.

D.3 Einfluss des Vordralls

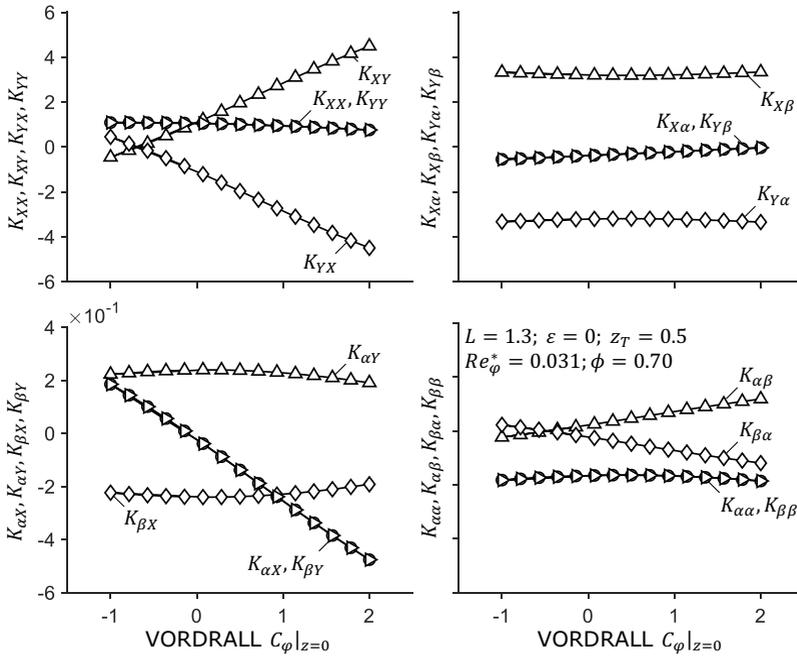


Abbildung D.7 – Einfluss des Vordralls $C_\varphi|_{z=0}$ auf die Steifigkeiten K des axial durchströmten Ringspalts.

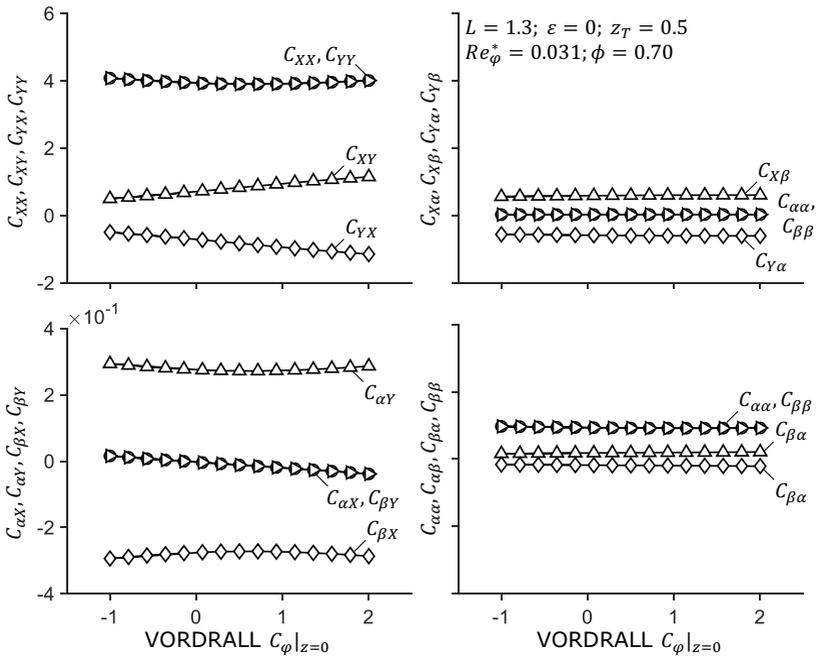


Abbildung D.8 – Einfluss des Vordralls $C_\varphi|_{z=0}$ auf die Dämpfungen C des axial durchströmten Ringspalts.

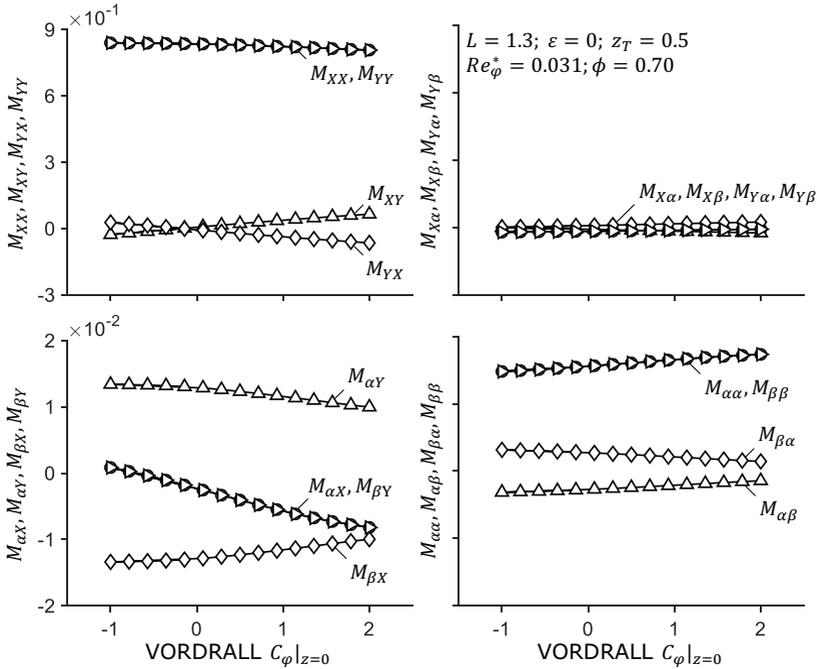


Abbildung D.9 – Einfluss des Vordralls $C_\varphi|_{z=0}$ auf die Trägheiten M des axial durchströmten Ringspalts.

D.4 Relevanz der zusätzlichen rotordynamischen Koeffizienten

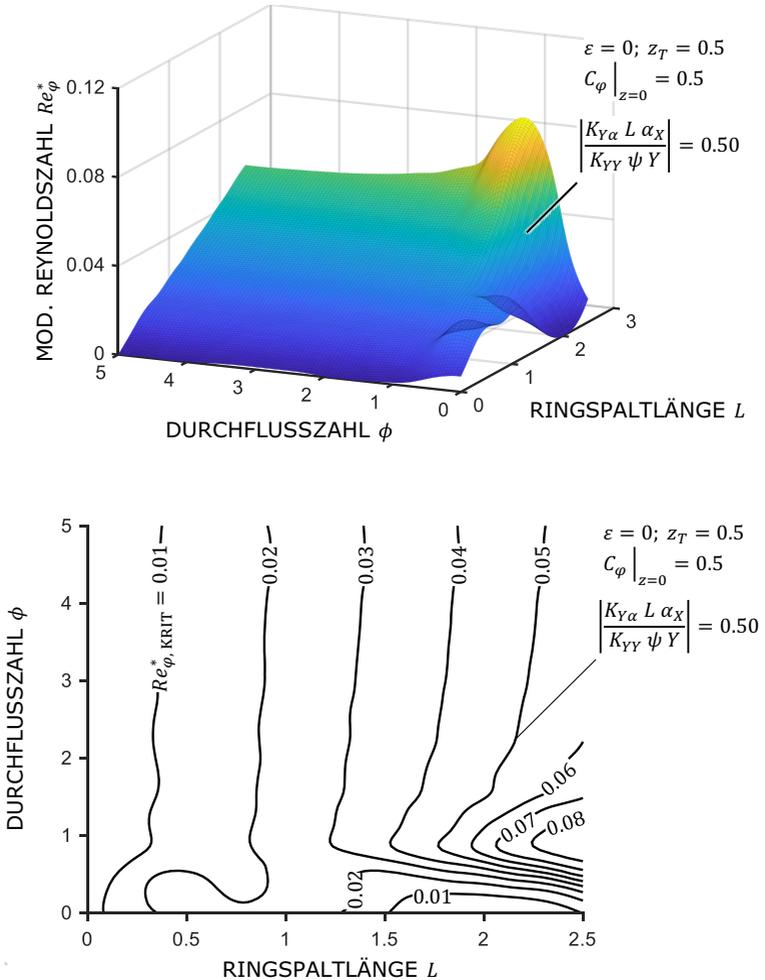


Abbildung D.10 – Dreidimensionale Darstellung zur Beurteilung der Relevanz der zusätzlichen rotordynamischen Koeffizienten (oben) sowie eine entsprechende Darstellung der entstehenden Fläche mit Isolinien (unten). Für Betriebspunkte hinter der Ebene ist eine Betrachtung des dynamischen Einflusses auf Basis der generalisierten Betrachtung notwendig. Für Betriebspunkte vor der Ebene ist eine Betrachtung auf Basis eines reduzierten Detaillierungsgrades ausreichend.

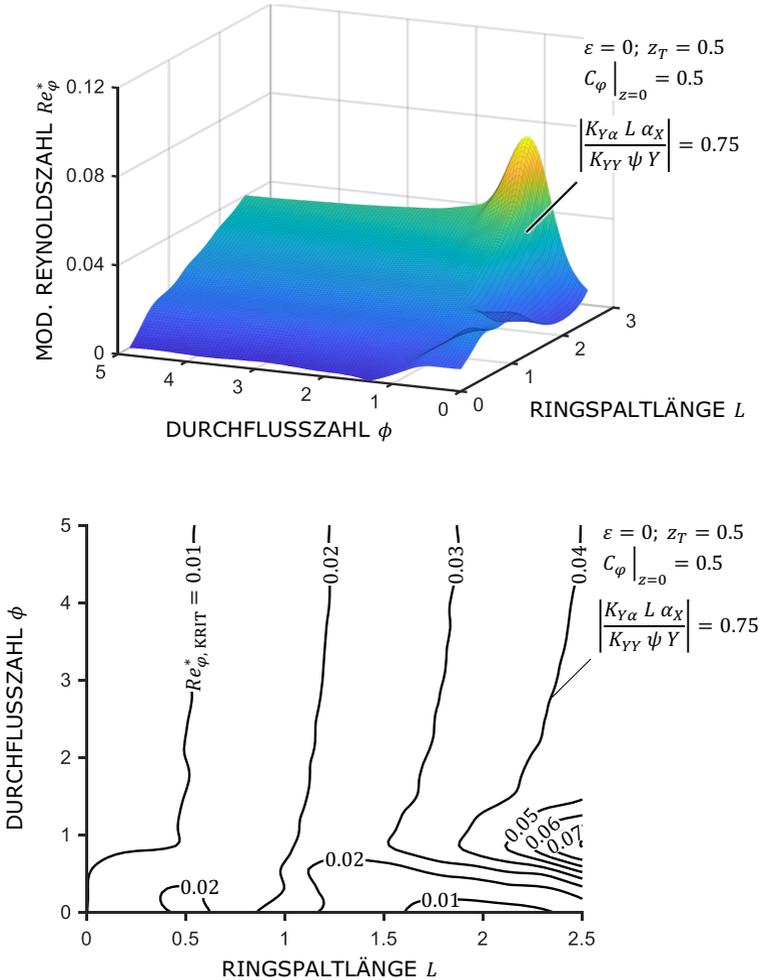


Abbildung D.11 – Dreidimensionale Darstellung zur Beurteilung der Relevanz der zusätzlichen rotordynamischen Koeffizienten (oben) sowie eine entsprechende Darstellung der entstehenden Fläche mit Isolinien (unten). Für Betriebspunkte hinter der Ebene ist eine Betrachtung des dynamischen Einflusses auf Basis der generalisierten Betrachtung notwendig. Für Betriebspunkte vor der Ebene ist eine Betrachtung auf Basis eines reduzierten Detaillierungsgrades ausreichend.

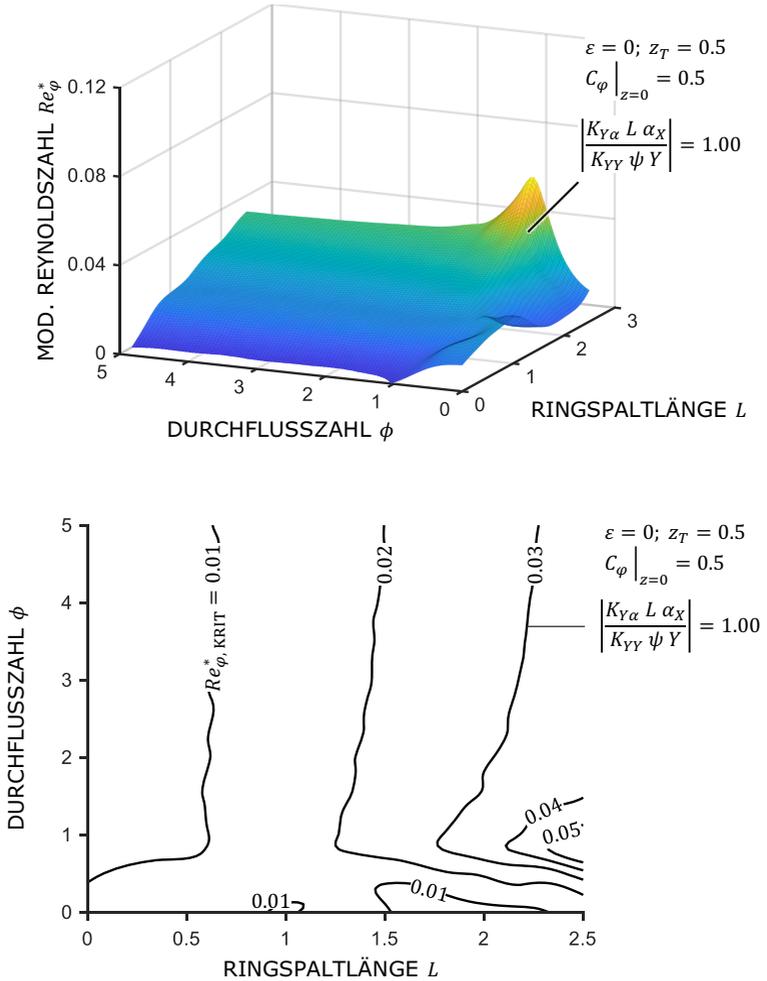


Abbildung D.12 – Dreidimensionale Darstellung zur Beurteilung der Relevanz der zusätzlichen rotodynamischen Koeffizienten (oben) sowie eine entsprechende Darstellung der entstehenden Fläche mit Isolinen (unten). Für Betriebspunkte hinter der Ebene ist eine Betrachtung des dynamischen Einflusses auf Basis der generalisierten Betrachtung notwendig. Für Betriebspunkte vor der Ebene ist eine Betrachtung auf Basis eines reduzierten Detaillierungsgrades ausreichend.

Anhang E

Systemverhalten

Im Folgenden werden die verbleibenden Ergebnisse der Analyse des Systemverhaltens zum Einfluss der Ringspaltlänge L , des Vordralls $C_\varphi|_{z=0}$, der relativen Exzentrizität ε , der Lage des Taumelpunkts z_T , der modifizierten Reynoldszahl Re_φ^* und der Durchflusszahl ϕ dargestellt, vgl. Kapitel 7.

E.1 Einfluss der Ringspaltlänge auf die logarithmischen Teildekremente

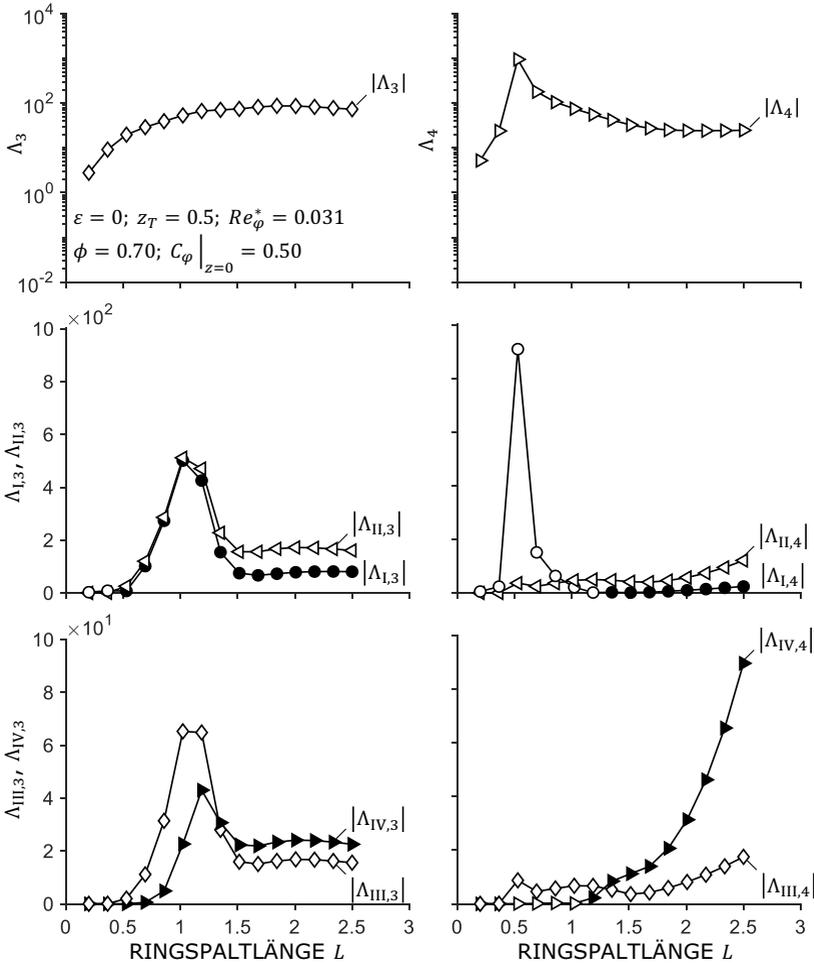


Abbildung E.1 – Einfluss der Ringspaltlänge L auf das logarithmische Dekrement Λ_i mit $i = 3, 4$ und die logarithmischen Teildekremente $\Lambda_{I,i}$ bis $\Lambda_{IV,i}$. Die linke Seite zeigt das logarithmische Dekrement Λ_3 sowie die Zerlegung desselben in die Teildekremente $\Lambda_{I,3}$ bis $\Lambda_{IV,3}$, wohingegen die rechte Seite das logarithmische Dekrement Λ_4 und die Zerlegung desselben in die Teildekremente $\Lambda_{I,4}$ bis $\Lambda_{IV,4}$ darstellt. Schwarze Marker stehen hierbei stellvertretend für eine destabilisierende Wirkung auf das System, d.h. $\Lambda_{I..IV,i} < 0$.

E.2 Einfluss der Ringspalllänge auf die logarithmischen Teildekremente

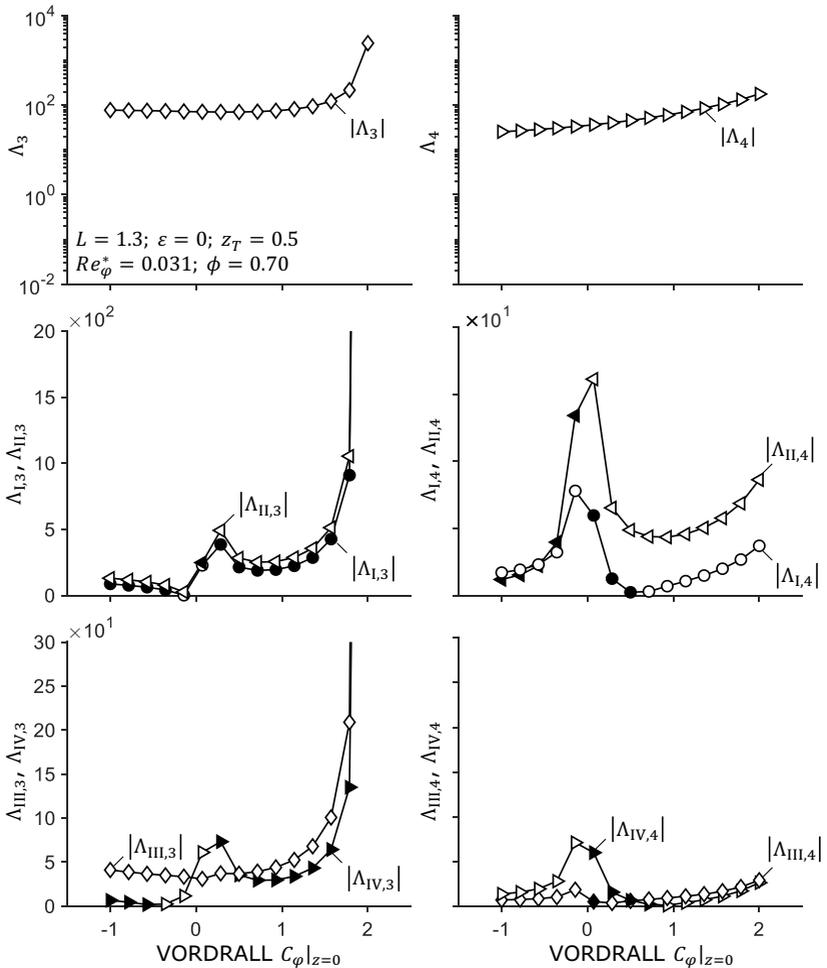


Abbildung E.2 – Einfluss des Vordralls $C_{\varphi}|_{z=0}$ auf das logarithmische Dekrement Λ_i mit $i = 3, 4$ und die logarithmischen Teildekremente $\Lambda_{I,i}$ bis $\Lambda_{IV,i}$. Die linke Seite zeigt das logarithmische Dekrement Λ_3 sowie die Zerlegung desselben in die Teildekremente $\Lambda_{I,3}$ bis $\Lambda_{IV,3}$, wohingegen die rechte Seite das logarithmische Dekrement Λ_4 und die Zerlegung desselben in die Teildekremente $\Lambda_{I,4}$ bis $\Lambda_{IV,4}$ darstellt. Schwarze Marker stehen hierbei stellvertretend für eine destabilisierende Wirkung auf das System, d.h. $\Lambda_{I\dots IV,i} < 0$.

E.3 Einfluss der relativen Exzentrizität

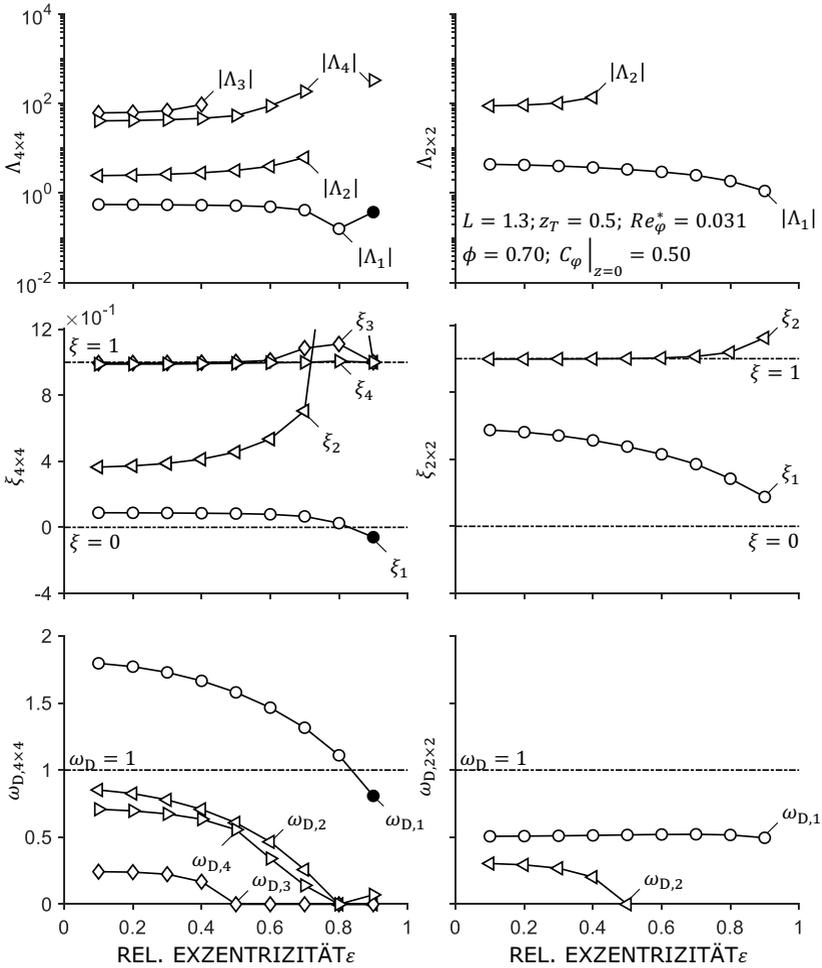


Abbildung E.3 – Einfluss der relativen Exzentrizität ε auf das logarithmische Dekrement Λ , das Dämpfungsmaß ξ und die Eigenfrequenz des gedämpften Systems ω_D . Schwarze Marker stehen hierbei stellvertretend für ein instabiles Systemverhalten, d.h. $\Lambda, \xi < 0$. Die linke Seite zeigt das System unter Betrachtung aller 48 rotordynamischen Koeffizienten, wohingegen die rechte Seite das Systemverhalten auf Basis von 12 Koeffizienten darstellt.

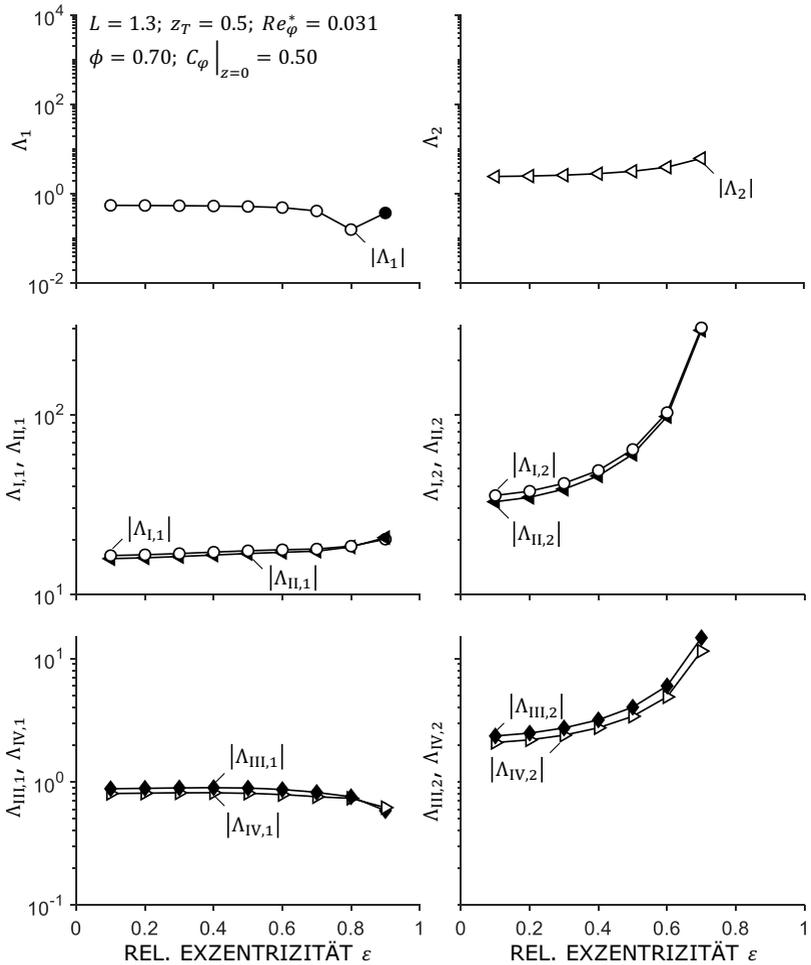


Abbildung E.4 – Einfluss der relativen Exzentrizität ε auf das logarithmische Dekrement Δ_i mit $i = 1, 2$ und die logarithmischen Teildekrement $\Delta_{I,i}$ bis $\Delta_{IV,i}$. Die linke Seite zeigt das logarithmische Dekrement Δ_1 sowie die Zerlegung desselben in die Teildekrement $\Delta_{I,1}$ bis $\Delta_{IV,1}$, wohingegen die rechte Seite das logarithmische Dekrement Δ_2 und die Zerlegung desselben in die Teildekrement $\Delta_{I,2}$ bis $\Delta_{IV,2}$ darstellt. Schwarze Marker stehen hierbei stellvertretend für eine destabilisierende Wirkung auf das System, d.h. $\Delta_{I\dots IV,i} < 0$.

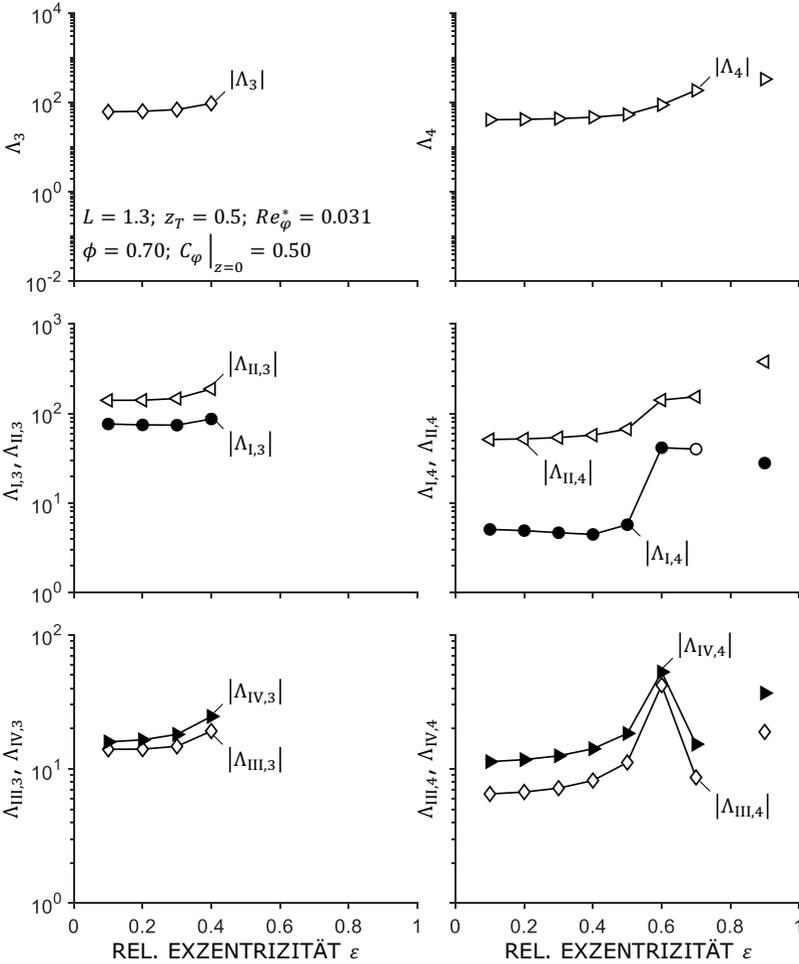


Abbildung E.5 – Einfluss der relativen Exzentrizität ε auf das logarithmische Dekrement Λ_i mit $i = 3, 4$ und die logarithmischen Teildekremente $\Lambda_{I,i}$ bis $\Lambda_{IV,i}$. Die linke Seite zeigt das logarithmische Dekrement Λ_3 sowie die Zerlegung desselben in die Teildekremente $\Lambda_{I,3}$ bis $\Lambda_{IV,3}$, wohingegen die rechte Seite das logarithmische Dekrement Λ_4 und die Zerlegung desselben in die Teildekremente $\Lambda_{I,4}$ bis $\Lambda_{IV,4}$ darstellt. Schwarze Marker stehen hierbei stellvertretend für eine destabilisierende Wirkung auf das System, d.h. $\Lambda_{I..IV,i} < 0$.

E.4 Einfluss des Taumelpunkts

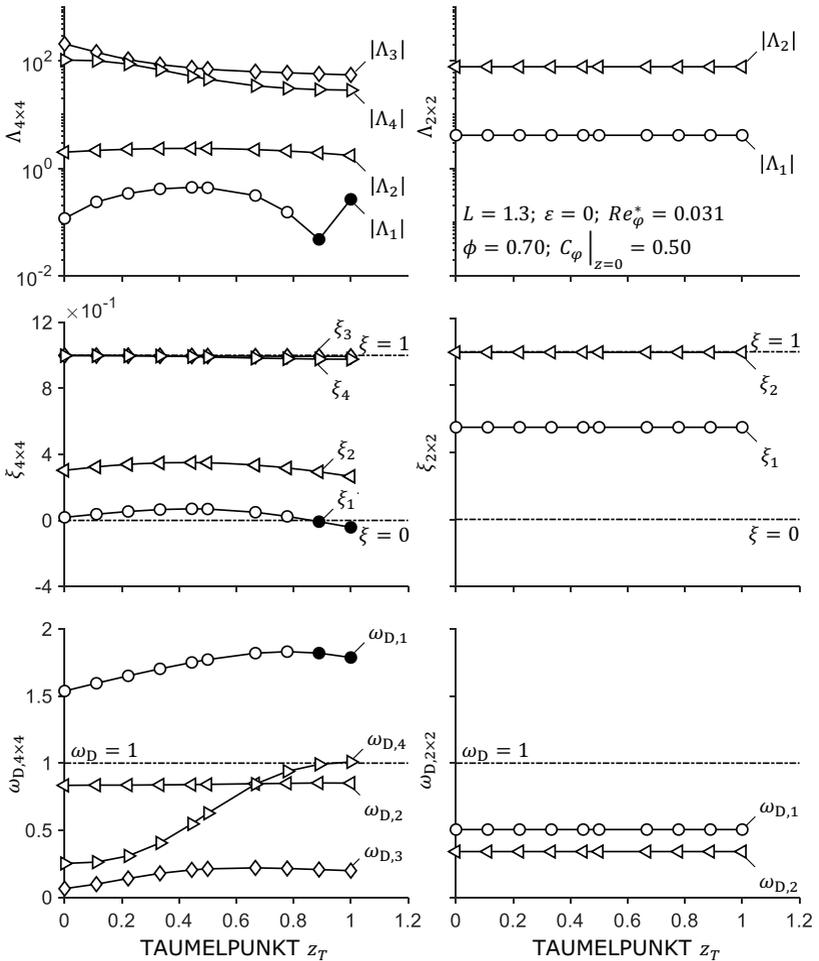


Abbildung E.6 – Einfluss des Taumelpunkts z_T auf das logarithmische Dekrement Λ , das Dämpfungsmaß ξ und die Eigenfrequenz des gedämpften Systems ω_D . Schwarze Marker stehen hierbei stellvertretend für ein instabiles Systemverhalten, d.h. $\Lambda, \xi < 0$. Die linke Seite zeigt das System unter Betrachtung aller 48 rotordynamischen Koeffizienten, wohingegen die rechte Seite das Systemverhalten auf Basis von 12 Koeffizienten darstellt.

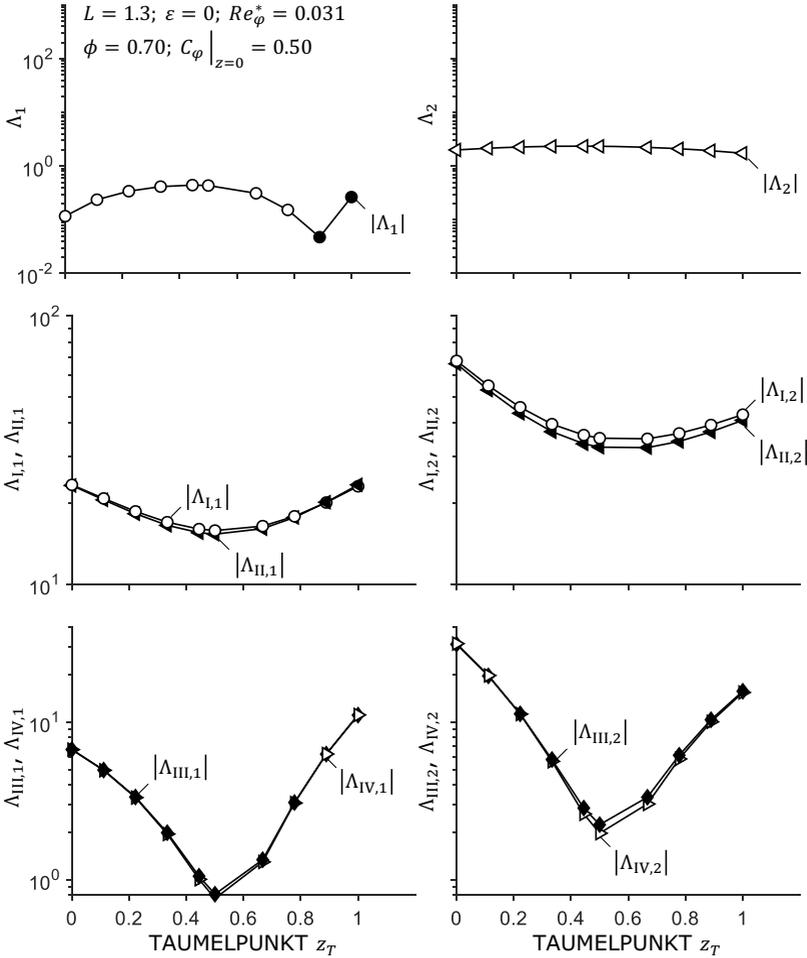


Abbildung E.7 – Einfluss der Lage des Tauelepunkts z_T auf das logarithmische Dekrement Λ_i mit $i = 1, 2$ und die logarithmischen Teildекреmente $\Lambda_{I,i}$ bis $\Lambda_{IV,i}$. Die linke Seite zeigt das logarithmische Dekrement Λ_1 sowie die Zerlegung desselben in die Teildекреmente $\Lambda_{I,1}$ bis $\Lambda_{IV,1}$, wohingegen die rechte Seite das logarithmische Dekrement Λ_2 und die Zerlegung desselben in die Teildекреmente $\Lambda_{I,2}$ bis $\Lambda_{IV,2}$ darstellt. Schwarze Marker stehen hierbei stellvertretend für eine destabilisierende Wirkung auf das System, d.h. $\Lambda_{I\dots IV,i} < 0$.

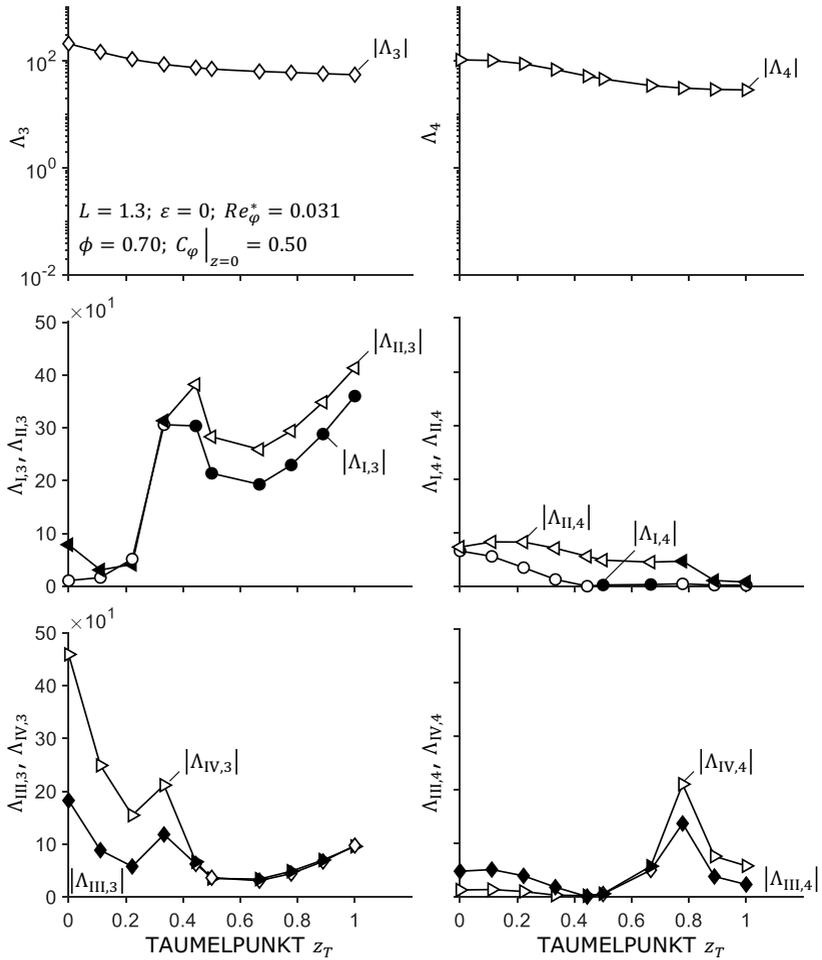


Abbildung E.8 – Einfluss der Lage des Taumelpunkts z_T auf das logarithmische Dekrement Λ_i mit $i = 3, 4$ und die logarithmischen Teildекреmente $\Lambda_{I,i}$ bis $\Lambda_{IV,i}$. Die linke Seite zeigt das logarithmische Dekrement Λ_3 sowie die Zerlegung desselben in die Teildекреmente $\Lambda_{I,3}$ bis $\Lambda_{IV,3}$, wohingegen die rechte Seite das logarithmische Dekrement Λ_4 und die Zerlegung desselben in die Teildекреmente $\Lambda_{I,4}$ bis $\Lambda_{IV,4}$ darstellt. Schwarze Marker stehen hierbei stellvertretend für eine destabilisierende Wirkung auf das System, d.h. $\Lambda_{I...IV,i} < 0$.

E.5 Einfluss der modifizierten Reynoldszahl

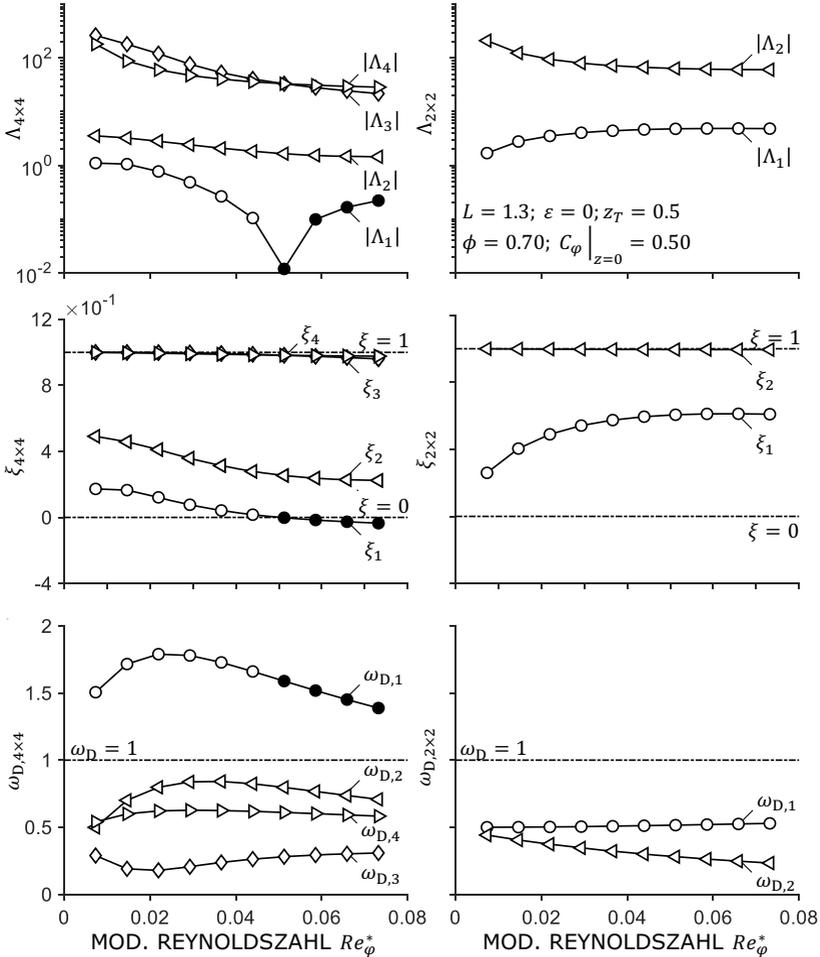


Abbildung E.9 – Einfluss der modifizierten Reynoldszahl Re_φ^* das logarithmische Dekrement Λ , das Dämpfungsmaß ξ und die Eigenfrequenz des gedämpften Systems ω_D . Schwarze Marker stehen hierbei stellvertretend für ein instabiles Systemverhalten, d.h. $\Lambda, \xi < 0$. Die linke Seite zeigt das System unter Betrachtung aller 48 rotordynamischen Koeffizienten, wohingegen die rechte Seite das Systemverhalten auf Basis von 12 Koeffizienten darstellt.

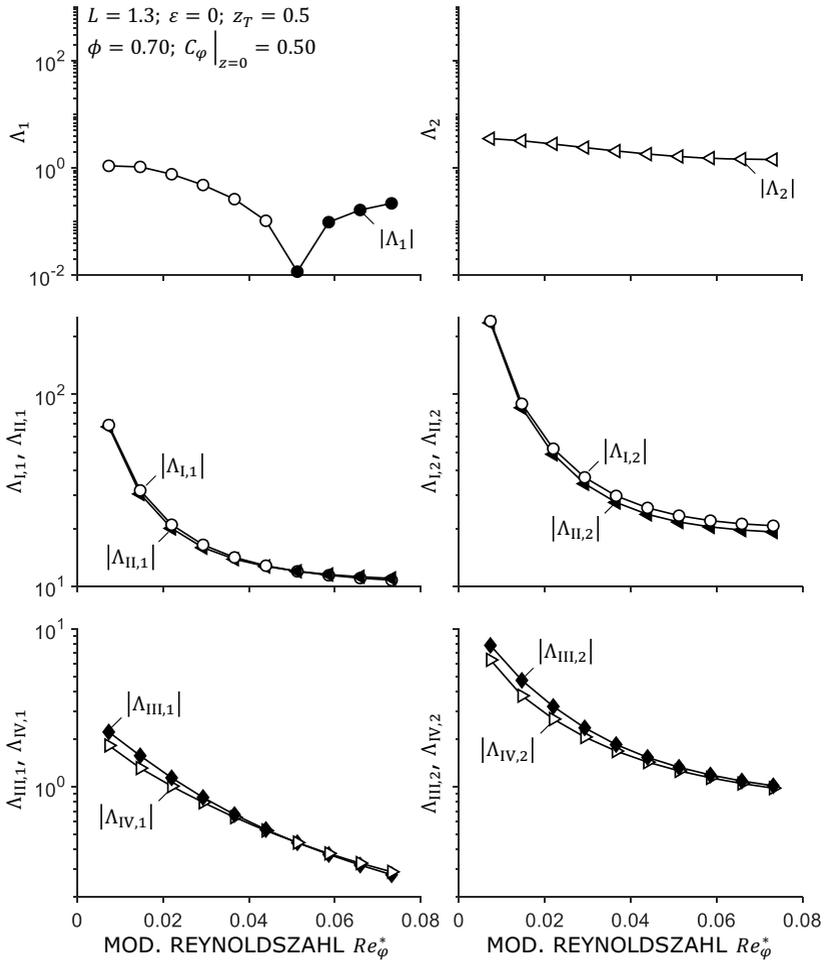


Abbildung E.10 – Einfluss der modifizierten Reynoldszahl Re_φ^* auf das logarithmische Dekrement Λ_i mit $i = 1, 2$ und die logarithmischen Teildекреmente $\Lambda_{I,i}$ bis $\Lambda_{IV,i}$. Die linke Seite zeigt das logarithmische Dekrement Λ_1 sowie die Zerlegung desselben in die Teildекреmente $\Lambda_{I,1}$ bis $\Lambda_{IV,1}$, wohingegen die rechte Seite das logarithmische Dekrement Λ_2 und die Zerlegung desselben in die Teildекреmente $\Lambda_{I,2}$ bis $\Lambda_{IV,2}$ darstellt. Schwarze Marker stehen hierbei stellvertretend für eine destabilisierende Wirkung auf das System, d.h. $\Lambda_{I...IV,i} < 0$.

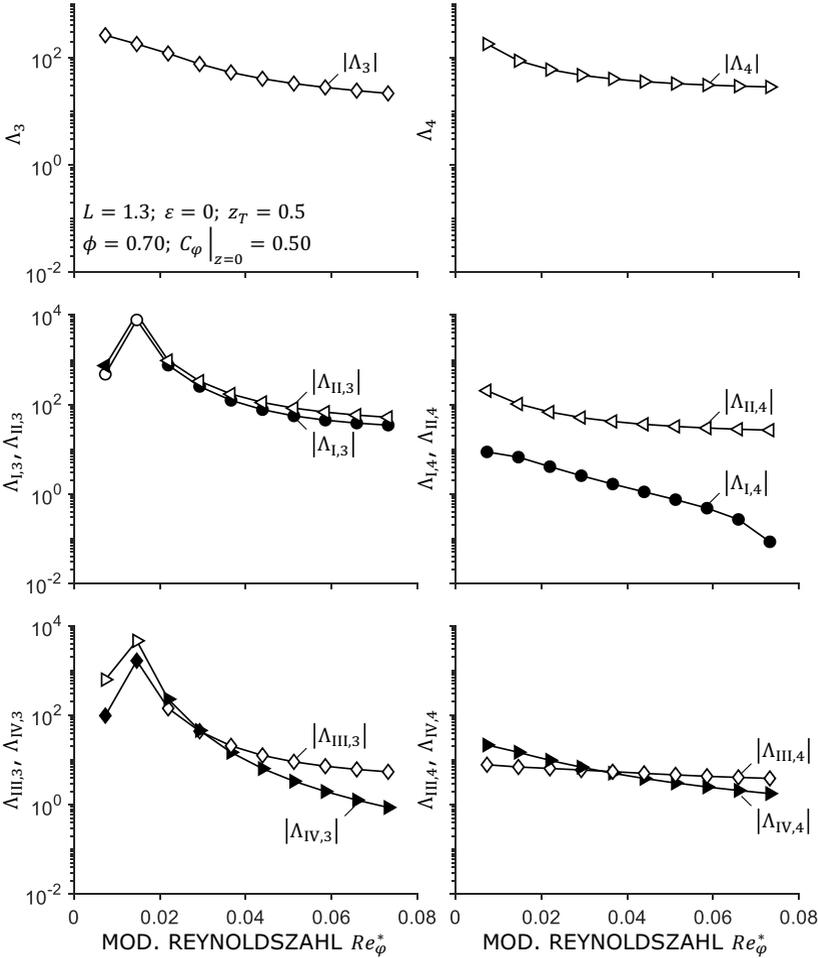


Abbildung E.11 – Einfluss der modifizierten Reynoldszahl Re_φ^* auf das logarithmische Dekrement Λ_i mit $i = 3, 4$ und die logarithmischen Teildекреmente $\Lambda_{I,i}$ bis $\Lambda_{IV,i}$. Die linke Seite zeigt das logarithmische Dekrement Λ_3 sowie die Zerlegung desselben in die Teildекреmente $\Lambda_{I,3}$ bis $\Lambda_{IV,3}$, wohingegen die rechte Seite das logarithmische Dekrement Λ_4 und die Zerlegung desselben in die Teildекреmente $\Lambda_{I,4}$ bis $\Lambda_{IV,4}$ darstellt. Schwarze Marker stehen hierbei stellvertretend für eine destabilisierende Wirkung auf das System, d.h. $\Lambda_{I\dots IV,i} < 0$.

E.6 Einfluss der Durchflusszahl

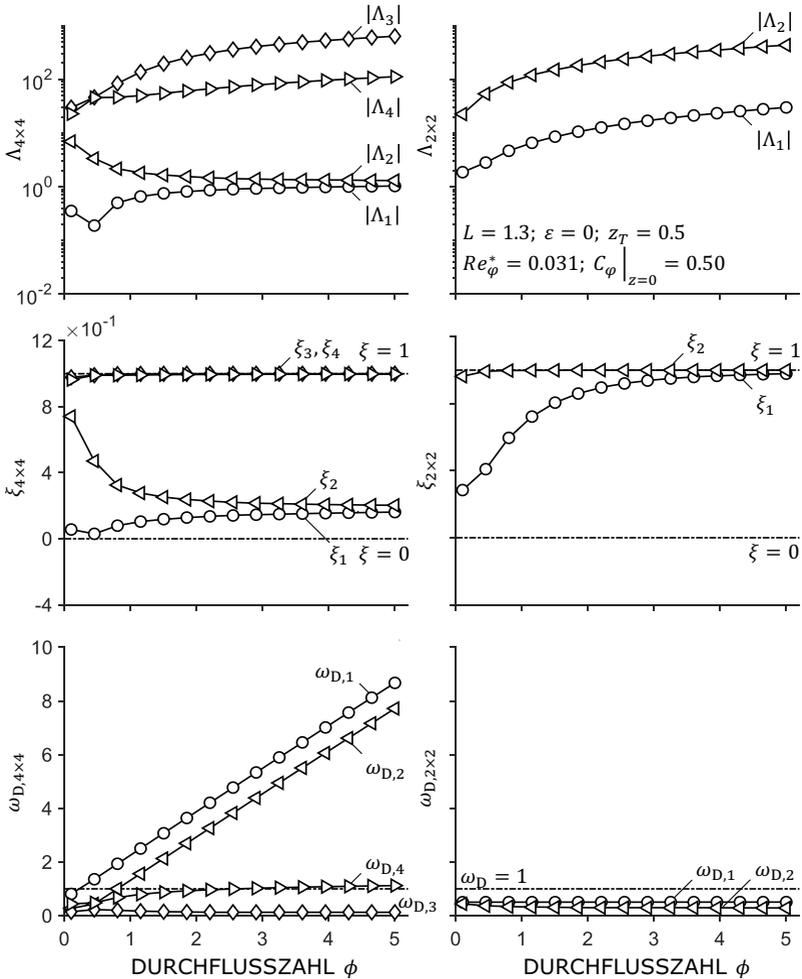


Abbildung E.12 – Einfluss der Durchflusszahl ϕ auf das logarithmische Dekrement Λ , das Dämpfungsmaß ξ und die Eigenfrequenz des gedämpften Systems ω_D . Schwarze Marker stehen hierbei stellvertretend für ein instabiles Systemverhalten, d.h. $\Lambda, \xi < 0$. Die linke Seite zeigt das System unter Betrachtung aller 48 rotordynamischen Koeffizienten, wohingegen die rechte Seite das Systemverhalten auf Basis von 12 Koeffizienten darstellt.

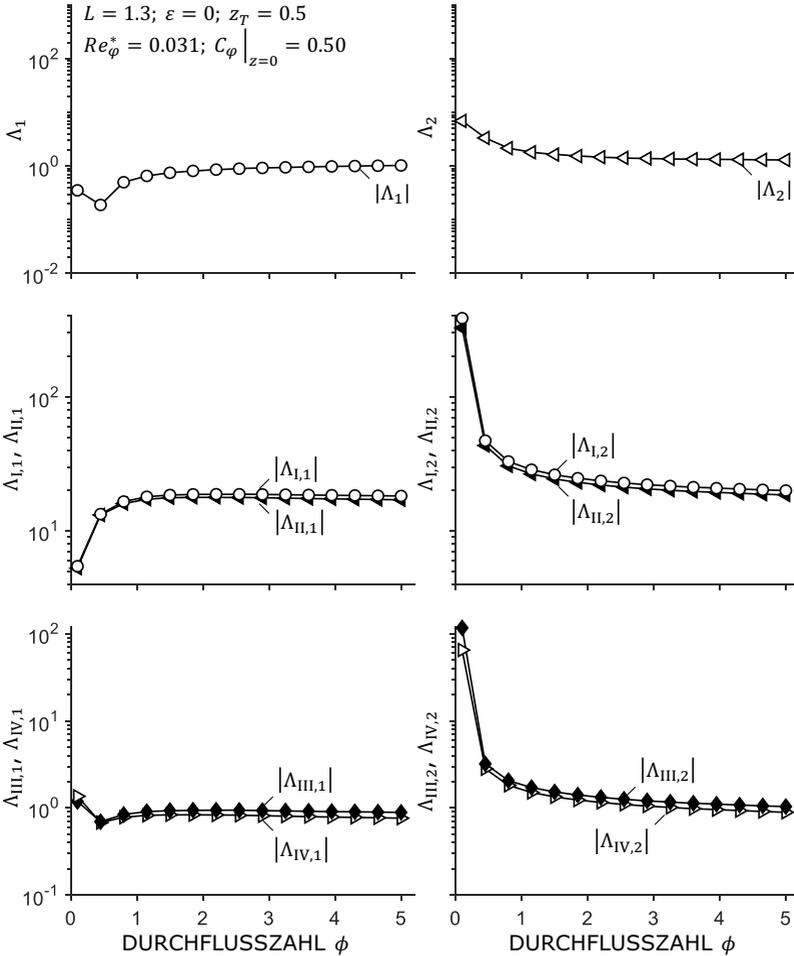


Abbildung E.13 – Einfluss der Durchflusszahl ϕ auf das logarithmische Dekrement Λ_i mit $i = 1, 2$ und die logarithmischen Teildekrement $\Lambda_{i,i}$ bis $\Lambda_{IV,i}$. Die linke Seite zeigt das logarithmische Dekrement Λ_1 sowie die Zerlegung desselben in die Teildekrement $\Lambda_{I,1}$ bis $\Lambda_{IV,1}$, wohingegen die rechte Seite das logarithmische Dekrement Λ_2 und die Zerlegung desselben in die Teildekrement $\Lambda_{I,2}$ bis $\Lambda_{IV,2}$ darstellt. Schwarze Marker stehen hierbei stellvertretend für eine destabilisierende Wirkung auf das System, d.h. $\Lambda_{I..IV,i} < 0$.

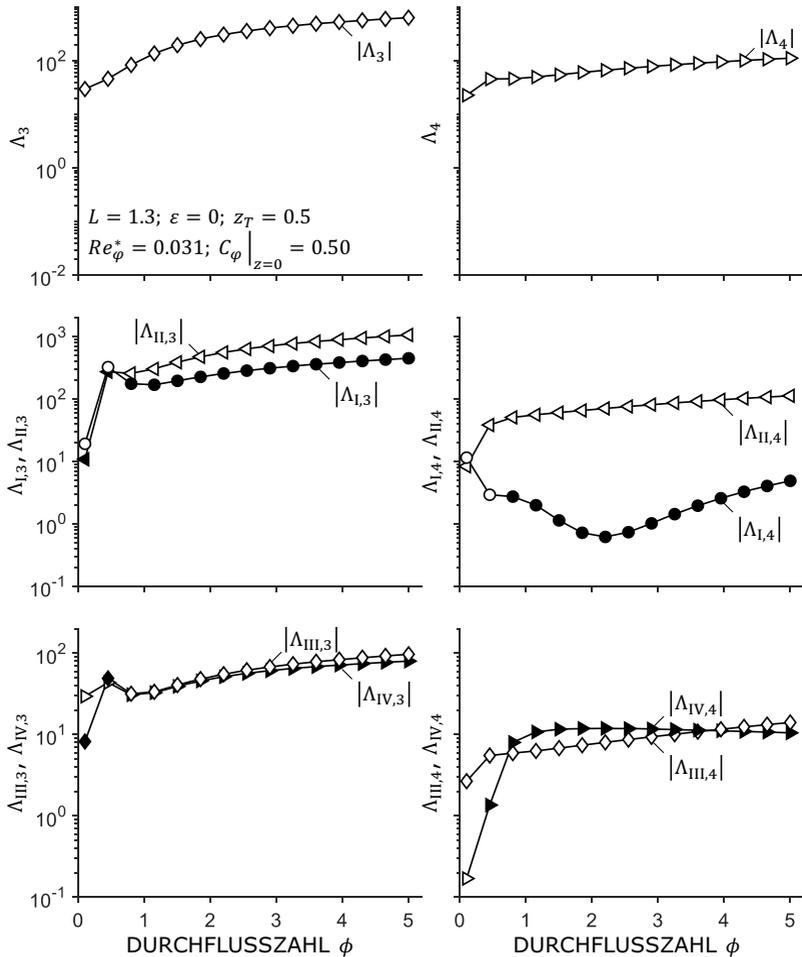


Abbildung E.14 – Einfluss der Durchflusszahl ϕ auf das logarithmische Dekrement Λ_i mit $i = 3, 4$ und die logarithmischen Teildekrement $\Lambda_{I,i}$ bis $\Lambda_{IV,i}$. Die linke Seite zeigt das logarithmische Dekrement Λ_3 sowie die Zerlegung desselben in die Teildekrement $\Lambda_{I,3}$ bis $\Lambda_{IV,3}$, wohingegen die rechte Seite das logarithmische Dekrement Λ_4 und die Zerlegung desselben in die Teildekrement $\Lambda_{I,4}$ bis $\Lambda_{IV,4}$ darstellt. Schwarze Marker stehen hierbei stellvertretend für eine destabilisierende Wirkung auf das System, d.h. $\Lambda_{I...IV,i} < 0$.