Drallgrenzschicht und Strömungsablösung in koaxial rotierenden Diffusoren und Düsen

Ferdinand-Julius Cloos

Band 19

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Forschungsberichte zur Fluidsystemtechnik

Herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. Peter F. Pelz

Drallgrenzschicht und Strömungsablösung in koaxial rotierenden Diffusoren und Düsen

Am Fachbereich Maschinenbau
an der Technischen Universität Darmstadt
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktor-Ingenieurs
(Dr.-Ing.)

genehmigte

DISSERTATION

vorgelegt von

Ferdinand-Julius Cloos, M. Sc.

geboren in Gießen.

Berichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. Peter F. Pelz
Mitberichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. habil. Bernhard Weigand
Tag der Einreichung:	13.11.2017
Tag der mündlichen Prüfung:	28.02.2018

Darmstadt 2017

D 17

Forschungsberichte zur Fluidsystemtechnik

Band 19

Ferdinand-Julius Cloos

Drallgrenzschicht und Strömungsablösung in koaxial rotierenden Diffusoren und Düsen

D 17 (Diss. TU Darmstadt)

Shaker Verlag
Aachen 2018

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Zugl.: Darmstadt, Techn. Univ., Diss., 2018

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-5900-7
ISSN 2194-9565

Shaker Verlag GmbH • Postfach 101818 • 52018 Aachen
Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9
Internet: www.shaker.de • E-Mail: info@shaker.de

Vorwort des Herausgebers

Kontext

Der Übergang von einem stehenden Kreisrohr zu einem koaxial rotierenden Diffusor bzw. einer koaxial rotierenden Düse ist ein in der Technik häufig auftretende Situation. Dabei sind die wandnahen Transportvorgänge für Impuls, Energie und Stoff in der Nähe des Übergangs vom stehenden in den rotierenden Teil von besonderem Interesse: Kommt es zur Strömungsablösung an der Wand, steigt der Strömungswiderstand in axialer Richtung. Mit der Strömungsablösung einher steigt der Widerstand für Wärme- und Stofftransport normal zur Wand.

Bei Turbomaschinen ist der Übergang vom stehenden Kreisrohr zu einem koaxial rotierenden Diffusor bzw. einer koaxial rotierenden Düse stromauf des Schaufelgitters gegeben. Hier ist es von hohem Interesse, die Strömungsablösung an der Wand bei starker Teillast zu verstehen: Kommt es bei einem Verdichter zu dieser Art der Ablösung, kann es im Extremfall zu einer Zerstörung des Verdichters und ggf. weiteren, noch schwerwiegenderen Folgen kommen.

In der Tat ist der Impulstransport an der Wand bei Verdichtern und Pumpen Motivation für die vorliegende Arbeit. Wie sich kürzlich in Forschungsarbeiten gezeigt hat, ist es sinnvoll die Strömungsablösung, je nach Natur, in kinematische oder dynamische Ablösung zu unterteilen.

Im ersten, dem kinematischen Fall, ist die Ablöselinie eine Staupunktlinie. Hier ist die Induktion des Spitzenwirbels stromauf betragsmäßig gleich der Anströmgeschwindigkeit. Dieses Phänomen, welches nach unserer Erwartung selbstinduziert und zyklisch ist, wird derzeit von Herrn Paul Taubert am Institut für Fluidsystemtechnik untersucht (Pelz, Taubert & Cloos: “Vortex structure and kinematics of encased axial turbomachines”; Proceedings of 17th ISROMAC, 2017). Die kinematische Strömungsablösung ist von Reibung und damit der Reynoldszahl sowie der relativen Wandrauheit unabhängig. Im Gegensatz dazu steht die dynamische Strömungsablösung. Sie ist durch Reibung verursacht und muss eine Funktion von Reynoldszahl und relativer Wandrauheit sein.

Die dynamische Strömungsablösung, auch Grenzschichtablösung genannt, ist Gegenstand der Untersuchung von Herrn Cloos. Herr Cloos untersucht im Speziellen den Einlaufbereich der rotierenden Kegeldüsen und Kegeldiffusoren. Er führt damit die Arbeit von Herrn Dr.-Ing. Stapp am Institut für Fluidsystemtechnik fort, der sich mit dem koaxial rotierenden Rohr beschäftigt hat. Die sehr schönen Ergebnisse von Herrn Stapp wurden

im Nachgang seiner Tätigkeit im Journal of Fluid Mechanics publiziert (Cloos, Stapp & Pelz: “Swirl boundary layer and flow separation at the inlet of a rotating pipe”, Journal of Fluid Mechanics, 811 pp. 350-371. ISSN 0022-1120, 2017).

Wissenschaftliche Fragestellung
Herr Cloos verallgemeinert in seiner Fragestellung die ursprüngliche Fragestellung von Herrn Stapp. Hierzu betrachtet er neben dem rotierenden Rohr (Öffnungswinkel Null) nunmehr auch Diffusoren (Öffnungswinkel größer Null) und Düsen (Öffnungswinkel kleiner Null). Dabei stellt sich die Frage, welchen Einfluss der Öffnungswinkel neben der relativen Rauheit, Reynoldszahl und Durchflusszahl auf die Interaktion von Drallgrenzschicht und Impulsgrenzschicht hat.
Von besonderem Interesse ist dabei die kritische Durchflusszahl als Funktion von Reynoldszahl, relativer Rauheit sowie Öffnungswinkel. Wird die kritische Durchflusszahl unterschritten, kommt es zur unerwünschten Strömungsablösung.

Methoden
Methodisch verbindet Herr Cloos Integralmethoden der Grenzschichttheorie mit experimenteller Validierung. Bei der Grenzschichttheorie entwickelt Herr Cloos die Methoden von Herrn Stapp weiter. Die Integralmethoden liefern dabei teilweise erstaunliche Einsichten in das komplexe Strömungsphänomen. So kann bei einer rotierenden Düse die Impulsgrenzschicht dicker sein als bei einem rotierenden Diffusor. Dies wird durch die dämpfenden bzw. anfachenden Terme der verallgemeinerten von Kármánschen Differentialgleichung (Gleichung 3.11) erklärt, deren Vorzeichen in Tabelle 3.1 diskutiert werden.
Im Experiment nutzt Herr Cloos einen Laser-Doppler-Anemometer, um die Umfangsgeschwindigkeit der Strömung über dem Radius an unterschiedlichen axialen Schnitten aufzulösen.

Darmstadt, im Februar 2018

Prof. Dr.-Ing. Peter F. Pelz

Vorwort

Die vorliegende Dissertation basiert auf den Forschungsergebnissen die während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Fluidsystemtechnik der Technischen Universität Darmstadt erarbeitet wurden. Die Arbeit wurde von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) innerhalb des Projektes PE 1573/5-1 gefördert. Für diese Möglichkeit und das dabei entstandene Ergebnis gilt es zu danken.
Zuerst bedanke ich mich bei dem Institutsleiter und meinem Doktorvater Professor Dr.-Ing. Peter F. Pelz. Ihre Idee, die Teillastrezirkulation und die Drallentwicklung an einem generischen Modell zu untersuchen und anhand der Integralmethode der Grenzschichttheorie zu beschreiben, ist das Fundament der vorliegenden Arbeit. Durch die Diskussionen und vor allem durch die erste Veröffentlichung im Journal of Fluid Mechanics des Institutes motivierten Sie mich besonders. Gleichzeitig offenbarten Sie mir Ihr Vertrauen und ermöglichten mir den Austausch mit internationalen Wissenschaftlern auf diversen Workshops und Konferenzen. *Danke!*
Als nächstes bedanke ich mich bei Professor Dr.-Ing. habil. Bernhard Weigand. Auch Sie legten einen Grundstein für die vorliegende Arbeit durch Ihre eigene Forschung über die Strömung und Wärmeübertragung in einem koaxial rotierenden Rohr. Für mich ist es deshalb eine besondere Ehre, dass Sie das Korreferat übernehmen. *Danke!*
Ausgiebig bedanke ich mich bei allen Kollegen und Mitarbeitern des Institutes für Fluidsystemtechnik während meiner Anstellung. Mit den täglichen Diskussionen und der konstruktiven Kritik habt Ihr mich motiviert und verbessert. Hervorheben möchte ich die geschaffene Grundlage durch meinen Vorgänger Dr.-Ing. Dennis Stapp, den Austausch mit Sebastian Lang und Paul Taubert, den Studenten Maximilian Karl und Lukas Zinßer sowie die Leistung der Werkstatt. *Danke!*
Abschließend bedanke ich mich von Herzen bei all meinen Freunden für die Versüßung der Zeit außerhalb der Arbeit. Dies gilt auch für meine Eltern, Karin und Peter Cloos, sowie meinen Geschwistern inklusive Kindern und meiner lieben Henrike. Ohne Eure Unterstützung wäre ich nicht dort, wo ich heute stehe. *Danke!*
Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit, abgesehen von den in ihr ausdrücklich genannten Hilfen, selbständig verfasst habe.

Darmstadt, im November 2017

Ferdinand-Julius Cloos

Die größte Energiequelle überhaupt
ist der eigene Geist und Körper.

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis

Die Symbole der ersten Spalte werden in der zweiten Spalte beschrieben. Die dritte Spalte, wenn vorhanden, gibt die Dimension als Monom mit den Basisgrößen Länge (L), Masse (M), Zeit (T) und Temperatur (θ).

Dimensionsbehaftete Größen:

Symbol	Beschreibung	Dimension
$\tilde{K}$	turbulente, kinetische Energie	ML^2T^{-2}
$\tilde{n}$	Drehzahl	T^{-1}
$\tilde{R}$	Radius	L
$\tilde{R}_a$	arithmetischer Rauheitswert	L
$\tilde{R}_z$	gemittelte Höhe des Rauheitsprofils	L
$\tilde{r}$	radiale Koordinate	L
$\tilde{T}$	Temperatur	θ
$\tilde{t}$	Zeit	T
$\tilde{\overline{U}}$	querschnitts-gemittelte Geschwindigkeit	LT^{-1}
$\tilde{y}$	Wandkoordinate $\tilde{y} = \tilde{R} - \tilde{r}$	L
$\tilde{z}$	axiale Koordinate	L
$\tilde{\mu}$	dynamische Viskosität	$ML^{-1}T^{-1}$
$\tilde{\nu}$	kinematische Viskosität	L^2T^{-1}
$\tilde{\nu}_*$	Wandschubspannungsgeschwindigkeit	LT^{-1}
$\tilde{\varrho}$	Dichte	ML^{-3}
$\tilde{\tau}$	Schubspannung	$ML^{-1}T^{-2}$
$\tilde{\Omega}$	Kreisfrequenz	T^{-1}

Dimensionslose Größen:
Längen sind entdimensioniert mit dem Rohrradius am Eintritt $\tilde{R}_0$, Geschwindigkeiten mit der lokalen Wandgeschwindigkeit $\tilde{\Omega}\tilde{R}$ und Spannungen mit dem dynamischen Druck $\tilde{\varrho}(\tilde{\Omega}\tilde{R})^2$. Radiale Größen, außer die Rauheit, werden auf den lokalen Radius $\tilde{R}$ skaliert.

Symbol	**Beschreibung**
a	Kalibrationsparameter für $\tau_{\mathrm{y\phi,w}}$
A	Term in verallgemeinerter v. Kármán Gleichung
A_0	Term in verallgemeinerter v. Kármán Gleichung
c	Kalibrationskonstante für $\tau_{\mathrm{yz,w}}$
C_{S}	Kalibrationskonstante des Potenzgesetzes für δ_{S02}
$\underline{E}$	Deformationsgeschwindigkeitstensor
g	Kopplungseinfluss
G	Kopplungsterm
$H_{1,2}$	Formfaktor
k	Exponent des Umfangsgeschwindigkeitsprofils
K	turbulente, kinetische Energie
l	Mischungsweglänge
L	Länge des Kreiskegels
m	Exponent im Potenzgesetzes für δ_{S02}
n	Exponent des axialen Geschwindigkeitsprofils
N	Anzahl
p	Druck in der Drallgrenzschicht
p_+	gemittelter Druck
P	Druck in der Kernströmung
r	radiale Koordinate
R	lokaler Rohrradius
R_z	gemittelte Höhe des Rauheitsprofils
$Re := 2\tilde{\Omega}\tilde{R}_0^2/\tilde{\nu}$	Reynoldszahl
$Re_{\mathrm{ax}} := 2\tilde{\overline{U}}_{\mathrm{z}}\tilde{R}_0/\tilde{\nu} = \varphi Re$	axiale Reynoldszahl
$St := \tilde{t}_{\mathrm{p}}/\tilde{t}$	Stokes-Zahl
t	Student'scher Faktor
u	zeitlich-gemitteltes Geschwindigkeitsprofil
u'_{rms}	Turbulenzintensität
U	zeitlich-gemittelte Geschwindigkeit
$y := 1 - r$	Wandkoordinate
z	axiale Koordinate
z_{t}	Eintrittslänge
$Z := \tilde{R}_0\tilde{\Omega}/\tilde{v}_*$	Parameter

Symbol	**Beschreibung**
α	Öffnungswinkel des Kreiskegels
β	Parameter im Stratford Kriterium
γ	Winkel zwischen den Laserstrahlen
δ_{ij}	Kronecker Delta
δ	axiale Grenzschichtdicke
δ_1	Verdrängungsdicke
δ_2	Impulsverlustdicke
$\delta_{99} := y(u = 0.99)$	axiale Grenzschichtdicke an $y(u_\mathrm{z} = 0.99U_\mathrm{z})$
δ_S	Drallgrenzschichtdicke
$\delta_{\mathrm{S}02} := y(u_\phi = 0.02)$	Drallgrenzschichtdicke an $y(u_\phi = 0.02)$
$\delta_{\mathrm{S}07} := y(u_\phi = 0.07)$	Drallgrenzschichtdicke an $y(u_\phi = 0.07)$
Δ	Differenz
ζ	Verlustziffer
η	Wirkungsgrad
κ	von Kármán Konstante
$\varphi := \tilde{\overline{U}}_\mathrm{z}/(\tilde{\Omega}\tilde{R}_0) = \overline{U}_\mathrm{z}$	Durchflusszahl
$\sigma(X)$	Standardabweichung der Größe X
τ	Wandschubspannung
ϕ	Koordinate in Umfangsrichtung

Index	**Beschreibung**
0	Stelle $z = 0$
c	kritisch (engl. critical)
eff	effektiv
g	glatt
i	Laufvariable
in	beginnend (engl. incipient)
j	Laufvariable
m	Laufvariable
max	maximal
min	minimal
n	Laufvariable
p	Partikel
r	in r-Richtung
ra	rau
rms	quadratisches Mittel (engl. root mean square)
Re	Reynoldszahl
stat	statistisch
sys	systematisch
w	Wand
y	in y-Richtung
z	in z-Richtung
ϕ	in ϕ-Richtung
φ	Durchflusszahl

Abkürzungen	**Beschreibung**
BSA	Burst Spektrum Analyser
bzw.	beziehungsweise
ca.	circa
cf.	vergleiche (lt. confer)
etc.	et cetera
d. h.	das heißt
LDA	Laser-Doppler-Anemometrie
RANS	Reynolds-averaged Navier-Stokes
v. E.	vom Endwert
v. M.	vom Messwert
u. a.	unter anderem
vgl.	vergleiche
z. B.	zum Beispiel

Kapitel 1

Einleitung

Die hohe ökonomische und ökologische Relevanz von Turbomaschinen ist offensichtlich, da mehr als jedes dritte Kraftwerk in Europa elektrische Energie einzig zum Betrieb von Turbomaschinen erzeugt.[1] Turbomaschinen sind im täglichen Leben allgegenwärtig und werden z. B. am Arbeitsplatz (CPU-Lüfter), beim Transport (Turbolader in PKW, LKW und Schiffen) oder bei der Wasserversorgung (Druckerhöhungsanlage) eingesetzt. Diese Turbomaschinen arbeiten häufig im Teillastbereich und nicht im Auslegungspunkt aufgrund eines ungenauen Lastenhefts, einer daraus resultierenden falschen Auslegung und einer variierenden Beanspruchung. So liefern bspw. Heizungspumpen in Deutschland ca. 4/5 ihrer Arbeitszeit weniger als 50 % ihres Nennvolumenstroms,[2] arbeiten also hauptsächlich im starken Teillastbereich.
Im Teillastbereich ist der Wirkungsgrad der Turbomaschine nicht optimal, da Strömungsphänomene wie Inzidenz, Kavitation, Rotating Stall, Teillastrezirkulation etc. den Wirkungsgrad und den Grad der Funktionserfüllung reduzieren.[3] Zusätzlich steigt die Belastung der Maschine aufgrund stimulierter, selbst-erregter Schwingungen, die einen unkontrollierbaren Betrieb verursachen können und die Zuverlässigkeit der Maschine verringern. Diese Schwingungen und eventuell auftretende Kavitation erhöhen die Schallemission (Lärm) und belasten damit die Umwelt.
Für einen schonenden Umgang mit den Ressourcen und der Umwelt ist es unabdingbar, einerseits die Turbomaschinen passender an die Anforderungen auszulegen und andererseits die wirkungsgradverringernden Strömungsphänomene zu verhindern. Für eine bessere Auslegung sollte das

[1] Pelz, *250 Jahre Energienutzung: Algorithmen übernehmen Synthese, Planung und Betrieb von Energiesystemen*, ([39], 23.01.2014)

[2] Hirschberg, *Jährliches europäisches Teillastprofil von Heizungspumpen*, ([21], 2012)

[3] Gülich, *Kreiselpumpen: Handbuch für Entwicklung, Anlagenplanung und Betrieb*, ([20], 2010)

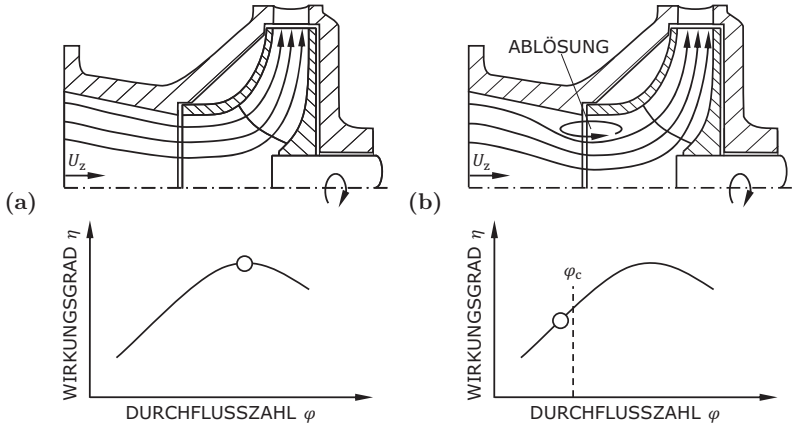


Abbildung 1.1 – Skizzierte Stromlinien in einer Turbomaschine für den Betrieb (a) im Auslegungspunkt und (b) in der Teillast mit dazugehörigen Wirkungsgrad.

gesamte System und dessen Topologie und nicht nur die einzelne Komponente, in dem vorliegen Fall die Turbomaschine, betrachtet werden.[4] Damit wird ein Betrieb im Bereich des maximalen Wirkungsgrads sowie die Zuverlässigkeit der Maschine sichergestellt. Zusätzlich ist es erstrebenswert die erwähnten Strömungsphänomene zu erforschen. Aus den dabei gewonnenen Erkenntnisse können Möglichkeiten abgeleitet werden, die das Auftreten dieser Strömungsphänomene verhindern, um einen sicheren sowie zuverlässigen Betrieb mit einem hohen Wirkungsgrad abweichend vom Auslegungspunkt zu gewährleisten.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich deshalb mit dem Phänomen der Teillastrezirkulation. Im Teillastbereich für eine Durchflusszahl

$$\varphi := \frac{\tilde{\overline{U}}_z}{\tilde{\Omega}\tilde{R}_0} < \varphi_c \tag{1.1}$$

kleiner als die kritische Durchflusszahl φ_c, löst die Strömung an der Wand ab und es bildet sich ein Rezirkulationsgebiet aus wie in Abbildung 1.1 skizziert. Dieses Phänomen wird Teillastrezirkulation genannt. Hier ist $\overline{U}_z$ die zeitlich und über den Strömungsquerschnitt der Zuströmung gemittelte axiale Geschwindigkeit, $\tilde{R}_0$ der Radius am Eintritt der Turbomaschine und $\tilde{\Omega}$ die

[4] Pelz, Lorenz und Ludwig, „Besser geht's nicht. TOR plant das energetisch optimale Fluidsystem“, ([40], 2014)

Kreisfrequenz. Die Strömungsablösung an der Wand (engl. wall stall) im Eintrittsbereich einer Turbomaschine wird durch kinematische und dynamische Effekte verursacht. Diese Effekte wirken gleichzeitig und erzeugen eine transiente Strömungsablösung.
Als Ursache für die Strömungsablösung aus kinematischer Sicht ist das Wirbelsystem der Turbomaschine und dessen Wirkung zu nennen. Das Wirbelsystem besteht aus Spitzenwirbeln, gebundenen Wirbeln und Nabenwirbeln. Zusätzlich liegen gespiegelte Wirbel zu Erfüllung der kinematischen Randbedingung vor. Nach einem Modell von Pelz[5,6] ist das Wirbelsystem und deren Wirkung abhängig von dem Betriebsbereich der Turbomaschine. Für den starken Teillastbetrieb $\varphi \to 0$ wickeln sich die Spitzenwirbel zu einem Ringwirbel auf. Dieser Ringwirbel induziert eine Geschwindigkeit auf seine Umgebung und die induzierte Geschwindigkeit ist nach dem Biot-Savart-Gesetz von der Zirkulation des Wirbels und von dem Abstand zu diesem abhängig. Als Folge der induzierten Geschwindigkeit liegt ein Staupunkt an der Wand an der Stelle vor, wo sich die induzierte Geschwindigkeit und die vorliegende Anströmungsgeschwindigkeit gegenseitig aufheben. Der Ort des Staupunkts ist zeitlich abhängig, da sich der Ringwirbel bis zu einer kritischen Zirkulation aufwickelt und dann zerfällt. Folglich liegt eine transiente Strömungsablösung vor.[5,6]
Als dynamische Ursache für die Strömungsablösung ist der vorliegende positive Druckgradient in radiale und axiale Richtung am Eintrittsbereich der Turbomaschine zu nennen. Die positive radiale Komponente des Druckgradients wird durch den eingebrachten Drall und der deshalb wirkenden Zentrifugalkraft verursacht. Die positive axiale Komponente des Druckgradients ist mit dem anwachsenden Drall in axialer Richtung begründet. Reicht der Impuls der Strömung nahe der Wand nicht mehr aus, um den dort vorliegenden positiven Druckgradient der axialen Komponente zu überwinden, löst die Strömung an der Wand ab und es bildet sich ein Rezirkulationsgebiet aus. Daraus motivierend leitet sich die übergeordnete Forschungsfrage für die vorliegende Arbeit ab:

Welchen Einfluss hat der Drall auf die axiale Grenzschicht?

Für die Untersuchung der Drallentwicklung, der Interaktion des Dralls mit der axialen Grenzschicht und der daraus resultierenden Strömungsablösung wird die Strömung in einem generischen Modell betrachtet.

[5] Pelz und Taubert, „Vortex induced transient stall“, ([41], 2017)

[6] Pelz, Taubert und Cloos, „Vortex structure and kinematics of encased axial turbomachines“, ([42], 2017)

1.1 Generisches Strömungsmodell

Das generische Strömungsmodell ist ein durchströmtes, koaxial rotierendes Kreisrohr. Hierbei wird der Drall durch die viskosen und turbulenten Schubspannungen nahe der Rohrwand und nicht durch die Schaufelgeometrie wie bei einer Turbomaschine eingebracht. Somit verschwindet der dominierende Einfluss der Schaufelgeometrie. Dies ist ein hervorzuhebender Vorteil des generischen Modells.[7]

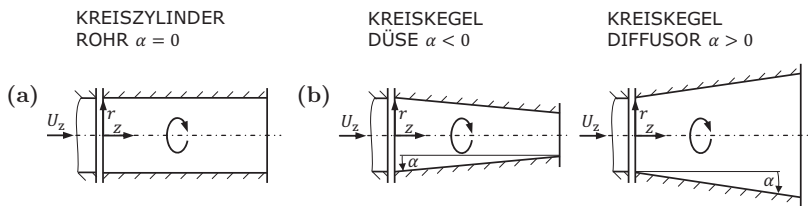


Abbildung 1.2 – Generisches Modell eines durchströmten, koaxial rotierenden (a) Kreiszylinders und (b) Kreiskegels mit dem Öffnungswinkel α.

In vorherigen Arbeiten am Institut für Fluidsystemtechnik[8,9,10,11] wird die Strömung in einem koaxial rotierenden Kreisrohr mit einem konstanten Radius $\tilde{R}_0$, d. h. einem Kreiszylinder, erforscht, siehe Abbildung 1.2a. Aus den dabei gewonnenen Erkenntnissen wird bereits der Einfluss der Zentrifugalkraft auf die axiale Grenzschicht quantifiziert.[10,11] Für eine systematische Annäherung an eine Turbomaschine wird in der vorliegenden Arbeit deren Funktion berücksichtigt. Die Funktion einer Kraftmaschine (Turbine) ist es, der Strömung Energie zu entziehen und die einer Arbeitsmaschine (Pumpe) hinzuzufügen. Dies resultiert in einer Druckabnahme bzw. -zunahme. Diese Eigenschaft einer Druckabnahme bzw. -zunahme ist mit einer Düse mit einem negativen Öffnungswinkel ($\alpha < 0$) bzw. mit einem Diffusor mit einem positiven Öffnungswinkel ($\alpha > 0$) erfüllt, siehe Abbildung 1.2b. Folglich wird

[7] Die Idee für die Untersuchung der Drallentwicklung und der Strömungsablösung an einem generischen Modell ist von Pelz.

[8] Stapp, Pelz und Loens, „On part load recirculation of pumps and fans - a generic study“, ([57], 2013)

[9] Stapp und Pelz, „Evolution of swirl boundary layer and wall stall at part load - a generic experiment“, ([56], 2014)

[10] Stapp, *Experimentelle und analytische Untersuchung zur Drallgrenzschicht*, ([55], 2015)

[11] Cloos, Stapp und Pelz, „Swirl boundary layer and flow separation at the inlet of a rotating pipe“, ([11], 2017)

das bisherige generische Modell erweitert, indem der Rohradius

$$\tilde{R}(\tilde{z}) = \tilde{R}_0 + \tilde{z} \tan \alpha \tag{1.2}$$

linear abhängig von der axialen Koordinate $\tilde{z}$ ist mit dem Radius $\tilde{R}_0 = \tilde{R}(\tilde{z} = 0)$ am Eintritt des rotierenden Diffusors bzw. Düse. In dieser Arbeit wird die Geometrie des rotierenden Diffusors bzw. der Düse unter dem Begriff rotierender Kreiskegel zusammengefasst und anhand des Öffnungswinkels unterschieden. Der Begriff Kreiskegel wird üblicherweise für eine Außenströmung verwendet, jedoch wird in der vorliegenden Arbeit eine Innenströmung betrachtet.
Für die Untersuchung der Strömung wird die Parameteranzahl durch eine Dimensionsanalyse reduziert. Folglich werden alle dimensionsbehafteten Größen mit "$\sim$" gekennzeichnet, alle anderen Größen sind dimensionslos. Alle Längen werden als Vielfaches des Eintrittsradius $\tilde{R}_0$, alle Geschwindigkeiten als Vielfaches der lokalen Wandgeschwindigkeit $\tilde{\Omega}\tilde{R}$ und Spannungen als Vielfaches von $\tilde{\varrho}(\tilde{\Omega}\tilde{R})^2$ mit der Dichte $\tilde{\varrho}$ des Fluids angegeben. Damit ergibt sich eine für Turbomaschinen typisch definierte Reynoldszahl

$$Re := \frac{2\tilde{\Omega}\tilde{R}_0^2}{\tilde{\nu}} \tag{1.3}$$

mit der kinematischen Viskosität $\tilde{\nu}$. Die axiale Reynoldszahl ist definiert als $Re_{\mathrm{ax}} := 2\,\overline{\tilde{U}}_{\mathrm{z}}\tilde{R}_0/\tilde{\nu} = \varphi Re$. Zusätzlich werden radiale Größen, wie bei durchströmten Kreiskegeln üblich,[12] mit dem lokalen Radius $\tilde{R}(\tilde{z})$ skaliert, $y := \tilde{y}/\tilde{R}(\tilde{z}) = 1 - \tilde{r}/\tilde{R}$.
Die Strömung durch einen rotierenden Kreiskegel ist in Abbildung 1.3 detaillierter dargestellt. Die axiale Zuströmung ist drallfrei und nahe der Wand entwickelt sich nach einer Idee von Prandtl[13] eine axiale Grenzschicht mit der Dicke δ. Innerhalb der axialen Grenzschicht $y < \delta$ sind viskose und turbulente Effekte signifikant, wodurch sich ein zeitlich-gemitteltes Geschwindigkeitsprofil $u_{\mathrm{z}}(y, z)$ manifestiert. Die axiale Grenzschicht entwickelt sich bereits stromaufwärts des rotierenden Kreiskegels, sodass am Eintritt eine axiale Grenzschichtdicke $\delta_0 = \delta(z = 0)$ vorliegt. An der Wand $y = 0$ verschwindet die axiale Geschwindigkeitskomponente aufgrund der kinematischen Haftbedingung (Dirichlet-Randbedingung). Am Rand der Grenzschicht $y = \delta$ verschwindet der Gradient des axialen Geschwindigkeitsprofils in radialer Richtung $\partial u_{\mathrm{z}}(\delta, z)/\partial y = 0$ (Neumann-Randbedingung), da die Strömung

[12] Schlichting und Gersten, „Berechnung der Strömung in rotationssymmetrischen Diffusoren mit Hilfe der Grenzschichttheorie", ([51], 1961)

[13] Prandtl, „Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung.", ([46], 1904)

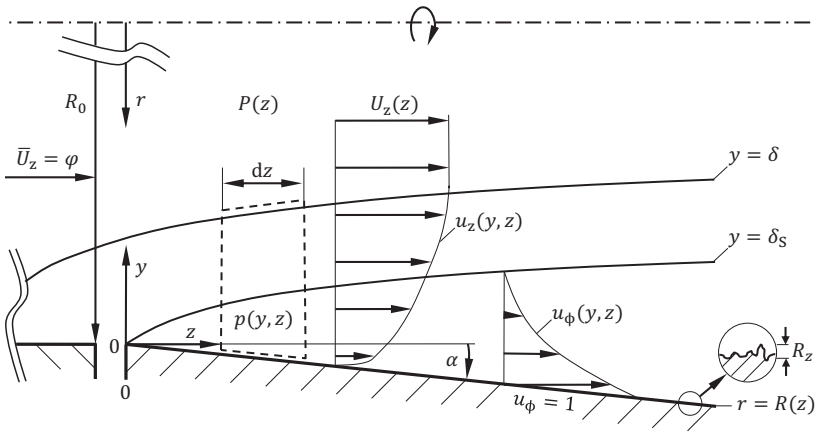


Abbildung 1.3 – Strömung am Eintritt in einen rotierenden Diffusor mit dem Öffnungswinkel α und einem Kontrollvolumen (gestrichelte Linie) aus [8].

außerhalb der Grenzschicht $y > \delta$ rotationsfrei ist. Deshalb ist die dort vorliegende, zeitlich-gemittelte, axiale Kerngeschwindigkeit $U_z = U_z(z)$ einzig eine Funktion der axialen Koordinate z.
Der Drall nahe der Wand in dem koaxial rotierenden Kreiskegel wird äquivalent zu der axialen Grenzschicht durch viskose und turbulente Reibung erzeugt. Nahe der Wand liegt also eine Region mit einer Umfangsgeschwindigkeit vor. Dieser Bereich wird nach einer Idee von Pelz "Drallgrenzschicht" (engl. swirl boundary layer) genannt. Die Drallgrenzschicht hat die Dicke δ_S. Innerhalb der Drallgrenzschicht $y < \delta_S$ folgt die zeitlich-gemittelte Umfangsgeschwindigkeitsverteilung dem Profil $u_\phi(y,z)$ und es wirkt die Zentrifugalkraft durch den vorliegenden Drall. Die Zentrifugalkraft erhöht den Druck in Wandnähe und für $\varphi \ll 1$ ist es unabdingbar, diese radiale Komponente des Druckgradients innerhalb der Drallgrenzschicht zu berücksichtigen.[14,15] Diese radiale Komponente des Druckgradients wird üblicherweise in der Grenzschichttheorie vernachlässigt.[16] Über die radiale Druckverteilung $p(y,z)$ ist die Entwicklung der Drallgrenzschicht und die der axialen Grenzschicht gekoppelt und beeinflussen sich somit gegenseitig. Außerhalb der Drallgrenzschicht $y > \delta_S$ ist die Strömung drallfrei und der dort vorliegende statische

[14] Stapp, *Experimentelle und analytische Untersuchung zur Drallgrenzschicht*, ([55], 2015)

[15] Cloos, Stapp und Pelz, „Swirl boundary layer and flow separation at the inlet of a rotating pipe“, ([11], 2017)

[16] Schlichting, *Grenzschicht-Theorie*, ([50], 1965)

Druck $P = P(z)$ ist einzig eine Funktion der axialen Koordinate. Anhand dieser rotationssymmetrischen, inkompressiblen Strömung eines newtonschen Fluids mit konstanten Stoffgrößen wird die Entwicklung und der Einfluss des Dralls bzw. der Zentrifugalkraft auf die axiale Grenzschicht und die Ausbreitung der Strömungsablösung erforscht.
Die axiale Koordinate des Zylinderkoordinatensystems folgt der Mittellinie und nicht der Wand, siehe Abbildung 1.3. Dies ist unüblich in der Grenzschichttheorie, hat jedoch folgenden Vorteil: Durch diese Wahl wird der Einfluss des axial veränderlichen Radius bei den beschreibenden Gleichungen sichtbar und wird analytisch quantifiziert. Dies entspricht dem Vorgehen von Schlichting und Gersten[17] für eine Strömung durch einen nicht-rotierenden Diffusor. Die Wahl des Koordinatensystems hat keinen Einfluss auf den physikalischen Inhalt der beschreibenden Gleichungen.

1.2 Forschungsfragen und Methodik

Durch den erweiterten Parameterraum um den axial veränderlichen Radius leiten sich vier spezifizierte Forschungsfragen für diese Arbeit ab:

Welchen Einfluss hat der Öffnungswinkel α auf ...

1. die Entwicklung der Drallgrenzschicht δ_S?
2. das zeitlich-gemittelte Umfangsgeschwindigkeitsprofil u_Φ und deren Turbulenzintensität $u'_{\Phi,\mathrm{rms}}$ in der Drallgrenzschicht?
3. den Umschlag zu einer hydraulisch rauen Wand?
4. die axiale Grenzschicht δ und die Ausbreitung der Strömungsablösung?

Zur Beantwortung der vier Forschungsfragen wird die Methodik der Dimensionsanalyse und die Integralmethode der Grenzschichttheorie angewendet. Zusätzlich werden experimentelle Untersuchung für eine Validierung des Modells und zur Definition des Gültigkeitsbereichs der Validierung durchgeführt. Die Dimensionsanalyse ergibt, dass die Entwicklung der Drallgrenzschichtdicke δ_S von der axialen Koordinate z, der Reynoldszahl Re, der Durchflusszahl φ, der gemittelten Rauheit $R_z := \tilde{R}_z/\tilde{R}_0$, dem Öffnungswinkel α und der Zuströmung mit der Turbulenzintensität $u'_{\mathrm{z,rms}}$ abhängt

$$\delta_\mathrm{S} = \delta_\mathrm{S}(z, Re, \varphi, R_z, \alpha, \delta_0, u'_{\mathrm{z,rms}}). \tag{1.4}$$

[17] Schlichting und Gersten, „Berechnung der Strömung in rotationssymmetrischen Diffusoren mit Hilfe der Grenzschichttheorie“, ([51], 1961)

Die Integralmethode der Grenzschichttheorie wird verwendet, um den Einfluss der genannten Parameter zu quantifizieren. Diese Methode wurde zu Beginn des letzten Jahrhunderts von Pohlhausen[18] und von Kármán[19] entwickelt. Stapp[20] und Cloos *et al.*[21] verallgemeinern mit dieser Methode bereits die bekannte von Kármán Gleichung für die Strömung durch einen rotierenden Kreiszylinder. Inhalt der vorliegenden Arbeit ist es, diese verallgemeinerte von Kármán Gleichung für die Strömung durch einen rotierenden Kreiszylinder um den Einfluss des axial veränderlichen Radius zu erweitern. Diese axiomatische Beschreibung ist eine Kombination und Erweiterung der Arbeiten von Stapp[20] und Cloos *et al.*[21] sowie Schlichting und Gersten[22]. Zur Lösung des Modells, ein System von gewöhnlichen, nichtlinearen Differentialgleichungen erster Ordnung, werden Ansatzfunktionen für die Geschwindigkeitsprofile und die daraus abgeleiteten Wandschubspannungsmodelle benötigt. Dies ist üblich bei der Integralmethode.
Die Lösung des Gleichungssystems wird Grenzschichtlösung genannt und besteht aus der axialen Grenzschichtdicke δ, der Drallgrenzschichtdicke δ_S sowie dem Druck P und der axialen Geschwindigkeit U_z in der Kernströmung. Mit der Grenzschichtlösung und den gewählten Ansatzfunktionen liegt folglich das Geschwindigkeits- und Druckfeld in einem rotierenden Kreiskegel vor. Die Grenzschichtlösung wird verwendet, um mit dem angepassten Stratford Kriterium für eine laminare[23] und dem für eine turbulente[24] Strömung die beginnende Strömungsablösung vorherzusagen. Die Parameterkombination für eine beginnende Strömungsablösung schränkt den Gültigkeitsbereich des Modells ein. Sowohl das Modell als auch die angepassten Kriterien werden anhand experimenteller Ergebnisse validiert. Zusätzlich werden im Experiment der Einfluss der Rauheit und die kritische Durchflusszahl für eine ausgebildete Strömungsablösung ermittelt.
Die in dieser Arbeit gewonnen Erkenntnisse sind für die Analyse und Vorhersage der Drallentwicklung und der Teillastrezirkulation nützlich. Ähnliche Strömungssituationen zu dem generischen Strömungsmodell dieser Arbeit sind bei Sekundärluftversorgung von Gasturbinen zu finden. Des Weiteren dienen die gewonnenen Erkenntnisse dazu, die Zuströmung einer Turbomaschine, im speziellen mit einer Deckscheibe oder einer dreidimensionalen

[18] Pohlhausen, „Zur näherungsweisen Integration der Differentialgleichung der laminaren Grenzschicht“, ([44], 1921)

[19] Kármán, „Über laminare und turbulente Reibung“, ([26], 1921)

[20] Stapp, *Experimentelle und analytische Untersuchung zur Drallgrenzschicht*, ([55], 2015)

[21] Cloos, Stapp und Pelz, „Swirl boundary layer and flow separation at the inlet of a rotating pipe“, ([11], 2017)

[22] Schlichting und Gersten, „Berechnung der Strömung in rotationssymmetrischen Diffusoren mit Hilfe der Grenzschichttheorie“, ([51], 1961)

[23] Stratford, „Flow in the laminar boundary layer near separation“, ([58], 1954)

[24] Stratford, „The prediction of separation of the turbulent boundary layer“, ([59], 1959)

Grenzschicht, besser zu beschreiben. Ferner erweitert diese Arbeit das physikalische Verständnis hinsichtlich des Einflusses der Zentrifugalkraft auf die axiale Grenzschicht unter Berücksichtigung der Funktion von Arbeits- und Kraftmaschinen.
Die Arbeit ist wie folgt gegliedert: Im anschließenden Kapitel werden die wesentlichen Erkenntnisse aus der vorliegenden Literatur für die Strömung durch einen rotierenden und nicht-rotierenden Kreiszylinder bzw. Kreiskegel zusammengefasst. Hierbei wird auf die relevanten Lücken in der Literatur hingewiesen. Im darauf folgenden Kapitel 3 werden die beschreibenden Gleichungen hergeleitet. Im Fokus steht dabei die erstmals verallgemeinerte von Kármán Gleichung für die Strömung durch einen rotierenden Kreiskegel. Damit wird die Grenzschichttheorie um den Einfluss der Zentrifugalkraft und des axial veränderlichen Radius erweitert. Dieser Ansatz ist gültig für laminare und turbulente Strömung. Die notwendigen Ansatzfunktionen für die Geschwindigkeitsprofile und die dazugehörigen Wandschubspannungsmodelle werden anschließend diskutiert. Am Ende von Kapitel 3 werden die angepassten Stratford Kriterien vorgestellt. Für eine belastbare Validierung wird in Kapitel 4 der experimentelle Versuchsaufbau mit der dazugehörigen Messtechnik beschrieben. Die Validierung und die Diskussion der Ergebnisse erfolgt in Kapitel 5. Abgeschlossen wird die Arbeit mit der Beantwortung der vier spezifizierten Forschungsfragen im letzten Kapitel.

Kapitel 2

Stand der Forschung

Die Untersuchung der Strömung durch einen rotierenden Kreiszylinder oder Kreiskegel ist durch viele unterschiedliche Anwendungen und den daraus abgeleiteten Fragestellungen motiviert. Die vorliegende Literatur und die darin enthaltenen Erkenntnisse werden in diesem Abschnitt zusammengefasst und hinsichtlich der phänomenologischen Größen

- des Rohrreibungsverlustes,
- der axialen Grenzschicht mit dem axialen Geschwindigkeitsprofil,
- der Drallgrenzschicht mit dem Umfangsgeschwindigkeitsprofil und
- der Strömungsablösung

kategorisiert. Dabei wird unterschieden zwischen der vorliegenden Strömungsart, laminar oder turbulent, und ob eine sich entwickelnde oder eine voll ausgebildete Strömung im rotierenden Kreiskegel vorliegt. Für eine voll ausgebildete Strömung verschwindet die axiale Komponente des Geschwindigkeitsfeldgradients und die Grenzschichten erreichen die Mittellinie des Rohres. Für eine turbulente Strömung erreichen die Grenzschichten die Mittellinie $\delta, \delta_S = 1$ bei $z > 10^2$ abhängig von Reynolds- und Durchflusszahl.[1] Für eine sich entwickelnde Strömung liegt eine axiale Komponente des Geschwindigkeitsfeldgradients vor. Beendet wird das Kapitel mit den wichtigsten Erkenntnissen für die Strömung in nicht-rotierenden Kreiskegeln.

[1] Nishibori, Kikuyama und Murakami, „Laminarization of turbulent flow in the inlet region of an axially rotating pipe“, ([37], 1987)

2.1 Rohrreibungsverlust

Für eine hydraulisch glatte Wand und eine turbulente Strömung nimmt nach Untersuchungen von Blasius[2] der Rohrreibungsverlust in nicht-rotierenden Kreiszylindern mit reduzierter axialer Reynoldszahl zu. Im Gegensatz dazu sinkt der Rohrreibungsverlust in rotierenden Kreiszylindern mit sinkender axialer Reynoldszahl bzw. Durchflusszahl.[3,4] Die Abnahme des Rohrreibungsverlustes ist damit begründet, dass die Zentrifugalkraft die Turbulenz dämpft und die Strömung stabilisiert. Die Dämpfung hat einen stärkeren Einfluss nahe der Wand als in der Kernströmung, weshalb mehr tieffrequente als hochfrequente Schwingungen gedämpft werden.[5] Weiterhin wird für eine turbulente Strömung und $\varphi > 1$ am Eintritt des rotierenden Kreiszylinders $z < 20$ die Turbulenz durch den plötzlichen Anstieg des Dralls angefacht. Stromabwärts dominiert wieder die dämpfende Wirkung der Zentrifugalkraft.[6,7] Für eine laminare Strömung in einem rotierenden Rohr steigt der Rohrreibungsverlust durch die Zentrifugalkraft an, da diese die Turbulenz stimuliert. Deshalb liegt die axiale Schnittebene der Transition von einer laminaren zu einer turbulenten Strömung weiter stromaufwärts in einem rotierenden als in einem nicht-rotierenden Kreiszylinder.[4] Daraus schlussfolgernd hat die Zentrifugalkraft abhängig von der Strömungsart einen merklichen Einfluss auf den Rohrreibungsverlust. Der Rohrreibungsverlust ist proportional zu der axialen Grenzschichtdicke.

2.2 Axiale Grenzschicht

Die Zentrifugalkraft beeinflusst ebenfalls die axiale Grenzschichtdicke und das axiale Geschwindigkeitsprofil. Am Eintritt eines rotierenden Kreiszylinders tritt eine komplexe Transformation des axialen Geschwindigkeitsprofils durch die Interaktion der Zentrifugalkraft und den stimulierten, turbulenten Bursts auf. Die Transformation hängt von der Eintrittsbedingung der Strömung in den rotierenden Kreiszylinder ab. Für eine voll ausgebildete turbulente axiale Strömung transformiert sich das axiale Geschwindig-

[2] Blasius, „Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsforschungen in Flüssigkeiten“, ([3], 1913)

[3] Levy, „Strömungserscheinungen in rotierenden Rohren“, ([31], 1927)

[4] White, „Flow of a fluid in an axially rotating pipe“, ([67], 1964)

[5] Borisenko, Kostikov und Chumachenko, „Experimental study of turbulent flow in a rotating channel“, ([5], 1973)

[6] Nagib *et al.*, „Experimental study of turbulent flow in a rotating channel“, ([33], 1973)

[7] Bissonnette und Mellor, „Experiments on the behavior of an axisymmetric turbulent boundary layer with a sudden circumferential strain“, ([2], 1974)

keitsprofil kontinuierlich stromabwärts von einem turbulenten zu einem laminaren Profil.[8] Dieser Effekt wird in der Literatur als "Laminarisierung" bezeichnet.[9,10,11,12] Für eine laminare Strömung folgt das axiale Geschwindigkeitsprofil einer quadratischen Verteilung und für eine turbulente Strömung annähernd Prandtl's 1/7-Potenzgesetz.[9] Für eine größere Durchflusszahl $\varphi \approx 1$ und eine turbulente Zuströmung transformiert sich das axiale Geschwindigkeitsprofil zurück in ein turbulentes Profil stromabwärts der Laminarisierung. Für eine ausreichend kleine Durchflusszahl $\varphi = 0.33$ bleibt das laminarisierte, axiale Geschwindigkeitsprofil bestehen.[9]
Es sind einige Arbeiten vorhanden, die den Einfluss der Zentrifugalkraft auf das axiale Geschwindigkeitsprofil theoretisch beschreiben.[8,10,13,14,15] Hierbei wird ein Umfangsgeschwindigkeitsprofil mit einer Ansatzfunktion beschrieben und das axiale Geschwindigkeitsprofil mit dem Impulssatz hergeleitet. Die Transformation des axialen Geschwindigkeitsprofils wird mit der Anwendung eines Turbulenzmodells, meistens das Mischungswegmodell, modelliert. Qualitativ wird der Einfluss der Zentrifugalkraft auf das axiale Geschwindigkeitsprofil korrekt abgebildet. Für eine laminare Zuströmung stimmt die analytische Lösung mit den experimentellen Daten von Kikuyama *et al.*[8] überein, siehe Abbildung 2.1a. Für eine turbulente Zuströmung wird der Einfluss der Zentrifugalkraft leicht überschätzt, wie in Abbildung 2.1b zu erkennen ist. Weigand und Beer[10] leiten ein universelles axiales Geschwindigkeitsprofil her. Dabei wird das Profil nicht mit der Durchflusszahl φ sondern mit dem Parameter $Z := \tilde{R}_0\tilde{\Omega}/\tilde{v}_*$ mit $\tilde{v}_* = \sqrt{|\tilde{\tau}_{\mathrm{yz,w}}|\tilde{\varrho}}$ skaliert.
Einhergehend mit der Laminarisierung verändert sich der Formfaktor $H_{1,2} = \delta_1/\delta_2$ mit der Verdrängungsdicke δ_1 und der Impulsverlustdicke δ_2, siehe Abbildung 2.2. Die Verdrängungs- und die Impulsverlustdicke sind ein

[8] Kikuyama *et al.*, „Flow in an axially rotating pipe. A calculation of flow in the saturated region", ([28], 1983)

[9] Nishibori, Kikuyama und Murakami, „Laminarization of turbulent flow in the inlet region of an axially rotating pipe", ([37], 1987)

[10] Weigand und Beer, „On the universality of the velocity profiles of a turbulent flow in an axially rotating pipe", ([66], 1994)

[11] Imao, Itohi und Harada, „Turbulent characteristics of the flow in an axially rotating pipe", ([22], 1996)

[12] Facciolo, „A study on axially rotating pipe and swirling jet flows", ([17], 2006)

[13] Reich und Beer, „Fluid flow and heat transfer in an axially rotating pipe - I. Effect of rotation on turbulent pipe flow", ([48], 1989)

[14] Reich, Weigand und Beer, „Fluid flow and heat transfer in an axially rotating pipe - II. Effect of rotation on laminar pipe flow", ([49], 1989)

[15] Weigand und Beer, „Fluid flow and heat transfer in an axially rotating pipe: the rotational entrance", ([65], 1992)

(a)

(b)

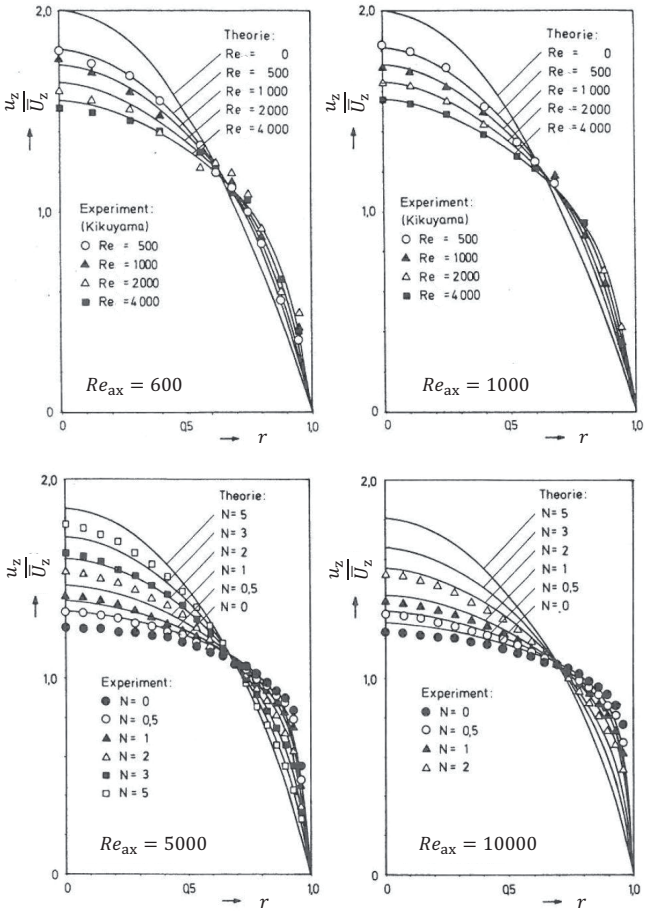


Abbildung 2.1 – Transformation des axialen Geschwindigkeitsprofils in einem rotierenden Kreiszylinder ($\alpha = 0$) mit $N = 1/\varphi$ für (a) eine laminare Zuströmung und (b) eine turbulente Strömung aus [47] (bearbeitet).

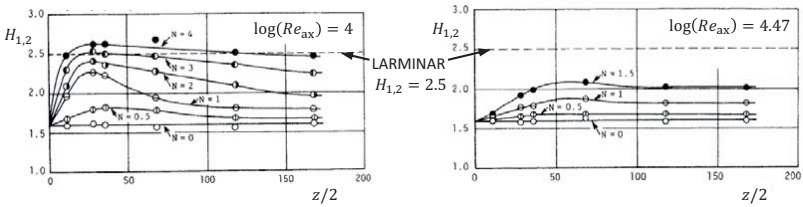


Abbildung 2.2 – Formfaktor $H_{1,2}$ vs. axiale Koordinate bei variierter Durchflusszahl für einen rotierenden Kreiszylinder ($\alpha = 0$) mit $N = 1/\varphi$ aus [37] (bearbeitet).

Maß für die Verdrängungswirkung bzw. den Impulsverlust der axialen Grenzschicht.[16] Für eine turbulente Strömung nimmt der Formfaktor üblicherweise den Wert 1.6 an und für eine laminare Strömung ist dieser 2.5. Für eine turbulente Zuströmung steigt unmittelbar am Eintritt des rotierenden Kreiszylinders der Formfaktor von 1.6 mit sinkender Durchflusszahl an und übersteigt sogar den Wert von 2.5. Nach Erreichen eines lokalen Maximums fällt der Formfaktor wieder ab und nimmt einen asymptotischen Grenzwert an. Der Grenzwert ist eine Funktion der Durchflusszahl.[17]
Der Einfluss der Zentrifugalkraft auf die axiale Grenzschichtdicke im Eintrittsbereich eines rotierenden Kreiszylinders $z < 5$ wird von Stapp[18] und Cloos *et al.*[19] anhand eines axiomatischen Modells zu

$$g := \delta(G \neq 0) - \delta(G = 0) = 11.52\, Re^{-0.969}\, \varphi^{-2.94}\, z^{0.974} \tag{2.1}$$

quantifiziert. Hierbei ist $\delta(G = 0)$ die axiale Grenzschichtdicke in einem nichtrotierenden Kreiszylinder und $\delta(G \neq 0)$ in einem rotierendem Kreiszylinder. Dieser Einfluss ist ebenfalls in Abbildung 2.3 an der axialen Schnittebene $z = 2$ visualisiert. Für $\varphi \ll 1$ hat die Zentrifugalkraft einen dominierenden Einfluss auf die Entwicklung der axialen Grenzschicht und diese wird signifikant dicker. Für $\varphi \to 1$ verschwindet der Einfluss der Zentrifugalkraft und die axiale Grenzschichtdicke in einem rotierenden Kreiszylinder nähert sich asymptotisch dem Wert der axialen Grenzschichtdicke in einem nichtrotierenden Kreiszylinder an. Welchen Einfluss die Zentrifugalkraft auf die

[16] Spurk und Aksel, *Strömungslehre: Einführung in die Theorie der Strömungen*, ([54], 2006)

[17] Nishibori, Kikuyama und Murakami, „Laminarization of turbulent flow in the inlet region of an axially rotating pipe“, ([37], 1987)

[18] Stapp, *Experimentelle und analytische Untersuchung zur Drallgrenzschicht*, ([55], 2015)

[19] Cloos, Stapp und Pelz, „Swirl boundary layer and flow separation at the inlet of a rotating pipe“, ([11], 2017)

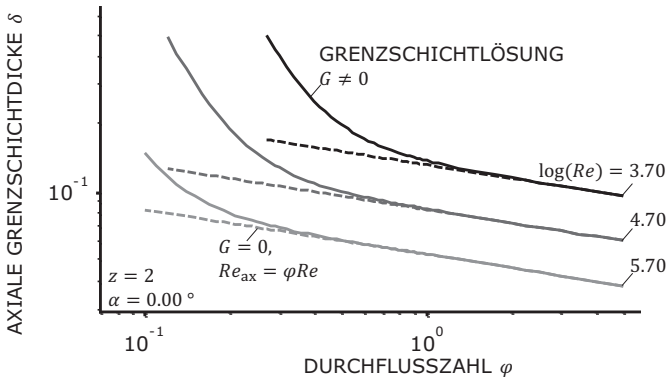


Abbildung 2.3 – Axiale Grenzschichtdicke vs. Durchflusszahl bei variierter Reynoldszahl für einen rotierenden ($G \neq 0$) und einen nicht-rotierenden ($G = 0$) Kreiszylinder ($\alpha = 0$) bei turbulenter Zuströmung mit $\delta_0 = 0.08$ aus [11] (bearbeitet).

axiale Grenzschicht bei einem positiven oder negativem Druckgradienten in axialer Richtung hat, gilt es zu untersuchen. Dafür wird in der vorliegenden Arbeit die axiale Grenzschichtdicke in rotierenden Kreiskegeln mit konvergenten und divergenten Strömungsquerschnitt untersucht.

2.3 Drallgrenzschicht

Es ist notwendig die Entwicklung des Dralls zu bestimmen, um die Stärke der Zentrifugalkraft angeben zu können und somit den Einfluss auf die axiale Grenzschicht zu quantifizieren. Die Entwicklung des Dralls ist über die Drallgrenzschichtdicke δ_S und das Umfangsgeschwindigkeitsprofil u_Φ gegeben. Das Umfangsgeschwindigkeitsprofil folgt der Form $u_\Phi = r^2$ für eine voll ausgebildete turbulente Strömung ($\delta, \delta_S = 1$) in einem rotierenden Kreiszylinder.[20,21,22,23] Für eine voll ausgebildete laminare Strömung folgt das Profil der Form $u_\Phi = r$ einer Festkörperrotation.[23] Die Umfangsgeschwindigkeitsprofile

[20] Murakami und Kikuyama, „Turbulent flow in axially rotating pipes“, ([32], 1980)

[21] Kikuyama, Murakami und Nishibori, „Developement of three-dimensional turbulent boundary layer in an axially rotating pipe“, ([27], 1983)

[22] Imao, Itohi und Harada, „Turbulent characteristics of the flow in an axially rotating pipe“, ([22], 1996)

[23] Reich, „Strömung und Wärmeübertragung in einem axial rotierenden Rohr“, ([47], 1988)

für eine laminare und turbulente Strömung werden von Oberlack[24] anhand einer Lie-Gruppen Analyse theoretisch hergeleitet. Für die Transition von einer laminaren zu einer turbulenten Strömung liegt das Umfangsgeschwindigkeitsprofil zwischen den eingrenzenden Profilen der laminaren und der turbulenten Strömung.[25]
Das Umfangsgeschwindigkeitsprofil ist für den Bereich der entwickelnden Grenzschichten weniger erforscht. Für eine Durchflusszahl $\varphi > 1$ geben Kikuyama *et al.*[26] ein Umfangsgeschwindigkeitsprofil skaliert auf die Impulsverlustdicke δ_2 an. Für den Bereich $z < 40$ sind deutliche Abweichungen zu den experimentellen Daten zu erkennen. Dies ist damit begründet, dass sich die Impulsverlustdicke anders als die Drallgrenzschichtdicke entwickelt. Folglich ist die Impulsverlustdicke nicht als Skalierungsgröße für das Umfangsgeschwindigkeitsprofil geeignet. Experimentelle Untersuchungen von Stapp[27] und Cloos *et al.*[28] zeigen erstmals eine Selbstähnlichkeit des Umfangsgeschwindigkeitsprofils innerhalb der entwickelnden Drallgrenzschicht für die Strömung durch einen rotierenden Kreiszylinder. Hierbei wird das Profil auf die Drallgrenzschichtdicke skaliert. Unabhängig davon, ob eine sich entwickelnde laminare oder turbulente oder eine voll ausgebildete turbulente, axiale Strömung am Eintritt des rotierenden Kreiszylinders vorliegt, folgt das Umfangsgeschwindigkeitsprofil

$$u_\Phi = \left(1 - \frac{y}{\delta_\mathrm{S}}\right)^k \tag{2.2}$$

mit $k = 2$ für eine hydraulisch glatte Wand, $z < 10$, $\log(Re) = 4 \ldots 5$ und $\varphi < 1$. Mit dem Umschlag zu einer hydraulisch rauen Wand verändert sich das Umfangsgeschwindigkeitsprofil und der Exponent von Gleichung 2.2 wird zu $k = 7$. Eine Frage der vorliegenden Arbeit ist, ob der Öffnungswinkel einen Einfluss auf das Umfangsgeschwindigkeitsprofil sowohl für eine hydraulisch glatte als auch eine hydraulisch raue Wand hat. Dies wird in der vorliegenden Literatur bisher nicht untersucht.
Die Entwicklung der gemessenen Drallgrenzschicht, abhängig von der axialen Koordinate und den Strömungsparametern Reynoldszahl, Durchflusszahl und

[24] Oberlack, „Similarity in non-rotating and rotating turbulent pipe flows“, ([38], 1999)

[25] Imao, Zhang und Yamada, „The laminar flow in the developing region of a rotating pipe“, ([23], 1989)

[26] Kikuyama, Murakami und Nishibori, „Developement of three-dimensional turbulent boundary layer in an axially rotating pipe“, ([27], 1983)

[27] Stapp, *Experimentelle und analytische Untersuchung zur Drallgrenzschicht*, ([55], 2015)

[28] Cloos, Stapp und Pelz, „Swirl boundary layer and flow separation at the inlet of a rotating pipe“, ([11], 2017)

Rauheit, wird von Stapp[29,30] und Cloos *et al.*[31] mit einem Potenzgesetz

$$\delta_{\mathrm{S02}} = C_{\mathrm{S}}\, Re^{m_{Re}}\, \varphi^{m_\varphi}\, z^{m_{\mathrm{z}}}\, R_z^{m_{R_z}} \tag{2.3}$$

beschrieben. Hierbei ist C_{S} eine Kalibrationskonstante. Für eine hydraulisch glatte Wand und eine dünne laminare, axiale Grenzschicht am Eintritt ist $C_{\mathrm{S}} = 4.64$ und für eine voll ausgebildete turbulente, axiale Grenzschicht ist $C_{\mathrm{S}} = 4.43$. Für die dünne laminare, axiale Grenzschicht sind die Exponenten zu $m_{Re} = -0.46$, $m_\varphi = -0.44$, $m_{\mathrm{z}} = 0.44$ und $m_{R_z} = 0$ bestimmt. Für eine voll ausgebildete turbulente, axiale Grenzschicht gilt: $m_{Re} = -0.45$, $m_\varphi = -0.46$, $m_{\mathrm{z}} = 0.47$ und $m_{R_z} = 0$. Für die hydraulisch glatte Wand ist das axiomatische Model von Stapp[29] und Cloos *et al.*[31] für die Beschreibung der Strömung in einem rotierenden Kreiszylinder mit experimentellen Daten validiert. Die Validierung verliert ihre Gültigkeit mit dem Umschlag von einer hydraulisch glatten zu einer hydraulisch rauen Wand. Einhergehend mit diesem Umschlag wird die Drallgrenzschicht deutlich dicker. Für eine hydraulisch raue Wand wird die Drallgrenzschichtdicke unabhängig von der Reynoldszahl und hängt stattdessen von der gemittelten Rauheit R_z ab. Für diesen Fall ist die Kalibrationskonstante $C_{\mathrm{S}} = 0.11$ und die Exponenten sind $m_{Re} = 0$, $m_\varphi = -0.40$, $m_{\mathrm{z}} = 0.57$ und $m_{R_z} = 0.11$. Die Exponenten sind für alle Fälle mit einer Unsicherheit von ± 0.03 quantifiziert. Die Entwicklung der Drallgrenzschicht in rotierenden Kreiskegeln wird in der vorliegenden Literatur nicht analysiert. Folglich ist es die Aufgabe der vorliegenden Arbeit, den Einfluss des Öffnungswinkels auf die Entwicklung der Drallgrenzschicht zu ermitteln. Hierbei steht auch der Umschlag von hydraulisch glatter zu hydraulisch rauer Wand im Fokus.

Stapp[29] entdeckt neben dem Umschlag zu einer hydraulisch rauen Wand eine weitere Transition im turbulenten Regime der Drallgrenzschicht für eine hydraulisch glatte Wand. Mit der Transition der Drallgrenzschicht wird diese dicker, das Umfangsgeschwindigkeitsprofil transformiert sich und die Turbulenzintensität der Umfangsgeschwindigkeit nimmt zu. Nach der Transition nimmt das Umfangsgeschwindigkeitsprofil eine neue selbstähnliche Form an. Dieser Bereich wird als Regime II der turbulenten Drallgrenzschicht bezeichnet und grenzt ebenfalls den Gültigkeitsbereich der Validierung ein. Der Umschlag von Regime I zu Regime II der turbulenten Drallgrenzschicht wird in

[29] Stapp, *Experimentelle und analytische Untersuchung zur Drallgrenzschicht*, ([55], 2015)

[30] Stapp und Pelz, „Evolution of swirl boundary layer and wall stall at part load - a generic experiment“, ([56], 2014)

[31] Cloos, Stapp und Pelz, „Swirl boundary layer and flow separation at the inlet of a rotating pipe“, ([11], 2017)

den Arbeiten von Cloos *et al.*[32,33] weiter untersucht. Hierbei wird das neue selbstähnliche Umfangsgeschwindigkeitsprofil mit der Form

$$u_\phi = -0.20 \log\left(\frac{y}{\delta_\mathrm{S}} + 0.007\right) + 0.06 \tag{2.4}$$

angegeben. Der Umschlag des Profils von (2.2) mit $k = 2$ zu (2.4) wird verwendet, um die Transition von Regime I zu Regime II zu bestimmen. Bei welcher Parameterkombination aus Reynolds- und Durchflusszahl (Re, φ) und wo im rotierenden Kreiskegel diese Transition passiert, ist für die Strömung durch einen rotierenden Kreiszylinder mit der Eintrittslänge z_t und einer Stabilitätskarte für eine sich entwickelnde und eine voll ausgebildete turbulente, axiale Grenzschicht am Eintritt gegeben.[32,33] Ob Regime II der turbulenten Drallgrenzschicht auch in rotierenden Kreiskegeln zu beobachten ist, wird in der vorliegenden Arbeit geklärt.

2.4 Strömungsablösung

Für eine kleine Durchflusszahl $\varphi \ll 1$ hat die Zentrifugalkraft eine dominierende Wirkung auf die axiale Grenzschicht. Dies wurde bereits an Abbildung 2.3 diskutiert. Zusammen mit einem plötzlich positiven Druckgradient in axialer Richtung nahe der Wand löst deshalb die Strömung ab und es bildet sich ein Rezirkulationsgebiet unterhalb einer kritischen Durchflusszahl $\varphi < \varphi_\mathrm{c}$ aus. Die Strömungsablösung grenzt den Gültigkeitsbereich der Validierung ein.
Am Eintritt eines rotierenden Kreiszylinders und für eine laminare Strömung mit $Re < 10^3$, ist die Strömungsablösung numerisch als auch analytisch erforscht.[34,35] Für $Re \ll 10^3$ ist die kritische Durchflusszahl eine lineare Funktion der Reynoldszahl,[34,35] jedoch für $Re > 10^2$ verliert diese lineare Abhängigkeit ihr Gültigkeit.[35] Experimentelle Untersuchungen von Imao *et al.*[36] offenbaren eine Strömungsablösung für $\varphi < \varphi_\mathrm{c} \approx 0.33$ bei

[32] Cloos, Zimmermann und Pelz, „A second turbulent regime when a fully developed axial turbulent flow enters a rotating pipe“, ([12], 2016)

[33] Cloos, Zimmermann und Pelz, „Two turbulent flow regimes at the inlet of a rotating pipe“, ([13], 2017)

[34] Lavan, Nielsen und Fejer, „Separation and flow reversal in swirling flows in circular ducts“, ([30], 1969)

[35] Crane und Burley, „Numerical studies of laminar flow in ducts and pipes“, ([14], 1976)

[36] Imao, Zhang und Yamada, „The laminar flow in the developing region of a rotating pipe“, ([23], 1989)

$Re = 3000$. In einem für Turbomaschinen relevanten Bereich der Reynoldszahl $Re = 10^4 \ldots 10^5$ wird die Strömungsablösung in einem rotierenden Kreiszylinder von Stapp[37] und Cloos *et al.*[38] erforscht. Hierbei wird das Stratford Kriterium[39] verwendet, um analytisch den Ort der beginnenden Strömungsablösung zu bestimmen. Das Ergebnis ist mit experimentellen Daten validiert.[38] Die Strömungsablösung für $Re = 10^{4.7}$ beginnt stromabwärts bei $z \approx 4$ und wandert mit sinkender Durchflusszahl stromaufwärts. Mit beginnender Strömungsablösung transformiert sich das Umfangsgeschwindigkeitsprofil und nimmt eine neue selbstähnliche Verteilung für eine ausgebildete Strömungsablösung an.[37] Stapp[37] entwickelt eine Methode, um die kritische Durchflusszahl φ_c für eine ausgebildete Strömungsablösung zu bestimmen. Die Abhängigkeit der kritischen Durchflusszahl von der Reynoldszahl $\varphi_\mathrm{c} = \varphi_\mathrm{c}(Re)$ ist anhand einer Stabilitätskarte gegeben.[37,38,40,41] Daraus ableitend gilt es in der vorliegenden Arbeit die kritische Durchflusszahl für eine beginnende und eine ausgebildete Strömungsablösung abhängig von dem Öffnungswinkel zu erarbeiten, $\varphi_\mathrm{c} = \varphi_\mathrm{c}(Re, \alpha)$.

2.5 Strömung in nicht-rotierenden Rohren

Die Strömung durch einen nicht-rotierenden Kreiskegel für eine drallfreie Strömung ist seit Dekaden ausgiebig experimentell und analytisch erforscht.[42,43,44,45,46,47,48] Diese Untersuchungen haben als Ziel, eine optimale Düse bzw. Diffusor zu entwickeln, in der eine Strömungsablösung nicht auf-

[37] Stapp, *Experimentelle und analytische Untersuchung zur Drallgrenzschicht*, ([55], 2015)

[38] Cloos, Stapp und Pelz, „Swirl boundary layer and flow separation at the inlet of a rotating pipe“, ([11], 2017)

[39] Stratford, „The prediction of separation of the turbulent boundary layer“, ([59], 1959)

[40] Stapp, Pelz und Loens, „On part load recirculation of pumps and fans - a generic study“, ([57], 2013)

[41] Stapp und Pelz, „Evolution of swirl boundary layer and wall stall at part load - a generic experiment“, ([56], 2014)

[42] Jungnitz, „Rechnerische Untersuchung von Diffusoren“, ([25], 1949)

[43] Szablewski, „Turbulente Strömungen in konvergenten Kanälen“, ([62], 1952)

[44] Szablewski, „Turbulente Strömungen in divergenten Kanälen“, ([61], 1954)

[45] Schlichting und Gersten, „Berechnung der Strömung in rotationssymmetrischen Diffusoren mit Hilfe der Grenzschichttheorie“, ([51], 1961)

[46] Börger, „Optimierung von Windkanaldüsen für den Unterschallbereich“, ([4], 1973)

[47] Gersten und Herwig, *Strömungsmechanik: Grundlagen der Impuls-, Wärme- und Stoffübertragung aus asymptotischer Sicht*, ([18], 1992)

[48] Seifert, „Berechnung inkompressibler reibungsbehafteter Ringdiffusorströmungen nach der Schlankkanaltheorie“, ([52], 2006)

tritt. Strömungsablösung kann in einer nicht-rotierenden Düse ($\alpha < 0$) auftreten, da die radiale Verdrängung der Strömung einen Druckgradient in radialer Richtung am Eintritt verursacht.[49] Strömungsablösung in einem nicht-rotierenden Diffusor ($\alpha > 0$) ist offensichtlich, da infolge der verzögerten Strömung ein positiver Druckgradient in axialer Richtung vorliegt. Bei welcher Parameterkombination in einem Diffusor Strömungsablösung auftritt, ist mit dem Diffusordiagramm (Abbildung 2.4) gegeben. Unterhalb des Bandes I ist eine anliegende Strömung zu erwarten. Oberhalb dieses Grenzbandes löst die Strömung lokal ab und oberhalb des Grenzbandes II liegt eine instationäre Strömung vor.[50,51]

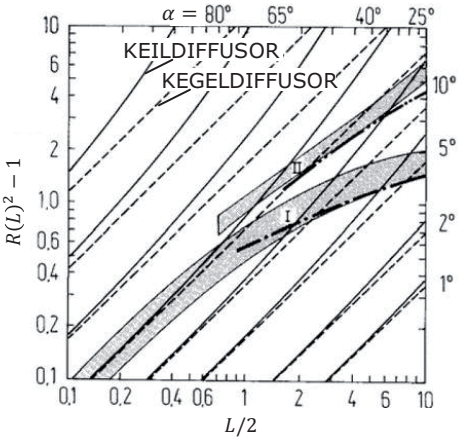


Abbildung 2.4 – Diffusordiagramm mit der Länge L des Diffusors aus [18] (bearbeitet).

Eine drall-behaftete Zuströmung ist gegenüber Strömungsablösung in einen nicht-rotierenden Kreiskegel nützlich. Najafi *et al.*[52] erforschen den Drallzerfall, d. h. eine Art gegenteilige Strömung zu der Strömung in der vorliegenden Arbeit. Bei dieser Untersuchung strömt eine turbulente, drall-behaftete Strömung in einen nicht-rotierenden Kreiszylinder. Diese Arbeit hat drei Limitierungen: (i) Die radiale Komponente des Druckgradients ist zuerst als

[49] Bradshaw, *Effects of streamline curvature on turbulent flow.* ([6], 1973)

[50] Gersten und Pagendarm, „Diffusorströmungen“, ([19], 1984)

[51] Gersten und Herwig, *Strömungsmechanik: Grundlagen der Impuls-, Wärme- und Stoffübertragung aus asymptotischer Sicht*, ([18], 1992)

[52] Najafi *et al.*, „Boundary layer solution for the turbulent swirling decay flow through a fixed pipe: SBR at the inlet“, ([34], 2005)

konstant angenommen und wird später in der Arbeit vernachlässigt. Diese Komponente ist jedoch verantwortlich für die Strömungsablösung. (ii) Die beschreibenden Gleichungen sind linearisiert, was nicht begründet ist. (iii) Die Ergebnisse werden mit Reynolds-averaged Navier-Stokes (RANS) Simulationen verglichen. Diese RANS Simulationen werden u. a. mit einem kommerziellen Solver basierend auf Wirbelviskositätsmodellen gelöst. Heutzutage sind Solver basierend auf Wirbelviskositätsmodellen nicht in der Lage, drallbehaftete Strömungen mit starker Stromlinienkrümmung zufriedenstellend zu beschreiben.[53] Folglich sind diese Art von Simulationen nicht geeignet, um analytische Modelle für drall-behaftete Strömungen zu vergleichen oder gar zu validieren. Auch Broujerdi und Kerbriaee[54] analysieren den Drallzerfall. Hierbei wird zwar die radiale Komponente des Druckgradients berücksichtigt, jedoch liegt keine experimentelle Validierung der Ergebnisse vor. G. I. Taylor vernachlässigt hingegen diese radiale Komponente bei den Untersuchungen in einem Wirbelzerstäuber (engl. Swirl Atomizer).[55] Der Wirbelzerfall bei einer drall-behafteten Strömung in einem rotierenden Kreiskegel wird von Suematsu *et al.*[56] analysiert.
Abschließend aus der Auswertung der vorliegenden Literatur geht hervor, dass die Drallentwicklung und die Ausbreitung der Strömungsablösung in einem rotierenden Kreiskegel heutzutage noch nicht erforscht ist. Dies ist Aufgabe der vorliegenden Arbeit.

[53] Jakirlic, Hanjalic und Tropea, „Modeling rotating and swirling turbulent flows: a perpetual challenge“, ([24], 2002)

[54] Broujerdi und Kerbriaee, „Pressure loss of turbulent swirling flow in convergent nozzle“, ([7], 2010)

[55] Taylor, „The boundary layer in the converging nozzle of a swirl atomizer“, ([63], 1950)

[56] Suematsu, Ito und Hayase, „Vortex breakdown phenomena in a circular pipe“, ([60], 1986)

Kapitel 3

Modellbildung

In diesem Kapitel wird anhand der Integralmethode der Grenzschichttheorie die verallgemeinerte von Kármán Gleichung für eine Strömung durch einen rotierenden Kreiskegel hergeleitet. Für die Beschreibung der Strömung werden die radiale und axiale Komponente des Impulssatzes, die axiale Komponenten des Drallsatzes und der Euler-Gleichung sowie die Kontinuitätsgleichung angewendet. Dieses Vorgehen ist analog zu den Arbeiten von Stapp[1] und Cloos *et al.*[2] für eine Strömung durch einen rotierenden Kreiszylinder. Eine ausführliche Herleitung der beschreibenden Gleichungen inklusive einer Größenordnungsanalyse der viskosen und Reynoldsschen Spannungen ist Anhang A bzw. Cloos *et al.*[2] zu entnehmen. Ergebnis der Größenordnungsanalyse ist, dass sowohl die viskosen als auch die Reynoldsschen Spannungen innerhalb der Flüssigkeit vernachlässigt werden können. Dies ist eine hervorzuhebende Stärke der Integralmethode. Die Genauigkeit der vereinfachten Gleichungen ist durch den Term $\mathcal{O}$ angegeben, der die maximale Größenordnung der vernachlässigten Terme repräsentiert. Nachteilig an der Integralmethode ist, dass Ansatzfunktionen für die Geschwindigkeitsprofile und die dazugehörigen Wandschubspannungsmodellen notwendig sind. Etwaige Ansatzfunktionen werden im zweiten Abschnitt des Kapitels diskutiert. Mit diesen Ansatzfunktionen wird das System von gewöhnlichen, nichtlinearen Differentialgleichungen erster Ordnung gelöst. Das Ergebnis ist die Grenzschichtlösung, bestehend aus den Grenzschichtdicken $\delta, \delta_\mathrm{S}$, dem Druck P und der axialen Geschwindigkeit U_z in der Kernströmung innerhalb des rotierenden Kreiskegels. Die Grenzschichtlösung wird verwendet, um die beginnende Strömungsablösung (engl. incipient separation) vorherzusagen.

[1] Stapp, *Experimentelle und analytische Untersuchung zur Drallgrenzschicht*, ([55], 2015)

[2] Cloos, Stapp und Pelz, „Swirl boundary layer and flow separation at the inlet of a rotating pipe“, ([11], 2017)

3.1 Verallgemeinerte von Kármán Gleichung

Die Größenordnungsanalyse der radialen Komponente des Impulssatzes liefert

$$-\frac{u_\phi^2}{1-y} = \frac{\partial p}{\partial y} + \mathcal{O}\left(\varphi\delta\right). \tag{3.1}$$

Der axial veränderliche Radius $R(z)$ ist bei Gleichung (3.1) berücksichtigt, ist jedoch wegen der gewählten Dimensionsanalyse nicht sichtbar und implizit enthalten. Wie in Abschnitt 1.1 beschrieben, werden in der vorliegenden Arbeit alle Geschwindigkeiten bzw. radialen Längen auf die lokale Wandgeschwindigkeit bzw. den lokalen Radius skaliert. Nach Integration von Gleichung (3.1) entlang der Wandkoordinate y, ist das Druckfeld

$$p(y,z) = \int_y^{\delta_\mathrm{S}} \frac{u_\phi^2}{1-y'}\,\mathrm{d}y' + P(z) + \mathcal{O}\left(\varphi\delta^2\right) \tag{3.2}$$

innerhalb des rotierenden Kreiskegels gegeben. Der Einfluss der Zentrifugalkraft, der erste Term auf der rechten Seite von Gleichung (3.2), ist eine Funktion von der Drallgrenzschichtdicke und dem Umfangsgeschwindigkeitsprofil. Außerhalb der Drallgrenzschicht verschwindet die Zentrifugalkraft wegen der dort drallfreien Strömung $u_\phi(y > \delta_\mathrm{S}, z) = 0$. Dort gleicht der statische Druck dem Druck der Kernströmung $p(y > \delta_\mathrm{S}, z) = P(z)$ und dieser wird mit der axialen Komponente der Euler-Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}\left(PR^2\right)}{\mathrm{d}z} = -U_\mathrm{z} R \frac{\mathrm{d}\left(U_\mathrm{z} R\right)}{\mathrm{d}z} \tag{3.3}$$

beschrieben. Bei der Anwendung der axialen Komponente des Impulssatzes auf das Kontrollvolumen der differenziellen Länge $\mathrm{d}z$ in Abbildung 1.3 (gestrichelte Linie) wird das Druckfeld (3.2) mit dem Einfluss der Zentrifugalkraft berücksichtigt und es folgt

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} R^4 \int_0^\delta (1-y)\, u_\mathrm{z}^2\,\mathrm{d}y - U_\mathrm{z} R \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} R^3 \int_0^\delta (1-y)\, u_\mathrm{z}\,\mathrm{d}y = \\
&= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} R^4 \int_0^\delta (1-y)\, p\,\mathrm{d}y + R^3 (1-\delta)\, p(\delta,z) \frac{\mathrm{d}\left(\delta R\right)}{\mathrm{d}z} + \\
&- R^3 \left(\tau_\mathrm{yz,w} \cos\alpha - p_\mathrm{w} \sin\alpha\right) + \mathcal{O}(\varphi\delta^3).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Hier ist $p_\mathrm{w} = p(0,z)$ der Wanddruck und $\tau_\mathrm{yz,w}$ ist die yz-Komponente der Wandschubspannung. An der Wand $y = 0$ verschwindet die zz-Komponente des viskosen und Reynoldsschen Spannungstensors aus kinematischen Gründen und es gilt $\tau_\mathrm{zz} = -p_\mathrm{w}$. Der Einfluss der Zentrifugalkraft sowie des axial veränderlichen Radius wird an Gleichung (3.4) sichtbar. Dies ist ein Vorteil des gewählten Koordinatensystems. Die linke Seite dieser Gleichung beschreibt die Änderung der konvektiven Flüsse, wobei der zweite Term den Transport in die Grenzschicht über den Verlauf von δ wiedergibt. Der dabei auftretende Massenstrom wird mittels der Kontinuitätsgleichung für das selbe Kontrollvolumen wie für Gleichung 3.4 hergeleitet, siehe Spurk und Aksel[3]. Die radiale Geschwindigkeit wird dabei vernachlässigt, was für kleine Öffnungswinkel $|\alpha| \ll 1$ und eine dünne axiale Grenzschicht $\delta \ll 1$ gerechtfertigt ist.[4] Die rechte Seite von Gleichung (3.4) beschreibt die an dem Kontrollvolumen angreifenden äußeren Kräfte. Der erste Term auf dieser Seite beschreibt die Änderung der angreifenden Kräfte an den Kontrollvolumenflächen mit einem Normalenvektor parallel zur Mittellinie. Der zweite Term berücksichtigt die Änderung der angreifenden Kraft an der Grenzschichtdicke $y = \delta$ und der letzte Term an der Fläche $y = 0$, d. h. an der Wand.
Einsetzen der Verdrängungsdicke δ_1, definiert für ein Kreiskegel[5]

$$\int_0^\delta (1-y)\, u_\mathrm{z}\, \mathrm{d}y := \frac{U_\mathrm{z}}{2}\left[(1-\delta_1)^2 - (1-\delta)^2\right], \tag{3.5}$$

der Impulsverlustdicke δ_2

$$\int_0^\delta (1-y)\, u_\mathrm{z}^2\, \mathrm{d}y := \frac{U_\mathrm{z}^2}{2}\left[(1-\delta_2)^2 + (1-\delta_1)^2 - (1-\delta)^2 - 1\right], \tag{3.6}$$

dem Druckfeld (3.2) und der axialen Komponente der Euler-Gleichung (3.3) in die axiale Komponente des Impulssatzes (3.4) liefert die verallgemeinerte von Kármán Gleichung für die Strömung durch einen rotierenden Kreiskegel

$$\begin{aligned}(1-\delta_2)\frac{\mathrm{d}\delta_2}{\mathrm{d}z} + \left(2\delta_2 - \delta_2^2 + \delta_1 - \frac{\delta_1^2}{2}\right)\frac{1}{U_\mathrm{z}}\frac{\mathrm{d}U_\mathrm{z}}{\mathrm{d}z} + (G + A_0 + A)\frac{1}{U_\mathrm{z}^2} = \\ = \frac{\tau_\mathrm{yz,w}}{RU_\mathrm{z}^2}\cos\alpha + \mathcal{O}\left(\frac{\delta^3}{\varphi}\right)\end{aligned} \tag{3.7}$$

[3] Spurk und Aksel, *Strömungslehre: Einführung in die Theorie der Strömungen*, ([54], 2006)

[4] Binnie und Harris, „The application of boundary-layer theory to swirling liquid flow through a nozzle“, ([1], 1950)

[5] Piquet, *Turbulent Flows: models and physics*, ([43], 1999)

mit dem bekannten Kopplungsterm[6,7]

$$G := \underbrace{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\int_0^{\delta}(1-y)\int_y^{\delta_\mathrm{S}}\frac{u_\phi^2}{1-y'}\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}y}_{\mathcal{O}(\delta^2)} + \underbrace{(1-\delta)\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}z}\int_\delta^{\delta_\mathrm{S}}\frac{u_\phi^2}{1-y}\,\mathrm{d}y}_{\mathcal{O}(\delta^3)} \tag{3.8}$$

und den neuen Termen

$$A_0 := \underbrace{\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}z}\left[\left(4\delta_2 - 2\delta_2^2 + \delta_1 - \frac{\delta_1^2}{2}\right)U_\mathrm{z}^2 - P\delta\right]}_{\mathcal{O}(\alpha\delta\varphi^2)} + \underbrace{\frac{P}{R}\sin\alpha}_{\mathcal{O}(\alpha\varphi^2)} \tag{3.9}$$

und

$$\begin{aligned} A := \underbrace{\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}z}}_{\mathcal{O}(\alpha)}\Bigg[&\underbrace{-4\int_0^{\delta}(1-y)\int_y^{\delta_\mathrm{S}}\frac{u_\phi^2}{1-y'}\,\mathrm{d}y'\mathrm{d}y}_{\mathcal{O}(\delta^2)} + \\ &+\underbrace{\left(\delta-\delta^2\right)\int_\delta^{\delta_\mathrm{S}}\frac{u_\phi^2}{1-y}\,\mathrm{d}y}_{\mathcal{O}(\delta^2)}\Bigg] + \underbrace{\frac{1}{R}\int_0^{\delta_\mathrm{S}}\frac{u_\phi^2}{1-y}\,\mathrm{d}y\;\sin\alpha}_{\mathcal{O}(\alpha\delta)}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Der Einfluss des axial veränderlichen Radius wird erstmals in dieser Form durch die neuen Terme A_0 und A wiedergegeben. Den Einfluss der Zentrifugalkraft auf die axiale Grenzschicht beschreiben der neue Term A und der bekannte Kopplungsterm G.
Für einen nicht-rotierenden Kreiszylinder ($\alpha = 0$) und eine drallfreie Strömung verschwinden die drei Terme $G, A, A_0 = 0$. Für einen rotierenden Kreiszylinder verschwinden einzig die neuen Terme $A, A_0 = 0$ und Gleichung (3.7) vereinfacht sich zu der verallgemeinerten von Kármán Gleichung für die Strömung durch einen rotierenden Kreiszylinder, vgl. Stapp[6] und Cloos *et al.*[7]. Für einen nicht-rotierenden Kreiskegel sind die Terme $A, G = 0$ gleich null. Das Integral $\int_\delta^{\delta_\mathrm{S}} u_\phi^2/(1-y)\,\mathrm{d}y$ ist gleich null für $\delta > \delta_\mathrm{S}$ wegen der drallfreien Strömung außerhalb der Drallgrenzschicht. Folglich berücksichtigen Terme mit diesem Integral auch den Fall $\delta_\mathrm{S} > \delta$.

[6] Stapp, *Experimentelle und analytische Untersuchung zur Drallgrenzschicht*, ([55], 2015)

[7] Cloos, Stapp und Pelz, „Swirl boundary layer and flow separation at the inlet of a rotating pipe“, ([11], 2017)

Eine Größenordnungsanalyse der Terme A_0, A und G liefert folgendes Ergebnis, solange $y \sim \delta, \delta_\mathrm{S}$, $\mathrm{d}R/\mathrm{d}z \sim \alpha \ll 1$, $u_\phi \sim 1$, $u_\mathrm{z}, U_\mathrm{z} \sim \varphi$, $p \sim (\delta + \varphi^2)$ und $P \sim \varphi^2$ ist: Der Kopplungsterm G wird von dem ersten Term auf der rechten Seite von Gleichung (3.8) dominiert. Die Terme A_0 und A werden jeweils durch den letzten Term auf der rechten Seite von Gleichung (3.9) bzw. (3.10) dominiert. Nach Umformen von Gleichung (3.7), bei dem alle Terme außer der erste Term auf der linken Seite mit $\mathrm{d}\delta_2/\mathrm{d}z$ auf die rechte Seite übertragen werden

$$\begin{aligned}(1-\delta_2)\,\frac{\mathrm{d}\delta_2}{\mathrm{d}z} &= \frac{\tau_\mathrm{yz,w}}{RU_\mathrm{z}^2}\cos\alpha - \left(2\delta_2 - \delta_2^2 + \delta_1 - \frac{\delta_1^2}{2}\right)\frac{1}{U_\mathrm{z}}\frac{\mathrm{d}U_\mathrm{z}}{\mathrm{d}z} + \\ &- (G + A_0 + A)\,\frac{1}{U_\mathrm{z}^2} + \mathcal{O}\left(\frac{\delta^3}{\varphi}\right),\end{aligned} \tag{3.11}$$

wird offensichtlich, dass Gleichung (3.7) eine Art eindimensionale "Evolutionsgleichung" in z für die Impulsverlustdicke δ_2 ist[8].

Im Folgenden wird Gleichung (3.11) detaillierter analysiert. Der "Wachstumsrate" auf der linken Seite von Gleichung (3.11) stehen auf der rechten Seite die "Reaktionsterme" gegenüber, die teilweise eine von dem Öffnungswinkel abhängige Wirkung haben. Die Wirkung kann entweder "anfachend" (+) oder "dämpfend" (−) sein oder für $\alpha = 0$ verschwinden (0)[9]. Für $P_0 = P(z = 0) = 0$ und eine Düse ($\alpha < 0$) folgt aufgrund der beschleunigten axialen Kernströmung $P(z > 0) < 0$ stromabwärts des Eintritts und für einen Diffusor ($\alpha > 0$) mit einer verzögerten axialen Kernströmung ist $P(z > 0) > 0$.[10] Letzteres ist nur gültig, sofern die Verdrängung der axialen Grenzschicht kleiner ist als die Zunahme des Strömungsquerschnitts und somit eine verzögerte axiale Kerngeschwindigkeit in einem Diffusor vorliegt. Das Ergebnis der Analyse der einzelnen Terme ist in Tabelle 3.1 zusammengefasst. Es ist offensichtlich, dass die Wandschubspannung $\tau_\mathrm{yz,w}$ das Wachstum der Impulsverlustdicke unabhängig von dem Öffnungswinkel fördert. Der Term $(\ldots)1/U_\mathrm{z}\,\mathrm{d}U_\mathrm{z}/\mathrm{d}z$ dämpft das Wachstum bei einem Kreiszylinder und einer Düse ($\alpha \leq 0$), da die axiale Kernströmung beschleunigt wird, $\mathrm{d}U_\mathrm{z}/\mathrm{d}z > 0$. Dieser Term facht das Wachstum bei einem Diffusor ($\alpha > 0$) aufgrund der verzögerten axialen Kernströmung $\mathrm{d}U_\mathrm{z}/\mathrm{d}z < 0$ an. Die Impulsverlustdicke ist dünner für eine beschleunigte als für eine konstante oder

[8] Diese Art der Darstellung ist eine Idee von Pelz.

[9] Die Begriffe "anfachend" und "dämpfend" sind hier im Sinne einer Evolutionsgleichung zu verstehen und nicht im Sinne von angefachter oder gedämpfter Turbulenz.

[10] Für eine inkompressible Strömung ist der Wert des Drucks irrelevant, da einzig Druckdifferenzen entscheidend sind. Für eine verständlichere Diskussion ist der Druck $P_0 = 0$. Dass keine Druckdifferenzen in den beschreibenden Gleichungen stehen, ist eine Folge der differentiellen Länge des Kontrollvolumens.

Tabelle 3.1 – Analyse der Terme von Gleichung (3.7) dahingehend ob ein Term das Wachstum der Impulsverlustdicke abhängig von dem Öffnungswinkel α anfacht (+), dämpft (−) oder verschwindet (0).

		$\tau_{\mathrm{yz,w}}$	$\mathrm{d}U_{\mathrm{z}}/\mathrm{d}z$	G	A_0	A
Düse	$\alpha < 0$	+	−	+	−	+
Rohr	$\alpha = 0$	+	−	+	0	0
Diffusor	$\alpha > 0$	+	+	+	−	−

gar eine verzögerte Außenströmung an einer ebenen Platte.[11] Diese Aussage gilt auch für eine Strömung durch einen nicht-rotierenden Kreiskegel. Der Kopplungsterm G unterstützt das Wachstum der Impulsverlustdicke unabhängig vom Öffnungswinkel. Dem gegenüber dämpft Term A_0 das Wachstum unabhängig von dem Öffnungswinkel. Jedoch für den Fall eines Diffusors ($\alpha > 0$) mit $P(z > 0) < 0$ facht Term A_0 das Wachstum an. Term A dämpft das Wachstum für einen Diffusor ($\alpha > 0$) und facht das Wachstum für eine Düse ($\alpha < 0$) an. Aus dieser Analyse ableitend ist zu erwarten, dass die axiale Grenzschicht in einer rotierenden Düse ($\alpha < 0$) dicker sein kann als in einem rotierenden Diffusor ($\alpha > 0$), $\delta(\alpha \leq 0) > \delta(\alpha > 0)$. Dies ist damit begründet, dass für $\varphi \ll 1$ die Zentrifugalkraft einen dominierenden Einfluss auf die Entwicklung der axialen Grenzschicht hat[12,13] und somit der Einfluss der Terme A, G überwiegt.
Die axiale Komponente des Drallsatzes[14] ist notwendig, um den Einfluss der Zentrifugalkraft auf die axiale Grenzschicht zu quantifizieren, da das Druckfeld eine Funktion der Drallgrenzschichtdicke ist, siehe Gleichung (3.2). Diese Komponente des Drallsatzes angewendet auf ein Kontrollvolumen der Drallgrenzschichtdicke liefert

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} R^5 \int_0^{\delta} (1-y)^2 u_\Phi u_{\mathrm{z}} \, \mathrm{d}y + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} R^5 U_{\mathrm{z}} \int_{\delta}^{\delta_{\mathrm{S}}} (1-y)^2 u_\Phi \, \mathrm{d}y = \\ &= -R^4 \left(\tau_{\mathrm{y}\phi,\mathrm{w}} \cos\alpha + \tau_{\mathrm{z}\phi,\mathrm{w}} \sin\alpha \right) + \mathcal{O}\left(\delta^3\right) \end{aligned} \tag{3.12}$$

mit $\tau_{\mathrm{y}\phi,\mathrm{w}}$ und $\tau_{\mathrm{z}\phi,\mathrm{w}}$ der $y\phi$- bzw. $z\phi$-Komponente der Wandschubspannung. Die $z\phi$-Komponente der Wandschubspannung in Gleichung (3.12) ist durch die Wahl des Koordinatensystem begründet. Die Reynoldsspannungen an der Wand verschwinden weiterhin aus kinematischen Gründen. Die linke Seite

[11] Schlichting, *Grenzschicht-Theorie*, ([50], 1965)

[12] Stapp, *Experimentelle und analytische Untersuchung zur Drallgrenzschicht*, ([55], 2015)

[13] Cloos, Stapp und Pelz, „Swirl boundary layer and flow separation at the inlet of a rotating pipe“, ([11], 2017)

[14] Erstmal formuliert von Euler im Jahre 1744 nach Truesdell [64].

von Gleichung (3.12) beschreibt die Änderung des konvektiven Flusses. Der zweite Term auf dieser Seite berücksichtigt den Fall $\delta_\mathrm{S} > \delta$, sodass sich innerhalb der Drallgrenzschicht das axiale Geschwindigkeitsprofil von $u_\mathrm{z}(y, z)$ auf $U_\mathrm{z}(z)$ ändert. Bei dem Drallsatz (3.12) besteht kein konvektiver Fluss über die Drallgrenzschichtdicke selbst wie bei der axialen Grenzschicht, siehe zweiter Term auf der linken Seite von Gleichung (3.4), da $u_\Phi(y > \delta_\mathrm{S}, z) = 0$ ist. Auf der rechten Seite verbleiben nach einer Größenordnungsanalyse einzig die Änderung der angreifenden Kräfte an der Wand $y = 0$, vgl. Anhang A. Abschließend ist die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} R^3 \int_0^\delta (1-y)\, u_\mathrm{z}\, \mathrm{d}y + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} U_\mathrm{z} R^3 \int_\delta^1 (1-y)\, \mathrm{d}y = 0 \tag{3.13}$$

notwendig, um die Interaktion zwischen der axialen Geschwindigkeit in der Kernströmung, dem axial veränderlichen Radius und der axialen Grenzschichtdicke zu beschreiben. Letztere hat einen verdrängenden Effekt und dieser wird mit der Verdrängungsdicke, siehe Gleichung (3.5), beschrieben. Nach Einsetzen von Gleichung (3.5) in die Kontinuitätsgleichung (3.13), wird der Einfluss von der Verdrängungsdicke und des axial veränderlichen Radius auf die axiale Geschwindigkeit in der Kernströmung offensichtlich

$$\frac{1}{U_\mathrm{z}} \frac{\mathrm{d}U_\mathrm{z}}{\mathrm{d}z} = \frac{2}{1-\delta_1} \frac{\mathrm{d}\delta_1}{\mathrm{d}z} - \frac{3}{R} \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}z}. \tag{3.14}$$

Für eine Düse bzw. Kreiszylinder ($\alpha \leq 0$) und eine anwachsende Verdrängungsdicke $\mathrm{d}\delta_1/\mathrm{d}z > 0$ wird die axiale Kernströmung beschleunigt, $\mathrm{d}U_\mathrm{z}/\mathrm{d}z > 0$. Mit dieser Erkenntnis und ableitend aus einer Größenordnungsanalyse von Gleichung (3.3) liegt ein negativer Druckgradient in axialer Richtung in der Kernströmung $\mathrm{d}P/\mathrm{d}z < 0$ vor. Folglich ist für einen nicht-rotierenden Kreiskegel mit $\alpha \leq 0$ die axiale Komponente des Wanddruckgradients negativ, $\mathrm{d}p_\mathrm{w}/\mathrm{d}z < 0$. Für einen rotierenden Kreiskegel mit $\alpha \leq 0$ erhöht die Zentrifugalkraft den Druck in Wandnähe und für $\varphi \ll 1$ kann der Wanddruckgradient in axialer Richtung verschwinden oder sogar positiv werden, $\mathrm{d}p_\mathrm{w}/\mathrm{d}z \geq 0$. Für einen nicht-rotierenden Kreiskegel mit $0 < \alpha \ll 1$, d. h. einen Diffusor mit einem sehr kleinen Öffnungswinkel, und einer sich entwickelnden Verdrängungsdicke, kann der Druckgradient in axialer Richtung in der Kernströmung ebenfalls negativ sein $\mathrm{d}P/\mathrm{d}z < 0$ aufgrund der Verdrängung der axialen Grenzschicht und einer deshalb beschleunigten axialen Kernströmung, $\mathrm{d}U_\mathrm{z}/\mathrm{d}z > 0$. Für größere Öffnungswinkel ist von einer verzögerten Kernströmung $\mathrm{d}U_\mathrm{z}/\mathrm{d}z < 0$ und einer positiven axialen Komponente des Druckgradients in der Kernströmung auszugehen, $\mathrm{d}P/\mathrm{d}z > 0$.

Folglich liegt auch ein positiver Wanddruckgradient in axialer Richtung vor, $\mathrm{d}p_\mathrm{w}/\mathrm{d}z > 0$. Für einen rotierenden Diffusor steigt diese axiale Komponente des Wanddruckgradients wegen der Zentrifugalkraft weiter an.
Das in diesem Abschnitt hergeleitete Modell beschreibt die Strömung in einem rotierenden Kreiszylinder für betragsmäßig kleine Öffnungswinkel $|\alpha| \ll 1$. Die beschreibenden Gleichungen sind in Anhang B zusammengefasst dargestellt. Das Druckfeld (3.2), die verallgemeinerte von Kármán Gleichung (3.7) und die axiale Komponente des Drallsatzes (3.12) sind gültig für dünne Grenzschichten. Für eine voll entwickelte axiale Grenzschicht $\delta = 1$ sind einzig die axiale Komponente des Drallsatzes (3.12) und die Kontinuitätsgleichung (3.14) notwendig, um die Drallgrenzschichtdicke zu bestimmen.
Bei der Integralmethode sind Ansatzfunktionen erforderlich, um das beschreibende Gleichungssystem bestehend aus Gleichung (3.3), (3.7), (3.12) und (3.14) zu lösen. Repräsentative Ansatzfunktionen für eine laminare oder eine turbulente Strömung entlang einer hydraulisch glatten Wand werden in dem nächsten Abschnitt vorgestellt und diskutiert.

3.2 Ansatzfunktionen

Der bekannte Vorteil der Integralmethode ist, dass weder eine detaillierte Beschreibung der Geschwindigkeitsprofile noch ein Turbulenzmodell notwendig ist. Die Ansatzfunktionen können mit Potenzgesetzen, logarithmischen bzw. harmonischen Funktionen[15] oder anderen Funktionen modelliert werden, die das asymptotische Verhalten der Geschwindigkeitsprofile erfüllen. Obwohl es möglich ist, die Geschwindigkeitsprofile mit Polynomfunktionen anhand der Pohlhausen Methode zu beschreiben, ist dies nicht zufriedenstellend für eine turbulente Strömung.[15] Die Integralmethode ist robust gegenüber dem Verlauf der Ansatzfunktionen. Der Verlauf der Ansatzfunktionen hat nur einen sehr begrenzten Einfluss auf die Ergebnisse, vgl. Schlichting[15], jedoch müssen alle Geschwindigkeitsprofile $u_\mathrm{z}(y,z)$ und $u_\phi(y,z)$ die Axiome in integraler Form erfüllen. Im Folgenden werden Potenzgesetze sowohl für das axiale als auch das Umfangsgeschwindigkeitsprofil und die dazugehörigen Wandschubspannungsmodelle der yz-, $y\phi$- und $z\phi$-Komponente unter Berücksichtigung der experimentellen Ergebnisse aus Abschnitt 4.1.2 und 5.1.3 vorgestellt.
Die Art der Strömung, laminar oder turbulent, ist über die gewählten Ansatzfunktionen repräsentiert. Für eine laminare Strömung wird das axiale

[15] Schlichting, *Grenzschicht-Theorie*, ([50], 1965)

Geschwindigkeitsprofil mit

$$\frac{u_\mathrm{z}(y,z)}{U_\mathrm{z}(z)} = 1 - \left(1 - \frac{y}{\delta(z)}\right)^n \tag{3.15}$$

und die dazugehörige yz-Komponente der Wandschubspannung

$$\tau_\mathrm{yz,w}(z) = \frac{2}{R^2 Re} e_\mathrm{yz}\bigg|_\mathrm{w} \approx \frac{2}{R^2 Re}\frac{\partial u_\mathrm{z}}{\partial y}\bigg|_\mathrm{w} = \frac{2nU_\mathrm{z}(z)}{R(z)^2 Re\,\delta(z)} \tag{3.16}$$

mit der yz-Komponente des Deformationsgeschwindigkeitstensors $\underline{E}$ der zeitlich-gemittelten Geschwindigkeiten beschrieben. Für eine turbulente Strömung folgt das zeitlich-gemittelte Profil der axialen Geschwindigkeit dem Ansatz

$$\frac{u_\mathrm{z}(y,z)}{U_\mathrm{z}(z)} = \left(\frac{y}{\delta(z)}\right)^n. \tag{3.17}$$

Wird in Gleichung (3.16) die Ansatzfunktion einer turbulenten Strömung des axialen Geschwindigkeitsprofils (3.17) statt des laminaren Profils eingesetzt, wird diese Gleichung an der Wand singulär. Analog zu von Kármán[16] wird deshalb auf das empirische Blasius Gesetz zurückgegriffen und mit der Ansatzfunktion (3.17) folgt die yz-Komponente der Wandschubspannung

$$\tau_\mathrm{yz,w}(z) = c^{-2/(n+1)} U_\mathrm{z}(z)^{2/(n+1)} \left(\frac{2}{R(z)^2 Re\,\delta(z)}\right)^{2n/(n+1)}, \tag{3.18}$$

mit der Kalibrationskonstante c, vgl. auch Schlichting[17] und Cloos *et al.*[18]. Die zeitlich-gemittelte Umfangskomponente der Geschwindigkeit wird für beide Strömungsarten nach experimentellen Ergebnissen mit

$$u_\phi(y,z) = \left(1 - \frac{1}{\delta_\mathrm{S}(z)}\right)^k \tag{3.19}$$

in der Drallgrenzschicht modelliert. Die dazugehörige $y\phi$-Komponente der Wandschubspannung ist

$$\tau_\mathrm{y\phi,w}(z) = \frac{2}{R^2 Re} e_\mathrm{y\phi}\bigg|_\mathrm{w} \approx \frac{2a}{R^2 Re}\frac{\partial u_\phi}{\partial y}\bigg|_\mathrm{w} = -\frac{2ka(\alpha)}{R(z)^2 Re\,\delta_\mathrm{S}(z)} \tag{3.20}$$

[16] Kármán, „Über laminare und turbulente Reibung“, ([26], 1921)

[17] Schlichting, *Grenzschicht-Theorie*, ([50], 1965)

[18] Cloos, Stapp und Pelz, „Swirl boundary layer and flow separation at the inlet of a rotating pipe“, ([11], 2017)

Tabelle 3.2 – Parameter a von $\tau_{\mathrm{y\phi,w}}$ abhängig von dem Öffnungswinkel α für Konfiguration II der Zuströmung, d. h. eine voll ausgebildete turbulente axiale Grenzschicht $\delta = 1$. Experimentelle Kalibrierung erfolgt an der Parameterkombination $z = 2$, $\log(Re) = 4.55$ and $\varphi = 0.35$.

Parameter	Wert						
α	$-1.83\,^\circ$	$-1.08\,^\circ$	$-0.61\,^\circ$	$0.00\,^\circ$	$0.47\,^\circ$	$1.03\,^\circ$	$1.55\,^\circ$
a	1.40	1.53	1.54	1.66	1.95	1.82	1.90

mit dem Kalibrationsparameter a für eine turbulente Strömung und die der $z\phi$-Komponente

$$\tau_{\mathrm{z\phi,w}}(z) = \frac{2}{R^2 Re} e_{\mathrm{z\phi}}\bigg|_{\mathrm{w}} = \frac{2}{R^2 Re}\frac{\partial u_\phi R}{\partial z}\bigg|_{\mathrm{w}} = \frac{2}{R(z)^2 Re}\frac{\mathrm{d}R(z)}{\mathrm{d}z}. \tag{3.21}$$

Die Gleichungen (3.16) bis (3.21) berücksichtigen den axial veränderlichen Radius $R(z)$, jedoch ist dieser bei den Geschwindigkeitsprofilen durch die gewählte Skalierung implizit enthalten. Deshalb ist die Umfangsgeschwindigkeit an der Wand konstant, $u_\phi(0, z) = 1$.
Für eine laminare Strömung ist der Exponent $n = 2$. Für das Reynoldszahlintervall $\log(Re) = 4 \ldots 6$ und eine turbulente Strömung ist der Exponent $n = 1/7$ und die Kalibrationskonstante c abgeleitet aus dem Blasius-Gesetz ist 8.74, siehe Schlichting[19] und von Kármán[20]. Der Exponent von dem Umfangsgeschwindigkeitsprofil (3.19) ist $k = 2$ und ist unabhängig von der Art der Strömung für den experimentell untersuchten Bereich $z \leq 5$, $\log(Re) = 4 \ldots 5$, $\varphi = 0.1 \ldots 1$ und $\alpha = -1.83\,^\circ \ldots 1.55\,^\circ$ für eine anliegende Strömung entlang einer hydraulisch glatten Wand und Regime I der Drallgrenzschicht, vgl. Abschnitt 5.1.3. Äquivalent zu der empirischen Kalibrationskonstante c wird der empirisch ermittelte Kalibrationsparameter a der $y\phi$-Komponente der Wandschubspannung für eine turbulente Strömung eingeführt. Folglich gilt für eine laminare Strömung $a = 1$. Für eine turbulente Strömung ist der Kalibrationsparameter a einzig abhängig von dem Öffnungswinkel $a = a(\alpha) > 1$. Der Parameter wird bestimmt, indem die Drallgrenzschichtdicke aus der Grenzschichtlösung auf das Ergebnis der experimentellen Untersuchung bei der Parameterkombination $\log(Re) = 4.55$, $\varphi = 0.35$ und $z = 2$ kalibriert wird. Der Parameter steigt mit ansteigendem Öffnungswinkel an, wie Tabelle 3.2 zu entnehmen ist.

[19] Schlichting, *Grenzschicht-Theorie*, ([50], 1965)
[20] Kármán, „Über laminare und turbulente Reibung“, ([26], 1921)

Die Sensitivität der Grenzschichtlösung, abhängig von der Kalibrationskonstante c und dem Kalibrationsparameter a, ist Anhang C und Cloos *et al.*[21] zu entnehmen. Eine kleine Änderung der beiden Größen a, c hat einen vernachlässigbaren Einfluss auf die Abhängigkeit der Grenzschichtdicken $\delta, \delta_\mathrm{S}$ von der axialen Koordinate, der Durchflusszahl und der Reynoldszahl. Es wird lediglich eine Parallelverschiebung der Grenzschichtdicken verursacht.
Mit den präsentierten Ansatzfunktionen wird das Gleichungssystem abhängig von der Strömungsart gelöst. Die Grenzschichtlösung wird bei den Stratford Kriterien verwendet, um die beginnende Strömungsablösung vorherzusagen. Die Kriterien werden im nächsten Abschnitt vorgestellt und angepasst.

3.3 Kriterien zur Strömungsablösung

Die Zentrifugalkraft erhöht den Druck innerhalb der Drallgrenzschicht mit reduziertem Wandabstand wie Gleichung (3.2) verdeutlicht. Ein positiver Wanddruckgradient in axialer Richtung kann Strömungsablösung verursachen.[22] Mit den Gleichungen (3.2), (3.3) und (3.14) für $y = 0$ folgt die axiale Komponente des Wanddruckgradienten

$$\frac{\mathrm{d}p_\mathrm{w}(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\int\limits_0^{\delta_\mathrm{S}} \frac{u_\phi^2}{1-y}\,\mathrm{d}y - \frac{2U_\mathrm{z}^2}{1-\delta_1}\frac{\mathrm{d}\delta_1}{\mathrm{d}z} + \left(U_\mathrm{z}^2 - P\right)\frac{2}{R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}z}. \tag{3.22}$$

Dieser Komponente kann sowohl positiv, null als auch negativ, abhängig von den Strömungsparametern (Re, φ), der axialen Koordinate z und dem Öffnungswinkel α, sein. Die Stabilität der Strömung gegenüber Strömungsablösung hängt nicht nur einzig von dem Druckgradient in axialer Richtung nahe der Wand ab, sondern auch von der axialen Grenzschichtdicke. Eine dickere axiale Grenzschicht löst bei einem kleineren Wanddruckgradient in axialer Richtung ab als eine dünnere axiale Grenzschicht.[22]
Im Folgenden werden das Kriterium für eine laminare[23] und das für eine turbulente[24] Strömung von Stratford für die Vorhersage der kritischen Durchflusszahl für die beginnende Strömungsablösung $\varphi_\mathrm{c,in} = \varphi(\tau_{yz,w} = 0)$ angepasst. Bei diesen Kriterien von Stratford wird die axiale Grenzschicht in einen "outer layer" und in einen "inner layer" unterteilt. Im outer layer gleicht der veränderte dynamische Druck $u_\mathrm{z}^2/2$ den Druckgradient in axia-

[21] Cloos, Stapp und Pelz, „Swirl boundary layer and flow separation at the inlet of a rotating pipe", ([11], 2017)

[22] Schlichting, *Grenzschicht-Theorie*, ([50], 1965)

[23] Stratford, „Flow in the laminar boundary layer near separation", ([58], 1954)

[24] Stratford, „The prediction of separation of the turbulent boundary layer", ([59], 1959)

ler Richtung aus. Dabei verändert sich die Form des axialen Geschwindigkeitsprofils nicht. Im inner layer verformt sich hingegen das axiale Geschwindigkeitsprofil, da der dynamische Druck nicht ausreicht, um den wandnahen statischen Druckanstieg in axialer Richtung zu kompensieren. Folglich wird dort der Druckgradient in axialer Richtung durch die Schubspannungen τ_{yz} ausgeglichen. Stratford verwendet dabei einen von der Wandkoordinate unabhängigen Druck $\partial p/\partial y = 0$, wie es in der klassischen Grenzschichttheorie üblich ist.
Für die Vorhersage der beginnenden Strömungsablösung mit den beiden angepassten Stratford Kriterien wird die Grenzschichtlösung verwendet. Dabei wird das Druckfeld aus dem rotierenden Kreiskegel der Strömung in einem nicht-rotierenden Kreiskegel überlagert. Dies ist äquivalent zu dem Vorgehen von Stratford. Damit das Druckfeld unabhängig von der Wandkoordinate ist, wird ein gemittelter Druck

$$p_+ = \frac{1}{\delta_{\mathrm{S}}} \int_0^{\delta_{\mathrm{S}}} p(y,z)\ \mathrm{d}y \tag{3.23}$$

eingeführt. Mit dieser Mittelung wird der Einfluss der Zentrifugalkraft reduziert, um eine Überschätzung zu verhindern. Dies wäre der Fall, wenn statt des gemittelten Drucks der Wanddruck der ganzen axialen Grenzschicht überlagert würde.
In der Arbeit von Stratford[23] ist mit der dortigen Gleichung (43) ein Kriterium für den Ort der beginnenden Strömungsablösung für eine laminare Strömung angegeben. Diese Gleichung auf die Strömung in der vorliegenden Arbeit angepasst, folgt das implizite Kriterium für die kritische Durchflusszahl

$$\varphi_{\mathrm{c,in}} = 3.187\,\frac{6 - 4\delta_0 + \delta_0^2}{6}\,p_+^{1/6}\left(z\,\frac{\mathrm{d}p_{\mathrm{w}}}{\mathrm{d}z}\right)^{1/3} \tag{3.24}$$

für eine laminare Strömung.
Für eine turbulente Strömung wird Gleichung (19a) aus Stratford[25] für die Strömung in einem rotierenden Kreiszylinder von Stapp[26] und Cloos *et al.*[27] und für einen rotierenden Kreiskegel von Cloos und Pelz[28] angewendet. Die Herleitung ist in Anhang D hinterlegt. Die beginnende Ablösung einer tur-

[25] Stratford, „The prediction of separation of the turbulent boundary layer“, ([59], 1959)
[26] Stapp, *Experimentelle und analytische Untersuchung zur Drallgrenzschicht*, ([55], 2015)
[27] Cloos, Stapp und Pelz, „Swirl boundary layer and flow separation at the inlet of a rotating pipe“, ([11], 2017)
[28] Cloos und Pelz, „Developing swirl boundary layer and flow separation and the inlet of a coaxial rotating diffuser or nozzle“, ([8], 2018)

bulenten Strömung in einem rotierenden Kreiskegel tritt bei

$$\varphi_{\mathrm{c,in}} = 3.442\,\frac{60 - 15\delta_0 + 4\delta_0^2}{60}\,\left(R\,\delta(A, G = 0)\,\frac{\mathrm{d}p_{\mathrm{w}}}{\mathrm{d}z}\,p_+^{5/2}\right)^{1/7} \tag{3.25}$$

ein. Dabei wird $n = 1/7$ verwendet. Beide Kriterien sind implizit, da u. a. der Duck ebenfalls eine Funktion von der Durchflusszahl ist. Für beide Kriterien gilt $p_0, \mathrm{d}p_0/\mathrm{d}z = 0$ mit dem statischen Druck p_0 an der axialen Schnittebene $z = 0$ und der axialen Grenzschicht $\delta(A, G = 0)$ des nicht-rotierenden Kreiskegels. Der gemittelte Druck p_+ repräsentiert den Druck im outer layer und der Wanddruckgradient in axialer Richtung den Druckgradient im inner layer. Deshalb wird die axiale Komponente des Wanddruckgradient und nicht die axiale Komponente des Gradients von p_+ berücksichtigt. Der zweite Term von Gleichung (3.24) bzw. (3.25) berücksichtigt den Zusammenhang zwischen der Durchflusszahl φ und der axialen Geschwindigkeit in der Kernströmung $U_{\mathrm{z},0} = U_{\mathrm{z}}(z = 0)$ am Eintritt der Kreiskegels für eine dort vorliegende axiale Grenzschichtdicke δ_0. Dieser Zusammenhang wird aus der angewendeten Kontinuitätsgleichung mit dem Profil (3.15) bzw. (3.17) gewonnen.
Stratford führt die Größe $\beta = 0.66$ ein, um vernachlässigte Terme höherer Ordnung bei dem Kriterium für die turbulente Strömung zu kompensieren. Diese und weitere Größen wie die von Kármán Konstante $\kappa = 0.4$ sind in dem Wert 3.442 von Kriterium (3.25) zusammengefasst. Äquivalent dazu sind alle Konstanten zu 3.187 bei Kriterium (3.24) vereinigt.
Für eine Validierung des Modells und der Kriterien für die beginnende Strömungsablösung wird die Entwicklung des Dralls und die Strömungsablösung auch experimentell untersucht. Der dafür verwendete Versuchsaufbau wird im anschließenden Kapitel präsentiert.

Kapitel 4

Versuchsaufbau

In der vorangegangen Arbeit am Institut für Fluidsystemtechnik[1] wurde ein Prüfstand zur Untersuchung der Zielgrößen

- Dralleintrag in eine Strömung,
- Umfangsgeschwindigkeitsprofils innerhalb der Drallgrenzschicht,
- Einfluss der Rauheit und
- kritische Durchflusszahl hinsichtlich Strömungsablösung

entwickelt und in Betrieb genommen. Dabei wird die Umfangskomponente des Geschwindigkeitsfeldes berührungslos mittels Laser-Doppler-Anemometrie (LDA) gemessen. Dieser Prüfstand wird ebenfalls in der vorliegenden Arbeit verwendet, um an den gewonnenen Kenntnissen kontinuierlich anzuknüpfen. Die bisherigen Parameter des Prüfstandes stammen aus einer Dimensionsanalyse und erfüllen den Parameterraum für die technische Anwendung von Turbomaschinen zum aktuellen Wissensstand. Daraus ableitend wird die Strömung im Eintrittsbereich des rotierenden Kreiszylinders für $z < 5$, bei kleiner Durchflusszahl $\varphi < 1$, hoher Reynoldszahl $\log(Re) = 4 \ldots 5$ und variabler Rauheit $R_z = 0.04\,\% \ldots 4.90\,\%$ untersucht. Für die systematische Annäherung an eine Turbomaschine wird der Parameterraum um einen variablen Strömungsquerschnitt des rotierenden Kreiszylinders erweitert. Statt eines Kreiszylinders werden Kreiskegel eingebaut, um den Strömungsquerschnitt zu variieren. Der Radius der Kreiskegel ist eine lineare Funktion der axialen Koordinaten mit konstanter Steigung (siehe Gleichung (1.2)), sodass sich die Austrittsquerschnittfläche bezogen auf die Eintrittsquerschnittfläche zwischen 70 % und 130 % ändert. Somit sind

[1] Stapp, *Experimentelle und analytische Untersuchung zur Drallgrenzschicht*, ([55], 2015)

Tabelle 4.1 – Parameterraum der Untersuchungen in dieser Arbeit.

Parameter	Intervall
axiale Koordinate	$z = -1.5 \ldots 5$
Durchflusszahl	$\varphi = 0 \ldots 1$
Reynoldszahl	$Re = 10^4 \ldots 10^5$
axiale Reynoldszahl	$Re_{\mathrm{ax}} < 10^5$
Rauheit	$R_z = 0.04\,\% \ldots 4.90\,\%$
Turbulenzintensität der Anströmung	$u'_{\mathrm{z,rms}} = 1\,\% \ldots 16\,\%$
Öffnungswinkel	$\alpha = -1.83\,^\circ \ldots 1.55\,^\circ$

Öffnungswinkel in dem Bereich $\alpha = -1.83\,^\circ \ldots 1.55\,^\circ$ realisiert. Der Bereich der Öffnungswinkel ist durch die Lagerdurchmesser und die optische Zugänglichkeit begrenzt, cf. Abschnitt 4.1.4. Es sei an dieser Stelle vorweggegriffen, dass sich trotz kleiner Öffnungswinkel ein signifikanter Einfluss des axial veränderlichen Radius auf die Drallgrenzschicht, die axiale Grenzschicht und die Strömungsablösung manifestiert. Der Eintrittsradius ist in dieser Arbeit konstant, $\tilde{R}_0 = 25\,\mathrm{mm}$. Der erweiterte und in dieser Arbeit angewendete Parameterraum ist in Tabelle 4.1 festgehalten.
Zur Umsetzung des Parameterraums wird Luft bei Raumtemperatur als Fluid verwendet. Die Vorteile dieser Wahl werden im Folgenden dargelegt: Der Prüfstand kann als ein offener Windkanal betrieben werden, was die Ansprüche an die Dichtung außerhalb der Messstrecke reduziert. Ein weiterer Vorteil des offenen Windkanals ist, dass das offene Ende selbst für die LDA Messung verwendet wird. Die Laserstrahlen verlaufen durch den Freistrahl des Rohraustritts in das Messfeld. Somit müssen weder die emittierten Laserstrahlen noch die reflektierten Signale durch Materialien mit unterschiedlichem Brechungsindex scheinen. Damit wird die Messunsicherheit infolge Lichtbrechung reduziert und die Qualität der Messung erhöht. Mit Luft als Strömungsmedium wird Kavitation ausgeschlossen, wie es bei tropfbaren Flüssigkeiten auftreten kann. Nachteilig ist die große kinematische Viskosität von Luft bei der Realisierung des typischen Reynoldszahlbereichs von Turbomaschinen. Dies führt zu hohen Drehzahlen bei einem konstanten Eintrittsradius von $\tilde{R}_0 = 25\,\mathrm{mm}$ und impliziert hohe Ansprüche an die Lagerung des rotierenden Kreiskegels. Folglich ist die maximale Drehzahl von $\tilde{n}_{\max} = 12,500\,\mathrm{min}^{-1}$ durch die mechanische Belastung der Lager begrenzt. Die geringe Schallgeschwindigkeit von Luft ist in dem Parameterraum kein Hindernis, da die vorliegende Machzahl kleiner als 0.1 ist. In dem nächsten Abschnitt wird die Versuchsanlage detaillierter erläutert.

4.1 Versuchsanlage

Die Versuchsanlage ist in die drei Baugruppen

1. Bereitstellung der Strömung
   (Die Strömung wird durch einen Seitenkanalverdichter, der eine Beruhigungskammer mit Druck beaufschlagt, zur Verfügung gestellt.),

2. Konditionierung der Strömung
   (Zwischen Beruhigungskammer und Rotationseinheit wird die Strömung mit zwei unterschiedlichen Vorlaufstrecken konditioniert.) und

3. Einbringung des Dralls
   (In der Rotationseinheit wird der Drall in die Strömung eingebracht.)

unterteilt. In den folgenden Abschnitten werden die Funktionen der Baugruppen und deren technischen Umsetzungen genauer erläutert. Zusätzlich werden die verwendeten Versuchskegel vorgestellt.

4.1.1 Erzeugung der Strömung

Der Volumenstrom wird mittels einen einstufigen Seitenkanalverdichter mit variabler Drehzahl generiert. Die Drehzahl wird mittels eines Frequenzumrichters variiert, um den Volumenstrom zu regeln. Die maximale Drehzahl beträgt $3,000\,\mathrm{min}^{-1}$ und es kann eine Druckdifferenz von bis zu 300 mbar bereitgestellt werden. Dabei wird die Luft über einen Filter aus der Umgebung angesaugt, im Seitenkanalverdichter komprimiert und anschließend über einen installierten Schalldämpfer ausgeblasen und durch ein poröses Medium in die Beruhigungskammer geleitet.
Die Beruhigungskammer hat eine Länge von $40\tilde{R}_0$, einen Durchmesser von $30\tilde{R}_0$ und dient der Pulsationsglättung. Die Beruhigungskammer ist in Abbildung 4.1 nicht dargestellt. In der Beruhigungskammer wird der Strömung Aerosol aus Silikonöl hinzugefügt, was für die LDA Messungen notwendig ist. Austrittsseitig der Beruhigungskammer strömt die mit dem Aerosol vermischte Luft in die Vorlaufstrecke mit einem Radius von $\tilde{R}_0$, siehe Abbildung 4.1. Dort passiert die Strömung einen ersten Strömungsgleichrichter, der für die in einem Abstand von $30\tilde{R}_0$ stromabwärts liegende Durchflussmessblende notwendig ist. Die Durchflussmessblende ist nach DIN EN ISO 5167-2[2] mit einem Durchmesserverhältnis von 0.54 ausgelegt. Der Volumenstrom wird

[2] DIN EN ISO 5167-2:2003, *Measurement of fluid flow by means of pressure differential devices inserted in circular cross-section conduits running full - Part 2: Orifice plates*, ([15], 2003)

anhand der gemessenen Druckdifferenz über die Durchflussmessblende bestimmt. Mit der bekannten Dichte des Fluids wird aus dem Volumenstrom die zeitlich- und querschnitts-gemittelte axiale Geschwindigkeit $\overline{\tilde{U}}_z$ berechnet. Diese axiale Geschwindigkeit ist kleiner als $\overline{\tilde{U}}_z < 30\,\mathrm{m/s}$. Zwischen der Durchflussmessblende und der Rotationseinheit folgt ein austauschbarer Bereich für die Strömungskonditionierung.

4.1.2 Strömungskonditionierung

In dem austauschbaren Bereich wird die Strömung hinsichtlich Strömungsprofil, axialer Grenzschichtdicke und axialer Turbulenzintensität konditioniert. Für die Konditionierung stehen zwei unterschiedliche Konfigurationen zur Verfügung, siehe Abbildung 4.1.

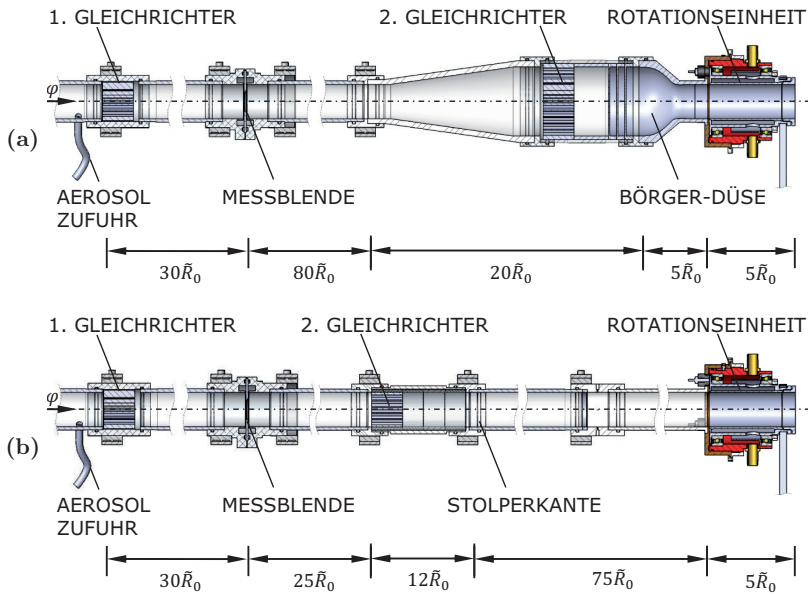


Abbildung 4.1 – Schnittdarstellung der Versuchsanlage für (a) Konfiguration I und (b) Konfiguration II aus [55] (bearbeitet).

Konfiguration I (Abbildung 4.1a) hat die Funktion, eine Strömung mit einer niedrigen axialen Turbulenzintensität und einer dünnen axialen Grenzschicht zu generieren. Dafür wird die Strömung nach einem $80\tilde{R}_0$ langen Kreiszylinder in einen Diffusor geleitet, der den Strömungsquerschnitt auf einen dop-

pelten Radius $2\tilde{R}_0$ vergrößert. Hinter dem Diffusor befindet sich ein zweiter Strömungsgleichrichter und drei feiner werdende Turbulenzsiebe nach DIN EN ISO 5801[3]. Funktion des Strömungsgleichrichters und der Turbulenzsiebe ist es, Störungseinflüsse von der Durchflussmessblende zu minimieren. Weiter stromab fließt die Luft durch eine nach dem Designer benannte Börger-Düse mit einem Austrittsradius von $\tilde{R}_0$ und einer Länge von $5\tilde{R}_0$. Die Kontur der Börger-Düse ist für eine möglichst gleichförmige Ausströmung mit einer dünnen axialen Grenzschicht mit geringer axialer Turbulenzintensität und zur Vermeidung von Strömungsablösung in der Düse optimiert.[4] Das nahezu blockförmige Strömungsprofil strömt aus der Börger-Düse in die Rotationseinheit.

Konfiguration II (Abbildung 4.1b) hat die Funktion, eine voll ausgebildete turbulente Strömung mit hoher axialer Turbulenzintensität zu erzeugen. Dafür strömt die Luft nach der Durchflussmessblende in einen Kreiszylinder mit der Länge $25\tilde{R}_0$ und eine anschließende Einheit aus einem zweiten Strömungsgleichrichter und drei feiner werdenden Turbulenzsieben nach DIN EN ISO 5801[3]. Dahinter ist eine Stolperkante mit der Höhe von $4\,\%\tilde{R}_0$ installiert, um die Turbulenz anzufachen. Es folgt eine $75\tilde{R}_0$ lange, zylindrische Sichtstrecke, die in der Rotationseinheit endet. In der Sichtstrecke entwickelt sich die axiale Grenzschicht.

Die Strömung am Austritt des austauschbaren Bereich wird in der Vorgängerarbeit[5] mit einem Hitzdraht vermessen und in einer studentischen Arbeit[6] überprüft. Das Profil und die Turbulenzintensität der axialen Geschwindigkeit am Eintritt zur Rotationseinheit abhängig von der axialen Reynoldszahl und der Konfiguration ist in Abbildung 4.2 bzw. 4.3 zu sehen. Die Turbulenzintensität der axialen Geschwindigkeit $u'_{\mathrm{z,rms}}$ wird auf Basis der Standardabweichung (engl. root mean square deviation) mit

$$u'_{\mathrm{z,rms}} = \frac{\sqrt{\overline{\tilde{u}'^2_{\mathrm{z}}}}}{\tilde{\overline{U}}_{\mathrm{z}}} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(u_{\mathrm{z}} - u_{\mathrm{z},j}\right)} \tag{4.1}$$

berechnet. Hier sind $u_{\mathrm{z},j}$ der Einzelmesswert, u_{z} die zeitlich-gemittelte axiale Geschwindigkeit und N die Anzahl der Messpunkte.

[3] DIN EN ISO 5801:2008, *Industrieventilatoren - Leistungsmessung auf genormten Prüfständen*, ([16], 2010)

[4] Börger, „Optimierung von Windkanaldüsen für den Unterschallbereich“, ([4], 1973)

[5] Stapp, *Experimentelle und analytische Untersuchung zur Drallgrenzschicht*, ([55], 2015)

[6] Zimmermann, „Instabilitäten im Eintrittsbereich eines rotierenden Rohres“, ([69], 2015)

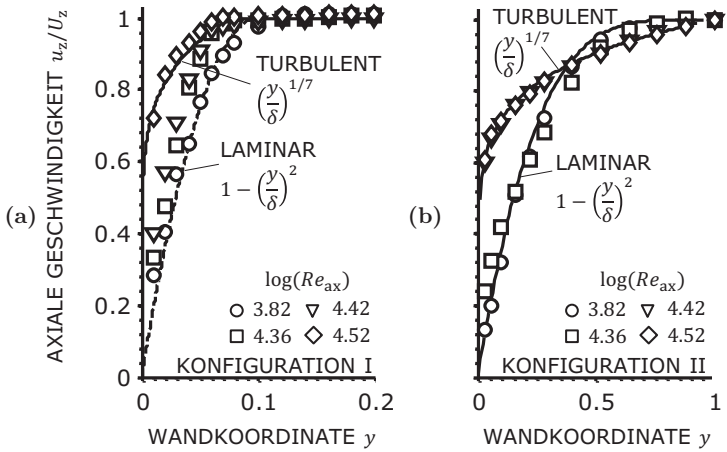


Abbildung 4.2 – Axiales Geschwindigkeitsprofil an der Schnittebene $z \approx 0$ abhängig von der axialen Reynoldszahl Re_{ax} für (a) Konfiguration I und (b) Konfiguration II aus [69] (bearbeitet).

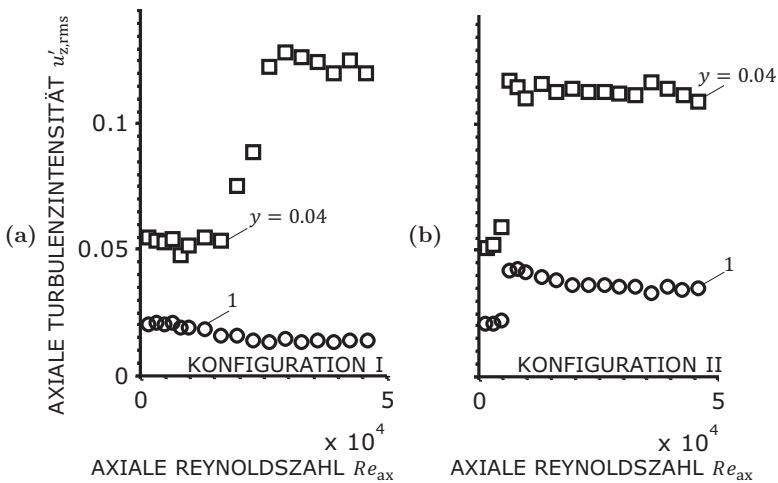


Abbildung 4.3 – Turbulenzintensität der axialen Geschwindigkeit vs. axiale Reynoldszahl Re_{ax} in der Grenzschicht $y = 0.04$ und der Mittellinie $y = 1$ an der Schnittebene $z \approx 0$ für (a) Konfiguration I und (b) Konfiguration II aus [69] (bearbeitet).

Für Konfiguration I und $\log(Re_{\mathrm{ax}}) \leq 4.22$ liegt eine laminare Strömung mit einem parabelförmigen Profil und geringer Turbulenzintensität in der Grenzschicht vor. Für den Bereich $\log(Re_{\mathrm{ax}}) = 4.22 \ldots 4.42$ findet ein Umschlag von laminarer zu turbulenter Strömung statt. Der Umschlag ist durch die Transformation des Profils (Abbildung 4.2a) und den Anstieg der Turbulenzintensität (Abbildung 4.3a) der axialen Geschwindigkeit identifiziert. Für $\log(Re_{\mathrm{ax}}) > 4.42$ liegt eine turbulente Strömung vor und das Profil folgt dem 1/7-Potenzgesetz mit erhöhter Turbulenzintensität. In der Kernströmung ($y = 1$) ist die Turbulenzintensität nahezu unabhängig von der Strömungsart. Je nach Strömungsart variiert die Grenzschichtdicke, $\delta = 0.08 \ldots 0.12$.
Für Konfiguration II findet der Umschlag bei einer kleineren axialen Reynoldszahl als bei Konfiguration I statt. Für $\log(Re_{\mathrm{ax}}) \leq 3.82$ liegt eine laminare Strömung mit einer axialen Grenzschichtdicke $\delta \approx 0.5$ vor, siehe Abbildung 4.2b. Die axiale Grenzschichtdicke erreicht die Mittellinie $\delta = 1$ für $\log(Re_{\mathrm{ax}}) > 3.82$ und es liegt eine voll ausgebildete turbulente Strömung vor. Die Turbulenzintensität steigt mit dem Umschlag von laminarer zu turbulenter Strömung an, vgl. Abbildung 4.3b. Die Ergebnisse der Untersuchungen sind in Tabelle 4.2 zusammengefasst. Als nächstes wird der Aufbau der Rotationseinheit erläutert.

Tabelle 4.2 – Eintrittsbedingungen in die Rotationseinheit für beide Konfigurationen.

Konfiguration I	
$\log(Re_{\mathrm{ax}}) \leq 4.22$	laminare dünne Grenzschicht $\delta_0 \approx 0.12,\ u'_{\mathrm{z,rms}} \approx 6\,\%$
$\log(Re_{\mathrm{ax}}) = 4.22 \ldots 4.42$	Transition, dünne Grenzschicht $\delta_0 \approx 0.08 \ldots 0.12,\ u'_{\mathrm{z,rms}} \approx 6 \ldots 12\,\%$
$\log(Re_{\mathrm{ax}}) > 4.42$	turbulente dünne Grenzschicht $\delta_0 \approx 0.08,\ u'_{\mathrm{z,rms}} \approx 12\,\%$
Konfiguration II	
$\log(Re_{\mathrm{ax}}) \leq 3.82$	laminare dicke Grenzschicht $\delta_0 \approx 0.5,\ u'_{\mathrm{z,rms}} \approx 6\,\%$
$\log(Re_{\mathrm{ax}}) > 3.82$	turbulente voll ausgebildete Grenzschicht $\delta_0 = 1,\ u'_{\mathrm{z,rms}} \approx 13\,\%$

4.1.3 Rotationseinheit

Zwischen dem nicht-rotierenden und dem rotierenden Kreiskegel ist ein unabdingbarer Spalt, dessen Breite über ein Feingewinde variierbar ist. Bei jeder Versuchsdurchführung wird der Spalt auf eine Breite von $4\,‰\tilde{R}_0$ eingestellt und mittels drei induktiven Abstandssensoren[7] mit einer Auflösung von $< 1\,\mu\text{m}$ überwacht.

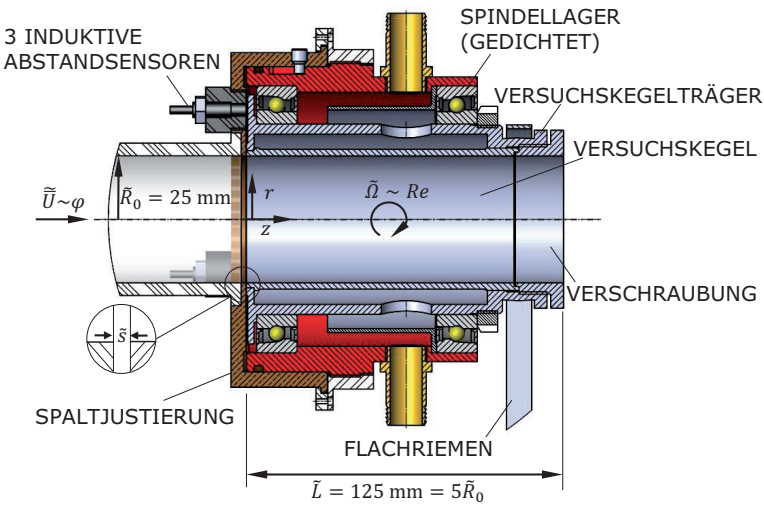


Abbildung 4.4 – Schnittdarstellung der Rotationseinheit mit einem eingesetzten Kreiszylinder aus [55] (bearbeitet).

Der Versuchskegel ist austauschbar und wird in den Versuchskegelträger verschraubt, siehe Abbildung 4.4. Der Versuchskegelträger ist über zwei gedichtete Präzisionsspindellager gelagert. Eine Leckage über den Spalt und über die Lager ist durch die axialen Dichtungen im Lager selbst minimiert. Die Lager sind in vorgespannter O-Anordnung verbaut, da der Antrieb außerhalb der Lager sitzt und somit die Lagerung auch bei maximaler Drehzahl $\tilde{n}_{\max} = 12,500\,\text{min}^{-1}$ besonders steif ist. Der Antrieb der Rotationseinheit ist mit einem Flachriemen realisiert, der am Versuchskegelträger angreift und diesen koaxial rotiert. Durch den kontinuierlichen Antrieb des Flachriemens werden Vibrationen im Vergleich zu einem Zahnriemen reduziert. Zur Quantifizierung der Vibrationen wurden mit Hilfe von Beschleunigungssensoren die Amplitude der Bewegungen berechnet. Die Amplituden der Be-

[7] Die technischen Daten aller verwendeten Sensoren sind Tabelle E.1 in Anhang E zu entnehmen.

wegungen liegen in der Größenordnung des Messvolumens des LDAs, vgl. Abschnitt 4.2.1. Die Vibrationen werden bei der Betrachtung der Messunsicherheit berücksichtigt. Die Drehzahl des rotierenden Kreiskegels wird über den Antrieb des Flachriemens, ein Elektromotor, geregelt, cf. Abschnitt 4.2.2. Die vorliegende Konstruktion der Rotationseinheit ermöglicht ein einfaches Austauschen der Versuchskegel. Die verwendeten Versuchskegel werden in dem folgenden Abschnitt beschrieben.

4.1.4 Versuchskegel

Alle Versuchskegel haben einen Eintrittsradius von $\tilde{R}_0 = 25\,\mathrm{mm}$ und haben mit der Verschraubung eine Länge von $L = 5\tilde{R}_0$. Jeder Versuchskegel hat eine Länge von $4.5\tilde{R}_0$, d. h. die Verschraubung hat eine Länge von $0.5\tilde{R}_0$. Versuchskegel und Verschraubung haben jeweils den gleichen Öffnungswinkel mit einer systematischen Unsicherheit von $\Delta\alpha_{\mathrm{sys}} = \pm 0.02\,^\circ$ bedingt durch die Fertigung. Die Versuchskegel werden im Versuchskegelträger durch die Verschraubung und die Übergangspassungen positioniert, sind aus Edelstahl gefertigt und haben eine radiale Fertigungstoleranz von $\Delta\tilde{R}_{\mathrm{sys}}/\tilde{R}_0 = \pm 0.8\,‰$. Insgesamt stehen sieben unterschiedliche Versuchskegel zur Verfügung, wovon drei eine Querschnittsverkleinerung (Düse) und drei eine Vergrößerung (Diffusor) aufweisen. Die Versuchskegel sind so ausgelegt, dass die Austrittsquerschnittfläche bezogen auf die Eintrittsquerschnittfläche um ca. $10, 20, 30\,\%$ verkleinert bzw. vergrößert ist. Eine stärkere Verkleinerung wird nicht umgesetzt, da sonst der Eintrittsbereich des rotierenden Kreiskegels mit dem gewählten Aufbau des LDA optisch nicht zugänglich ist. Eine weitere Vergrößerung ist nicht möglich, da der maximale Durchmesser durch den Durchmesser des Versuchsträgerrohr bzw. der Lager begrenzt ist. Die relevanten Abmessungen der Versuchskegel sind in Tabelle 4.3 zusammengefasst.

Tabelle 4.3 – Abmessungen der sieben Versuchskegel mit $R_0 = 25\,\mathrm{mm}$ und einer Länge von $125\,\mathrm{mm}$.

$\tilde{R}(z=5)$ in mm	$R^2(z=5)$ in %	α
21.00	71	$-1.83\,^\circ$
22.64	82	$-1.63\,^\circ$
23.68	90	$-0.61\,^\circ$
25.00	100	$0.00\,^\circ$
26.02	108	$0.47\,^\circ$
27.26	119	$1.03\,^\circ$
28.39	129	$1.55\,^\circ$

Die Versuchskegel werden äquivalent zu der Arbeit von Stapp[8] mit einer künstlichen Rauheit versehen, um den Einfluss der Rauheit auf die Drallentwicklung zu quantifizieren. Die unbeschichteten Versuchskegel, d. h. die blanken Oberflächen, haben eine mittlere Rauheitstiefe von $R_z = 0.04\,\%$. Zur Erzeugung von vier künstlichen Rauheiten werden die Versuchskegel mit unterschiedlichem Silizium-Carbid Granulat beschichtet, siehe Abbildung 4.5. Dafür wird die Mantelinnenfläche der Versuchskegel zuerst mit einer dünnen Lackschicht aus dünnflüssigen Zweikomponenten-Acryllack überzogen und anschließend das Granulat darüber gestreut. Die mittlere Rauheitstiefe als auch der arithmetische Rauheitswert $\tilde{R}_a$ wird in der Vorgängerarbeit[8] an flächigen Proben mit dem Fokus-Variationsverfahren gemessen. Die Ergebnisse sind in Tabelle 4.4 enthalten. Der Durchmesser der benetzten Oberfläche ändert sich durch die Lackschicht und das Einsinken des Granulats in die Lackschicht. Die Dicke der luftundurchlässigen Schicht ist abhängig von der Granulatgröße. Der örtliche effektive Rohrdurchmesser $R_{\text{eff}}(z)$ wird nach der Beschichtung mit dem LDA System bestimmt. Es wird davon ausgegangen, dass der Offset des Messvolumens bekannt ist (vgl. Abschnitt 4.2.1) und weiterhin durch die Wandhaftung keine Relativgeschwindigkeit zwischen der Strömung und dem rotierenden Kreiskegel vorliegt. Bei konstanter Drehzahl des Kreiskegels wird das Geschwindigkeitsprofil an mehreren axialen Schnittebenen im rotierenden Kreiskegel gemessen und der Messwert des wandnahesten Punktes wird linear extrapoliert. Der Wandabstand, an dem die Extrapolation die Wandgeschwindigkeit erreicht, wird als luftundurchlässige Schicht betrachtet. Mit steigender Granulatgröße steigt auch die Dicke der luftundurchlässigen Schicht mit einer Unsicherheit von $\pm 8\,‰ \tilde{R}_0$ aufgrund vorliegender Schwankungen in der Beschichtung. Diese Ergebnisse entsprechen den Untersuchungen von Stapp[8] und sind in Tabelle 4.4 hinterlegt. Nach der Vorstellung der konstruktiven Umsetzung des Prüfstandes werden anschließend die dabei verwendeten Messsysteme erklärt.

Abbildung 4.5 – Beschichteter Versuchskegel $\alpha = 1.03\,°$ mit $R_z = 4.90\,\%$.

[8] Stapp, *Experimentelle und analytische Untersuchung zur Drallgrenzschicht*, ([55], 2015)

Tabelle 4.4 – Oberflächenbeschaffenheit und effektiver Kegelradius abhängig von der Beschichtung.

Beschichtung	$\tilde{R}_a$ in µm	$\tilde{R}_z$ in µm	R_z in %	R_{eff} in %
blank	2	10	0.04	1
P120	42	188	0.75	0.991
P70	64	311	1.24	0.986
P60	82	451	1.80	0.977
P36	154	1225	4.90	0.966

4.2 Messtechnik

In diesem Abschnitt wird die verwendete Messtechnik vorgestellt und die dazugehörige Messunsicherheit diskutiert. Die Messtechnik hat zwei Aufgaben: (i) die Umfangsgeschwindigkeit anhand LDA zu messen und (ii) die Versuchsparameter bestehend aus Reynolds- und Durchflusszahl zu quantifizieren, um diese zu regeln.

4.2.1 Messung der Umfangsgeschwindigkeit

Zur Messung der Umfangskomponente im rotierenden Kreiskegel wird die berührungslose und kalibrierungsfreie 1D LDA verwendet. Mit dieser Technik wird eine Geschwindigkeitskomponente, in dem vorliegenden Fall die Umfangskomponente, des Geschwindigkeitsfeldes gemessen. Dafür wird ein Laserstrahl in zwei kohärente Teilstrahlen getrennt und diese zwei Teilstrahlen werden in einem Winkel γ gekreuzt. An dem Ort, wo sich die zwei Teilstrahlen kreuzen, entsteht ein Messvolumen mit einem Interferenzmuster. Das Messvolumen und das Interferenzmuster sind abhängig von dem Winkel γ, dem Strahlendurchmesser und der Wellenlänge des Lasers. Wenn ein reflektierendes Partikel durch dieses Messvolumen strömt, so wird ein Lichtsignal mit einer Frequenz proportional zur Geschwindigkeitskomponente senkrecht zum Interferenzmuster emittiert. Dieses Streulicht wird von einer Sonde detektiert und anschließend ausgewertet, sodass der Betrag der Geschwindigkeitskomponente des Partikels bekannt ist. Das Vorzeichen der Geschwindigkeitskomponente wird dahingehend ermittelt, indem einem der beiden Teilstrahlen eine Frequenzverschiebung aufgeprägt wird und sich deshalb das Interferenzmuster in dem Messvolumen in eine bekannte Richtung bewegt.[9]

[9] Zhang, *LDA application methods*, ([68], 2013)

Aufbau des LDA Systems

Der Laserstrahl mit einer Wellenlänge von 514.5 nm wird in dem Versuchsaufbau in einem Argon-Ion-Laser generiert und hat eine optische Ausgangsleistung von bis zu 2 W. Der Laserstrahl wird in einem akustooptischen Modulator eingeleitet und dort in zwei Teilstrahlen getrennt. Einem der beiden Teilstrahlen wird eine Frequenzverschiebung von 40 MHz in einer Bragg-Zelle aufgeprägt. Die Teilstrahlen werden jeweils in Glasfaserlichtleitern zu der LDA Sonde geleitet und dort mit Linsen in der Sonde fokussiert. Die Sonde hat eine Brennweite von 315 mm $= 12.6\tilde{R}_0$ und der Winkel zwischen den Teilstrahlen ist $\gamma = 13.83\,°$. Das entstehende Messvolumen in Form eines Ellipsoids hat eine Länge von 0.394 mm $\approx 1.6\,\%\tilde{R}_0$, einen Durchmesser von 47.8 µm $\approx 2\,‰\tilde{R}_0$ und beinhaltet 22 Interferenzstreifen. Das von den Partikeln reflektierte Streulicht wird von der emittierenden Sonde detektiert, da es sich bei dem Aufbau um eine Rückwärtsstreuanordnung handelt. In der Sonde wird das detektierte Lichtsignal in ein elektrisches, analoges Signal mittels eines Photomultipliers umgewandelt und zu dem Burst Spektrum Analyser (BSA) geleitet. Der BSA erkennt, filtert und wertet die detektierten Burst (Reflektionen eines Partikels) aus.
Die für die LDA notwendigen Partikel werden in einem Aerosolgenerator mit einem Radius von $\tilde{R}_\mathrm{p} < 0.6$ µm unter Druckluft erzeugt und mit der Luft in der Beruhigungskammer vermischt. Das verwendete Silikonöl hat eine Dichte von $\tilde{\varrho}_\mathrm{p} = 930\,\mathrm{kg/m^3}$ und es folgt eine Stokes-Zahl von

$$St := \frac{\tilde{t}_\mathrm{p}}{\tilde{t}} = \frac{4\,\tilde{\varrho}_\mathrm{p}\,\tilde{R}_\mathrm{p}^2\,\tilde{\overline{U}}_\mathrm{z}}{18\,\tilde{\mu}\,\tilde{R}_0} < 5 * 10^{-7} \tag{4.2}$$

mit der Relaxationszeit des Partikels $\tilde{t}_\mathrm{p}$, der charakteristischen Zeit der Strömung $\tilde{t}$ und der dynamischen Viskosität für Luft $\tilde{\mu}$ für den vorliegenden Parameterraum. Für $St \ll 1$ ist der Schlupf zwischen der Partikel- und umgebener Luftgeschwindigkeit vernachlässigbar klein.[10]
Die vorliegende Strömung hat eine stochastischen Streuung und ist im zeitlichen Mittel stationär, weshalb die Umfangsgeschwindigkeit an einem Ort über eine Zeitspanne zwischen 10 ... 120 s gemessen wird. In dieser Zeitspanne werden zwischen $N = 700 \ldots 8000$ Burst detektiert und ausgewertet. Die einzelnen Burst werden mit der Durchgangszeit (engl. transit time) eines Partikels durch das Messvolumen gewichtet, um den Bias-Fehler bei der Bildung der zeitlich-gemittelten Geschwindigkeit u_ϕ zu reduzieren. Die stochastische Schwankung während der Messung wird mit der Standardabweichung charakterisiert. Die Standardabweichung wird in dimensionsloser

[10] Zhang, *LDA application methods*, ([68], 2013)

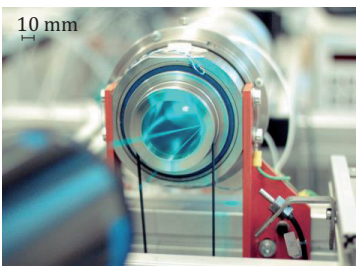
Form $u'_{\phi,\mathrm{rms}} = \tilde{u}'_{\phi,\mathrm{rms}}/(\tilde{\Omega}\tilde{R})$ im Folgenden als Turbulenzintensität der Umfangsgeschwindigkeit bezeichnet und entspricht der querschnittsbezogenen Turbulenzintensität. Die dimensionslose statistische Messunsicherheit der gemittelten Umfangsgeschwindigkeit wird mit

$$\Delta u_{\phi,\mathrm{stat}} = \pm \frac{t(N)}{\sqrt{N}}\, \tilde{u}'_{\phi,\mathrm{rms}} \tag{4.3}$$

für ein 95 %-iges Vertrauensintervall und dem Student'schen Faktor $t(N > 30) = 1.96$ berechnet. Eine statistische Messunsicherheit für die Turbulenzintensität selbst kann nicht angegeben werden.

Positionierung des Messvolumens

Stromabwärts der Rotationseinheit ist die LDA Sonde auf einem traversierbaren Kreuztisch fest montiert und wird über einen Schrittmotor verfahren. Der Kreuztisch und die Sonde sind so aufgestellt, dass die emittierten Laserstrahlen in einem Winkel von 11.60 ° zur vertikalen Symmetrieebene des rotierenden Kreiskegels einfallen und sich auf der horizontalen Symmetrieebene kreuzen, siehe Abbildung 4.6 und 4.7. Diese Ausrichtung der Laserstrahlen ermöglicht einen axialen Messbereich von $z = -1.5 \ldots 5$ im wandnahen Bereich auf der horizontalen Symmetrieebene mit parallel dazu ausgerichteten Interferenzstreifen. Folglich wird die Umfangsgeschwindigkeit der Partikel gemessen.



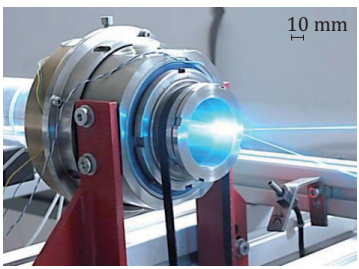


Abbildung 4.6 – Fotografierter Strahlengang der LDA am Austritt der Rotationseinheit aus [55].

Die Messunsicherheit des LDAs hängt im Wesentlichen von der Ausrichtung und der Positionierung des Messvolumens im Relativsystem des rotierenden Kreiskegels ab. Eine ungenaue Ausrichtung durch eine Verkippung und Verdrehung des Messvolumens hat zur Folge, dass die gemessene Geschwindigkeit eine vektorielle Addition der Geschwindigkeit in allen drei Raumrichtungen ist. Die Ausrichtung wird durch Messungen bei einer drallfreien

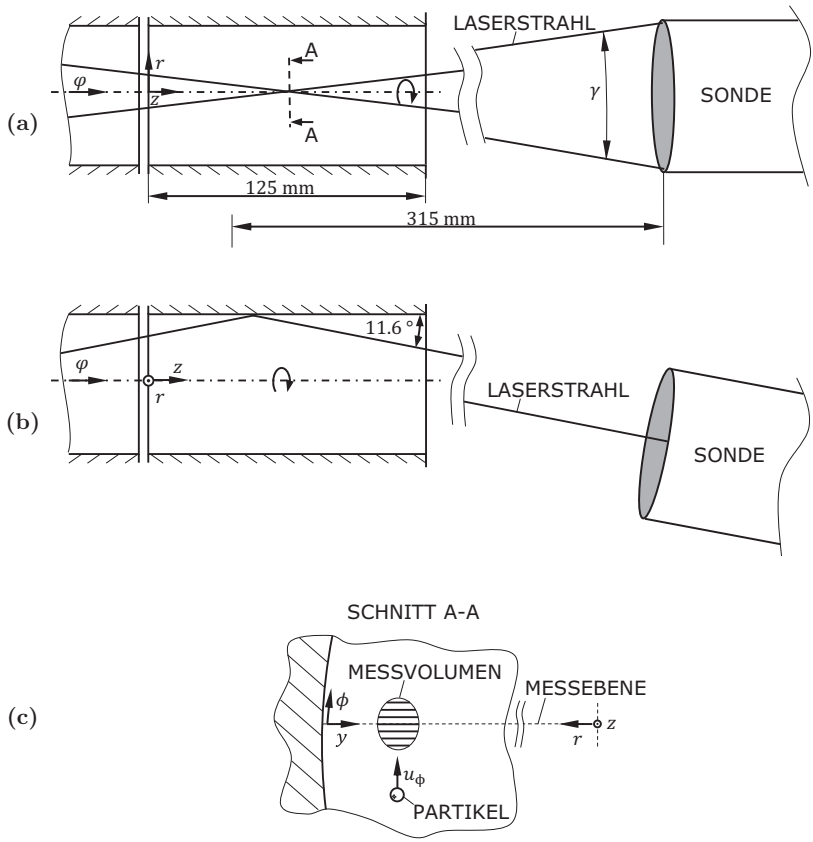


Abbildung 4.7 – Ausrichtung der LDA Sonde mit Strahlengang und Positionierung des Messvolumens für (a) Seitenansicht, (b) Draufsicht und (c) Schnitt A-A aus [55] (bearbeitet).

Anströmung überprüft. Die eigens erzielten Ergebnisse stimmen mit den Ergebnissen von Stapp[11] überein und es folgt eine systematische Messunsicherheit der Umfangsgeschwindigkeit von $\Delta u_{\phi,\mathrm{sys}} < 10^{-2}\,\varphi$ durch die Ausrichtung. Die so quantifizierte Messunsicherheit liegt in der Größenordnung des Messrauschens.

[11] Stapp, *Experimentelle und analytische Untersuchung zur Drallgrenzschicht*, ([55], 2015)

Herausfordernd bei der LDA ist die Positionierung des Messvolumens in der gewünschten Messebene. Die Positionierung wird in der vorliegenden Arbeit über zwei Verfahren überprüft: (i) Das Messvolumen wird auf die eine Kante am Eintritt und auf beide Kanten am Austritt des Kreiszylinders der horizontalen Messebene verfahren. Über die Reflektion des Messvolumens an den Kanten wird die Positionierung optisch überprüft. (ii) Dem zweiten Verfahren liegt Wandhaftung zugrunde $u_\phi(y = 0) = 1$. Nach einer Messung des Umfangsgeschwindigkeitsprofils an unterschiedlichen, axialen Schnittebenen werden die wandnahen Messpunkte linear zur Wand extrapoliert. Der radiale Offset wird über die Differenz zwischen Wandgeschwindigkeit und extrapolierter Geschwindigkeit ermittelt. Durch diese Verfahren wird eine systematische Messunsicherheit von $\Delta\tilde{z}_{\text{sys}} = \pm 0.2\,\text{mm} = 8\,‰\tilde{R}_0$ in axialer Richtung und von $\Delta\tilde{y}_{\text{sys}} = \pm 0.1\,\text{mm} = 4\,‰\tilde{R}_0$ in radialer Richtung abgeschätzt. Die statistische Messunsicherheit durch die Wiederholungsungenauigkeit des Kreuztisches ist $\Delta\tilde{y}_{\text{stat}} = \Delta\tilde{z}_{\text{stat}} = \pm 0.02\,\text{mm} = 0.8\,‰\tilde{R}_0$. Als nächstes werden die Messung und die dazugehörige Unsicherheit der Versuchsparameter diskutiert.

4.2.2 Unsicherheit der Strömungsparameter

Die Versuchsparameter sind die Reynoldszahl, Durchflusszahl, Rauheit und Öffnungswinkel des Versuchskegels. Die beiden ersten Parameter werden in dem vorliegenden Abschnitt beschrieben und werden während der Versuchsdurchführung geregelt. Die beiden letzten Parameter sind geometrische Größen und wurden bereits in Abschnitt 4.1.4 behandelt.

Unsicherheit der Reynoldszahl

Die Reynoldszahl ist eine Funktion von dem Eintrittsrohrradius $\tilde{R}_0$, der Umfangsgeschwindigkeit des Kreiskegels am Eintritt $\tilde{\Omega}\tilde{R}_0$ und der kinematischen Viskosität $\tilde{\nu}$, siehe Gleichung (1.3). Alle drei Größen sind zu bestimmen, um die Reynoldszahl angeben zu können bzw. zu regeln. Der Eintrittsradius $\tilde{R}_0$ wird mit einer Unsicherheit von $\Delta\tilde{R}_{\text{sys}}/\tilde{R}_0 = \pm 0.8\,‰$ gefertigt, vgl. Abschnitt 4.1.4. Während der Versuchsdurchführung unterliegt die kinematische Viskosität Schwankungen aufgrund der veränderten Lufttemperatur. Die Lufttemperatur im Windkanal wird in der Beruhigungskammer mit einem PT100 Sensor mit einer systematischen Unsicherheit von $\Delta\tilde{T}_{\text{sys}} = \pm 0.5\,°\text{C}$ überwacht. Mit der gemessen Lufttemperatur wird die kinematische Viskosität mit einer systematischen Unsicherheit von $\Delta\tilde{\nu}_{\text{sys}}/\tilde{\nu} = \pm 2\,\%$ relativ vom Messwert quantifiziert. Die Drehzahl kann im Versuch kontrollierbar beeinflusst und variiert werden. Damit wird auch während des Versuchs

die Reynoldszahl geregelt. Die Drehzahl des rotierenden Kreiskegels wird berührungslos mit einem optischen Drehzahlaufnehmer mit einer absoluten, systematischen Messunsicherheit von $\Delta\tilde{\Omega}_{\text{sys}} = \pm\pi\,\text{Hz}$ gemessen. Der Lichtstrahl des Drehzahlaufnehmers ist auf einen an der Verschraubung aufgeklebten Reflektor gerichtet. Die geregelte Reynoldszahl hat eine relative, systematische Unsicherheit von

$$\frac{\Delta Re_{\text{sys}}}{Re} = \left|\frac{2\Delta\tilde{R}_{\text{sys}}}{\tilde{R}_0}\right| + \left|\frac{\Delta\tilde{\Omega}_{\text{sys}}}{\tilde{\Omega}}\right| + \left|\frac{\Delta\tilde{\nu}_{\text{sys}}}{\tilde{\nu}}\right| \leq \pm 4.7\,\% \tag{4.4}$$

für $\log(Re) = 4.0$ bei Umgebungsbedingungen. Bei einer größeren Reynoldszahl wird die relative, systematische Messunsicherheit kleiner. Die Reynoldszahl und alle anderen Größen, außer die Messdaten der LDA, werden über $N \geq 200$ Datenpunkte mit einer Abtastrate von 50 ms gemittelt. Die statistische Messunsicherheit der Reynoldszahl wird äquivalent zu Gleichung 4.3 mit der Standardabweichung der Reynoldszahl $\sigma(Re)$ gebildet. Die gesamte Messunsicherheit der Reynoldszahl wird mit dem quadratischen Fehlerfortpflanzungsgesetz berechnet.

Unsicherheit der Durchflusszahl

Die Durchflusszahl wird ebenfalls geregelt, um unabhängig von der Reynoldszahl geändert werden zu können. Dafür wird der über die Durchflussmessblende bestimmte Volumenstrom variiert, indem die Drehzahl des Seitenkanalverdichters angepasst wird. Die Verlustziffer der Durchflussmessblende hat nach Norm eine relative, systematische Unsicherheit von $\Delta\zeta_{\text{sys}}/\zeta = 0.5\,\%$ vom Messwert. Der Differenzdrucksensor an der Durchflussmessblende wird an den Betriebspunkt entsprechend ausgewählt, um die systematische Messunsicherheit zu minimieren. Die Luftdichte $\tilde{\varrho}$ bei Umgebungsdruck wird anhand der idealen Gasgleichung berechnet und es wird eine relative, systematische Messunsicherheit von $\Delta\varrho_{\text{sys}}/\varrho = \pm 2\,\%$ vom Messwert angenommen.
Für eine Abschätzung des systematischen Messfehlers der gemittelten, axialen Geschwindigkeit basierend auf der Durchflussmessung wird von dem Zusammenhang $\tilde{\overline{U}}_{\text{z}} = \sqrt{2\tilde{p}/\tilde{\varrho}}\,\zeta$ ausgegangen und es folgt

$$\frac{\Delta\tilde{\overline{U}}_{\text{z,sys}}}{\tilde{\overline{U}}_{\text{z}}} = \left|\frac{\Delta\tilde{p}_{\text{sys}}}{2\tilde{p}}\right| + \left|\frac{\Delta\tilde{\varrho}_{\text{sys}}}{2\tilde{\varrho}}\right| + \left|\frac{\Delta\zeta_{\text{sys}}}{\zeta}\right| \leq 4.0\,\% \tag{4.5}$$

für $\tilde{\overline{U}}_{\text{z}} = 1.45\,\text{m/s}$ und einer Druckdifferenz von 40 Pa. Die Durchflusszahl ist nach Gleichung (1.1) das Verhältnis aus gemittelter axialer Geschwindigkeit

und Umfangsgeschwindigkeit des Kreiszylinders am Eintritt. Folglich ist die relative, systematische Messunsicherheit der Durchflusszahl

$$\frac{\Delta\varphi_{\mathrm{sys}}}{\varphi} = \left|\frac{\Delta\tilde{\overline{U}}_{\mathrm{z}}}{\tilde{\overline{U}}_{\mathrm{z}}}\right| + \left|\frac{\Delta\tilde{R}_0}{\tilde{R}_0}\right| + \left|\frac{\Delta\tilde{\Omega}}{\tilde{\Omega}}\right| \leq 6.6\,\% \tag{4.6}$$

für $\log(Re) = 4.0$ und $\varphi = 0.45$. Die systematische Messunsicherheit sinkt für eine ansteigende Reynolds- bzw. Durchflusszahl. Die statistische und die gesamte Messunsicherheit der Durchflusszahl wird äquivalent wie bei der Reynoldszahl bestimmt.

Kapitel 5

Ergebnisse

Das System von gewöhnlichen, nichtlinearen Differentialgleichungen (3.3), (3.7), (3.12) und (3.14) wird numerisch mit dem kommerziellen Solver von Mathematica 11 gelöst, um einerseits das Modell mit experimentellen Daten zu validieren und andererseits sowohl die Drallentwicklung als auch den Einfluss des Dralls auf die axiale Grenzschicht zu erforschen. Der Solver löst das Gleichungssystem mit einer Genauigkeit von 10^{-4} und dies entspricht der Größenordnung der vernachlässigten Terme. Je nach vorliegender Strömungsart, laminar oder turbulent, werden die entsprechenden Ansatzfunktionen und die Randbedingung für δ_0 nach Tabelle 4.2 gewählt. Abhängig von der axialen Grenzschichtdicke am Eintritt, der Durchflusszahl und dem axialen Geschwindigkeitsprofil wird mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung die dortige axiale Geschwindigkeit der Kernströmung $U_{\mathrm{z},0}$ als Randbedingung bestimmt. Der statische Druck am Eintritt wird zu null gesetzt $P_0 = 0$ und die Drallgrenzschichtdicke hat dort eine Randbedingung von $\delta_{\mathrm{S}}(z = 0) = 0.001$. Für eine voll ausgebildete axiale Grenzschicht $\delta_0 = 1$ am Eintritt des rotierenden Kreiskegels (Konfiguration II) werden einzig der Drallsatz (3.12) und die Kontinuitätsgleichung (3.14) gelöst. Die vorliegende Form der radialen und axialen Komponente des Impulssatzes (3.1) bzw. (3.4) sind nicht mehr gültig, da für diesen Fall die viskosen und Reynoldsschen Schubspannungen nicht vernachlässigt werden dürfen. Deshalb liefert das Modell für diesen Fall einzig die Drallgrenzschichtdicke und die axiale Geschwindigkeit entlang der Mittellinie.

Das vorliegende Kapitel ist in drei Abschnitte unterteilt. Im ersten Abschnitt wird die Strömung entlang einer hydraulisch glatten Wand untersucht, um das Modell aus Abschnitt 3.1 mit den passenden Ansatzfunktionen (siehe Abschnitt 3.2) anhand der Drallgrenzschichtdicke zu validieren. Der Einfluss der Rauheit auf die Drallgrenzschicht bei einer hydraulisch rauen Wand wird im zweiten Abschnitt analysiert. Hierbei werden einzig experimentelle Er-

gebnisse diskutiert. Im letzten Abschnitt wird die Stabilität der Strömung hinsichtlich Strömungsablösung untersucht. Dabei werden die Stratford Kriterien (3.24) und (3.25) für die beginnende Ablösung angewendet und das Kapitel wird mit einer Stabilitätskarte für die ausgebildete Strömungsablösung geschlossen. Bei den experimentellen Daten werden die statistische und systematische Messunsicherheit durch Fehlerbalken visualisiert. Diese Fehlerbalken verschwinden üblicherweise hinter den Markern.

5.1 Hydraulisch glatte Wand

Für die Untersuchung der hydraulisch glatten Wand werden im Experiment einzig Versuchskegel mit einer blanken Oberfläche ($R_z = 0.04\,\%$) verwendet. Im Fokus von diesem Abschnitt stehen die drei Fragen

1. Welchen Einfluss hat der Öffnungswinkel auf die Entwicklung der Drallgrenzschicht und der axialen Grenzschicht?

2. Welcher Verteilung folgt die Umfangsgeschwindigkeit und deren Turbulenzintensität in rotierenden Kreiskegeln?

3. Ist in rotierenden Kreiskegeln ebenfalls das turbulente Regime II der Drallgrenzschicht zu beobachten?

Diese drei Fragen werden im Folgenden unter Variation der axialen Koordinate, der Reynoldszahl, der Durchflusszahl und des Öffnungswinkels beantwortet.

5.1.1 Drallgrenzschichtdicke

Analog zu der bekannten axialen Grenzschichtdicke $\delta_{99} = \delta(u = 0.99\,U_\mathrm{z})$ wird eine äquivalente Größe für die Drallgrenzschichtdicke mit $\delta_{\mathrm{S}02} = \delta_\mathrm{S}(u_\Phi = 0.02)$ für Konfiguration I und $\delta_{\mathrm{S}07} = \delta_\mathrm{S}(u_\Phi = 0.07)$ für Konfiguration II definiert. Dies hat die Vorteile, dass diese beiden Größen mit einer kleineren Messunsicherheit angegeben werden können als $\delta_\mathrm{S} = \delta_\mathrm{S}(u_\Phi = 0)$. Zusätzlich ist der Ort, an dem die Umfangsgeschwindigkeit verschwindet, messtechnisch nur mit sehr hohem Aufwand zugänglich. Der Außenbereich der Drallgrenzschicht unterliegt vor allem bei Konfiguration II höheren Schwankungen durch die höhere axiale Turbulenzintensität im Vergleich zu Konfiguration I, vgl. Tabelle 4.2. Deshalb wird bei Konfiguration II $\delta_{\mathrm{S}07}$ statt $\delta_{\mathrm{S}02}$ verwendet.
Die Grenzschichtlösung des Modells gibt hingegen den Ort an, an dem die Umfangsgeschwindigkeit verschwindet. Für die Validierung muss deshalb die

Drallgrenzschichtdicke der Grenzschichtlösung auf den Ort der 2 % bzw. 7 % Isolinie der Umfangsgeschwindigkeit berechnet werden. Dies erfolgt mit der gewählten Ansatzfunktion für das Umfangsgeschwindigkeitsprofil (3.19) mit $k = 2$

$$\delta_{S02} = (1 - \sqrt{0.02})\delta_S \approx 0.86\,\delta_S \tag{5.1}$$

bzw.

$$\delta_{S07} = (1 - \sqrt{0.07})\delta_S \approx 0.74\,\delta_S. \tag{5.2}$$

Im weiteren Verlauf werden exemplarische Ergebnisse vorgestellt, um die gewonnenen Erkenntnisse anschaulich darzustellen. Weitere Ergebnisse sind in Anhang F hinterlegt. Die Darstellung erfolgt meistens in einer doppellogarithmischen Form. Zuerst wird die Entwicklung der Drallgrenzschicht entlang der axialen Koordinate z, dann der Einfluss der Reynoldszahl und der Durchflusszahl diskutiert. Bei allen drei Größen wird zusätzlich der Öffnungswinkel und die Strömungsart, d. h. die Konfiguration, variiert.

Entwicklung entlang der axialen Koordinate

Abbildung 5.1 bildet die gemessene Entwicklung der Drallgrenzschichtdicke entlang der axialen Koordinate abhängig von dem Öffnungswinkel bei konstanten Strömungsparametern für Konfiguration I ab. Die Drallgrenzschichtdicke wächst stromabwärts des Eintritts an und hängt von dem Öffnungswinkel ab. Mit ansteigendem Öffnungswinkel wird die Drallgrenzschicht dicker. Dies ist vor allem nahe des Eintritts $z \leq 1$ erkennbar. Für $z > 1$ liegen die Messpunkte nahezu übereinander.
Die Validierung des Modells anhand der Drallgrenzschichtdicke hinsichtlich der Entwicklung entlang der axialen Koordinate ist in Abbildung 5.2 für einen rotierenden Diffusor mit einem Öffnungswinkel von $\alpha = 1.03\,^\circ$ bei variierter Reynoldszahl und konstanter Durchflusszahl für beide Konfigurationen dargestellt. Hier und in den weiteren Abbildungen haben farblich identische Marker und Linien eine gleiche Parameterkombination. Für Konfiguration I und stromabwärts der Singularität bei $z = 0$ stimmt die Grenzschichtlösung mit den experimentellen Ergebnissen überein. Für diesen Bereich bei Konfiguration II ist die Drallgrenzschichtdicke der Grenzschichtlösung etwas dünner als im Experiment. Die Auswertung deutet auf eine unterschiedliche Abhängigkeit der Drallgrenzschichtdicke von der axialen Koordinate im Experiment im Vergleich zu der Grenzschichtlösung hin. Diese Ergebnisse sind unabhängig von dem Öffnungswinkel, wie bei den weiteren Validierungen in Anhang F zu erkennen ist. In Abbildung 5.2a ist ein lokales Maximum der Drallgrenzschichtdicke in der Nähe von $z = 4$ ersichtlich, das mit steigender Reynoldszahl stromaufwärts wandert. Nahe des Maximums ändert sich die

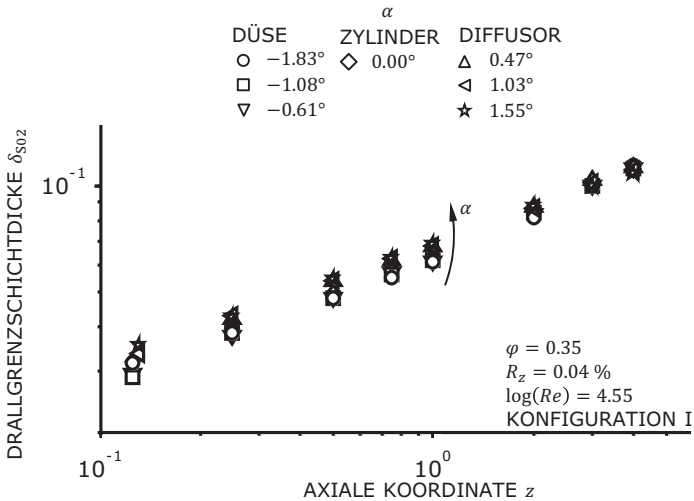


Abbildung 5.1 – Gemessene Drallgrenzschichtdicke vs. axiale Koordinate bei variiertem Öffnungswinkel. Daten aus [9, 10].

Abhängigkeit der Drallgrenzschichtdicke von der axialen Koordinate und die Drallgrenzschicht wird dünner. Ursache für das lokale Maximum ist ein lokales Maximum der axialen Grenzschicht (cf. Abschnitt 5.1.2), wie es üblich in Diffusoren und Düsen mit drallbehafteter Strömung ist.[1] Die Entwicklung der Drallgrenzschicht ist über den konvektiven Transport des Dralls, linke Seite von Gleichung (3.12), mit der axialen Grenzschicht gekoppelt. Das lokale Maximum ist in den experimentellen Daten nicht immer zu erkennen. Ursache hierfür ist der Einfluss des Strömungsaustritts an der axialen Schnittebene $z = 5$, vgl. Stapp[2]. Daraus schlussfolgernd ist es nicht zielführend ein Potenzgesetz äquivalent zu Gleichung (2.3) herzuleiten, da der Exponent m_z sowohl eine Funktion von der axialen Koordinate selbst als auch von der Reynolds- und Durchflusszahl ist. Ein Potenzgesetz mit einem konstanten Exponenten würde einzig in dem kurzen Bereich stromabwärts der Singularität und stromaufwärts des lokalen Maximums gültig sein. Folglich wird in dieser Arbeit davon abgesehen ein solches Potenzgesetz zu bilden.

[1] Broujerdi und Kerbriaee, „Pressure loss of turbulent swirling flow in convergent nozzle“, ([7], 2010)

[2] Stapp, *Experimentelle und analytische Untersuchung zur Drallgrenzschicht*, ([55], 2015)

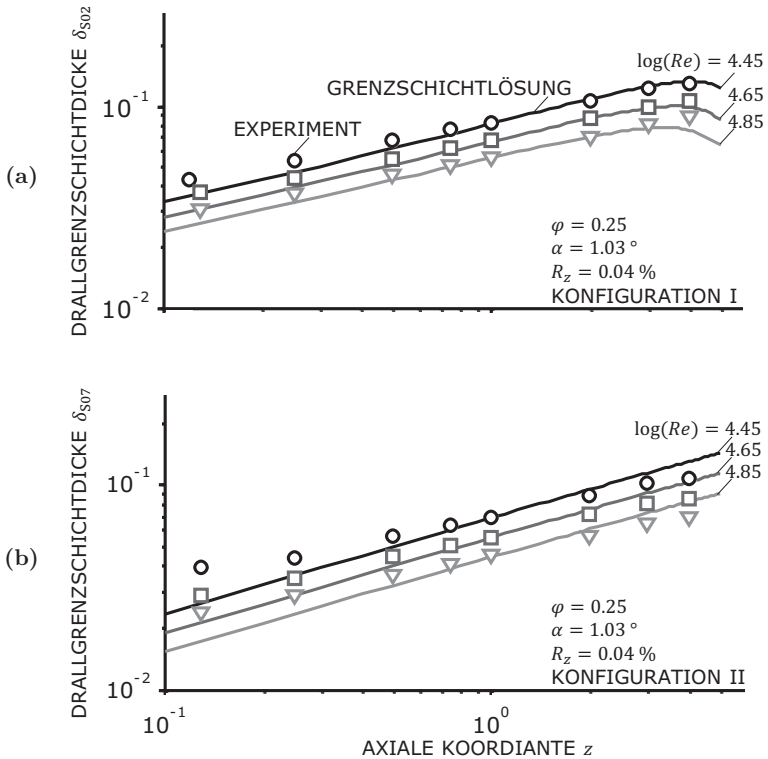


Abbildung 5.2 – Drallgrenzschichtdicke vs. axiale Koordinate bei variierter Reynoldszahl für eine (a) laminare mit $\delta_0 \approx 0.1$ und (b) turbulente Zuströmung mit $\delta_0 = 1$. Experimentelle Daten für (a) aus [8].

Einfluss der Reynoldszahl

Den Einfluss der Reynoldszahl auf die Drallgrenzschichtdicke, abhängig von dem Öffnungswinkel an der Schnittebene $z = 2$ und $\varphi = 0.35$, stellt Abbildung 5.3 exemplarisch für Konfiguration I dar. Zwei Hauptaussagen werden aus dieser Untersuchung abgeleitet: (i) Die Abhängigkeit der Drallgrenzschichtdicke von der Reynoldszahl an der Schnittebene $z = 2$ ist unabhängig von dem Öffnungswinkel und die Drallgrenzschicht wird dünner für eine ansteigende Reynoldszahl. (ii) Mit größer werdendem Öffnungswinkel wird die Drallgrenzschicht dicker.

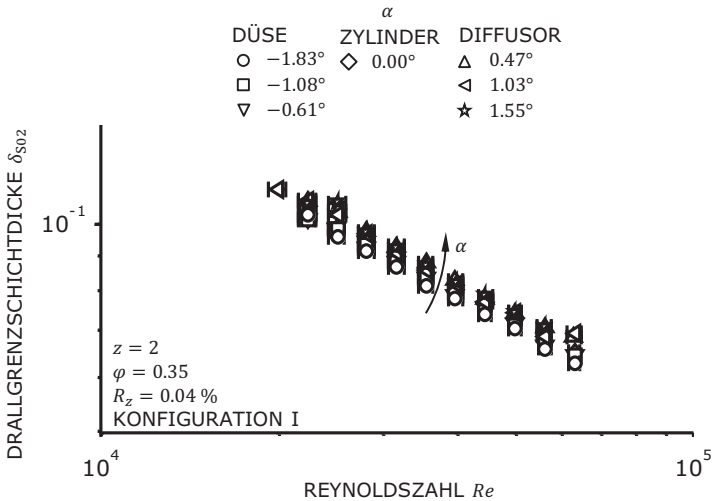


Abbildung 5.3 – Gemessene Drallgrenzschichtdicke vs. Reynoldszahl bei variiertem Öffnungswinkel. Daten aus [9, 10].

Die Validierung der Reynoldszahlabhängigkeit erfolgt u. a. mit Abbildung 5.4 für den Diffusor mit $\alpha = 1.03\,^\circ$ an der axialen Schnittebene $z = 2$ mit variierter Durchflusszahl und beiden Konfigurationen. An dieser Schnittebene stimmt die Charakteristik der Grenzschichtlösung mit den experimentellen Ergebnissen überein. Für eine kleinere Durchflusszahl ($\varphi = 0.25$) ist die Drallgrenzschicht aus der Grenzschichtlösung etwas dicker als die Drallgrenzschichtdicke aus dem Experiment. Für eine größere Durchflusszahl ($\varphi = 0.45$) ist die Drallgrenzschicht aus der Grenzschichtlösung etwas dünner. Dies gilt für beide Konfigurationen. Die Durchflusszahl hat in dem betrachteten Bereich keinen Einfluss auf die Abhängigkeit der Drallgrenzschichtdicke von der Reynoldszahl.

Einfluss der Durchflusszahl

Die Abhängigkeit der Drallgrenzschichtdicke von der Durchflusszahl an der Schnittebene $z = 2$ bei variiertem Öffnungswinkel und konstanter Reynoldszahl für Konfiguration I visualisiert Abbildung 5.5. Hieraus lassen sich drei Hauptaussagen ableiten: (i) Mit ansteigender Durchflusszahl wird die Drallgrenzschicht dünner. (ii) Die Abhängigkeit der Drallgrenzschichtdicke von der Durchflusszahl ist eine Funktion von dem Öffnungswinkel. (iii) Die Drallgrenzschicht wird dicker für einen größer werdenden Öffnungswinkel.

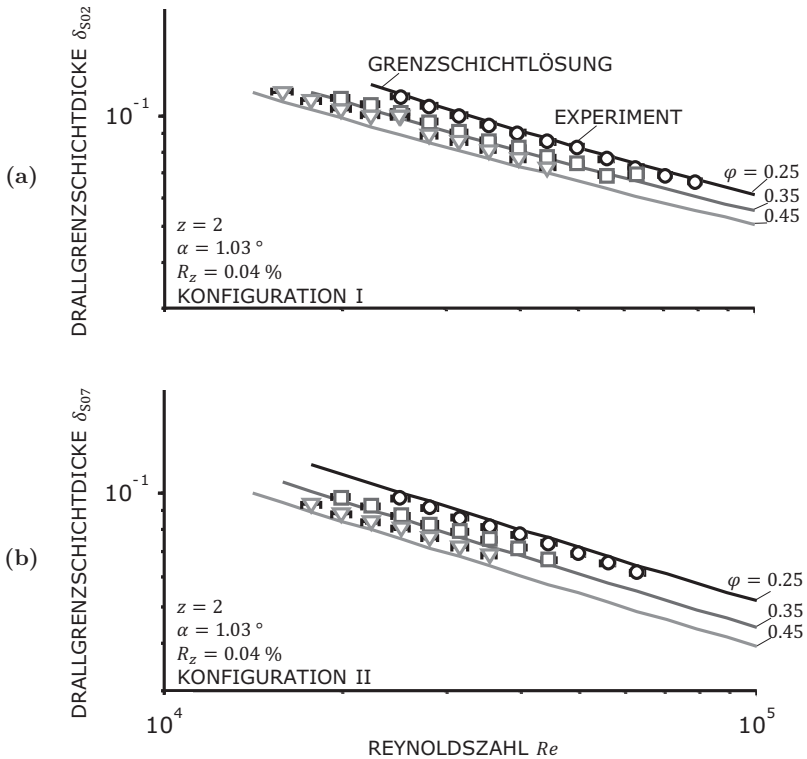


Abbildung 5.4 – Drallgrenzschichtdicke vs. Reynoldszahl bei variierter Durchflusszahl für eine (a) laminare mit $\delta_0 \approx 0.1$ und (b) turbulente Zuströmung mit $\delta_0 = 1$. Experimentelle Daten für (a) aus [8].

Diese Eigenschaft bildet auch die Grenzschichtlösung ab. Dafür wird in Abbildung 5.6 die Drallgrenzschichtdicke gegenüber der Durchflusszahl bei variierter Reynoldszahl für eine Diffusor mit $\alpha = 1.03\,°$ an der axialen Schnittebene $z = 2$ für beide Konfigurationen dargestellt. Die Grenzschichtlösung stimmt mit den experimentellen Daten überein. Einzig für eine Durchflusszahl $\varphi \to 1$ und $\alpha > 0$ ist die Drallgrenzschicht der Grenzschichtlösung etwas dünner als die aus der experimentellen Untersuchung (vgl. auch Validierung in Anhang F).
Zusammenfassung der Erkenntnisse aus Abschnitts 5.1.1: Das Modell bestehend aus Gleichung (3.3), (3.7), (3.12) und (3.14) und den gewählten Ansatz-

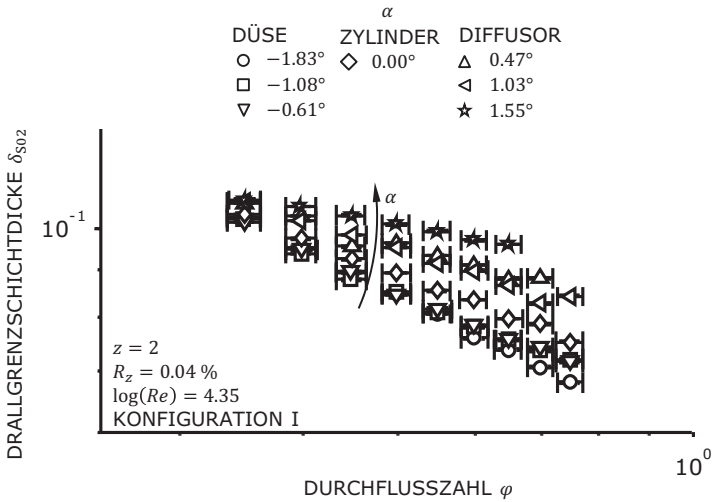


Abbildung 5.5 – Gemessene Drallgrenzschichtdicke vs. Durchflusszahl bei variiertem Öffnungswinkel. Daten aus [9, 10].

funktionen ist anhand der Drallgrenzschichtdicke für eine laminare und turbulente Strömung ganzheitlich validiert. Das validierte Modell bildet die wesentlichen Charakteristiken der Strömung im Eintritt des rotierenden Kreiskegels ab. Bezugnehmend zu der ersten Frage aus Abschnitt 5.1 ist ein deutlicher Einfluss des Öffnungswinkels zu erkennen. In rotierenden Kreiskegeln liegt ein lokales Maximum der Drallgrenzschicht vor und die Abhängigkeit der Drallgrenzschichtdicke von der Durchflusszahl ist eine Funktion von dem Öffnungswinkel. Dieser komplexe Zusammenhang zwischen den Versuchsparametern und der Drallgrenzschichtdicke kann nicht durch ein überschaubares Potenzgesetz beschrieben werden. Im nächsten Abschnitt wird der Einfluss des Dralls auf die axiale Grenzschichtdicke für Konfiguration I diskutiert.

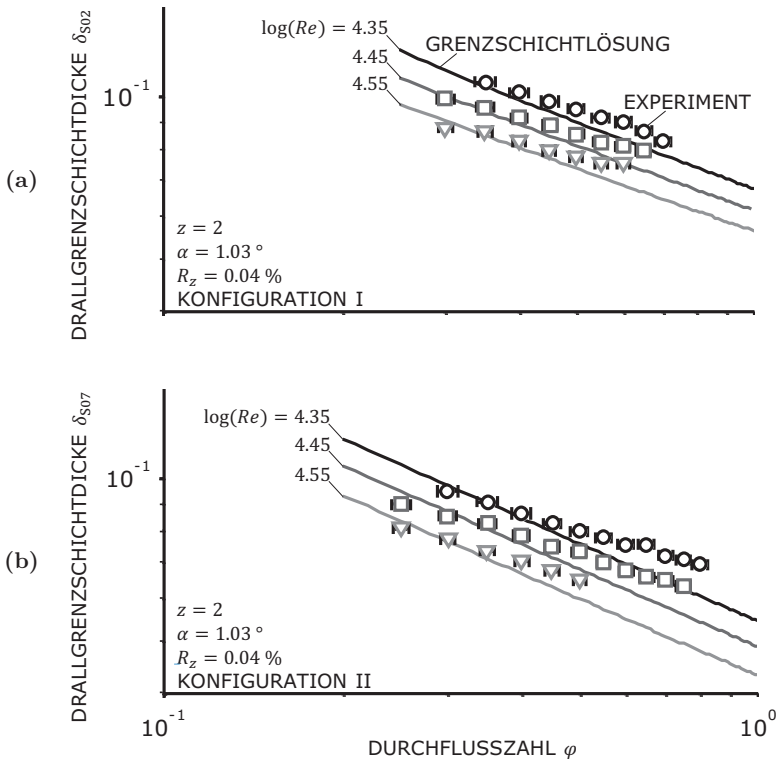


Abbildung 5.6 – Drallgrenzschichtdicke vs. Durchflusszahl bei variierter Reynoldszahl für eine (a) laminare mit $\delta_0 \approx 0.1$ und (b) turbulente Zuströmung mit $\delta_0 = 1$. Experimentelle Daten für (a) aus [8].

5.1.2 Axiale Grenzschichtdicke

Die Entwicklung der axialen Grenzschicht unterliegt vielseitigen Wechselwirkungen in rotierenden Kreiskegeln, vgl. Tabelle 3.1. Zum einem ist aus der Literatur bekannt, dass in Kreiskegeln ein lokales Maximum der axialen Grenzschichtdicke auftreten kann.[3] Dieses Maximum wird u. a. durch die Interaktion der beschleunigten bzw. verzögerten Kernströmung mit dem Wachstum der axialen Grenzschicht verursacht. Der Einfluss einer verzögerten bzw. beschleunigten Kernströmung auf die Entwicklung der axialen Grenzschicht wird bereits bei der Größenordnungsanalyse der verallgemeinerten von Kármán Gleichung in Form einer "Evolustionsgleichung" (3.11) in Abschnitt 3.1 diskutiert. Zum anderen dickt die Zentrifugalkraft die axiale Grenzschicht in rotierenden Kreiszylindern auf,[4,5] siehe Abbildung 2.3. Deshalb wird im Folgenden die axiale Grenzschichtdicke aus der Grenzschichtlösung systematisch untersucht, um die vorliegenden vielseitigen, nicht trivialen Wechselwirkungen zu erörtern. Dafür wird zuerst die Entwicklung der axialen Grenzschicht entlang der axialen Koordinate unter Variation des Öffnungswinkels analysiert. Anschließend wird der Unterschied der axialen Grenzschichtdicke in einem rotierenden und nicht-rotierenden Kreiskegel vorgestellt. Im Vordergrund steht dabei auch die Analyse und Wirkung der neuen Terme A, A_0, die sowohl den Einfluss des axial veränderlichen Radius als auch der Zentrifugalkraft wiedergeben, sowie des bekannten Kopplungsterms G. Abschließend wird der Einfluss der Zentrifugalkraft auf die axiale Grenzschichtdicke anhand einer Durchflusszahlvariation diskutiert.
Die auftretenden Wechselwirkungen sind nichtlinear und können nicht mit einem überschaubaren Potenzgesetz für die axiale Grenzschichtdicke beschrieben werden, wie es für einen rotierenden Kreiszylinder ($\alpha = 0$) mit dem Term g (Gleichung (2.1)) der Fall ist, vgl. Stapp[4] und Cloos *et al.*[5]. Deshalb wird von der Herleitung eines solchen Potenzgesetzes in der vorliegenden Arbeit Abstand genommen.

Einfluss des Öffnungswinkels

Die axiale Grenzschicht entwickelt sich entlang der axialen Koordinate in einem rotierenden Kreiskegel ($A, G \neq 0$) wie es in Abbildung 5.7 zu erkennen ist. Bei dieser Darstellung sind die Strömungsparameter Reynolds- und

[3] Broujerdi und Kerbriaee, „Pressure loss of turbulent swirling flow in convergent nozzle“, ([7], 2010)

[4] Stapp, *Experimentelle und analytische Untersuchung zur Drallgrenzschicht*, ([55], 2015)

[5] Cloos, Stapp und Pelz, „Swirl boundary layer and flow separation at the inlet of a rotating pipe“, ([11], 2017)

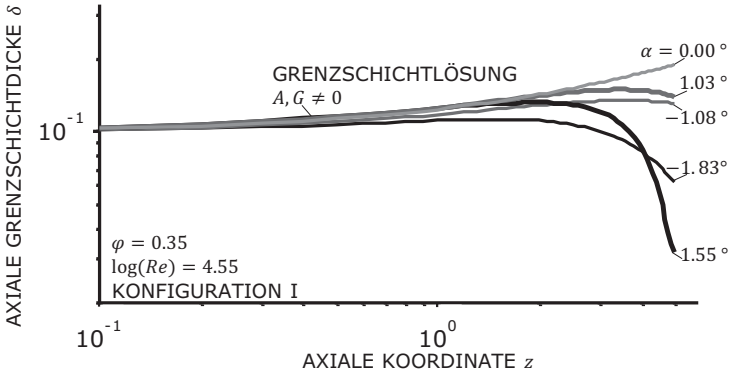


Abbildung 5.7 – Axiale Grenzschichtdicke vs. axiale Koordinate für variierten Öffnungswinkel bei laminarer Zuströmung mit $\delta_0 \approx 0.1$.

Durchflusszahl konstant. Die dargestellten Öffnungswinkel bilden Pärchen (je zwei dünne und dicke Linien) aus einem Diffusor (schwarze Linie) und einer Düse (dunkelgraue Linie) mit Öffnungswinkeln ähnlichen Betrages. Zusätzlich ist noch die axiale Grenzschichtdicke für einen Kreiszylinder $\alpha = 0$ (hellgraue, dünne Linie) eingetragen. Die gewählten Winkel entsprechen denen der Versuchskegel in dem Experiment. Am Eintritt des rotierenden Kreiskegels $z \to 0$ ist die gewählte Randbedingung für $\delta_0 = 0.1$ sichtbar und stimmt mit den experimentellen Ergebnissen überein, vgl. Tabelle 4.2. Stromabwärts des Eintritts wächst die axiale Grenzschichtdicke an, bis sie ein lokales Maximum für $\alpha \neq 0$ erreicht. Die Schnittebene des lokalen Maximums wandert stromaufwärts mit betraglich ansteigendem Öffnungswinkel. Daraus schlussfolgernd hat der Öffnungswinkel einen Einfluss auf die Entwicklung der axialen Grenzschicht entlang der axialen Koordinate. Des Weiteren ist die axiale Grenzschicht für $\alpha \neq 0$ dünner als für $\alpha = 0$ bei der gezeigten Parameterkombination. Dieses Verhalten ist der vielseitigen Wechselwirkung der Terme A, A_0, G und der axialen Kernströmungsgeschwindigkeit geschuldet. Die Skalierung der axialen Grenzschichtdicke auf den lokalen Radius ist nicht die Ursache für dieses Verhalten.
Nach der Variation des Öffnungswinkels wird der Einfluss der Terme A und G genauer untersucht. Dafür wird die axiale Grenzschicht entlang der axialen Koordinate in einem nicht-rotierenden $A, G = 0$ (gestrichelte Linie) und in einem rotierenden Kreiskegel $A, G \neq 0$ (durchgezogene Linie) in Abbildung 5.8 dargestellt. Bei dieser Darstellung wird die axiale Grenzschichtdicke in einer Düse mit $\alpha = -1.08\,°$ (Abbildung 5.8a) und einem Diffusor

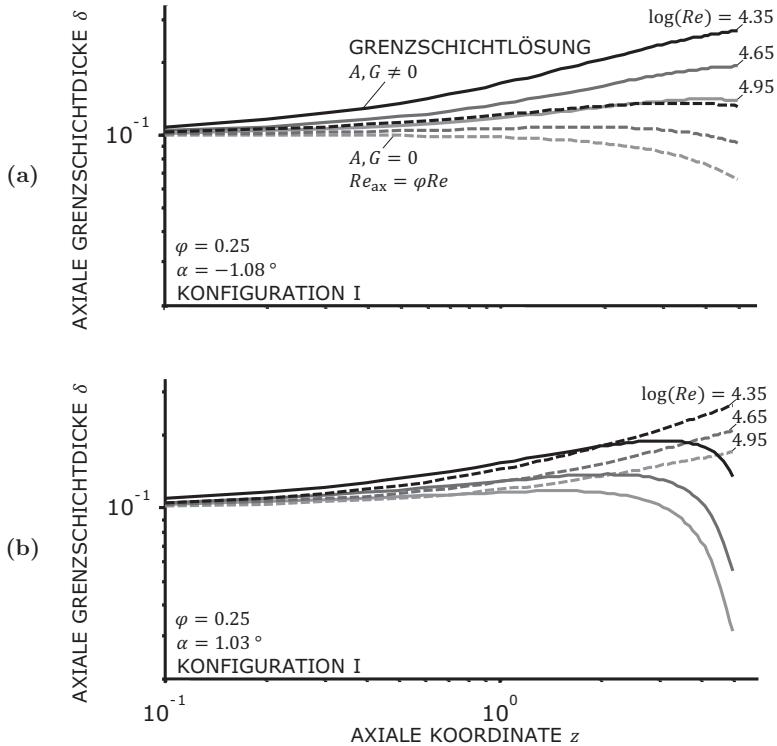


Abbildung 5.8 – Axiale Grenzschichtdicke vs. axiale Koordinate für variierte Reynoldszahl mit (a) $\alpha = -1.08\,°$ und (b) $\alpha = 1.03\,°$ bei laminarer Zuströmung mit $\delta_0 \approx 0.1$.

mit $\alpha = 1.03\,°$ (Abbildung 5.8b) betrachtet. Zusätzlich wird die Reynoldszahl variiert (schwarze, dunkelgraue und hellgraue Linie). Es werden drei Hauptaussagen aus Abbildung 5.8 abgeleitet: (i) Der Öffnungswinkel hat einen Einfluss auf die Entwicklung der axialen Grenzschichtdicke in einem nicht-rotierenden Kreiskegel. Für diesen Fall liegt ebenfalls ein lokales Maximum der axialen Grenzschichtdicke vor. Das lokale Maximum wandert stromaufwärts mit ansteigender Reynoldszahl in rotierenden und nicht-rotierenden Kreiskegeln. (ii) Weit stromabwärts des Eintritts für $z \gtrsim 1$ ist die axiale Grenzschicht in einer rotierenden Düse dicker als in einer nicht-rotierenden Düse, $\delta(A, G \neq 0) > \delta(A, G = 0)$ für $\alpha < 0$. Dies gleicht dem Verhalten der axialen Grenzschichtdicke in einem rotierenden bzw. nicht-rotierenden

Kreiszylinder ($\alpha = 0$), vgl. Abbildung 2.3. Das Wachstum der axialen Grenzschicht wird durch den Kopplungsterm G in einem rotierenden Kreiszylinder unterstützt und die axiale Grenzschicht wird dicker. Zusätzlich zu diesem Kopplungsterm unterstützt Term A das Wachstum der axialen Grenzschichtdicke in rotierenden Kreiskegeln mit $\alpha < 0$. Für einen Diffusor ($\alpha > 0$) ist dieses Verhalten genau umgekehrt. Weit stromabwärts des Eintritts ist die axiale Grenzschicht in einem rotierenden Diffusor dünner als in einem nicht-rotierenden Diffusor, $\delta(A, G \neq 0) < \delta(A, G = 0)$ für $\alpha > 0$. Ursache hierfür ist die dämpfende Wirkung von Term A, die die anfachende Wirkung von dem Kopplungsterm G erst kompensiert und dann dominiert. (iii) Stromabwärts des Eintritts und abhängig von der Parameterkombination ist die axiale Grenzschicht in einer rotierenden Düse ($\alpha < 0$) dicker als in einem rotierenden Diffusor ($\alpha > 0$) für einen Öffnungswinkel ähnlichen Betrages, siehe auch Abbildung 5.7. Für einen nicht-rotierenden Kreiskegel ist dieses Verhalten umgekehrt. Hauptaussage (ii) und (iii) bestätigen die Diskussion bei der Größenordnungsanalyse der Terme A_0, A und G bei Abschnitt 3.1, cf. Tabelle 3.1.
Die Wirkung der Terme A, A_0 und G wird in Abbildung 5.9 entlang der axialen Koordinate verbildlicht. Dafür werden zwei repräsentative Öffnungswinkel mit gleichen Strömungsparametern verwendet und die Terme auf die Wandschubspannung $\tau_{\mathrm{yz,w}}$ bezogen. Die Vorzeichen sind entsprechend der Darstellung der verallgemeinerten von Kármán Gleichung als "Evolutionsgleichung" (3.11) gewählt. Ein Term ist anfachend, wenn das dargestellte Verhältnis positiv ist und dämpfend, wenn es negativ ist. Somit bestätigt Abbildung 5.9 die Diskussion bei der Größenordnungsanalyse, vgl. Tabelle 3.1. Einzig für $\alpha = -1.08\,^\circ$ hat Term A_0 eine abweichende Wirkung nahe des Eintritts. Dies ist mit dem ersten Term auf der rechten Seite von A_0 (3.9) und der vorliegenden Randbedingung δ_0 begründet.

Einfluss der Zentrifugalkraft

Der Einfluss der Zentrifugalkraft auf die axiale Grenzschichtdicke wird durch eine variierte Durchflusszahl quantifiziert. Hierfür wird die axiale Grenzschichtdicke exemplarisch für eine verzögerte Kernströmung in einem Diffusor mit $\alpha = 1.03\,^\circ$ und für eine beschleunigte Kernströmung in einer Düse mit $\alpha = -1.08\,^\circ$ betrachtet. Für die axiale Schnittebene $z = 2$ und variierte Reynoldszahl ist die axiale Grenzschichtdicke in einem rotierenden $A, G \neq 0$ (durchgezogene Linie) und einem nicht-rotierenden Kreiskegel $A, G = 0$ (gestrichelte Linie) gegenüber der Durchflusszahl in Abbildung 5.10 aufgetragen. Für eine Düse mit $\alpha = -1.08\,^\circ$ und $\varphi \ll 1$ hat die Zentrifugalkraft einen dominierenden Einfluss auf die Entwicklung der axialen Grenzschicht.

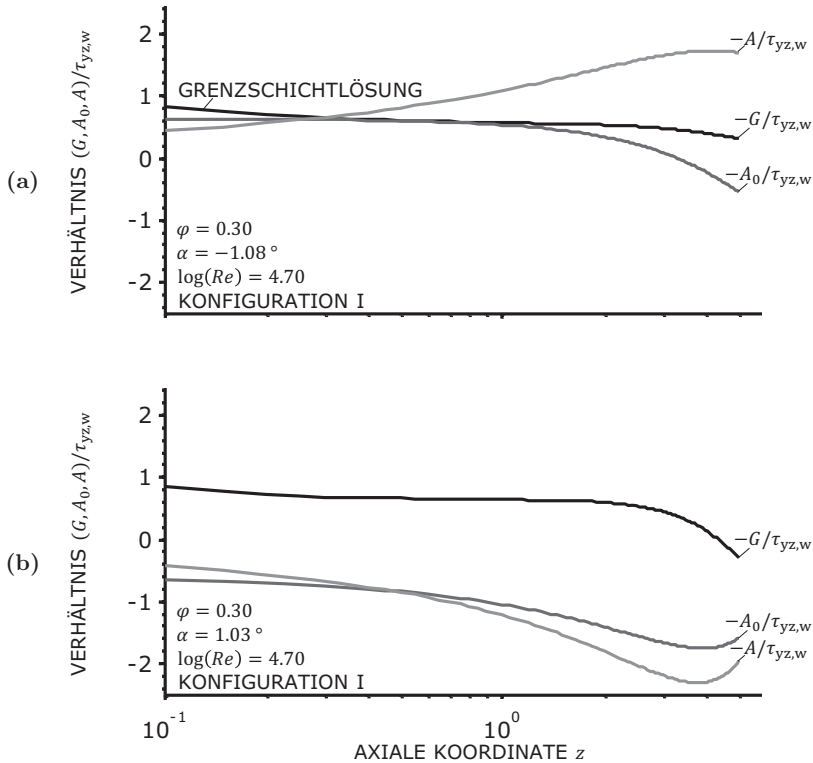


Abbildung 5.9 – Terme G, A_0 und A bezogen auf $\tau_{yz,w}$ vs. axiale Koordinate für (a) $\alpha = -1.08\,°$ und (b) $\alpha = 1.03\,°$ mit laminarer Zuströmung $\delta_0 \approx 0.1$.

Die axiale Grenzschicht ist in einer rotierenden Düse dicker als in einer nicht-rotierenden Düse, $\delta(A, G \neq 0) > \delta(A, G = 0)$ für $\alpha < 0$. Dieses Verhalten ist bereits aus den Untersuchungen von Stapp[6] und Cloos *et al.*[7] für einen rotierenden Kreiszylinder mit $\alpha = 0$ $(A_0, A = 0)$ bekannt. Für einen Diffusor mit $\alpha = 1.03\,°$ und $\log(Re) = 3.7$ bei kleiner Durchflusszahl $\varphi \ll 1$ wird die axiale Grenzschicht durch die Zentrifugalkraft ebenfalls dicker. Für diesen Fall dominiert weiterhin der Kopplungsterm G das Wachstum der axialen Grenzschicht und überwiegt die Wirkung von Term A. Die Wirkung von Term

[6] Stapp, *Experimentelle und analytische Untersuchung zur Drallgrenzschicht*, ([55], 2015)

[7] Cloos, Stapp und Pelz, „Swirl boundary layer and flow separation at the inlet of a rotating pipe“, ([11], 2017)

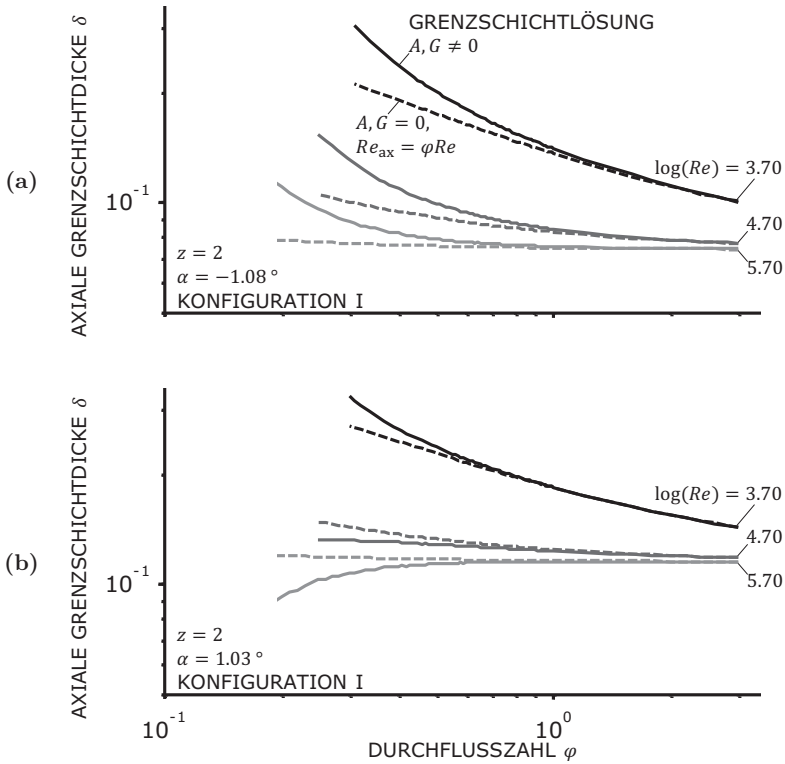


Abbildung 5.10 – Axiale Grenzschichtdicke vs. Durchflusszahl bei variierter Reynoldszahl für (a) $\alpha = -1.08\,°$ und (b) $\alpha = 1.03\,°$ mit laminarer Zuströmung $\delta_0 \approx 0.1$.

A_0 ist kleiner als die der Terme A, G. Dies ist damit begründet, dass für eine kleine Durchflusszahl die Zentrifugalkraft eine dominierende Wirkung hat und diese wird durch die Terme A, G repräsentiert. Für eine größere Reynoldszahl und weiterhin kleinere Durchflusszahl verliert Term G seinen dominierenden Einfluss. Die Wirkung von Term G und von A kompensieren sich gegenseitig. Für den Fall das Term A das Wachstum der axialen Grenzschicht dominiert, liegt eine dünnere axiale Grenzschicht in einem rotierenden als in einem nicht-rotierenden Diffusor vor, $\delta(A, G \neq 0) < \delta(A, G = 0)$ für $\alpha > 0$. Ursache hierfür ist die dämpfende Wirkung von Term A auf das Wachstum der axialen Grenzschicht. Unabhängig von dem Öffnungswinkel

und für $\varphi \gtrsim 1$ verschwindet der Einfluss der Zentrifugalkraft und die axiale Grenzschichtdicke in einem rotierenden Kreiskegel nähert sich asymptotisch der axialen Grenzschichtdicke in einem nicht-rotierenden Kreiskegel an, $\delta(A, G \neq 0) \approx \delta(A, G = 0)$ für $\varphi \to \infty$. Die Abhängigkeit der axialen Grenzschichtdicke von der Durchflusszahl variiert mit veränderter Reynolds- und Durchflusszahl für einen rotierenden Kreiskegel. Für einen nicht-rotierenden Kreiskegel hat die Durchflusszahl selbst keinen Einfluss auf die Abhängigkeit der axialen Grenzschichtdicke von der Durchflusszahl.
Resümee der Erkenntnisse aus Abschnitt 5.1.2: Die Entwicklung der axialen Grenzschicht unterliegt vielseitigen Wechselwirkungen in rotierenden und nicht-rotierenden Kreiskegeln und hängt von dem Öffnungswinkel ab. Die Zentrifugalkraft und der Öffnungswinkel beeinflussen das Wachstum der axialen Grenzschicht. In einem rotierenden Diffusor ($\alpha > 0$) kann eine dünnere axiale Grenzschicht vorliegen als in einer rotierenden Düse ($\alpha < 0$) bei gleicher Parameterkombination und betragsmäßig ähnlichen Öffnungswinkeln. Mit diesen Erkenntnissen ist die erste Frage aus Abschnitt 5.1 nach dem Einfluss des Öffnungswinkels auf die Entwicklung der Drallgrenzschicht und der axialen Grenzschicht vollständig beantwortet.

5.1.3 Umfangsgeschwindigkeitsprofil

Nach der Untersuchung der integralen Größen der Grenzschichtdicken wird in diesem Abschnitt eine detaillierte Betrachtung der Drallentwicklung vollzogen. Dafür wird die Verteilung der Umfangsgeschwindigkeit innerhalb der Drallgrenzschichtdicke basierend auf experimentellen Daten analysiert. Ziel dieser Untersuchung ist, die Wahl der Ansatzfunktion (3.19) mit $k = 2$ für $\alpha \neq 0$ zu rechtfertigen. Die Ansatzfunktion (3.19) entspricht dem Umfangsgeschwindigkeitsprofil innerhalb der Drallgrenzschicht in einem rotierenden Kreiszylinder ($\alpha = 0$)[8,9].
Die Umfangsgeschwindigkeitsverteilung wird über der skalierten Wandkoordinate für die jeweilige Konfiguration y/δ_{S02} bzw. y/δ_{S07} in Abbildung 5.11 und 5.12 aufgetragen, um die Selbstähnlichkeit zu belegen. Zusätzlich wird als Referenz die Ansatzfunktion (3.19) mit $k = 2$ als gestrichelte Linie eingezeichnet. Die Ansatzfunktion (3.19) ist auf die Drallgrenzschichtdicke δ_{S} skaliert, die mit Gleichung (5.1) bzw. (5.2) gebildet wird, $\delta_{\mathrm{S}} \approx 1.16\,\delta_{\mathrm{S02}} \approx 1.36\,\delta_{\mathrm{S07}}$. Folglich wird für Konfiguration II ein kleinerer Ausschnitt aus der Drallgrenzschicht als für Konfiguration I betrachtet.

[8] Stapp, *Experimentelle und analytische Untersuchung zur Drallgrenzschicht*, ([55], 2015)

[9] Cloos, Stapp und Pelz, „Swirl boundary layer and flow separation at the inlet of a rotating pipe“, ([11], 2017)

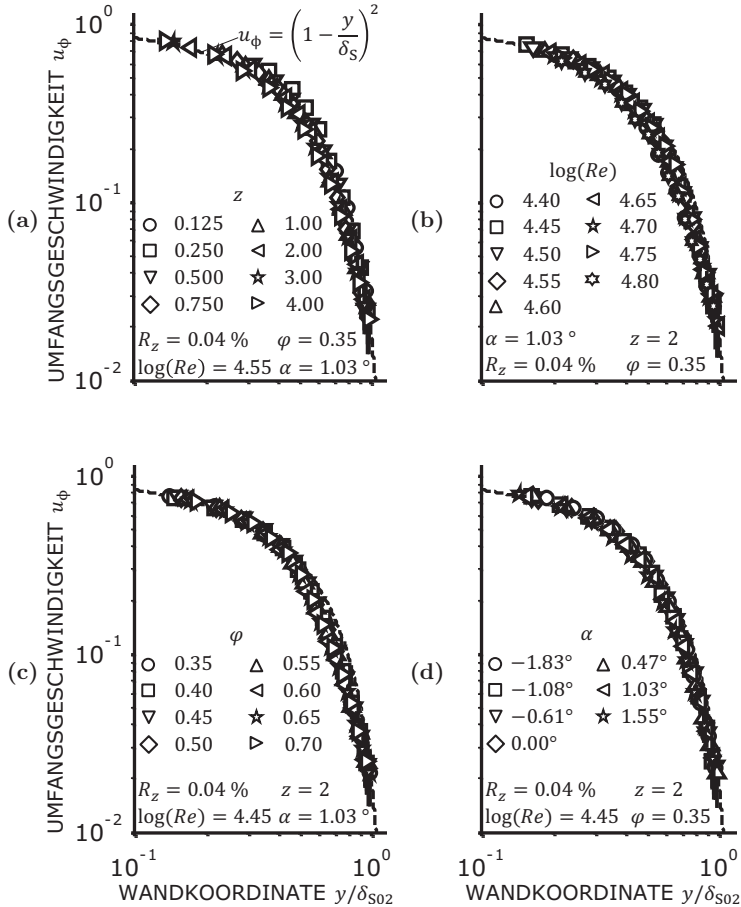


Abbildung 5.11 – Gemessene Umfangsgeschwindigkeit vs. skalierte Wandkoordinate für variierte (a) axiale Koordinate, (b) Reynoldszahl, (c) Durchflusszahl und (d) Öffnungswinkel bei Konfiguration I mit $\delta_0 \approx 0.1$ laminarer Zuströmung. Daten aus [8].

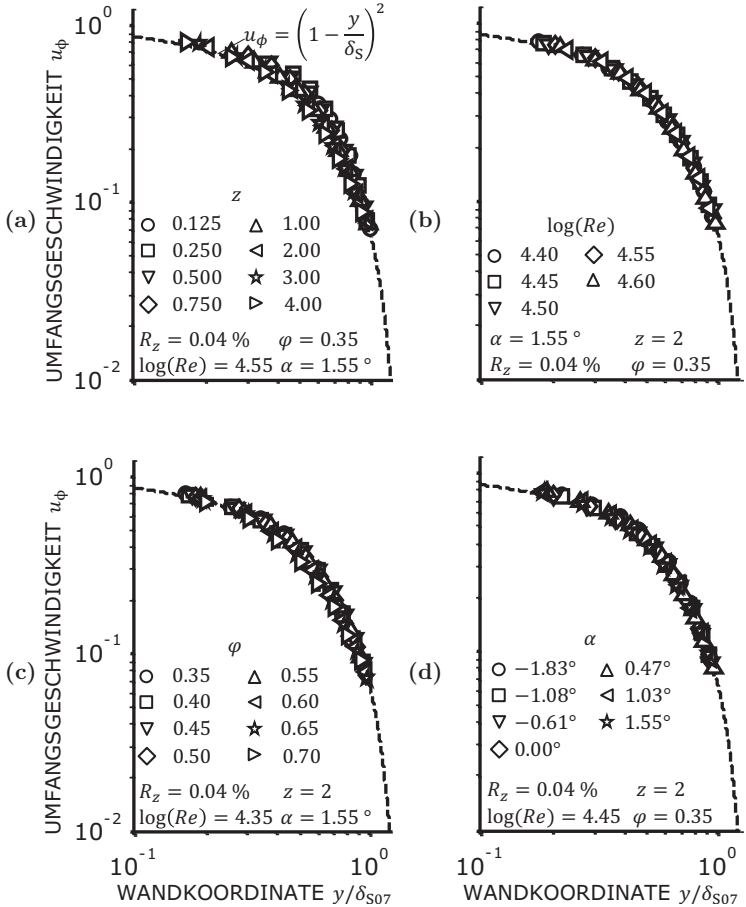


Abbildung 5.12 – Gemessene Umfangsgeschwindigkeit vs. skalierte Wandkoordinate für variierte (a) axiale Koordinate, (b) Reynoldszahl, (c) Durchflusszahl und (d) Öffnungswinkel bei Konfiguration II mit $\delta_0 = 1$ turbulenter Zuströmung. Daten aus [9, 10].

Das gemessene Umfangsgeschwindigkeitsprofil ist selbstähnlich innerhalb der Drallgrenzschicht und folgt der Ansatzfunktion (3.19) mit $k = 2$. Das selbstähnliche Umfangsgeschwindigkeitsprofil ist unabhängig von der axialen Koordinate, Reynoldszahl, Durchflusszahl und von dem Öffnungswinkel. Einzig nahe der Singularität bei $z \to 0$ liegen kleine Abweichungen vor. Die Ansatzfunktion (3.19) mit $k = 2$ ist gültig für eine hydraulisch glatte Wand und eine anliegende Strömung für Regime I der Drallgrenzschicht und beiden Konfigurationen, d. h. eine dünne laminare und eine voll ausgebildete turbulente Zuströmung. Damit ist der erste Teil der zweiten Frage zu Beginn von Abschnitt 5.1, welcher Form das Umfangsgeschwindigkeitsprofil folgt, beantwortet. Der Einfluss des Öffnungswinkels auf die Verteilung der Turbulenzintensität der Umfangsgeschwindigkeit wird im nächsten Abschnitt analysiert.

5.1.4 Turbulenzintensität der Umfangsgeschwindigkeit

Einen weiteren Detaillierungsgrad der Drallentwicklung liefert die Analyse der Turbulenzintensität der Umfangsgeschwindigkeit. Hierzu wird die mittlere Schwankungsgröße der Umfangsgeschwindigkeit aus den experimentellen Daten betrachtet. Mit dieser Größe kann eine Schlussfolgerung über die Art der Strömung und die Ausbreitung der Turbulenz abgeleitet werden. Zusätzlich können mit den mittleren Schwankungsgrößen die Reynoldsschen Schubspannungen modelliert werden.
Äquivalent zu der Untersuchung der Umfangsgeschwindigkeit wird deren Turbulenzintensität ebenfalls gegenüber der skalierten Wandkoordinate aufgetragen. Die in Abbildung 5.13 und 5.14 gezeigten experimentellen Ergebnisse stimmen mit den Parameterkombinationen aus Abbildung 5.11 und 5.12 überein.
Für Konfiguration I liegt eine selbstähnliche Verteilung der Turbulenzintensität der Umfangsgeschwindigkeit innerhalb der Drallgrenzschicht vor. Diese selbstähnliche Verteilung ist auf Abbildung 5.13d zu erkennen. Im wandnahen Bereich $y/\delta_{\mathrm{S02}} < 0.5$ ist die Turbulenzintensität nahezu unabhängig von der skalierten Wandkoordinate. Fernab der Wand steigt die Turbulenzintensität an, erreicht ein lokales Maximum bei $y/\delta_{\mathrm{S02}} \approx 0.7$ unabhängig von der Parameterkombination und sinkt im wandfernen Bereich $y/\delta_{\mathrm{S02}} > 0.7$ wieder ab. Der wandferne Bereich ist für die hier gezeigten Parameterkombinationen immer selbstähnlich. Für eine große Reynolds- oder Durchflusszahl oder am Eintritt eines rotierenden Kreiskegels $z < 2$ weicht die Verteilung der Turbulenzintensität von der selbstähnlichen Form ab. Nahe dem Eintritt

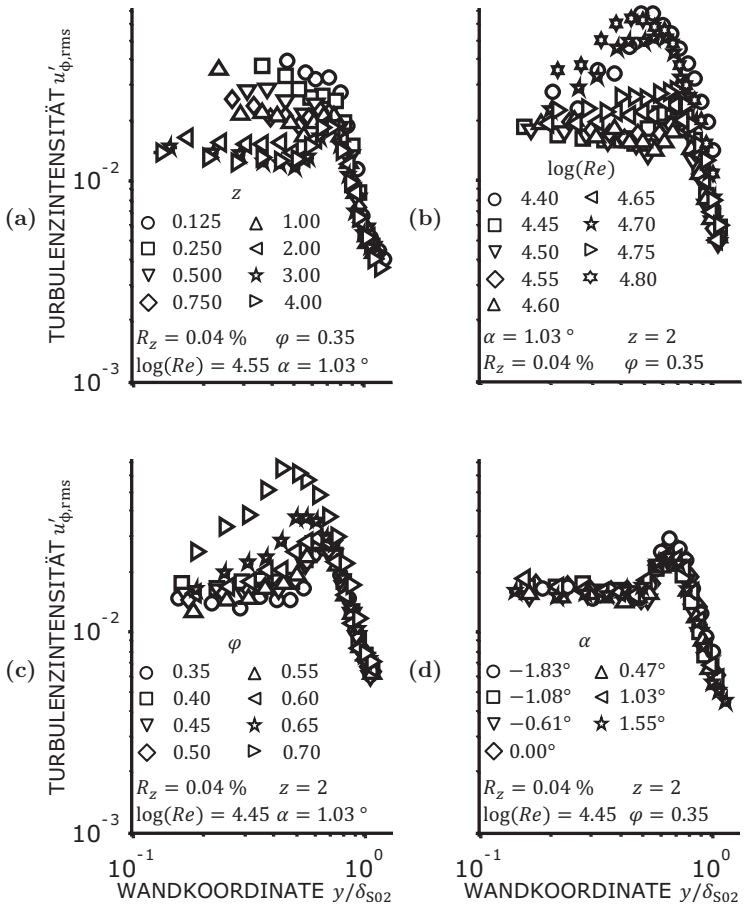


Abbildung 5.13 – Gemessene Turbulenzintensität der Umfangsgeschwindigkeit vs. skalierte Wandkoordinate für variierte (a) axiale Koordinate, (b) Reynoldszahl, (c) Durchflusszahl und (d) Öffnungswinkel bei Konfiguration I mit $\delta_0 \approx 0.1$ laminarer Zuströmung.

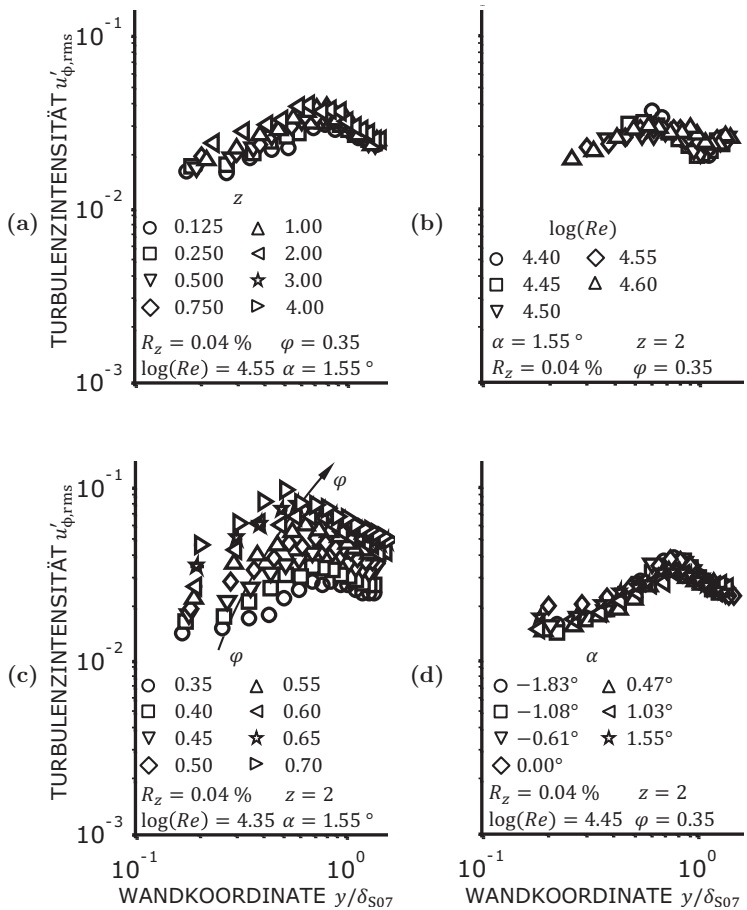


Abbildung 5.14 – Gemessene Turbulenzintensität der Umfangsgeschwindigkeit vs. skalierte Wandkoordinate für variierte (a) axiale Koordinate, (b) Reynoldszahl, (c) Durchflusszahl und (d) Öffnungswinkel bei Konfiguration II mit $\delta_0 = 1$ turbulenter Zuströmung. Daten aus [9, 10].

für $z < 2$ ist die Turbulenzintensität im wandnahen Bereich erhöht, siehe Abbildung 5.13a. Mit ansteigender Reynoldszahl steigt die Turbulenzintensität einzig im wandnahen Bereich an und es deutet sich eine Transition aufgrund der erhöhten Turbulenzintensität an, siehe Abbildung 5.13b. Bei der dargestellten Variation der Durchflusszahl (Abbildung 5.13c) ist die Turbulenzintensität selbstähnlich über der kompletten skalierten Wandkoordinate für $\varphi \leq 0.60$. Für $\varphi > 0.60$ deutet sich ebenfalls eine Transition an. Die selbstähnliche Verteilung der Turbulenzintensität ist unabhängig von dem Öffnungswinkel, siehe Abbildung 5.13d und liegt in dem Bereich $0.3 \ldots 3\,\%$. Für Konfiguration II ist die Turbulenzintensität höher als für Konfiguration I und liegt in dem Bereich $1 \ldots 4\,\%$ für die selbstähnliche Verteilung, siehe Abbildung 5.14. Bei der Variation der axialen Koordinate, Reynoldszahl und Öffnungswinkel ist die Turbulenzintensität innerhalb der Drallgrenzschicht selbstähnlich, folgt jedoch einer anderen Verteilung als bei Konfiguration I. Mit ansteigender Durchflusszahl ändert sich die Verteilung der Turbulenzintensität entlang der skalierten Wandkoordinate und die Turbulenzintensität steigt signifikant an, siehe Abbildung 5.14c.
Festzuhalten ist, dass die Variation des Öffnungswinkels keinen Einfluss auf die selbstähnliche Form der Turbulenzintensitätsverteilung der Umfangsgeschwindigkeit hat. Dies gilt für beide Konfigurationen. Somit ist die zweite Frage aus Abschnitt 5.1 vollständig beantwortet. Die bei der Diskussion angedeutete Transition wird im nächsten Abschnitt genauer untersucht und dient zur Beantwortung der letzten Frage aus Abschnitt 5.1.

5.1.5 Turbulentes Regime II der Drallgrenzschicht

Der Gültigkeitsbereich der Validierung aus Abschnitt 5.1.1 wird durch die eben angedeutete Transition von Regime I zu Regime II der turbulenten Drallgrenzschicht eingegrenzt. Weitere Grenzen stellen der Umschlag zur einer hydraulisch rauen Wand (siehe Abschnitt 5.2) und die Strömungsablösung (siehe Abschnitt 5.3) dar. Der vorliegende Abschnitt untersucht einzig, ob auch in einem rotierenden Kreiskegel Regime II der turbulenten Drallgrenzschicht auftritt. Bei welcher Parameterkombination und wo im rotierenden Kreiskegel diese Transition passiert, ist nicht Gegenstand dieser Arbeit. Die Parameterkombination für Regime II in einem rotierenden Kreiszylinder ist mit einer Stabilitätskarte gegeben, siehe Cloos *et al.*[10,11].

[10] Cloos, Zimmermann und Pelz, „A second turbulent regime when a fully developed axial turbulent flow enters a rotating pipe“, ([12], 2016)

[11] Cloos, Zimmermann und Pelz, „Two turbulent flow regimes at the inlet of a rotating pipe“, ([13], 2017)

In Abbildung 5.15 ist die Drallgrenzschichtdicke für einen Diffusor mit $\alpha = 1.03\,^\circ$ gegenüber der Durchflusszahl für zwei Reynoldszahlen an der axialen Schnittebene $z = 2$ aufgetragen. Wie in einem rotierenden Kreiszylinder ($\alpha = 0$) tritt auch bei einem rotierenden Kreiskegel ($\alpha \neq 0$) Regime II der turbulenten Drallgrenzschicht (schwarze Marker) auf. Mit der Transition zu Regime II wird die Drallgrenzschicht deutlich dicker und die Abhängigkeit von der Durchflusszahl ändert sich. Die Zunahme der Drallgrenzschichtdicke bei Regime II ist so stark, dass diese bei $\log(Re) = 4.85$ und $\varphi = 0.40$ fast genauso dick ist wie für Regime I bei $\log(Re) = 4.55$. Entgegen der Erwartung aus der Untersuchung von Regime I, nimmt die Drallgrenzschichtdicke für Regime II und ansteigender Reynoldszahl zu.
Mit der Transition von Regime I zu Regime II transformiert sich das Umfangsgeschwindigkeitsprofil, siehe Abbildung 5.16a. Diese Transformation wird als Indikator verwendet, um das Auftreten von Regime II zu ermitteln. Diese Methode wird in den Arbeiten von Zimmermann[12] und Cloos *et al.*[13,14] entwickelt und für einen Kreiszylinder angewendet. Für einen Kreiszylinder folgt das Umfangsgeschwindigkeitsprofil (2.4) für Regime II. In einem Kreiskegel liegt eine Abweichung zu diesem Profil bei Regime II vor. Mit dem Umschlag des Umfangsgeschwindigkeitsprofil von Regime I zu Regime II steigt die Turbulenzintensität der Umfangsgeschwindigkeit stark an und nimmt eine neue selbstähnliche Verteilung an, siehe Abbildung 5.16b.
Festhaltend tritt Regime II der turbulenten Drallgrenzschicht ebenfalls in einem rotierenden Kreiskegel auf und die dritte Frage aus Abschnitt 5.1 ist beantwortet. Ob das Umfangsgeschwindigkeitsprofil, die Eintrittslänge z_t oder die Grenzreynoldszahl $Re = Re(\varphi)$ für Regime II Funktionen von dem Öffnungswinkel sind, gilt es in weiteren Forschungsarbeiten zu klären. Das Verhalten der Drallgrenzschicht für $\log(Re) = 5 \ldots 6$, also vermutlich Regime II, ist besonders bei der Auslegung von Gasturbinen von Interesse, da dies dem Reynoldszahlbereich der Sekundärluftverteilung entspricht. Dieser Reynoldszahlbereich übersteigt jedoch die technische Grenze des verwendeten Prüfstandes.

[12] Zimmermann, „Instabilitäten im Eintrittsbereich eines rotierenden Rohres“, ([69], 2015)

[13] Cloos, Zimmermann und Pelz, „A second turbulent regime when a fully developed axial turbulent flow enters a rotating pipe“, ([12], 2016)

[14] Cloos, Zimmermann und Pelz, „Two turbulent flow regimes at the inlet of a rotating pipe“, ([13], 2017)

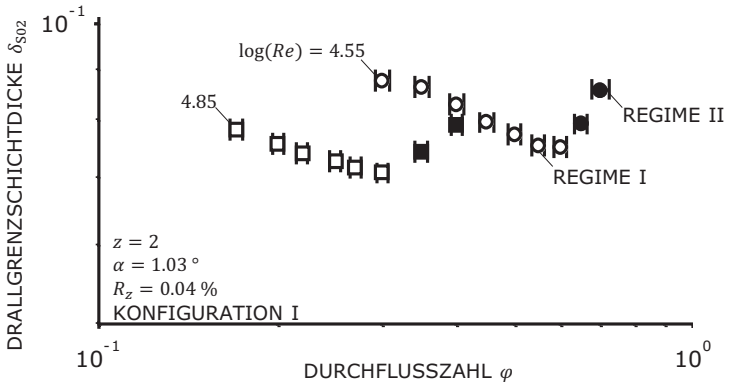


Abbildung 5.15 – Auftreten von Regime II der gemessenen Drallgrenzschichtdicke vs. Durchflusszahl mit $\delta_0 \approx 0.1$ und variierter Reynoldszahl.

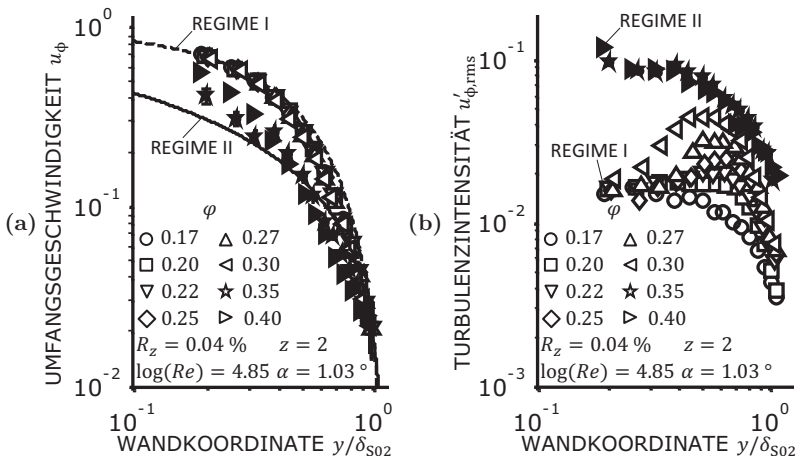


Abbildung 5.16 – Auftreten von Regime II bei der gemessenen (a) Umfangsgeschwindigkeit und (b) Turbulenzintensität vs. skalierte Wandkoordinate für variierte Durchflusszahl bei Konfiguration I mit $\delta_0 \approx 0.1$. Für Regime I folgt $u_\phi = (1 - y/\delta_\mathrm{S})^2$ und für Regime II $u_\phi = -0.20 \log(y/\delta_\mathrm{S} + 0.007) + 0.06$.

5.2 Hydraulisch raue Wand

Bei den Untersuchungen mit einem rotierenden Kreiszylinder ($\alpha = 0$) wird der Einfluss der Oberflächenrauheit auf die Entwicklung der Drallgrenzschicht quantifiziert.[15,16] Der Einfluss der Rauheit auf die Drallgrenzschicht ist äquivalent zu den Ergebnissen von Nikuradse[17] für eine axiale Strömung durch einen nicht-rotierenden Kreiszylinder. Im vorliegenden Fall wird der Einfluss des Öffnungswinkels auf die Ausbildung der Drallgrenzschicht entlang einer hydraulisch rauen Wand erforscht, um u. a. den Gültigkeitsbereich der Validierung des Modells weiter zu definieren. Im Fokus stehen dabei folgende Fragen:

1. Beeinflusst der Öffnungswinkel den Umschlag von hydraulisch glatter zu hydraulisch rauer Wand?
2. Welchen Gesetzmäßigkeiten folgt die Drallgrenzschicht entlang einer hydraulisch rauen Wand in rotierenden Kreiskegeln?
3. Welcher Verteilung folgt die Umfangsgeschwindigkeit und deren Turbulenzintensität in rotierenden Kreiskegeln?

Die drei Fragen werden durch rein experimentelle Untersuchungen in den folgenden Abschnitten beantwortet. Dazu wird eine Düse mit $\alpha = -1.08\,^\circ$ und ein Diffusor mit $\alpha = 1.03\,^\circ$ sowohl mit einer blanken Oberfläche mit einer Rauheit von $R_z = 0.04\,\%$ als auch vier beschichtete Oberflächen mit den Rauheiten $R_z = 0.75\,\%$, $1.24\,\%$, $1.80\,\%$ und $4.90\,\%$ verwendet, vgl. Tabelle 4.4. Ferner wird einzig Konfiguration I verwendet, da die Untersuchungen von Stapp[18] offenbaren, dass die Zuströmung einen vernachlässigbaren Einfluss vor allem auf die Ergebnisse hinsichtlich der ersten beiden Fragen und das Umfangsgeschwindigkeitsprofil hat.

5.2.1 Drallgrenzschichtdicke

In Abbildung 5.17 ist die Drallgrenzschicht gegenüber der Reynoldszahl[19] für drei Öffnungswinkel an der axialen Schnittebene $z = 2$ mit $\varphi = 0.35$ und

[15] Stapp, *Experimentelle und analytische Untersuchung zur Drallgrenzschicht*, ([55], 2015)

[16] Cloos, Stapp und Pelz, „Swirl boundary layer and flow separation at the inlet of a rotating pipe“, ([11], 2017)

[17] Nikuradse, „Strömungsgesetze in rauhen Rohren“, ([36], 1933)

[18] Stapp, *Experimentelle und analytische Untersuchung zur Drallgrenzschicht*, ([55], 2015)

[19] Die Reynoldszahl $Re := 2\tilde{\Omega}\tilde{R}_{\mathrm{eff},0}/\tilde{\nu}$ wird in diesem Abschnitt mit dem effektiven Radius $\tilde{R}_{\mathrm{eff},0}$ an der axialen Schnittebene $z = 0$ berechnet, siehe Tabelle 4.4.

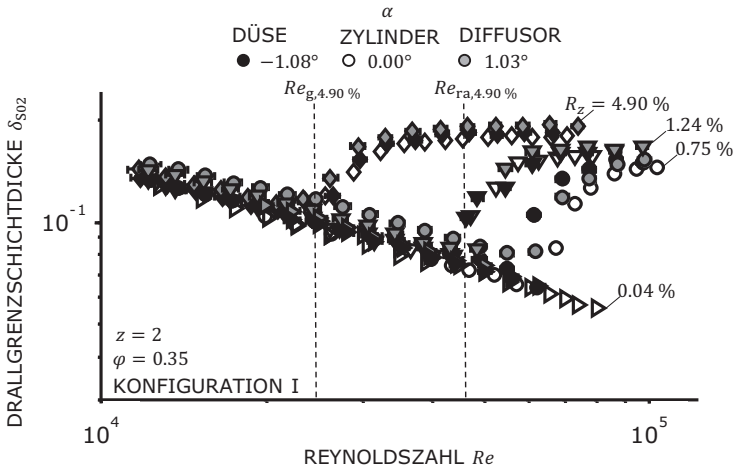


Abbildung 5.17 – Einfluss der Rauheit auf die gemessene Drallgrenzschichtdicke vs. Reynoldszahl bei laminarer Zuströmung $\delta_0 \approx 0.1$ und variiertem Öffnungswinkel. Daten für $\alpha = 0.00\,°$ aus [11, 55] und $\alpha \neq 0$ aus [8].

vier unterschiedlichen Rauheiten aufgetragen. Für die Rauheit $R_z = 0.04\,\%$ hängt die Drallgrenzschichtdicke in dem gezeigten Parameterraum von der Reynoldszahl ab $\delta = \delta(Re)$ und wird nicht unabhängig von dieser. Dies ist ein Indikator für eine hydraulisch glatte Wand. Für diesen Fall gilt $\tau_{y\phi,w} = \tau_{y\phi,w}(Re)$. Für die drei Rauheiten $R_z = 0.75\,\%$, $1.24\,\%$, und $4.90\,\%$ nimmt die Dicke der Drallgrenzschicht mit ansteigender Reynoldszahl zuerst ab bis zu einer Grenzreynoldszahl $Re < Re_g$ für den hydraulisch glatten Bereich, $\delta = \delta(Re)$ mit $\tau_{y\phi,w} = \tau_{y\phi,w}(Re)$. Mit Überschreiten der Grenzreynoldszahl $Re > Re_g$ wird die Drallgrenzschicht zuerst stark dicker bis sie für $Re > Re_{ra}$ unabhängig von der Reynoldszahl wird $\delta \neq \delta(Re)$ und in einem asymptotischen Verlauf übergeht. Für diesen Bereich hängt die Drallgrenzschichtdicke statt von der Reynoldszahl von der Rauheit ab, $\delta = \delta(R_z)$ und $\tau_{y\phi,w} = \tau_{y\phi,w}(R_z)$.

Der Übergang zur hydraulisch rauen Wand ist mit der Grenzreynoldszahl Re_{ra} definiert. Beide Grenzreynoldszahlen sind exemplarisch für die Rauheit $R_z = 4.90\,\%$ in das Diagramm eingetragen und sind unabhängig von den untersuchten Öffnungswinkeln wie auf Abbildung 5.17 zu erkennen ist. Dies gilt auch für die weiteren Rauheiten. Einzig bei der Rauheit $R_z = 0.75\,\%$ sind leichte Abweichungen für Re_g zu erkennen.

Die Drallgrenzschicht wird dicker mit ansteigender Rauheit an der axia-

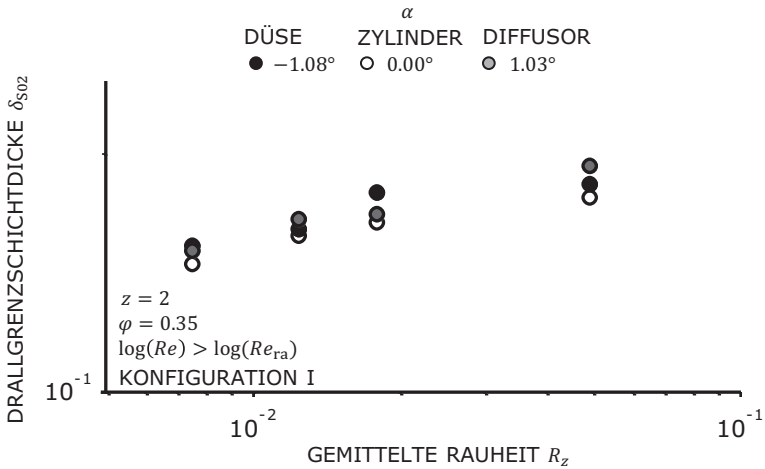


Abbildung 5.18 – Gemessene Drallgrenzschichtdicke vs. Rauheit bei laminarer Zuströmung $\delta_0 \approx 0.1$ und variiertem Öffnungswinkel. Daten für $\alpha = 0.00\,°$ aus [55].

len Schnittebene $z = 2$ bei $\varphi = 0.35$. Dies ist sowohl Abbildung 5.17 als auch in einer kondensierten Form Abbildung 5.18 zu entnehmen. In Abbildung 5.18 sind die Asymptoten der Drallgrenzschichtdicke für die hydraulisch raue Wand eingetragen. Ein klarer Einfluss des Öffnungswinkels auf die Drallgrenzschichtdicke abhängig von der Rauheit ist nicht zu beobachten. In einem rotierenden Kreiskegel ($\alpha \neq 0$) ist die Drallgrenzschicht dicker als in einem rotierenden Kreiszylinder ($\alpha = 0$) entlang einer hydraulisch rauen Wand, $\delta_S(\alpha \neq 0) > \delta(\alpha = 0)$ für $Re > Re_{ra}$.
In Abbildung 5.19 ist die Drallgrenzschichtdicke für eine hydraulisch raue Wand gegenüber der axialen Koordinate bei konstanter Reynolds- und Durchflusszahl für die drei Öffnungswinkel und zwei Rauheiten aufgetragen. Aus dieser Abbildung werden drei Schlussfolgerungen abgeleitet: (i) Die Drallgrenzschicht wächst entlang der axialen Koordinate für eine hydraulisch raue Wand an. (ii) Die Abhängigkeit der Drallgrenzschichtdicke von der axialen Koordinate ist eine Funktion von der Rauheit. Ursache hierfür könnte eine inhomogene Verteilung bei der Beschichtung der Rauheit entlang der axialen Koordinate sein. (iii) Eine Variation des Öffnungswinkels hat einen vernachlässigbaren Einfluss auf die Drallgrenzschichtdicke bei konstanter Durchflusszahl.

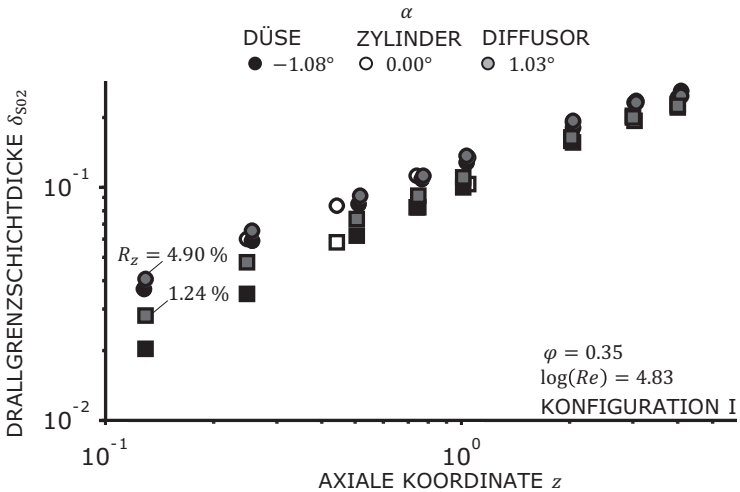


Abbildung 5.19 – Einfluss der Rauheit auf die gemessene Drallgrenzschichtdicke vs. axiale Koordinate bei laminarer Zuströmung $\delta_0 \approx 0.1$ und variiertem Öffnungswinkel. Daten für $\alpha = 0.00\,^\circ$ aus [55].

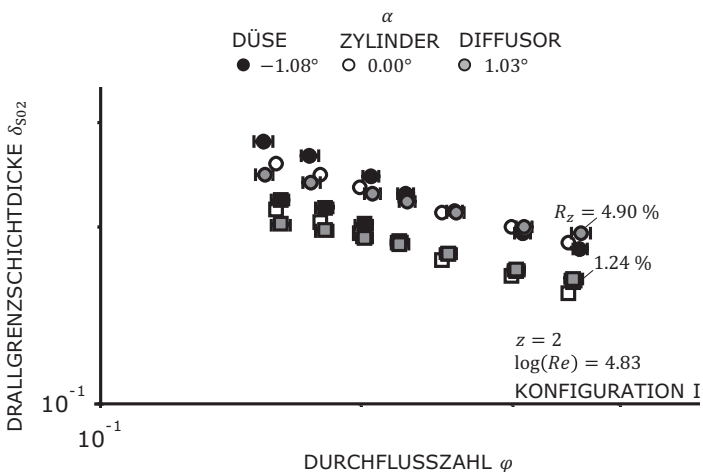


Abbildung 5.20 – Einfluss der Rauheit auf die gemessene Drallgrenzschichtdicke vs. Durchflusszahl bei laminarer Zuströmung $\delta_0 \approx 0.1$ und variiertem Öffnungswinkel. Daten für $\alpha = 0.00\,^\circ$ aus [55].

Der Einfluss der Durchflusszahl auf die Drallgrenzschichtdicke an einer hydraulisch rauen Wand bei variiertem Öffnungswinkel und zwei Rauheiten bei konstanter axialer Schnittebene und Reynoldszahl wird anhand Abbildung 5.20 diskutiert. Mit ansteigender Durchflusszahl nimmt die Drallgrenzschichtdicke ab. Ferner ist ein Einfluss des Öffnungswinkels erkennbar. Der Öffnungswinkel ändert die Abhängigkeit von der Durchflusszahl äquivalent zu Abbildung 5.5. Für eine Durchflusszahl $\varphi \leq 0.20$ ist die Drallgrenzschicht für $\alpha = 1.03\,^\circ$ dünner als für $\alpha \leq 0$. Für $\varphi > 0.30$ ist dies tendenziell umgekehrt.
Hinsichtlich Frage 1 und 2 aus Abschnitt 5.2 wird abschließend festgehalten, dass die Grenzreynoldszahlen unabhängig von dem Öffnungswinkel sind. Der Öffnungswinkel hat einen Einfluss auf die Abhängigkeit der Drallgrenzschichtdicke von der Durchflusszahl bei einer hydraulisch rauen Wand. Die Rauheit ändert die Abhängigkeit der axialen Grenzschichtdicke von der axialen Koordinate.

5.2.2 Umfangsgeschwindigkeitsprofil

Der Umschlag zu einer hydraulisch rauen Wand beeinflusst ebenfalls das Umfangsgeschwindigkeitsprofil, siehe Abbildung 5.21. Hier ist wieder die Umfangsgeschwindigkeit über der skalierten Wandkoordinate aufgetragen für eine variierte axiale Koordinate, Reynoldszahl, Durchflusszahl und Rauheit mit zwei Öffnungswinkeln. Für alle Parameterkombinationen in Abbildung 5.21 liegt eine hydraulisch raue Wand vor, d. h. $Re > Re_{\mathrm{ra}}$. Einzig für die Reynoldszahlvariation ist die Transition von hydraulisch glatter zu rauer Wand abgebildet. Die gestrichelte Linie folgt der Ansatzfunktion (3.19) mit $k = 2$ und die durchgezogene Linie mit $k = 7$. Letzteres entspricht dem Ergebnis von Stapp[20] für die hydraulisch raue Wand in einem rotierenden Kreiszylinder.
Die meisten Messdaten folgen dem Verlauf der Ansatzfunktion (3.19) mit $k = 7$. Nahe des Eintritts und nahe der Wand weicht die gemessene Verteilung leicht von der durchgezogenen Linie ab, siehe Abbildung 5.21a. Gleiches gilt auch für den Diffusor mit $\alpha = 1.03\,^\circ$ bei Abbildung 5.21d. Bei der Reynoldszahlvariation (Abbildung 5.21b) folgt das Umfangsgeschwindigkeitsprofil dem Verlauf der hydraulisch glatten Wand ($k = 2$) trotz vorliegender Rauheit für $Re < Re_{\mathrm{g}}$. Mit ansteigender Reynoldszahl tritt eine Transition des Profils auf $Re > Re_{\mathrm{g}}$ bis die Umfangsgeschwindigkeit eine neue selbstähnliche Form ($k = 7$) für $Re > Re_{\mathrm{ra}}$ annimmt. Somit ist der erste Teil der dritten Frage, welcher Form die Verteilung der Umfangsgeschwindigkeit

[20] Stapp, *Experimentelle und analytische Untersuchung zur Drallgrenzschicht*, ([55], 2015)

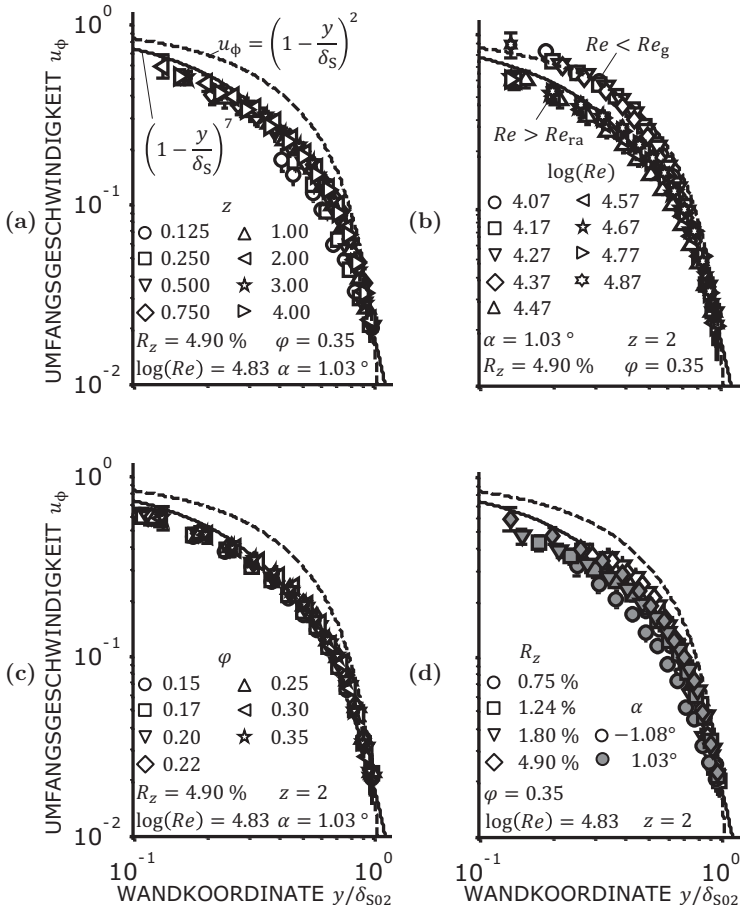


Abbildung 5.21 – Einfluss der Rauheit auf die gemessene Umfangsgeschwindigkeit vs. skalierte Wandkoordinate für variierte (a) axiale Koordinate, (b) Reynoldszahl, (c) Durchflusszahl und (d) Rauheit mit zwei Öffnungswinkeln bei Konfiguration I mit $\delta_0 \approx 0.1$ laminarer Zuströmung. Daten aus [8].

folgt, aus Abschnitt 5.2 beantwortet. Der folgende Abschnitt beantwortet den zweiten Teil dieser Frage hinsichtlich der Verteilung der Turbulenzintensität der Umfangsgeschwindigkeit.

5.2.3 Turbulenzintensität der Umfangsgeschwindigkeit

Die Verteilung der Turbulenzintensität entlang der skalierten Wandkoordinate ist in Abbildung 5.22 dargestellt. Dabei werden die gleichen Parameterkombinationen wie bei Abbildung 5.21 für das Umfangsgeschwindigkeitsprofil verwendet.
Für eine hydraulisch raue Wand liegt die Turbulenzintensität der Umfangsgeschwindigkeit in dem Bereich $1.5 \ldots 16\,\%$ und ist damit deutlich höher als für eine hydraulisch glatte Wand und eine blanke Oberfläche, vgl. Abbildung 5.13. Selbst für eine hydraulisch glatte Wand bei einer beschichteten Oberfläche ist die Turbulenzintensität höher als bei einer blanken Oberfläche. Die vorliegende Rauheit facht auch für den hydraulisch glatten Fall die Turbulenzintensität an. Der Übergang von hydraulisch glatter zu hydraulisch rauer Wand lässt die Turbulenzintensität zusätzlich ansteigen und ändert den Verlauf entlang der skalierten Wandkoordinate wie auf Abbildung 5.22b zu erkennen ist.
Im wandfernen Bereich ist die Verteilung der Turbulenzintensität für die hydraulisch raue Wand selbstähnlich. Einzig nahe der Wand steigt die Turbulenzintensität mit sinkendem Abstand zum Eintritt $z \to 0$ oder ansteigender Durchflusszahl an, siehe Abbildung 5.22a und 5.22c. Weiterhin ist die Turbulenzintensität nahe der Wand bei einem positiven Öffnungswinkel etwas kleiner als bei einem negativen Öffnungswinkel, siehe Abbildung 5.22d. Abschließend ist die dritte Frage aus Abschnitt 5.2, welchen Einfluss der Öffnungswinkel auf die Turbulenzintensität entlang einer hydraulisch rauen Wand hat, beantwortet.

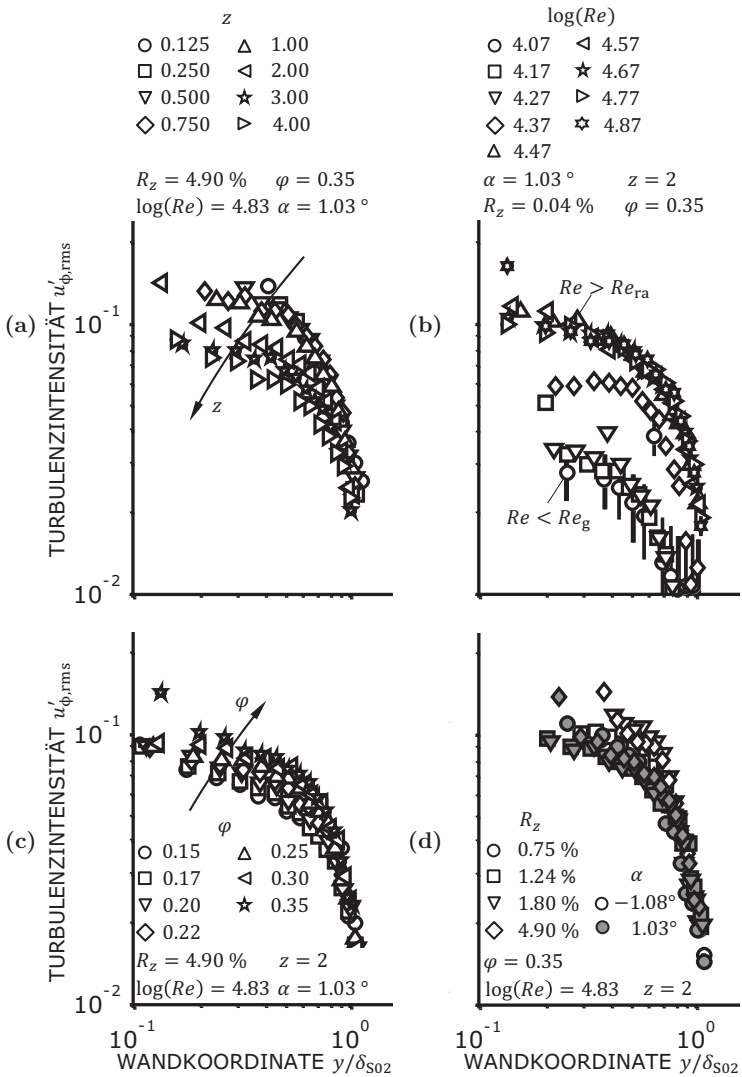


Abbildung 5.22 – Einfluss der Rauheit auf die gemessene Turbulenzintensität der Umfangsgeschwindigkeit vs. skalierte Wandkoordinate für variierte (a) axiale Koordinate, (b) Reynoldszahl, (c) Durchflusszahl und (d) Rauheit mit zwei Öffnungswinkeln bei Konfiguration I mit $\delta_0 \approx 0.1$ laminarer Zuströmung.

5.3 Grenzschichtablösung

Strömungsablösung kann durch kinematische und dynamische Effekte verursacht werden. Für ersteres ist beispielhaft die Kinematik des Wirbelsystem in einer Turbomaschine zu nennen, siehe Pelz *et al.*[21,22]. Als dynamische Ursache ist der Druckgradient in axialer Richtung zu nennen. In der Literatur finden sich viele Beispiele für eine Strömungsablösung verursacht durch einen positiven Druckgradient in axialer Richtung. Anschaulich ist ein angeströmter Tragflügel mit Strömungsabriss auf der Saugseite, siehe Schlichting[23].
In einem durchströmten, nicht-rotierenden Kreiskegel kann es ebenfalls zu einer Strömungsablösung kommen. Bei einer Düse ($\alpha < 0$) kann am Eintritt aufgrund der Krümmung der Stromlinien infolge der radialen Ablenkung ein positiver Wanddruckgradient in axialer Richtung vorliegen.[24] Bei einem Diffusor ($\alpha > 0$) kann die Strömung ebenfalls am Eintritt ablösen. Bei einem ideal-schlechten Diffusor ist dies durch die Trägheit der Strömung begründet. Die Strömung kann der Kontur nicht mehr folgen. Zusätzlich kann bei einem nicht ideal-schlechten Diffusor ein positiver Wanddruckgradient in axialer Richtung vorliegen und Strömungsablösung verursachen. Eine Strömungsablösung in den nicht-rotierenden Kreiskegeln der vorliegenden Arbeit ist nicht zu erwarten, vgl. Abbildung 2.4 und Tabelle 4.3. In einem durchströmten rotierenden Kreiskegel wird hingegen Strömungsablösung erwartet. Dies gilt auch für die hier verwendeten kleinen Öffnungswinkel, da die Zentrifugalkraft bereits in einem rotierenden Kreiszylinder ($\alpha = 0$) Strömungsablösung verursacht.
Bei welcher Parameterkombination und an welcher axialen Schnittebene in einem rotierenden Kreiskegel die Strömungsablösung beginnt, wird anhand der Stratford Kriterien (3.24) und (3.25) und experimentell analysiert. Eine beginnende Strömungsablösung liegt vor, wenn die yz-Wandschubspannungskomponente verschwindet, $\varphi_{\mathrm{c,in}} = \varphi(\tau_{\mathrm{yz,w}} = 0)$. Die Ausbreitung der Ablösung wird ebenfalls anhand der Stratford Kriterien beschrieben. Das Kriterium (3.24) für eine laminare Strömung wird mit experimentellen Daten validiert. Dafür wird das Umfangsgeschwindigkeitsprofil analysiert, um die beginnende Ablösung anhand experimenteller Daten zu bestimmen. Eine ausgebildete Ablösung für $\varphi < \varphi_{\mathrm{c}}$ liegt vor, wenn

[21] Pelz und Taubert, „Vortex induced transient stall“, ([41], 2017)

[22] Pelz, Taubert und Cloos, „Vortex structure and kinematics of encased axial turbomachines“, ([42], 2017)

[23] Schlichting, *Grenzschicht-Theorie*, ([50], 1965)

[24] Bradshaw, *Effects of streamline curvature on turbulent flow.* ([6], 1973)

die Ablöseblase das nicht-rotierende Rohr der Zuströmung erreicht hat und somit dort eine Umfangsgeschwindigkeit vorliegt. Die kritische Durchflusszahl φ_c wird rein experimentell bestimmt, da das Model mit beginnender Strömungsablösung seine Gültigkeit verliert.

5.3.1 Beginnende Strömungsablösung

Ursache für die Strömungsablösung in einem rotierenden Kreiskegel ist ein positiver Druckgradient in axialer Richtung nahe der Wand, da die Zentrifugalkraft den Druck in Wandnähe erhöht, siehe Gleichung (3.22). Ob ein positiver Wanddruckgradient in axialer Richtung vorliegt, ist abhängig von der Wahl der Strömungsparameter (Re, φ), der axialen Koordinate und dem Öffnungswinkel wie in Abbildung 5.23 zu erkennen ist. In dieser Abbildung sind Isolinien für je zwei unterschiedliche Wanddruckgradienten in axialer Richtung (durchgezogene und gestrichelte Linie) bei je drei Reynoldszahlen (schwarze, dunkelgraue und hellgraue Linie) und zwei Öffungswinkel dargestellt. Für eine Düse ($\alpha < 0$), d. h. eine beschleunigte Kernströmung, kann ein positiver Wanddruckgradient in axialer Richtung vorliegen. In Abbildung 5.23a ist die Isolinie des verschwindenden Wanddruckgradienten in axialer Richtung (gestrichelte Linie) eingezeichnet. Ein positiver Wanddruckgradient in axialer Richtung ist mit dem Einfluss der Zentrifugalkraft auf das Druckfeld begründet, siehe Gleichung (3.2). An einer konstanten axialen Schnittebene steigt der Wanddruckgradient in axialer Richtung bei reduzierter Durchfluss- bzw. Reynoldszahl an. Bei einer konstanten Reynolds- bzw. Durchflusszahl nimmt die axiale Komponente des Wanddruckgradients stromabwärts ab. Für einen Diffusor ($\alpha > 0$) (Abbildung 5.23b) ist die axiale Komponente des Wanddruckgradients positiv, solange eine verzögerte axiale Kernströmung vorliegt. Ferner kann Term A die Entwicklung der Verdrängungsdicke unterdrücken, sodass ein lokales Maximum der axialen Grenzschichtdicke vorliegen kann. Dies ruft eine minimale Eintrittslänge für einen Wanddruckgradient in axialer Richtung hervor, siehe gestrichelte, schwarze Isolinie für $\mathrm{d}p_\mathrm{w}/\mathrm{d}z = 0.1$ in Abbildung 5.23b. Für eine konstante axiale Schnittebene nimmt die axiale Komponente des Wanddruckgradients mit reduzierter Durchfluss- bzw. Reynoldszahl ab. Für eine sehr kleine Durchflusszahl steigt diese Komponente des Wanddruckgradients wieder an. Für $\varphi > 1$ ist die axiale Komponente des Wanddruckgradients im vorliegenden Fall entlang der axialen Koordinate nahezu konstant.
Die Stabilität der Strömung gegen Strömungsablösung hängt nicht nur von der axialen Komponente des Wanddruckgradienten, sondern auch von der axialen Grenzschichtdicke ab. Eine dickere axiale Grenzschicht löst bei gleicher axialen Komponente des Wanddruckgradients eher ab als eine dünnere.[25]

[25] SCHLICHTING, *Grenzschicht-Theorie*, ([50], 1965)

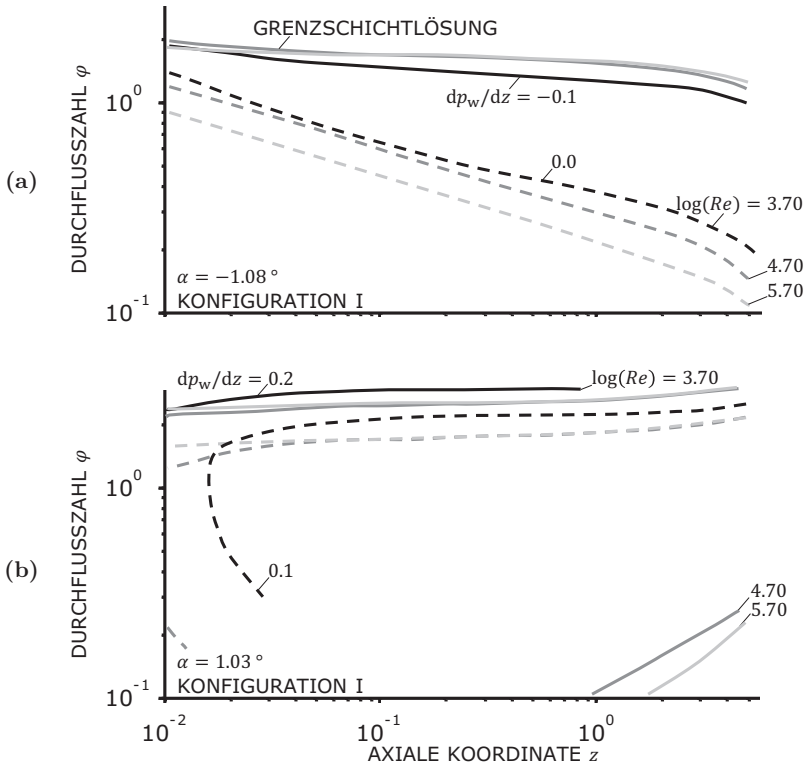


Abbildung 5.23 – Je zwei Isolinien (durchgezogene und gestrichelte Linie) der axialen Komponente des Wanddruckgradients (3.22) abhängig von Durchflusszahl und axialer Koordinate für je drei Reynoldszahlen (schwarze, dunkelgraue und hellgraue Linie) für (a) $\alpha = -1.08\,°$ und (b) $\alpha = 1.03\,°$ bei Konfiguration I mit $\delta_0 \approx 0.1$ laminarer Zuströmung.

Wie Abbildung 5.8 und 5.10 zu entnehmen ist, ist die axiale Grenzschicht stromabwärts und für $\varphi \ll 1$ in einem rotierenden Diffusor ($\alpha > 0$) dünner als in einer rotierenden Düse ($\alpha < 0$) mit einen Öffnungswinkel ähnlichen Betrages.
Die Charakteristik der axialen Komponente des Wanddruckgradient und der axialen Grenzschichtdicke für eine turbulente Zuströmung mit $\delta_0 = 0.1$ ist

ähnlich der einer laminaren Zuströmung, vgl. Cloos und Pelz[26]. Ableitend aus der Diskussion über den Wanddruckgradienten in axialer Richtung und die axiale Grenzschichtdicke ist Folgendes zu erwarten: Für eine konstante Reynoldszahl könnte Strömungsablösung bei einer größeren Durchflusszahl bei einer rotierenden Düse ($\alpha < 0$) als bei einem rotierenden Diffusor ($\alpha > 0$) mit einem Öffnungswinkel ähnlichen Betrages auftreten. Dies ist rein aus der Analyse einer drallfreien Strömung in einem nicht-rotierenden Kreiskegel nicht zu erwarten, da der Drall zusammen mit dem Öffnungswinkel die axiale Grenzschicht signifikant beeinflusst.
Bei welcher Parameterkombination und wo die Wandschubspannung verschwindet, folglich die Strömungsablösung beginnt, wird mit den impliziten Kriterien für eine laminare (3.24) und für eine turbulente Strömung (3.25) unter Anwendung der Ergebnisse der Grenzschichtlösung vorhergesagt. Zusätzlich werden die Ergebnisse für Konfiguration I mit experimentellen Daten validiert. Für die experimentelle Untersuchung der beginnenden Strömungsablösung wird das Umfangsgeschwindigkeitsprofil analysiert. Nach der Erkenntnis von Stapp[27] verursacht die beginnende Strömungsablösung eine Transformation des Umfangsgeschwindigkeitsprofils und die Drallgrenzschicht wird merklich dicker. Das Umfangsgeschwindigkeitsprofil nimmt eine neue selbstähnliche Verteilung bei einer ausgebildeten Strömungsablösung an. Diese Transformation des Umfangsgeschwindigkeitsprofil wird verwendet, um die axiale Schnittebene der beginnenden Ablösung experimentell zu bestimmen. Eine beginnende Ablösung liegt vor, wenn das gemessene Umfangsgeschwindigkeitsprofil im Mittel mehr als 15 % von dem Profil der anliegenden Strömung (Ansatzfunktion (3.19) mit $k = 2$) abweicht. Diese Methode wird von Cloos *et al.*[28] entwickelt.
Das Umfangsgeschwindigkeitsprofil wird an mehreren axialen Schnittebenen bei konstanter Reynoldszahl und variierter Durchflusszahl gemessen und ist für eine Düse mit $\alpha = -1.08\,°$ und einen Diffusor mit $\alpha = 1.03\,°$ in Abbildung 5.24 festgehalten. In diesem Diagramm kennzeichnen weiß gefüllte Marker eine anliegende Strömung und schwarz gefüllte Marker eine abgelöste Strömung. Bei der Düse beginnt die Strömungsablösung bei $z = 4$ und $\varphi = 0.26$. Für eine reduzierte Durchflusszahl breitet sich die Ablöseblase stromaufwärts aus bis die Blase den Eintritt des Kreiskegels erreicht. Dies gleicht dem Verhalten der Strömung in einem rotierenden Kreiszylinder, vgl. Cloos *et al.*[28]. Bei dem rotierenden Diffusor liegt ein anderes Verhalten der

[26] Cloos und Pelz, „Developing swirl boundary layer and flow separation and the inlet of a coaxial rotating diffuser or nozzle“, ([8], 2018)

[27] Stapp, *Experimentelle und analytische Untersuchung zur Drallgrenzschicht*, ([55], 2015)

[28] Cloos, Stapp und Pelz, „Swirl boundary layer and flow separation at the inlet of a rotating pipe“, ([11], 2017)

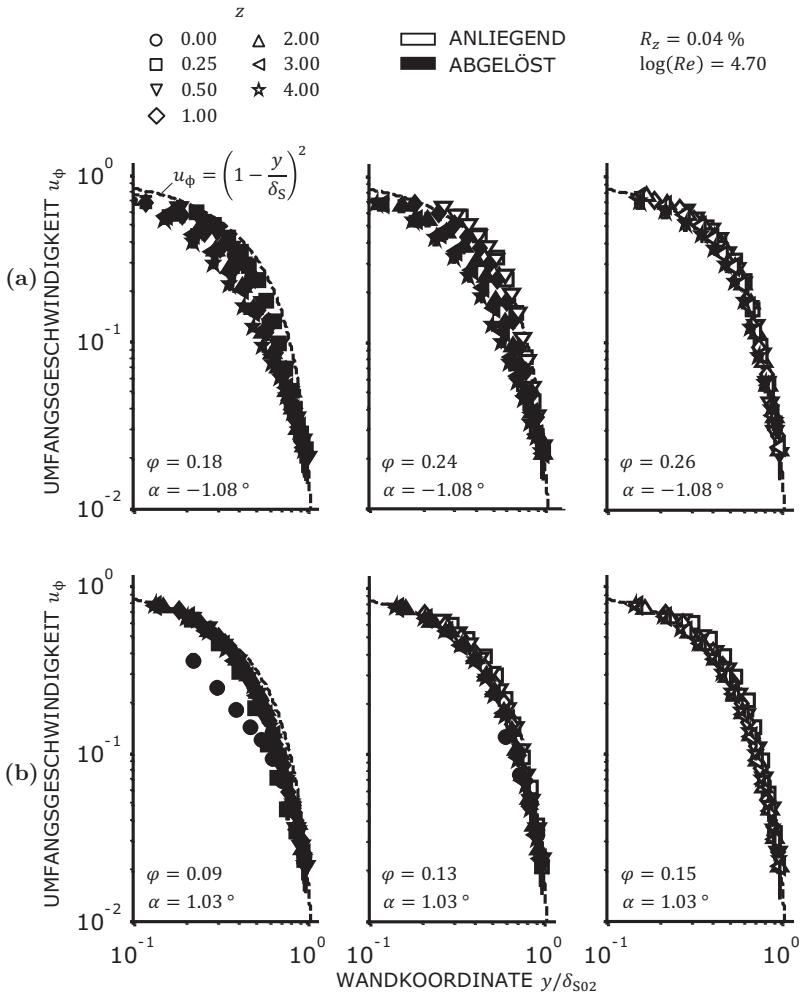


Abbildung 5.24 – Gemessene Umfangsgeschwindigkeit vs. skalierte Wandkoordinate mit variierter Durchflusszahl und axialer Koordinate für (a) $\alpha = -1.08\,°$ und (b) $\alpha = 1.03\,°$ bei laminarer Zuströmung $\delta_0 \approx 0.1$ um den Ort der beginnende Ablösung zu bestimmen. Daten für aus [8].

Strömungsablösung im Experiment vor. Wie in Abbildung 5.24b illustriert, liegt die Strömung für den Bereich $z = 0 \ldots 4$ bei $\varphi = 0.15$ an. Für die Durchflusszahl $\varphi = 0.13$ ist die Strömung bei $z \geq 2$ abgelöst und liegt für $z = 0.25 \ldots 1$ an, jedoch ist eine Umfangsgeschwindigkeitskomponente an der Schnittebene $z = 0$ vorhanden. Dies deutet auf auf eine ausgebildete Strömungsablösung hin. Der anliegende Bereich $z = 0.25 \ldots 1$ widerspricht jedoch dem Vorliegen einer ausgebildeten Strömungsablösung. Ursache für die beginnende Ablösung bei $z = 0$ könnte die Unstetigkeit des Radius bei dem Übergang von dem stehendem zu dem rotierenden Rohr sein. Nichtsdestotrotz beginnt die Strömungsablösung bei einem rotierenden Diffusor mit $\alpha = 1.03\,^\circ$ erst bei einer kleineren Durchflusszahl als bei einer rotierenden Düse mit $\alpha = -1.08\,^\circ$.

Die Ergebnisse aus der experimentellen Untersuchung hinsichtlich der beginnenden Strömungsablösung und die Lösungen der impliziten Kriterien (3.24) und (3.25) sind in Abbildung 5.25 für Konfiguration I und einen theoretischen Fall eingetragen. Der theoretische Fall ist eine turbulente Zuströmung mit $\delta_0 = 0.1$. Das Kriterium für die beginnende Strömungsablösung wird einzig für Konfiguration I mit experimentellen Daten validiert. Eine dünne, turbulente axiale Grenzschicht am Eintritt des rotierenden Kreiskegels bei kleiner Durchflusszahl ist mit dem vorhandenen Versuchsaufbau nicht konditionierbar. Die durchgezogenen Linien stellen die axiale Schnittebene abhängig von der Durchflusszahl dar, an dem die yz-Komponente der Wandschubspannung erstmals zu null wird, $\tau_{\mathrm{yz,w}} = 0$. Die Marker illustrieren die experimentellen Ergebnisse. Für $\alpha = 1.03\,^\circ$ beginnt die Strömungsablösung im Experiment direkt bei $z = 0$ und ist deshalb in Abbildung 5.25 aufgrund der doppellogarithmischen Darstellung nicht zu sehen. Nach den Kriterien beginnt die Ablösung stromabwärts des Eintritts und die Ablöseblase wächst mit reduzierter Durchflusszahl stromaufwärts äquivalent zu den experimentellen Ergebnissen für $\alpha \leq 0$. Für $\alpha = -1.08\,^\circ$ beginnt die Strömungsablösung weiter stromaufwärts als für $\alpha \geq 0$. Die anhand der Kriterien bestimmte kritische Durchflusszahl für eine beginnende Ablösung $\varphi_{\mathrm{c,in}}$ steigt mit vergrößertem Öffnungswinkel unabhängig von der Art der Zuströmung an. Dies widerspricht der oben geführten Diskussion und den experimentellen Ergebnissen, ist jedoch durch folgende Tatsache begründet: Beide Kriterien basieren auf der Analyse einer axialen Grenzschicht ohne Druckanstieg, d. h. es wird die axiale Grenzschichtdicke in einem nicht-rotierenden Kreiskegel $\delta(A, G = 0)$ in den Kriterien (3.24) und (3.25) verwendet. Für diesen Fall ist das Verhalten der axialen Grenzschicht abhängig von dem Öffnungswinkel anders als in einem rotierenden Kreiskegel. Die axiale Grenzschicht in einem nicht-rotierenden Kreiskegel ist dicker für einen positiven (Diffusor) als für einen negativen Öffnungswinkel (Düse) ähnlichen Betrages, siehe Abbildung 5.8

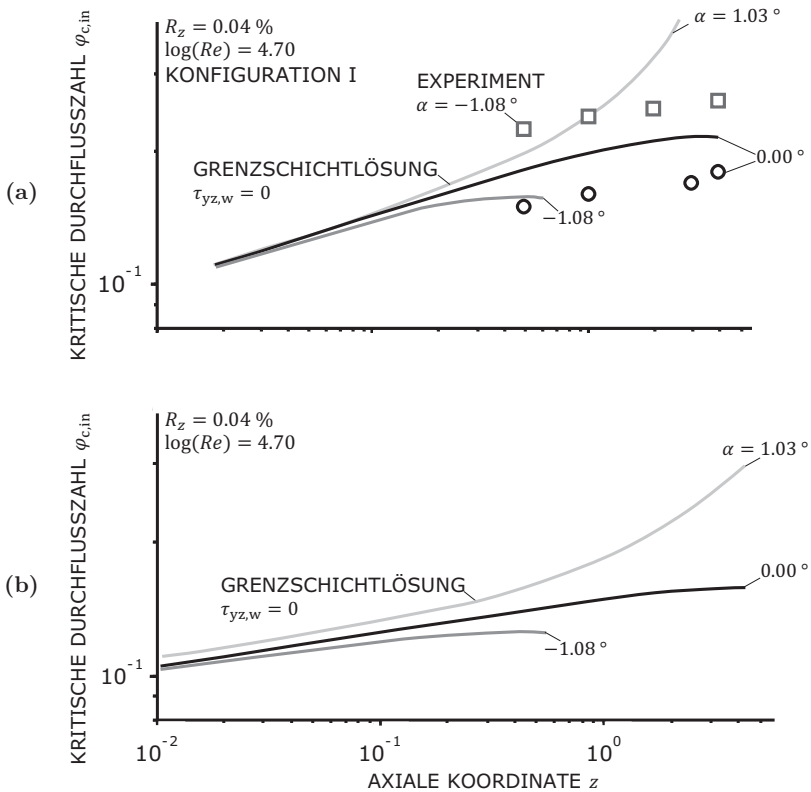


Abbildung 5.25 – Ort der beginnenden Ablösung abhängig von Durchflusszahl und Öffnungswinkel für (a) $\delta_0 \approx 0.1$ laminarer Zuströmung und (b) turbulenter Zuströmung mit $\delta_0 = 0.1$. Experimentelle Daten aus [8, 11].

und 5.10. Zusätzlich ist die axiale Komponente des Wanddruckgradienten bei einem Diffusor ($\alpha > 0$) größer als bei einer Düse ($\alpha < 0$), was schlussendlich das Ergebnis in Abbildung 5.25 begründet. Die Strömungsart hat nur einen kleinen Einfluss auf den Betrag der kritischen Durchflusszahl für die beginnende Ablösung, $\varphi_{\mathrm{c,in}} = \varphi(\tau_{yz,w} = 0)$. Jedoch ist bei der Ausbreitung der Ablöseblase abhängig von der Durchflusszahl ein Unterschied zu erkennen. Für eine laminare Strömung ist der Gradient $\partial\varphi_{\mathrm{c,in}}/\partial z$ größer als für eine turbulente Strömung. Das Auftreten der beginnenden Strömungsablösung grenzt den Gültigkeitsbereich des Modells und somit auch dessen Validierung ein.

Drei Erkenntnisse werden aus der Validierung des Kriteriums (3.24) gewonnen: (i) Die Größenordnung der kritischen Durchflusszahl für die beginnende Ablösung aus dem Experiment stimmt mit der des Kriteriums (3.24) überein. (ii) Die Abhängigkeit der kritischen Durchflusszahl von dem Öffnungswinkel wird mit dem Kriterium für eine laminare Strömung (3.24) und vermutlich auch für die turbulente Strömung (3.25) nicht korrekt wiedergegeben. (iii) Für $\alpha \leq 0$ wird das Wachstum der Ablöseblase abhängig von der Durchflusszahl von dem Kriterium korrekt abgebildet. Die Ablöseblase entsteht stromabwärts und breitet sich stromaufwärts mit sinkender Durchflusszahl aus.

5.3.2 Ausgebildete Strömungsablösung

Für die Ermittelung der ausgebildeten Strömungsablösung, d. h. der kritischen Durchflusszahl φ_c, ist es unzureichend, einzig eine Umfangsgeschwindigkeitskomponente an der axialen Schnittebene $z = 0$ oder weiter stromaufwärts im Experiment nachzuweisen, da die kritische Durchflusszahl dann von der Positionierung des Messvolumens abhängig wäre. Deshalb wird das von Stapp[29] entwickelte Verfahren angewendet. Das Messvolumen wird an der Stelle $z = 0$ und $y = 0.024$ positioniert. Mit reduzierter Durchflusszahl bei konstanter Reynoldszahl steigt an dieser Stelle die Umfangsgeschwindigkeit an, siehe lineare Darstellung in Abbildung 5.26 exemplarisch für $\log(Re) = 4.50$ und einen Diffusor mit $\alpha = 1.03\,°$.

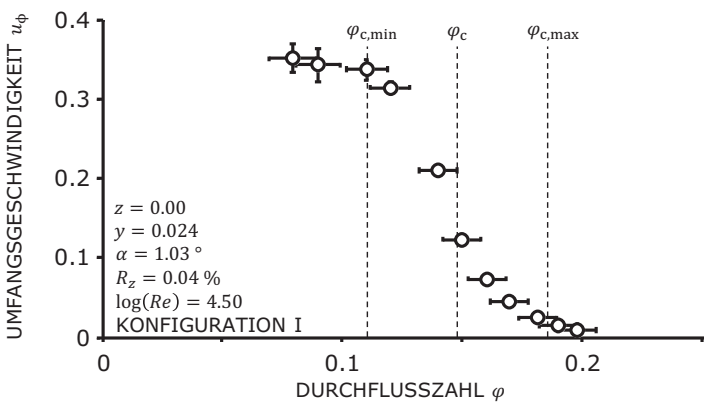


Abbildung 5.26 – Umfangsgeschwindigkeit vs. Durchflusszahl bei laminarer Zuströmung mit $\delta_0 \approx 0.1$. Kriterium zur Bestimmung der kritischen Durchflusszahl nach Stapp [55].

[29] Stapp, *Experimentelle und analytische Untersuchung zur Drallgrenzschicht*, ([55], 2015)

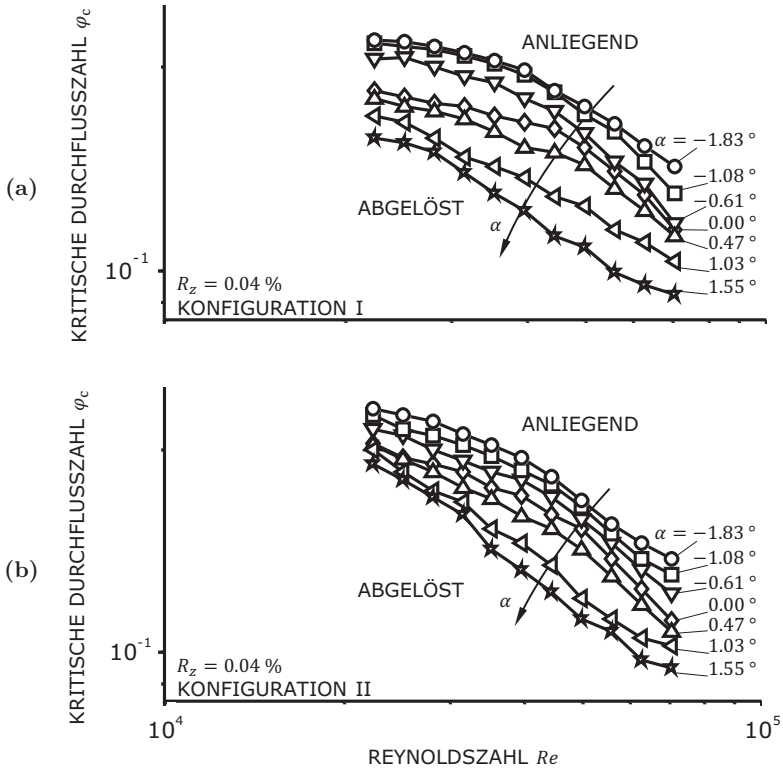


Abbildung 5.27 – Kritische Durchflusszahl vs. Reynoldszahl abhängig vom Öffnungswinkel bei laminarer Zuströmung mit (a) $\delta_0 \approx 0.1$ und (b) $\delta_0 \approx 0.5$. Daten für (a) aus [8].

Übersteigt die gemessene Umfangsgeschwindigkeit den Wert von 0.02, wird dies als $\varphi_{c,max}$ deklariert. Die Umfangsgeschwindigkeit steigt für $\varphi < \varphi_{c,max}$ stark an und der Gradient $\partial u_\phi / \partial \varphi$ wird erst bei der Grenze $\varphi_{c,min}$ wieder kleiner. Die kritische Durchflusszahl wird aus dem Mittelwert dieser Grenzen gebildet, $\varphi_c = (\varphi_{c,max} + \varphi_{c,min})/2$ mit einer fortgepflanzten Messunsicherheit von durchschnittlich $\Delta\varphi = \pm 5\,\%$. Die auf diesen Weg bestimmte kritische Durchflusszahl ist unabhängig von der radialen Position des Messvolumens, vgl. Stapp[30]. Die kritische Durchflusszahl für Konfiguration I und Konfiguration II als Funktion der Reynoldszahl und dem Öffnungswinkel $\varphi_c = \varphi_c(Re, \alpha)$ ist in Abbildung 5.27 ohne eingetragene Messunsicherheit für eine besser Übersicht gegeben.

[30] Stapp, *Experimentelle und analytische Untersuchung zur Drallgrenzschicht*, ([55], 2015)

Die kritische Durchflusszahl nimmt mit ansteigender Reynoldszahl oder ansteigendem Öffnungswinkel ab. Dies ist konsistent zu der experimentell bestimmten beginnenden Strömungsablösung. Die kritische Durchflusszahl nimmt mit ansteigender Reynoldszahl ab, weil sowohl die Drallgrenzschichtdicke und damit auch die axiale Komponente des Wanddruckgradients als auch die axiale Grenzschichtdicke abnehmen. Bei einem ansteigenden Öffnungswinkel nimmt zwar der Wert der axialen Komponente des Wanddruckgradienten zu, jedoch wird die axiale Grenzschicht deutlich dünner für $\varphi \ll 1$. Die ausgebildete Ablösung tritt für Konfiguration II bei einer größeren Durchflusszahl als für Konfiguration I auf. Dies ist damit begründet, dass die axiale Grenzschicht bei Konfiguration II ca. fünfmal dicker ist als bei Konfiguration I. Für die hier vorliegende Parameterkombination liegt eine laminare Zuströmung bei Konfiguration II mit $\delta_0 \approx 0.5$ vor, vgl. Tabelle 4.2. Wie weiter oben diskutiert, ist eine dickere axiale Grenzschicht instabiler gegenüber Strömungsablösung als eine dünnere.
Mit den Stabilitätskarten in Abbildung 5.27 für die Teillastrezirkulation ist die letzte untersuchte Gültigkeitsgrenze für das Modell und deren Validierung in Abschnitt 5.1.1 gegeben. Hervorzuheben ist, dass die Teillastrezirkulation einzig aus dem eingebrachten Drall und der daraus resultierenden Zentrifugalkraft resultiert. Die Zentrifugalkraft erhöht den Druck in Wandnähe und erzeugt einen positiven Wanddruckgradienten in axialer Richtung. Wider Erwarten ist die Strömung in einem rotierenden Diffusor ($\alpha > 0$) stabiler gegenüber Strömungsablösung als in einer rotierenden Düse bzw. Kreiszylinder ($\alpha \leq 0$). Eine mögliche Ursache hierfür ist die dickere axiale Grenzschicht in einer rotierenden Düse für $\varphi \ll 1$ als in einem rotierenden Diffusor mit einem Öffnungswinkel ähnlichen Betrages.

Fazit und Ausblick

Die vorliegende Arbeit basiert auf der übergeordneten Forschungsfrage: Welchen Einfluss hat der Drall auf die axiale Grenzschicht? Zur Beantwortung dieser Frage wird in dieser Arbeit und am Institut für Fluidsystemtechnik die Strömung in einem generischen Modell erforscht. Das generische Modell ist ein durchströmtes, koaxial rotierendes Kreisrohr. Bisherige Arbeiten untersuchen die Strömung durch einen rotierenden Kreiszylinder, d. h. ein Rohr mit konstantem Radius. Für eine systematische Annäherung an eine Turbomaschine wird der Einfluss der Funktion einer Kraftmaschine (Turbine) bzw. Arbeitsmaschine (Pumpe) berücksichtigt. Funktion einer Kraftmaschine ist, der Strömung Energie zu entziehen und dies resultiert in einer Druckabnahme. Die Funktion einer Arbeitsmaschine ist, der Strömung Energie hinzuzufügen und dies resultiert in einer Druckzunahme. Diese Eigenschaft einer Druckabnahme bzw. -zunahme wird mit einer Düse bzw. einem Diffusor umgesetzt. Folglich wird die Strömung durch rotierende Kreiskegel mit einem negativen (Düse) und einem positiven (Diffusor) Öffnungswinkel erforscht. Aufbauend auf diese systematische Annäherung wird die übergeordnete Forschungsfrage in vier weiteren Forschungsfragen spezifiziert:

Welchen Einfluss hat der Öffnungswinkel α auf ...

1. die Entwicklung der Drallgrenzschicht δ_{S}?
2. das zeitlich-gemittelte Umfangsgeschwindigkeitsprofil u_{ϕ} und deren Turbulenzintensität $u'_{\phi,\mathrm{rms}}$ in der Drallgrenzschicht?
3. den Umschlag zu einer hydraulisch rauen Wand?
4. die axiale Grenzschicht δ und die Ausbreitung der Strömungsablösung?

Die Beantwortung der vier spezifizierten Forschungsfragen erfolgt über die dimensionslose Beschreibung der Strömung mittels der Integralmethode der Grenzschichttheorie und der Anwendung der Stratford Kriterien. Das axiomatische Modell besteht aus der axialen Komponente der Euler-Gleichung (3.3), der verallgemeinerten von Kármán Gleichung (3.7), der axialen Komponente des Drallsatzes (3.12) und der Kontinuitätsgleichung (3.14).

Mit diesem axiomatischen Modell wird die Strömung durch einen rotierenden Kreiskegel beschrieben. Zur Lösung des Systems von gewöhnlichen, nichtlinearen Differentialgleichungen erster Ordnung sind Ansatzfunktionen für die Geschwindigkeitsprofile u_z und u_ϕ und daraus abgeleiteten Wandschubspannungsmodellen erforderlich. Mit den Ansatzfunktionen ist die Strömungsart, laminar oder turbulent, repräsentiert. Die Lösung des Gleichungssystems wird Grenzschichtlösung genannt und besteht aus der axialen Grenzschichtdicke δ, der Drallgrenzschichtdicke δ_S sowie dem Druck P und der axialen Geschwindigkeit U_z in der Kernströmung. Die Grenzschichtlösung wird anhand der Drallgrenzschichtdicke aus den durchgeführten experimentellen Untersuchungen validiert.
Die verallgemeinerte von Kármán Gleichung (3.7) berücksichtigt den Einfluss der Zentrifugalkraft in Form eines Druckgradienten in radialer Richtung in der Drallgrenzschicht und die axiale Veränderung des Radius. Im Vergleich zu der bekannten von Kármán Gleichung ergeben sich die drei neuen Terme G (3.8), A_0 (3.9) und A (3.10). Die Terme G, A repräsentieren den Einfluss der Zentrifugalkraft und die Terme A, A_0 repräsentieren den Einfluss des axial veränderlichen Radius. Die Interaktion von der Zentrifugalkraft und dem axial veränderlichen Radius ruft bis dato unerwartete Ergebnisse hervor.
Mit dem validierten Modell und der experimentellen Untersuchung werden vier Antworten auf die spezifizierten Forschungsfragen gegeben:

1. Der Öffnungswinkel hat einen Einfluss auf die Entwicklung der Drallgrenzschichtdicke und verursacht ein lokales Maximum für $\alpha \neq 0$ und $z \leq 5$. Das lokale Maximum ist abhängig von den Strömungsparametern (Re, φ) und dem Öffnungswinkel. Der Öffnungswinkel hat einen deutlichen Einfluss auf die Abhängigkeit der Drallgrenzschichtdicke von der Durchflusszahl, siehe Abbildung 5.5.

2. Für die untersuchten Öffnungswinkel ist das gemessene Umfangsgeschwindigkeitsprofil und die dazugehörige Turbulenzintensität innerhalb der Drallgrenzschicht selbstähnlich, siehe Abbildung 5.11 und 5.13. Das Umfangsgeschwindigkeitsprofil für die hydraulisch glatte Wand und Regime I der Drallgrenzschicht folgt in einem rotierenden Kreiskegel $u_\phi = (1 - y/\delta_S)^2$ und entspricht dem Ergebnis für einen rotierenden Kreiszylinder.

3. Der Umschlag von hydraulisch glatter zu hydraulisch rauer Wand ist keine Funktion des Öffnungswinkels, vgl. Abbildung 5.17. Für die hydraulisch raue Wand ist die Drallgrenzschichtdicke eine Funktion des Öffnungswinkels. Dabei sind das Umfangsgeschwindigkeitsprofil und die dazugehörige Turbulenzintensität innerhalb der Drallgrenzschicht selbstähnlich und folgt in einem rotierenden Kreiskegel den gleichen

Gesetzmäßigkeiten wie für einen rotierenden Kreiszylinder. Das Umfangsgeschwindigkeitsprofil folgt $u_\phi = (1 - y/\delta_S)^7$ für eine hydraulisch raue Wand.

4. Die Entwicklung der axialen Grenzschicht ist abhängig von dem Öffnungswinkel und unterliegt vielseitigen, nicht trivialen Wechselwirkungen. Für einen Kreiskegel $\alpha \neq 0$ liegt bei der Entwicklung der axialen Grenzschichtdicke entlang der axialen Koordinate ebenfalls ein lokales Maximum vor. Die Größenordnungsanalyse der verallgemeinerten von Kármán Gleichung offenbart, dass die neuen Terme A, A_0 und der bekannte Kopplungsterm G das Wachstum der axialen Grenzschicht je nach Parameterkombination anfachen oder dämpfen. Deshalb liegt besonders für eine kleine Durchflusszahl $\varphi \ll 1$ eine dickere axiale Grenzschicht in einer rotierenden Düse als in einem rotierenden Diffusor mit betraglich ähnlichem Öffnungswinkel vor, siehe Abbildung 5.10. Dies hat auch einen merklichen Einfluss auf die beginnende Strömungsablösung.
   Für die Vorhersage der beginnenden Strömungsablösung wird das Stratford Kriterium für eine laminare und das für eine turbulente Strömung angewendet. Im Falle der laminaren Strömung werden die Vorhersagen des Stratford Kriterium mit experimentellen Daten validiert. Beide Kriterien sagen eine beginnende Strömungsablösung stromabwärts des Eintritts des rotierenden Kreiskegels vorher und die Ablöseblase breitet sich für eine sinkende Durchflusszahl stromaufwärts aus. Der Öffnungswinkel beeinflusst die Position und die kritische Durchflusszahl für die beginnende Strömungsablösung. Die kritische Durchflusszahl für die beginnende Ablösung $\varphi_{c,in}$ aus den Stratford Kriterien hat die gleiche Größenordnung wie die experimentell bestimmte. Die Abhängigkeit von dem Öffnungswinkel wird von den Kriterien nicht korrekt abgebildet. Aus den experimentellen Untersuchungen wird eine größere kritische Durchflusszahl $\varphi_{c,in}$ für eine rotierende Düse ($\alpha < 0$) als für einen rotierenden Kreiszylinder ($\alpha = 0$) bzw. einen rotierenden Diffusor ($\alpha > 0$) abgeleitet. Dies gilt auch für die experimentell bestimmte ausgebildete Ablösung für $\varphi < \varphi_c$, siehe Abbildung 5.27. Für eine ausgebildete Ablösung erreicht die Ablöseblase das nicht-rotierende Rohr der Zuströmung. Eine mögliche Ursache für das Verhalten der Strömungsablösung abhängig von dem Öffnungswinkel ist die dickere axiale Grenzschicht in einer rotierenden Düse als in einem rotierenden Diffusor. Dieses Ergebnis wurde so nicht erwartet, da üblicherweise eine beschleunigte Strömung (Düse) stabiler gegenüber Strömungsablösung ist als eine verzögerte (Diffusor). Die kritische Durchflusszahl sinkt für eine ansteigende Reynoldszahl.

Die Weiterentwicklung des Kriteriums für die beginnende Strömungsablösung beinhaltet zukünftiges Forschungspotential. Wie aus der Analyse der Ergebnisse hervorgeht, wird der Einfluss des Öffnungswinkels bei den Kriterien nicht korrekt abgebildet. Ursache hierfür könnte die verwendete axiale Grenzschichtdicke des nicht-rotierenden Kreiskegels bei den Kriterien sein. Die Verwendung der axialen Grenzschichtdicke aus den rotierenden Kreiskegeln ist bei den Stratford Kriterien nicht zulässig.
Zusätzlich zu den Gültigkeitsgrenzen der Validierung durch den Umschlag zu einer hydraulisch rauen Wand und der Strömungsablösung grenzt auch der Umschlag zu Regime II der turbulenten Drallgrenzschicht den Gültigkeitsbereich ein, siehe Abbildung 5.15. Darauf aufbauend ist das Auftreten von Regime II der turbulenten Drallgrenzschicht in einem rotierenden Kreiskegel weiter zu erforschen. Hierfür ist zu klären, bei welcher Parameterkombination die Transition von Regime I zu Regime II der turbulenten Drallgrenzschicht stattfindet und welchen Gesetzmäßigkeiten die Drallentwicklung folgt. Es besteht die Frage, ob die Parameterkombination und der Ort der Transition eine Funktion des Öffnungswinkels sind. Für die Quantifizierung und Ableitung etwaiger Gesetzmäßigkeiten $\delta_\mathrm{S} = \delta_\mathrm{S}(z, Re, \varphi, \alpha)$ für Regime II der Drallgrenzschicht ist ggf. der Parameterraum des Prüfstandes anzupassen. Die Entwicklung der turbulenten Drallgrenzschicht für Regime II ist besonders für die Sekundärluftversorgung von Gasturbinen von Bedeutung, da diese in dem entsprechenden Parameterraum operieren.
Des Weiteren kann das vorliegende, axiomatische Modell verwendet werden, um die Transformation des axialen Geschwindigkeitsprofils vorherzusagen. Nach aktuellem Stand der Literatur liegen bei der analytischen Modellierung der Laminarisierung Abweichungen zu den experimentellen Daten des axialen Geschwindigkeitsprofils vor. Der Einfluss der Zentrifugalkraft auf die axiale Grenzschicht wird in der vorliegenden Arbeit rein axiomatisch ohne die Notwendigkeit von Turbulenzmodellen beschrieben. Bisher wird die Laminarisierung einzig mit Turbulenzmodellen, meistens mit dem Mischungswegmodell, modelliert.
Ferner wird in einem aktuellen Forschungsvorhaben am Institut für Fluidsystemtechnik das Wirbelsystem einer Turbomaschine modelliert[31,32] und experimentell validiert. Damit wird die kinematische Ursache für die Strömungsablösung an der Wand untersucht. Ziel ist, die Ergebnisse aus dieser und vorheriger Arbeit hinsichtlich der dynamischen Ursache für die Strömungsablösung mit denen der kinematischen Ursache zu überlagern, um so die transiente Strömungsablösung an der Wand einer Turbomaschine zu beschreiben.

[31] Pelz und Taubert, „Vortex induced transient stall“, ([41], 2017)

[32] Pelz, Taubert und Cloos, „Vortex structure and kinematics of encased axial turbomachines“, ([42], 2017)

Auch die generische Forschungsarbeit über den Einfluss von engen Spaltströmungen auf die Rotordynamik von Turbomaschinen am Institut für Fluidsystemtechnik hat thematische Überschneidungen mit der vorliegenden Arbeit. Die Drallentwicklung in dem Spalt zwischen Rotor und Stator hat einen signifikanten Einfluss auf die an dem Rotor wirkenden Kräfte und somit auf dessen Dynamik.[33] Folglich unterstützen sich die Forschungsthemen gegenseitig.

Abschließend vertieft die vorliegende Arbeit das Verständnis über die Drallentwicklung, den Einfluss des Dralls auf die axiale Grenzschicht und die Strömungsablösung. Die gewonnenen Kenntnisse und die Weiterführung der Untersuchung helfen Entwicklern von Turbomaschinen. Die vorliegenden Ergebnisse können direkt bei der Auslegung von Turbomaschinen mit einer Deckscheibe oder einer dreidimensionalen Grenzschicht am Eintritt sowie von Strömungskanälen der Sekundärluftversorgung von Gasturbinen angewendet werden. Damit kann die Belastung der Maschine (selbst-erregte Schwingungen) und der Umwelt (Lärm) reduziert sowie die Effizienz und Zuverlässigkeit der Turbomaschine erhöht werden.

[33] Lang, „Effiziente Berechnung von Gleitlagern und Dichtspalten in Turbomaschinen“, ([29], 2017)

Literatur

[1] A.M. Binnie und D.P. Harris. „The application of boundary-layer theory to swirling liquid flow through a nozzle“. In: *The Quarterly J. Mech. and Appl. Mathe.* 3.1 (1950), S. 89–106.

[2] L. Bissonnette und G. Mellor. „Experiments on the behavior of an axisymmetric turbulent boundary layer with a sudden circumferential strain“. In: *J. Fluid Mech.* 63 (1974), S. 369–413.

[3] H. Blasius. „Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsforschungen in Flüssigkeiten“. In: *Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurswesens* 131 (1913), S. 1–41.

[4] G.-G. Börger. „Optimierung von Windkanaldüsen für den Unterschallbereich“. Diss. Ruhr-Universität Bochum, 1973.

[5] A.I. Borisenko, O.N. Kostikov und V.I. Chumachenko. „Experimental study of turbulent flow in a rotating channel“. In: *J. Engng. Phys. and Thermophys* 24 (1973), S. 770–773.

[6] P. Bradshaw. *Effects of streamline curvature on turbulent flow.* Techn. Ber. Advisory group for aerospace research und development Paris (France), 1973.

[7] A.N. Broujerdi und A. Kerbriaee. „Pressure loss of turbulent swirling flow in convergent nozzle“. In: *Proceedings of 18th ISME.* 2010.

[8] F.-J. Cloos und P.F. Pelz. „Developing swirl boundary layer and flow separation and the inlet of a coaxial rotating diffuser or nozzle“. In: *J. Fluids Engng. eingereicht* (2018).

[9] F.-J. Cloos und P.F. Pelz. „Experimental investigation of the swirl development at the inlet of a coaxial rotating diffuser or nozzle“. In: *J. Fluids Engng. eingereicht* (2018).

[10] F.-J. Cloos und P.F. Pelz. „Swirl boundary layer at the inlet of a rotating circular cone“. In: *Proceedings of 17th ISROMAC.* 2017.

[11] F.-J. Cloos, D. Stapp und P.F. Pelz. „Swirl boundary layer and flow separation at the inlet of a rotating pipe“. In: *J. Fluid Mech.* 811 (2017), S. 350–371.

[12] F.-J. Cloos, A.-L. Zimmermann und P.F. Pelz. „A second turbulent regime when a fully developed axial turbulent flow enters a rotating pipe“. In: *Proceedings of ASME Turbo Expo GT2016–57499*. 2016.

[13] F.-J. Cloos, A.-L. Zimmermann und P.F. Pelz. „Two turbulent flow regimes at the inlet of a rotating pipe“. In: *EUR J. Mech. B/Fluids* 61 (2017), S. 330–335.

[14] C. Crane und D. Burley. „Numerical studies of laminar flow in ducts and pipes“. In: *J. Comp. appl. Mathe.* 2 (1976), S. 95–111.

[15] DIN EN ISO 5167-2:2003. *Measurement of fluid flow by means of pressure differential devices inserted in circular cross-section conduits running full - Part 2: Orifice plates*. Norm. 2003.

[16] DIN EN ISO 5801:2008. *Industrieventilatoren - Leistungsmessung auf genormten Prüfständen*. Norm. 2010.

[17] L. Facciolo. „A study on axially rotating pipe and swirling jet flows“. Diss. Royal Institute of Technology (KTH), Stockholm, Schweden, 2006.

[18] K. Gersten und H. Herwig. *Strömungsmechanik: Grundlagen der Impuls-, Wärme- und Stoffübertragung aus asymptotischer Sicht*. Vieweg, Wiesbaden, 1992.

[19] K. Gersten und H.G. Pagendarm. „Diffusorströmungen“. In: *Stand der Forschung. Klima-Kälte-Heizung* 5 (1984), S. 195.

[20] J. F. Gülich. *Kreiselpumpen: Handbuch für Entwicklung, Anlagenplanung und Betrieb*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2010.

[21] R. Hirschberg. *Jährliches europäisches Teillastprofil von Heizungspumpen*. Fachbericht der VDMA. 2012.

[22] S. Imao, M. Itohi und T. Harada. „Turbulent characteristics of the flow in an axially rotating pipe“. In: *Int. J. heat and fluid flow* 17.5 (1996), S. 444–451.

[23] S. Imao, Q. Zhang und Y. Yamada. „The laminar flow in the developing region of a rotating pipe“. In: *Bulletin of JSME* 32 (1989), S. 317–323.

[24] S. Jakirlic, K. Hanjalic und C. Tropea. „Modeling rotating and swirling turbulent flows: a perpetual challenge“. In: *AIAA journal* 40.10 (2002), S. 1984–1996.

[25] G. Jungnitz. „Rechnerische Untersuchung von Diffusoren“. In: *Forsch. im Ingenieurw.* 16.2 (1949), S. 60–62.

[26] Th. v. Kármán. „Über laminare und turbulente Reibung“. In: *ZAMM* 1.4 (1921), S. 233–252.

[27] K. Kikuyama, M. Murakami und K. Nishibori. „Developement of three-dimensional turbulent boundary layer in an axially rotating pipe“. In: *J. Fluids Engng.* 105 (1983), S. 154–160.

[28] K. Kikuyama *et al.* „Flow in an axially rotating pipe. A calculation of flow in the saturated region“. In: *Bulletin of JSME* 26 (1983), S. 506–513.

[29] S. Lang. „Effiziente Berechnung von Gleitlagern und Dichtspalten in Turbomaschinen“. Diss. Technische Universität Darmstadt, eingereicht, 2017.

[30] Z. Lavan, H. Nielsen und A.A. Fejer. „Separation and flow reversal in swirling flows in circular ducts“. In: *Phys. Fluids* 12 (1969), S. 1747–1757.

[31] F. Levy. „Strömungserscheinungen in rotierenden Rohren“. Diss. Technischen Hochschule München, 1927.

[32] M. Murakami und K. Kikuyama. „Turbulent flow in axially rotating pipes“. In: *J. Fluids Engng.* 102 (1980), S. 97–103.

[33] H. Nagib *et al.* „Experimental study of turbulent flow in a rotating channel“. In: *J. Fluids Engng.* 24 (1973), S. 770–773.

[34] A.F. Najafi *et al.* „Boundary layer solution for the turbulent swirling decay flow through a fixed pipe: SBR at the inlet“. In: *Int. J. Engng. Sc.* 43 (2005), S. 107–120.

[35] J. Nikuradse. „Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren“. In: *Forschung im Ingenieurwesen* 3 (1932), S. 1–36.

[36] J. Nikuradse. „Strömungsgesetze in rauhen Rohren“. In: *VDI Forschungsheft* 361 (1933), S. 1–22.

[37] K. Nishibori, K. Kikuyama und M. Murakami. „Laminarization of turbulent flow in the inlet region of an axially rotating pipe“. In: *Bulletin of JSME* 30 (1987), S. 255–262.

[38] M. Oberlack. „Similarity in non-rotating and rotating turbulent pipe flows“. In: *J. Fluid Mech.* 379 (1999), S. 1–22.

[39] P.F. Pelz. *250 Jahre Energienutzung: Algorithmen übernehmen Synthese, Planung und Betrieb von Energiesystemen.* Festvortrag anlässlich der Ehrenpromotion von Hans-Ulrich Banzhaf an der Universität Siegen. 23.01.2014.

[40] P.F. Pelz, U. Lorenz und G. Ludwig. „Besser geht's nicht. TOR plant das energetisch optimale Fluidsystem“. In: *chemie & more* 1 (2014), S. 10–14.

[41] P.F. Pelz und P. Taubert. „Vortex induced transient stall“. In: *J. Fluids Engn. eingereicht* (2017).

[42] P.F. Pelz, P. Taubert und F.-J. Cloos. „Vortex structure and kinematics of encased axial turbomachines“. In: *Proceedings of 17th ISROMAC.* 2017.

[43] J. Piquet. *Turbulent Flows: models and physics.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1999.

[44] K. Pohlhausen. „Zur näherungsweisen Integration der Differentialgleichung der laminaren Grenzschicht“. In: *ZAMM* 1.4 (1921), S. 252–268.

[45] S.B. Pope. *Turbulent Flows.* Cambridge University Press, Cambridge, 2011.

[46] L. Prandtl. „Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung.“ In: *III Internationalen Mathematiker-Kongresses, Heidelberg.* 1904.

[47] G. Reich. „Strömung und Wärmeübertragung in einem axial rotierenden Rohr“. Diss. Technische Hochschule Darmstadt, 1988.

[48] G. Reich und H. Beer. „Fluid flow and heat transfer in an axially rotating pipe - I. Effect of rotation on turbulent pipe flow“. In: *Int. J. Heat Fluid Fl.* 32.3 (1989), S. 551–562.

[49] G. Reich, B. Weigand und H. Beer. „Fluid flow and heat transfer in an axially rotating pipe - II. Effect of rotation on laminar pipe flow“. In: *Int. J. Heat Fluid Fl.* 32.3 (1989), S. 563–574.

[50] H. Schlichting. *Grenzschicht-Theorie.* G. Braun GmbH, Karlsruhe, 1965.

[51] H. Schlichting und K. Gersten. „Berechnung der Strömung in rotationssymmetrischen Diffusoren mit Hilfe der Grenzschichttheorie“. In: *Z. Flugwiss* 9.4/5 (1961), S. 136–140.

[52] F. Seifert. „Berechnung inkompressibler reibungsbehafteter Ringdiffusorströmungen nach der Schlankkanaltheorie“. Diss. Ruhr-Universität Bochum, 2006.

[53] J. Smagorinsky. „General circulation experiments with the primitive equations: I. the basic experiment“. In: *Monthly weather review* 91.3 (1963), S. 99–164.

[54] J.H. Spurk und N. Aksel. *Strömungslehre: Einführung in die Theorie der Strömungen*. Springer, Berlin Heidelberg New York, 2006.

[55] D. Stapp. *Experimentelle und analytische Untersuchung zur Drallgrenzschicht*. Diss. Forschungsberichte zur Fluidsystemtechnik Band 6, Technische Universität Darmstadt. Shaker Verlag, Aachen, 2015.

[56] D. Stapp und P.F. Pelz. „Evolution of swirl boundary layer and wall stall at part load - a generic experiment“. In: *Proceedings of ASME Turbo Expo GT2014–26235*. 2014.

[57] D. Stapp, P.F. Pelz und J.M. Loens. „On part load recirculation of pumps and fans - a generic study“. In: *Proceedings of the 6th International Conference On Pumps an Fans with Compressors and Wind Turbines*. 2013, S. 022003.

[58] B.S. Stratford. „Flow in the laminar boundary layer near separation“. Diss. Department of Aerodynamics (Potential Flow & Boundary Layers), Imperial College London, 1954.

[59] B.S. Stratford. „The prediction of separation of the turbulent boundary layer“. In: *J. Fluid Mech.* 5 (1959), S. 1–16.

[60] Y. Suematsu, T. Ito und T. Hayase. „Vortex breakdown phenomena in a circular pipe“. In: *Bulletin of JSME* 26 (1986), S. 4122–4129.

[61] W. Szablewski. „Turbulente Strömungen in divergenten Kanälen“. In: *Arch. Appl. Mech.* 22.4 (1954), S. 268–281.

[62] W. Szablewski. „Turbulente Strömungen in konvergenten Kanälen“. In: *Arch. Appl. Mech.* 20.1 (1952), S. 37–45.

[63] G.I. Taylor. „The boundary layer in the converging nozzle of a swirl atomizer“. In: *The Quarterly J. Mech. and Appl. Mathe.* 3.2 (1950), S. 129–139.

[64] C. Truesdell. „Zusammenfassender Bericht: Die Entwicklung des Drallsatzes“. In: *ZAMM* 44.4-5 (1964), S. 149–158.

[65] B. Weigand und H. Beer. „Fluid flow and heat transfer in an axially rotating pipe: the rotational entrance“. In: *Proceedings of the 3rd ISROMAC*. 1992, S. 325–340.

[66] B. Weigand und H. Beer. „On the universality of the velocity profiles of a turbulent flow in an axially rotating pipe“. In: *Appl. Sc. Research* 52 (1994), S. 115–132.

[67] A. White. „Flow of a fluid in an axially rotating pipe“. In: *J. Mech. Engng. Sc.* 6 (1964), S. 47–52.

[68] Z. Zhang. *LDA application methods*. Springer, Heidelberg Dordrecht London New York, 2013.

[69] A.-L. Zimmermann. „Instabilitäten im Eintrittsbereich eines rotierenden Rohres“. Master-Thesis. Technische Universität Darmstadt, 2015.

Anhang A

Größenordnungsabschätzung

Für die Größenordnungsanalyse der beschreibenden Gleichungen ist es notwendig die viskosen und Reynoldschen Spannungen abzuschätzen. Dafür wird das Cauchy-Poisson-Gesetz für ein Newtonsches Fluid für die viskosen Spannungen und das Mischungswegmodell für die Reynoldschen Spannungen verwendet. Dieses Vorgehen ist äquivalent zu der Größenordnungsanalyse von Cloos *et al.*[1] für die Strömung in einem rotierenden Kreiszylinder.
Zuerst müssen die Größenordnungen der Geschwindigkeitskomponenten und des Drucks abgeleitet werden. Dazu wird die Kontinuitätsgleichung für die zeitlich-gemittelten Geschwindigkeiten in der Grenzschicht verwendet

$$\underbrace{\frac{\partial u_\mathrm{y}}{\partial y}}_{\mathcal{O}(\varphi)} - \underbrace{\frac{u_\mathrm{y}}{1-y}}_{\mathcal{O}(\varphi\delta)} + \underbrace{R\frac{\partial u_\mathrm{z}}{\partial z}}_{\mathcal{O}(\varphi)} + \underbrace{u_\mathrm{z}\frac{\partial R}{\partial z}}_{\mathcal{O}(\varphi\alpha)} = 0 \tag{A.1}$$

und liefert $u_\mathrm{y} \sim \varphi\delta$, da aus der Dimensionsanalyse folgt $u_\mathrm{z}, U_\mathrm{z} \sim \varphi$, $u_\phi \sim 1$, $y \sim \delta, \delta_\mathrm{S}$ inklusive der Annahme $\delta, \delta_\mathrm{S}, |\alpha| \ll 1$. Mit der Kontinuitätsgleichung für die Schwankungsgrößen

$$\frac{\partial u'_\mathrm{y}}{\partial y} - \frac{u'_\mathrm{y}}{1-y} + R\frac{\partial u'_\mathrm{z}}{\partial z} + u'_\mathrm{z}\frac{\partial R}{\partial z} = 0. \tag{A.2}$$

werden die Größenordnungen der Schwankungsgrößen relativ zueinander abgeleitet und es folgt $\mathcal{O}(u'_\mathrm{y}) \sim \delta\mathcal{O}(u'_\mathrm{z})$. Die Größenordnung des statischen Druckes in der Kernströmung wird anhand der axialen Komponente der Euler Gleichung (3.3) zu $P \sim \varphi^2$ bestimmt. Mit diesem Ergebnis und dem Druckfeld (3.2) wird die Größenordnung des Druckes innerhalb der Drallgrenzschicht zu $p \sim (\delta + \varphi^2)$ bestimmt. Die Angabe der Größenordnung als Summe wird hier und im Folgenden für die Fallunterscheidung verwendet.

[1] Cloos, Stapp und Pelz, „Swirl boundary layer and flow separation at the inlet of a rotating pipe“, ([11], 2017)

Mit dem Cauchy-Poisson-Gesetz für ein Newtonsches Fluid

$$\tau_{ij} = \frac{4}{R^2\,Re}\,e_{ij} \tag{A.3}$$

werden die auftretenden viskosen Spannungen modelliert und abgeschätzt. Die Komponenten des Deformationsgeschwindigkeitstensors $\underline{E}$ für ein Zylinderkoordinatensystem ist Spurk und Aksel[2] zu entnehmen. Hier wird der Deformationsgeschwindigkeitstensor mit den dimensionslosen, zeitlich-gemittelten Geschwindigkeiten gebildet. Damit ergeben sich die folgenden Komponenten des viskosen Schubspannungstensors

$$\tau_{\mathrm{zz}} = \underbrace{\frac{4}{R^2\,Re}}_{\mathcal{O}(\delta^2)}\underbrace{\frac{\partial R\,u_{\mathrm{z}}}{\partial z}}_{\mathcal{O}(\varphi)} \approx \frac{4}{R\,Re}\frac{\partial u_{\mathrm{z}}}{\partial z} \sim \mathcal{O}\left(\varphi\delta^2\right), \tag{A.4}$$

$$\tau_{\mathrm{rz}} = -\tau_{\mathrm{yz}} = \underbrace{\frac{2}{R^2\,Re}}_{\mathcal{O}(\delta^2)}\left(\underbrace{-\frac{\partial R\,u_{\mathrm{y}}}{\partial z}}_{\mathcal{O}(\varphi\delta)} - \underbrace{\frac{\partial u_{\mathrm{z}}}{\partial y}}_{\mathcal{O}(\varphi/\delta)}\right) \approx -\frac{2}{R^2\,Re}\frac{\partial u_{\mathrm{z}}}{\partial y} \sim \mathcal{O}\left(\varphi\delta\right), \tag{A.5}$$

$$\tau_{\mathrm{r}\phi} = -\tau_{\mathrm{y}\phi} = \underbrace{\frac{2}{R^2\,Re}}_{\mathcal{O}(\delta^2)}\left(\underbrace{-\frac{\partial u_{\phi}}{\partial y}}_{\mathcal{O}(1/\delta)} - \underbrace{\frac{u_{\phi}}{1-y}}_{\mathcal{O}(1)}\right) \approx -\frac{2}{R^2\,Re}\frac{\partial u_{\phi}}{\partial y} \sim \mathcal{O}\left(\delta\right), \tag{A.6}$$

$$\tau_{\mathrm{z}\phi} = \underbrace{\frac{2}{R^2\,Re}}_{\mathcal{O}(\delta^2)}\underbrace{\frac{\partial R\,u_{\phi}}{\partial z}}_{\mathcal{O}(1)} \sim \mathcal{O}\left(\delta^2\right) \tag{A.7}$$

mit der Größenordnung $\mathcal{O}(Re) \sim 1/\delta^2$ für eine laminare Strömung.[3,4] Für eine turbulente Strömung ist die Größenordnung der Reynoldszahl viel größer und Messungen ergeben $\mathcal{O}(Re) \sim 10^4 \sim 1/\delta^4$. Für eine obere Grenze der Größenordnung der viskosen Schubspannungen wird $\mathcal{O}(Re) \sim 1/\delta^2$ angenommen, da die Reynoldszahl einzig im Nenner steht.
In Pope[4] wird ein Wirbelviskositätsmodell vorgestellt, um die Reynoldschen Spannungen

$$\tau_{ij,\mathrm{turb}} = -\overline{u_i' u_j'} = -\frac{2}{3}K\delta_{ij} + \frac{2\nu_{\mathrm{turb}}}{R^2}\overline{e}_{ij} \tag{A.8}$$

[2] Spurk und Aksel, *Strömungslehre: Einführung in die Theorie der Strömungen*, ([54], 2006)

[3] Schlichting, *Grenzschicht-Theorie*, ([50], 1965)

[4] Pope, *Turbulent Flows*, ([45], 2011)

zu modellieren mit den zeitlich-gemittelten Schwankungsgrößen $\overline{u_i' u_j'}$, der turbulenten Viskosität $\nu_{\text{turb}} = \tilde{\nu}_{\text{turb}}/(2\tilde{\Omega}\tilde{R}_0^2)$, der turbulenten, kinetischen Energie $K = \tilde{K}/(\tilde{\Omega}R\tilde{R}_0)^2$ und dem Kronecker Delta δ_{ij}. Smagorinsky[5] schlägt vor, die dimensionslose turbulente Viskosität

$$\nu_{\text{turb}} = \frac{1}{2}(Rl)^2\,(2e_{ij}e_{ij})^{\frac{1}{2}} \tag{A.9}$$

mit dem Deformationsgeschwindigkeitstensor zu modellieren mit der Mischungsweglänge l. Mit dem Deformationsgeschwindigkeitstensor wird Gleichung (A.9) zu

$$\begin{aligned}\nu_{\text{turb}} =& \frac{1}{2}(Rl)^2\Bigg[\underbrace{2\left(\frac{\partial u_{\text{y}}}{\partial y}\right)^2}_{\mathcal{O}(\varphi^2)} + \underbrace{2\left(-\frac{u_{\text{y}}}{1-y}\right)^2}_{\mathcal{O}(\varphi^2\delta^2)} + \underbrace{2\left(\frac{\partial R\,u_{\text{z}}}{\partial z}\right)^2}_{\mathcal{O}(\varphi^2)} + \\ &+ \underbrace{\left(\frac{\partial u_\phi}{\partial y} + \frac{u_\phi}{1-y}\right)^2}_{\mathcal{O}(1/\delta^2)} + \underbrace{\left(\frac{\partial R\,u_{\text{y}}}{\partial z} + \frac{\partial u_{\text{z}}}{\partial y}\right)^2}_{\mathcal{O}(\varphi^2/\delta^2)} + \underbrace{\left(\frac{\partial R\,u_\phi}{\partial z}\right)^2}_{\mathcal{O}(1)}\Bigg]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{A.10}$$

Für $\varphi \ll 1$ ist $\partial u_\phi/\partial y$ der dominierende Term und für $\varphi \gg 1$ dominiert $\partial u_{\text{z}}/\partial y$ in Gleichung (A.10). Somit reduziert sich Gleichung (A.10) zu

$$\nu_{\text{turb}} \approx \frac{1}{2}(Rl)^2\left[\left(\frac{\partial u_\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_{\text{z}}}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \sim \mathcal{O}\left(\frac{l^2}{\delta}\sqrt{1+\varphi^2}\right). \tag{A.11}$$

Die Mischungsweglänge ist

$$l \approx \kappa y - 0.44\frac{y^2}{\delta} \sim \delta^2 \tag{A.12}$$

mit der von Kármán Konstante $\kappa = 0.4$ und ist unabhängig von Rauheiten.[6,7] In einem rotierenden Kreiszylinder ist die Mischungsweglänge kürzer als in einem nicht-rotierenden Kreiszylinder. Deshalb wird in einigen Arbeiten eine verkürzte Mischungsweglänge mit der Richardsen Zahl model-

[5] Smagorinsky, „General circulation experiments with the primitive equations: I. the basic experiment“, ([53], 1963)

[6] Nikuradse, „Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren“, ([35], 1932)

[7] Nikuradse, „Strömungsgesetze in rauhen Rohren“, ([36], 1933)

liert[8,9,10,11,12], da die Zentrifugalkraft die Turbulenz dämpft. Es wird $l = \kappa y$ als eine konservative Abschätzung angenommen mit der Größenordnung δ^2, da $\kappa \sim \delta$ ist und somit hat die turbulente Viskosität eine Größenordnung von $\mathcal{O}(\nu_{\text{turb}}) \sim \delta^3\sqrt{1+\varphi^2}$.
Die turbulente kinetische Energie ist

$$K = \frac{1}{2}\overline{u_i' u_i'} = \frac{1}{2}\left(\overline{u_{\text{z}}' u_{\text{z}}'} + \overline{u_{\text{y}}' u_{\text{y}}'} + \overline{u_\phi' u_\phi'}\right). \tag{A.13}$$

Im Folgenden wird keine Modellierung der Reynoldschen Spannungen vorgenommen, sondern einzig deren Größenordnung mit dem Deformationsgeschwindigkeitstensor, Gleichung (A.8), (A.11) und (A.12) abgeschätzt:

$$\overline{u_i' u_j'} = \frac{1}{3}\overline{u_m' u_n'}\delta_{mn} - \nu_{\text{turb}}\overline{e}_{ij} \tag{A.14}$$

$$\overline{u_{\text{y}}' u_{\text{y}}'} = \frac{1}{2}\left(\overline{u_\phi' u_\phi'} + \overline{u_{\text{z}}' u_{\text{z}}'}\right) - \frac{3}{2}\nu_{\text{turb}}\frac{\partial u_{\text{y}}}{\partial y}, \tag{A.15}$$

$$\overline{u_\phi' u_\phi'} = \frac{1}{2}\left(\overline{u_{\text{y}}' u_{\text{y}}'} + \overline{u_{\text{z}}' u_{\text{z}}'}\right) + \frac{3}{2}\nu_{\text{turb}}\frac{u_{\text{y}}}{1-y}, \tag{A.16}$$

$$\overline{u_{\text{z}}' u_{\text{z}}'} = \frac{1}{2}\left(\overline{u_{\text{y}}' u_{\text{y}}'} + \overline{u_\phi' u_\phi'}\right) - \frac{3}{2}\nu_{\text{turb}}\frac{\partial R u_{\text{z}}}{\partial z}, \tag{A.17}$$

$$\begin{aligned}\overline{u_{\text{y}}' u_\phi'} = & \underbrace{\frac{1}{2}\nu_{\text{turb}}}_{\mathcal{O}\left(\delta^3\sqrt{1+\varphi^2}\right)} \underbrace{\left(\frac{\partial u_\phi}{\partial y} + \frac{u_\phi}{R-y}\right)}_{\mathcal{O}(1/\delta+1)} \approx \\ & \approx \frac{1}{2}\nu_{\text{turb}}\frac{\partial u_\phi}{\partial y} \sim \mathcal{O}\left(\delta^2\sqrt{1+\varphi^2}\right),\end{aligned} \tag{A.18}$$

$$\begin{aligned}\overline{u_{\text{y}}' u_{\text{z}}'} = & \underbrace{\frac{1}{2}\nu_{\text{turb}}}_{\mathcal{O}\left(\delta^3\sqrt{1+\varphi^2}\right)} \underbrace{\left(\frac{\partial u_{\text{z}}}{\partial y} + \frac{\partial R u_{\text{y}}}{\partial z}\right)}_{\mathcal{O}(\varphi/\delta+\varphi\delta)} \approx \\ & \approx \frac{1}{2}\nu_{\text{turb}}\frac{\partial u_{\text{z}}}{\partial y} \sim \mathcal{O}\left(\varphi\delta^2\sqrt{1+\varphi^2}\right),\end{aligned} \tag{A.19}$$

[8] Kikuyama *et al.*, „Flow in an axially rotating pipe. A calculation of flow in the saturated region“, ([28], 1983)

[9] Reich und Beer, „Fluid flow and heat transfer in an axially rotating pipe - I. Effect of rotation on turbulent pipe flow“, ([48], 1989)

[10] Reich, Weigand und Beer, „Fluid flow and heat transfer in an axially rotating pipe - II. Effect of rotation on laminar pipe flow“, ([49], 1989)

[11] Weigand und Beer, „Fluid flow and heat transfer in an axially rotating pipe: the rotational entrance“, ([65], 1992)

[12] Weigand und Beer, „On the universality of the velocity profiles of a turbulent flow in an axially rotating pipe“, ([66], 1994)

$$\overline{u_z' u_\phi'} = - \underbrace{\frac{1}{2}\nu_{\text{turb}}}_{\mathcal{O}\left(\delta^3\sqrt{1+\varphi^2}\right)} \underbrace{\frac{\partial R u_\phi}{\partial z}}_{\mathcal{O}(1)} \sim \mathcal{O}\left(\delta^3\sqrt{1+\varphi^2}\right) \tag{A.20}$$

Für die Abschätzung der Reynoldschen Spannung in Normalenrichtung wird zuerst Gleichung (A.17) von (A.15) subtrahiert

$$\overline{u_z' u_z'} - \overline{u_y' u_y'} = \underbrace{\nu_{\text{turb}}}_{\mathcal{O}\left(\delta^3\sqrt{1+\varphi^2}\right)} \underbrace{\left(\frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{\partial R u_z}{\partial z}\right)}_{\mathcal{O}(\varphi)} \sim \mathcal{O}\left(\varphi\delta^3\sqrt{1+\varphi^2}\right). \tag{A.21}$$

Mit der Information aus Gleichung (A.2) $\mathcal{O}(u_y') \sim \delta\mathcal{O}(u_z')$, muss $\overline{u_z' u_z'}$ die rechte Seite von Gleichung (A.21) ausgleichen, folglich ist $\mathcal{O}(\overline{u_z' u_z'}) \sim \varphi\delta^3\sqrt{1+\varphi^2}$ und $\mathcal{O}(\overline{u_y' u_y'}) \sim \varphi\delta^5\sqrt{1+\varphi^2}$. Anschließend kann Gleichung (A.16) abgeschätzt werden und es folgt $\mathcal{O}(\overline{u_\phi' u_\phi'}) \sim \varphi\delta^3\sqrt{1+\varphi^2}$. Die vorliegenden Größenordnungen der viskosen und Reynoldsschen Spannungen werden bei der Größenordnungsanalyse der radialen und axialen Komponente des Impulssatzes und der axialen Komponente des Drallsatzes verwendet, um diese Gleichungen für die vorliegende Strömung zu vereinfachen.
Die radiale Komponente des Impulssatzes unter Berücksichtigung der Reynolds-Zerlegung[13] und Gleichung (A.2) lautet

$$\begin{aligned}
&- \underbrace{u_y \frac{\partial u_y}{\partial y}}_{\mathcal{O}(\varphi^2\delta)} - \underbrace{u_z \frac{\partial R u_y}{\partial z}}_{\mathcal{O}(\varphi^2\delta)} - \underbrace{\frac{u_\phi^2}{1-y}}_{\mathcal{O}(1)} = \underbrace{\frac{\partial p}{\partial y}}_{\mathcal{O}(1)} + \\
&+ \underbrace{\frac{2}{R^2 Re}}_{\mathcal{O}(\delta^2)} \left[- \underbrace{\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}}_{\mathcal{O}(\varphi/\delta)} + \underbrace{\frac{1}{1-y}\frac{\partial u_y}{\partial y}}_{\mathcal{O}(\varphi)} - \underbrace{R\frac{\partial^2 R\, u_y}{\partial z^2}}_{\mathcal{O}(\varphi\delta)} + \underbrace{\frac{u_y}{(1-y)^2}}_{\mathcal{O}(\varphi\delta)} \right] + \\
&+ \underbrace{\frac{\partial \overline{u_y' u_y'}}{\partial y}}_{\mathcal{O}\left(\varphi\delta^4\sqrt{1+\varphi^2}\right)} + \underbrace{\frac{\partial R\, \overline{u_y' u_z'}}{\partial z}}_{\mathcal{O}\left(\varphi\delta^2\sqrt{1+\varphi^2}\right)} - \underbrace{\frac{\overline{u_y' u_y'}}{1-y}}_{\mathcal{O}\left(\varphi\delta^5\sqrt{1+\varphi^2}\right)} + \underbrace{\frac{\overline{u_\phi' u_\phi'}}{1-y}}_{\mathcal{O}\left(\varphi\delta^3\sqrt{1+\varphi^2}\right)} + \\
&+ \underbrace{\overline{u_y' u_z'}\frac{\partial R}{\partial z}}_{\mathcal{O}\left(\varphi\delta^2\sqrt{1+\varphi^2}\right)} .
\end{aligned} \tag{A.22}$$

[13] Pope, *Turbulent Flows*, ([45], 2011)

Für $\varphi \sim 1$ bzw. $\varphi \ll 1 \sim \delta$ sind die viskosen Schubspannugen um δ bzw. δ^2, die Reynoldsspannungen um δ^2 bzw. δ^3 und die ersten beiden Terme auf der linken Seite um δ bzw. δ^3 Größenordnungen kleiner als der dritte Term auf der linken Seite bzw. der erste Term auf der rechten Seite und können vernachlässigt werden. Gleichung (A.22) vereinfacht sich zu Gleichung (3.1) unter Vernachlässigung der Terme mit der Größenordnung kleiner gleich $\varphi\delta$. Für $\varphi \gg 1$ ($u_\phi \to 0$) kann die radiale Komponente des Druckgradients vernachlässigt werden $\partial p/\partial y = 0$, da die Strömung in eine zweidimensionale Grenzschichtströmung übergeht.[14]
Unter Berücksichtigung der viskosen und Reynoldsschen Spannungen lautet die zz-Komponente des Spannungstensors

$$\tau_{zz} = -p + \tau_{zz} + \tau_{zz,\mathrm{turb}} \sim \mathcal{O}\left(\delta + \varphi^2 + \varphi\delta^2 + \varphi\delta^3\sqrt{1+\varphi^2}\right) \tag{A.23}$$

und die axiale Komponente des Impulssatzes für das Kontrollvolumen in Abbildung (1.3) ist

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}R^4\int_0^\delta (1-y)u_\mathrm{z}^2\,\mathrm{d}y}_{\mathcal{O}(\delta\varphi^2)} - \underbrace{U_\mathrm{z}R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}R^3\int_0^\delta (1-y)u_\mathrm{z}\,\mathrm{d}y}_{\mathcal{O}(\delta\varphi^2)} = \\
&= \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}R^4\int_0^\delta (1-y)\tau_{zz}\,\mathrm{d}y}_{\mathcal{O}\left(\delta^2+\delta\varphi^2+\varphi\delta^3+\varphi\delta^4\sqrt{1+\varphi^2}\right)} - \underbrace{R^3(1-\delta)\tau_{zz,\delta}\frac{\mathrm{d}\delta R}{\mathrm{d}z}}_{\mathcal{O}\left(\delta^2+\delta\varphi^2+\varphi\delta^3+\varphi\delta^4\sqrt{1+\varphi^2}\right)} + \\
&- R^3\left(\underbrace{\tau_{yz,\mathrm{w}}\cos\alpha}_{\mathcal{O}(\varphi\delta)} + \underbrace{\tau_{zz,\mathrm{w}}\sin\alpha}_{\mathcal{O}(\delta+\varphi^2)}\right).
\end{aligned} \tag{A.24}$$

An der Wand verschwinden die Reynoldsspannungen sowie die viskose Wandschunspannung in zz-Richtung aus kinematischen Gründen. An der Stelle $y = \delta$ verschwinden die Schubspannungen wegen der rotationsfreien Außenströmung. Die Reynoldschen Spannungen und die Schubspannungen in zz-Richtung in der Flüssigkeit können für $\varphi \ll 1$ und $\varphi \sim 1$ vernachlässigt werden. Für $\varphi \sim \delta \ll 1$ wird offensichtlich, dass die Zentrifugalkraft Gleichung (A.24) dominiert. Die konvektiven Terme sind dann um die Größenordnung δ kleiner als die Zentrifugalkraft und die Wandschubspannungen. Für $\varphi \sim 1$ ist die Zentrifugalkraft um die Größenordnung δ kleiner

[14] Schlichting, *Grenzschicht-Theorie*, ([50], 1965)

als die Wandschubspannung und die konvektiven Terme. Der Einfluss der Zentrifugalkraft kann für diesen Bereich vernachlässigt werden wie es in der Grenzschichttheorie üblich ist, $\partial p/\partial y = 0$. Somit vereinfacht sich die axiale Komponente des Impulssatzes zu Gleichung (3.4) unter Vernachlässigung der Terme mit der Größenordnung kleiner gleich $\varphi\delta^3$.
Abschließend wird eine Größenordnungsanalyse der axialen Komponente des Drallsatzes vollzogen. Dabei ist die Größenordnung der $z\phi$-Komponente des Spannungstensors

$$\tau_{\mathrm{z\phi}} = \tau_{\mathrm{z\phi}} + \tau_{\mathrm{z\phi,turb}} \sim \mathcal{O}\left(\delta^2 + \delta^3\sqrt{1+\varphi^2}\right). \tag{A.25}$$

Die axiale Komponente des Drallsatzes für ein Kontrollvolumen der Drallgrenzschichtdicke lautet

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}R^5\int_0^{\delta}(1-y)^2\,u_\phi u_\mathrm{z}\;\mathrm{d}y}_{\mathcal{O}(\varphi\delta)} + \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}R^5\,U_\mathrm{z}\int_{\delta}^{\delta_\mathrm{S}}(1-y)^2 u_\phi\;\mathrm{d}y}_{\mathcal{O}(\varphi\delta)} = \\
&= \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}R^5\int_0^{\delta_\mathrm{S}}(1-y)^2\tau_{\phi z}\;\mathrm{d}y}_{\mathcal{O}\left(\delta^3+\delta^4\sqrt{1+\varphi^2}\right)} - R^4\big(\underbrace{\tau_{\phi y,\mathrm{w}}\cos\alpha}_{\mathcal{O}(\delta)} + \underbrace{\tau_{\phi z,\mathrm{w}}\sin\alpha}_{\mathcal{O}(\delta^2)}\big).
\end{aligned} \tag{A.26}$$

Nahe der Wand verschwinden die Reynoldsspannungen aus kinematischen Gründen. Für $\varphi \sim 1$ und $\varphi \ll 1$ können die viskosen und die Reynoldschen Spannungen in der Flüssigkeit vernachlässigt werden, da sie mindestens um die Größenordnung δ kleiner sind als die konvektiven Terme. Die viskose Wandschubspannung in ϕz-Richtung ist nur für $\varphi \sim 1$ vernachlässigbar, da sie dann um die Größenordnung δ kleiner ist als die konvektiven Terme. Die axiale Komponente des Drallsatzes vereinfacht sich zu Gleichung (3.12) unter Vernachlässigung der Terme mit der Größenordnung kleiner gleich δ^3.

Anhang B

Gleichungssystem

In Mathematica 11 wird das Gleichungssystem bestehend aus den axialen Komponenten der Euler-Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}\left(PR^2\right)}{\mathrm{d}z} = -U_\mathrm{z} R \frac{\mathrm{d}\left(U_\mathrm{z} R\right)}{\mathrm{d}z}, \tag{3.3}$$

des Impulssatzes

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} R^4 \int_0^\delta (1-y)\, u_\mathrm{z}^2 \,\mathrm{d}y - U_\mathrm{z} R \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} R^3 \int_0^\delta (1-y)\, u_\mathrm{z} \,\mathrm{d}y = \\ &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} R^4 \int_0^\delta (1-y)\, p \,\mathrm{d}y + R^3 (1-\delta)\, p(\delta, z) \frac{\mathrm{d}\left(\delta R\right)}{\mathrm{d}z} + \\ &- R^3 \left(\tau_{\mathrm{yz,w}} \cos\alpha - p_\mathrm{w} \sin\alpha\right) + \mathcal{O}(\varphi\delta^3), \end{aligned} \tag{3.4}$$

und des Drallsatzes

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} R^5 \int_0^\delta (1-y)^2 u_\phi u_\mathrm{z} \,\mathrm{d}y + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} R^5 U_\mathrm{z} \int_\delta^{\delta_\mathrm{S}} (1-y)^2 u_\phi \,\mathrm{d}y = \\ &= -R^4 \left(\tau_{\mathrm{y}\phi,\mathrm{w}} \cos\alpha + \tau_{\mathrm{z}\phi,\mathrm{w}} \sin\alpha\right) + \mathcal{O}\left(\delta^3\right) \end{aligned} \tag{3.12}$$

sowie der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} R^3 \int_0^\delta (1-y)\, u_\mathrm{z} \,\mathrm{d}y + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} U_\mathrm{z} R^3 \int_\delta^1 (1-y) \,\mathrm{d}y = 0 \tag{3.13}$$

zusammen mit den gewählten Ansatzfunktionen, siehe Abschnitt 3.2, gelöst. Es wird nicht direkt die verallgemeinerte von Kármán Gleichung (3.7) gelöst, da so eine Umrechnung von der Verdrängungsdicke zu der axialen Grenzschichtdicke umgangen wird. Das Druckfeld (3.2) ist eine Eingangsgröße.

Anhang C

Sensitivitätsanalyse

In Abbildung C.1 wird der Einfluss der Parameter c und a aus Gleichung (3.18) bzw. (3.20) auf die Entwicklung der axialen Grenzschicht- und der Drallgrenzschichtdicke dargestellt. Dafür wird jeweils einer der beiden Parameter variiert. Hierbei werden die turbulenten Ansatzfunktionen verwendet mit einer axialen Grenzschichtdicke von $\delta_0 = 0.08$ am Eintritt.
Die Parametervariation hat nur einen geringfügigen Einfluss auf die Entwicklung der Grenzschichten. Beide Parameter verursachen eine Parallelverschiebung. Dabei hat Parameter a einen stärkeren Einfluss auf die Drallgrenzschichtdicke als Parameter c und umgekehrt für die axiale Grenzschichtdicke. Dies gilt auch für die Abhängigkeit der Grenzschichten von der Reynolds- und Durchflusszahl. Diese Sensitivitätsanalyse verdeutlicht nochmals die Stärke der Integralmethode. Die Ergebnisse sind robust gegenüber kleinen Änderungen der Ansatzfunktionen.

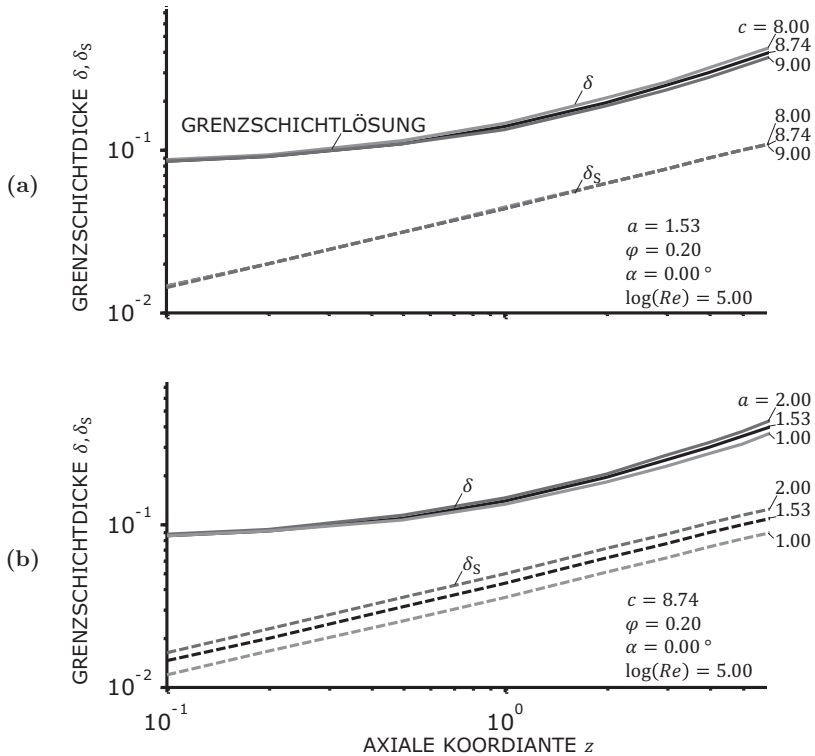


Abbildung C.1 – Axiale Grenzschichtdicke und Drallgrenzschichtdicke vs. axiale Koordinate für (a) variierter Parameter c aus Gleichung (3.18) und (b) variierter Parameter a aus Gleichung (3.20) mit einer turbulenten Zuströmung und $\delta_0 = 0.08$ aus [11] (bearbeitet).

Anhang D

Herleitung Stratford Kriterium

In diesem Abschnitt wird das Stratford Kriterium[1] für die beginnende Strömungsablösung einer turbulente Strömung für die vorliegende Strömung angepasst. Beginnend mit Gleichung (16) aus Stratford

$$\left(\frac{y^*}{\delta^*}\right)^{2-4n} = \frac{3(n\kappa\beta)^4}{n\,(n+1)\left(R\delta^*\frac{\mathrm{d}C_\mathrm{p}}{\mathrm{d}z}\right)^2}, \tag{D.1}$$

Gleichung (17)

$$\left(\frac{u}{u^*}\right)^2 = \frac{3n}{1+n}, \tag{D.2}$$

und Gleichung (18)

$$C_\mathrm{p} = \left[1-\left(\frac{u}{u^*}\right)^2\right]\left(\frac{y^*}{\delta^*}\right)^{2n}, \tag{D.3}$$

mit $y^* = y$, $\delta^* = \delta(G=0)$, $C_\mathrm{p} = 2(p_+ - p_0(A, G=0))/U_{\mathrm{z},0}^2$ und Gleichung (3.23) für p_+, liefert

$$\begin{aligned} &\frac{R\,\delta(A,G=0)}{U_{\mathrm{z},0}^2}\frac{\mathrm{d}p_\mathrm{w}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{p^*}{U_{\mathrm{z},0}^2}\right)^{\frac{1-2n}{2n}} = \\ &= \frac{1}{2}(n\kappa\beta)^2\left(\frac{1-2n}{2+2n}\right)^{\frac{1-2n}{2n}}\sqrt{\frac{3}{n(n+1)}}. \end{aligned} \tag{D.4}$$

Mit der Kontinuitätsgleichung an der Stelle $z=0$

$$\int_0^1 (1-y)\,\varphi\;\mathrm{d}z = \int_0^{\delta_0}(1-y)\,u_\mathrm{z}\;\mathrm{d}z + \int_{\delta_0}^1 (1-y)\,U_{\mathrm{z},0}^2\;\mathrm{d}z \tag{D.5}$$

[1] Stratford, „The prediction of separation of the turbulent boundary layer“, ([59], 1959)

wird ein Zusammenhang zwischen der Durchflusszahl, der dortigen axialen Grenzschichtdicke δ_0 und der dortigen Geschwindigkeit in der Kernströmung $U_{\mathrm{z},0}^2$ gegeben. Mit der gewählten Ansatzfunktion für das axiale Geschwindigkeitsprofil (siehe Abschnitt 3.2) gilt der Zusammenhang $\varphi = 6/(6 - 4\delta_0 + \delta_0^2)\, U_{\mathrm{z},0}$ für die Ansatzfunktion (3.15) mit $n = 2$ und $\varphi = 60/(60 - 15\delta_0 + 4\delta_0^2)\, U_{\mathrm{z},0}$ für die Ansatzfunktion (3.17) mit $n = 1/7$. Zusammenfassend vereinfacht sich Gleichung (D.4) zu Gleichung (3.25).

Anhang E

Technische Eigenschaften der Messsysteme

Tabelle E.1 – Technische Eigenschaften der verwendeten Sensoren.

Messgröße	Sensor	Messbereich	Genauigkeit
Temperatur	PT100 mit Jumo dTRANS T01 Messumformer	0 . . . 100 °C	±0.5 % v. E.
Spaltweite	Induktiver Abstandssensor TQ401	0 . . . 2 mm	±0.01 mm
Drehzahl	Optischer Signalgeber QJ500-M1K-E23 mit Brodersen PXF-20 Frequenzkonverter	0 . . . 500 Hz	±0.5 Hz
Position Traverse	integrierter Schrittzähler		±0.02 mm
Differenzdruck	Halstrup Multur GmbH PU10	0 . . . 1 kPa	±0.2 % v. E.
Differenzdruck	Halstrup Multur GmbH PU50	0 . . . 5 kPa	±0.2 % v. E.
Differenzdruck	Halstrup Multur GmbH PU100	0 . . . 10 kPa	±0.2 % v. E.
Differenzdruck	Sensortechnics LBA025B	−25 . . . 25 Pa	±4.5 % v. M.
Differenzdruck	Sensortechnics LBA025B	−250 . . . 250 Pa	±0.5 % v. E.

Anhang F

Validierung

In diesem Abschnitt ist die Validierung für alle verwendeten Öffnungswinkel (vgl. Tabelle 4.3) der vorliegenden Arbeit hinterlegt. Dabei werden beide Konfigurationen der Zuströmung (vgl. Tabelle 4.2) verwendet.

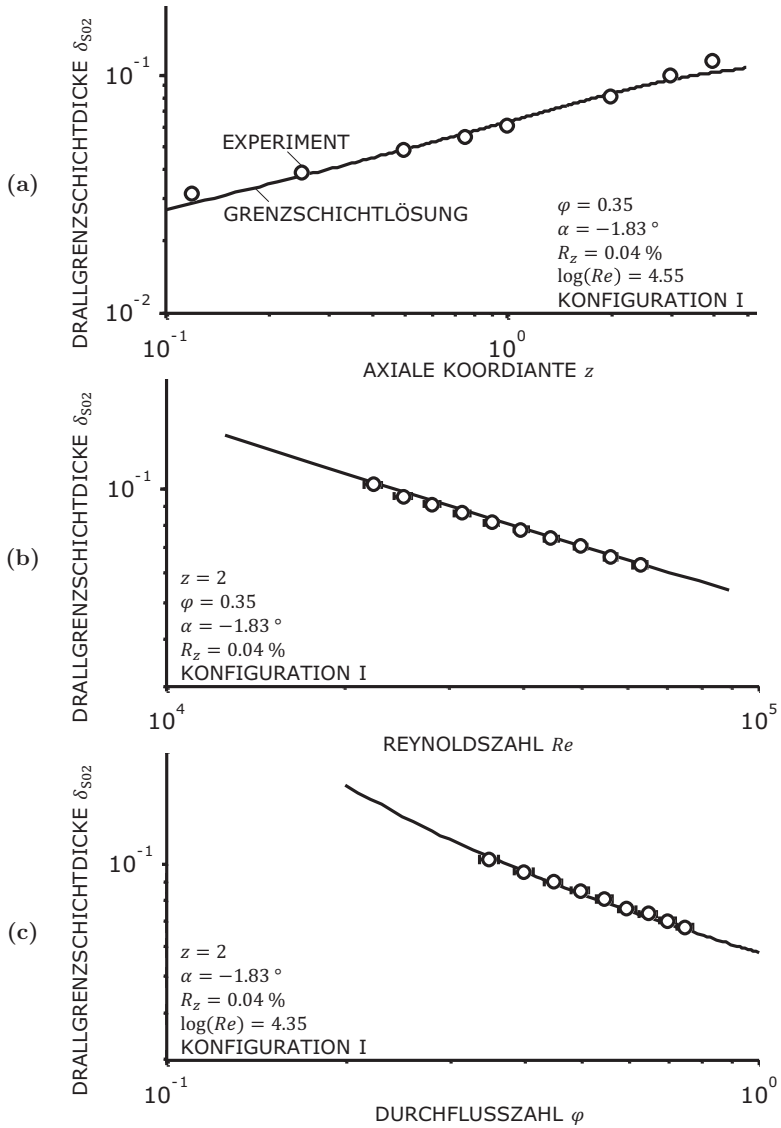


Abbildung F.1 – Drallgrenzschichtdicke vs. (a) axiale Koordinate, (b) Reynoldszahl und (c) Durchflusszahl für $\alpha = -1.83\,°$ und einer laminaren Zuströmung mit $\delta_0 \approx 0.1$. Experimentelle Daten aus [8, 9, 10].

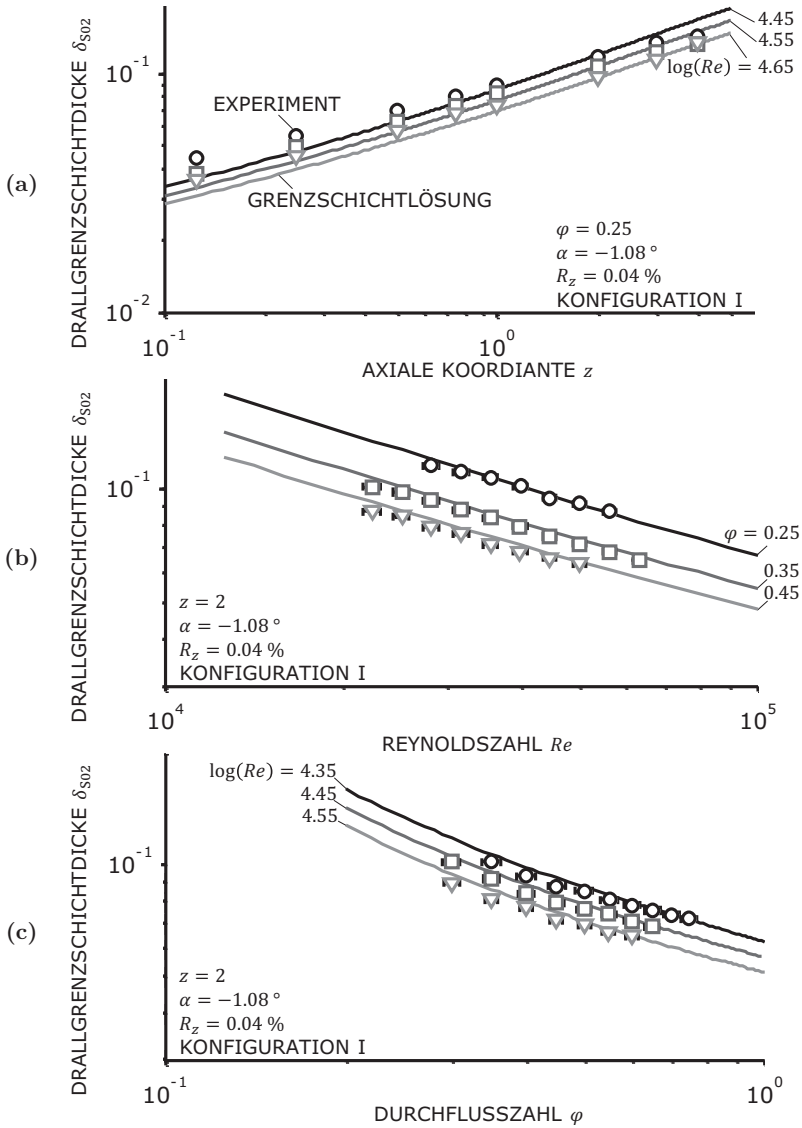


Abbildung F.2 – Drallgrenzschichtdicke vs. (a) axiale Koordinate, (b) Reynoldszahl und (c) Durchflusszahl für $\alpha = -1.08\,°$ und einer laminaren Zuströmung mit $\delta_0 \approx 0.1$. Experimentelle Daten aus [8, 9, 10].

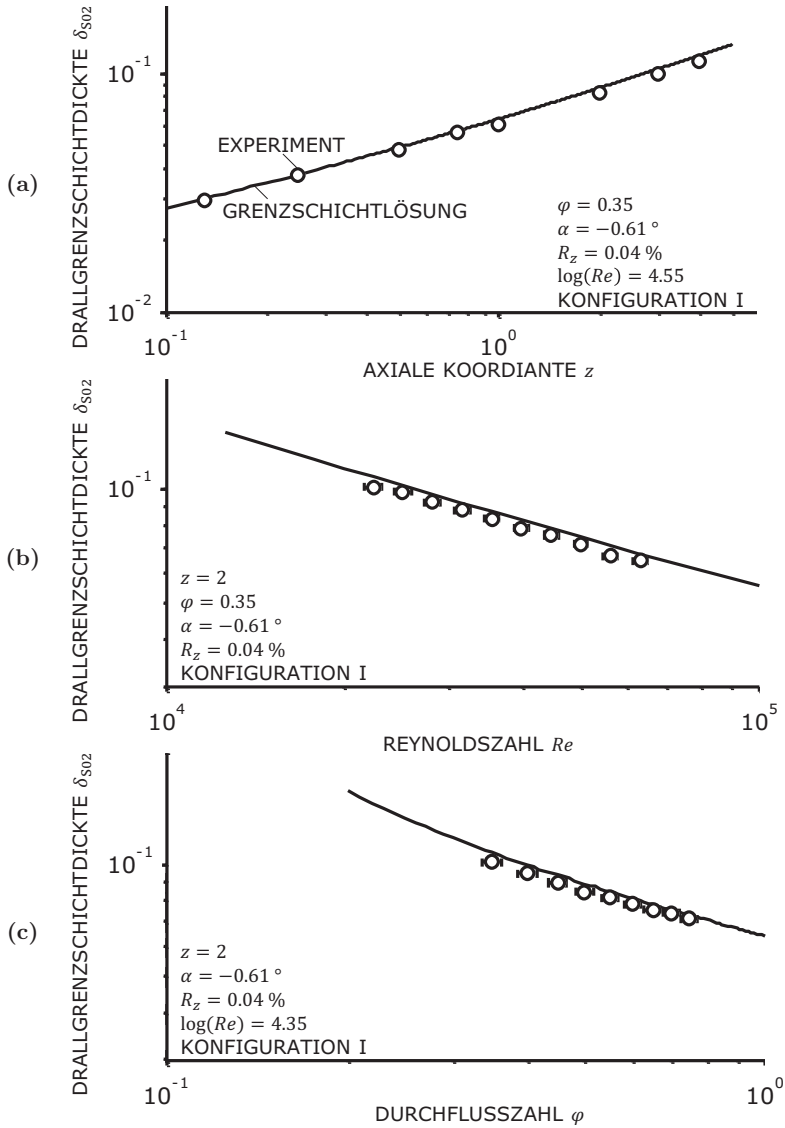


Abbildung F.3 – Drallgrenzschichtdicke vs. (a) axiale Koordinate, (b) Reynoldszahl und (c) Durchflusszahl für $\alpha = -0.61\,°$ und einer laminaren Zuströmung mit $\delta_0 \approx 0.1$. Experimentelle Daten aus [8, 9, 10].

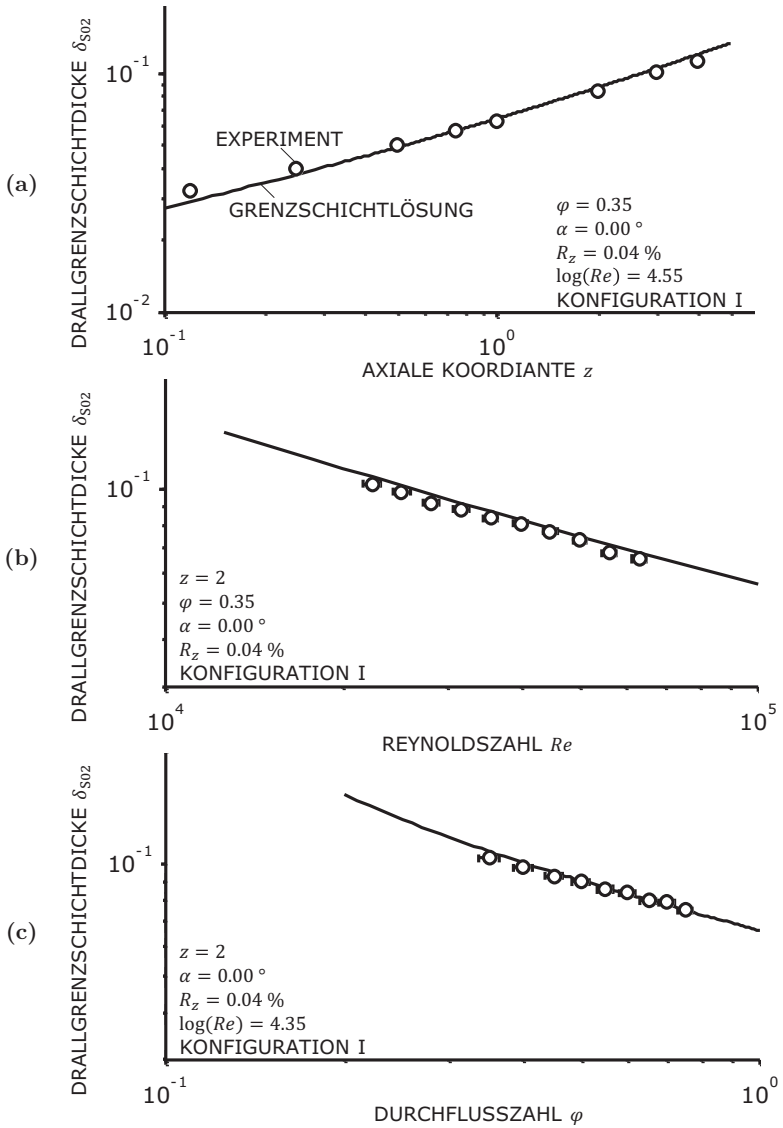


Abbildung F.4 – Drallgrenzschichtdicke vs. (a) axiale Koordinate, (b) Reynoldszahl und (c) Durchflusszahl für $\alpha = 0.00\,°$ und einer laminaren Zuströmung mit $\delta_0 \approx 0.1$. Experimentelle Daten aus [8, 9, 10].

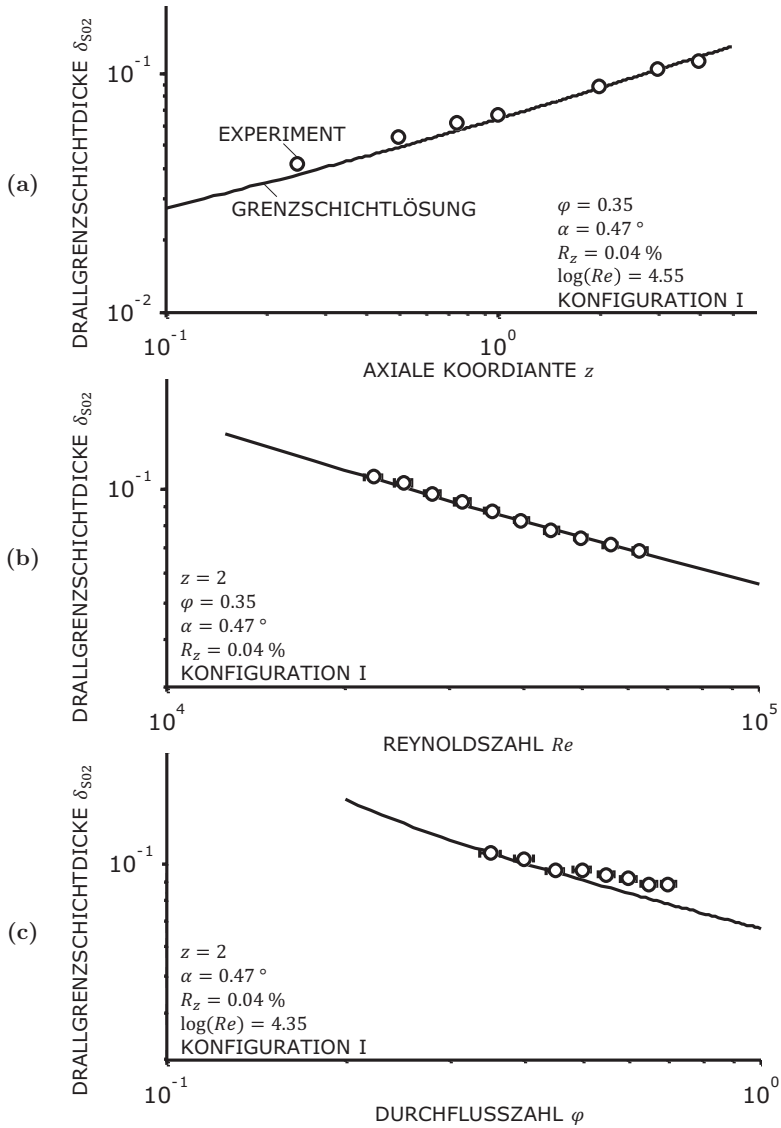


Abbildung F.5 – Drallgrenzschichtdicke vs. (a) axiale Koordinate, (b) Reynoldszahl und (c) Durchflusszahl für $\alpha = 0.47\,°$ und einer laminaren Zuströmung mit $\delta_0 \approx 0.1$. Experimentelle Daten aus [8, 9, 10].

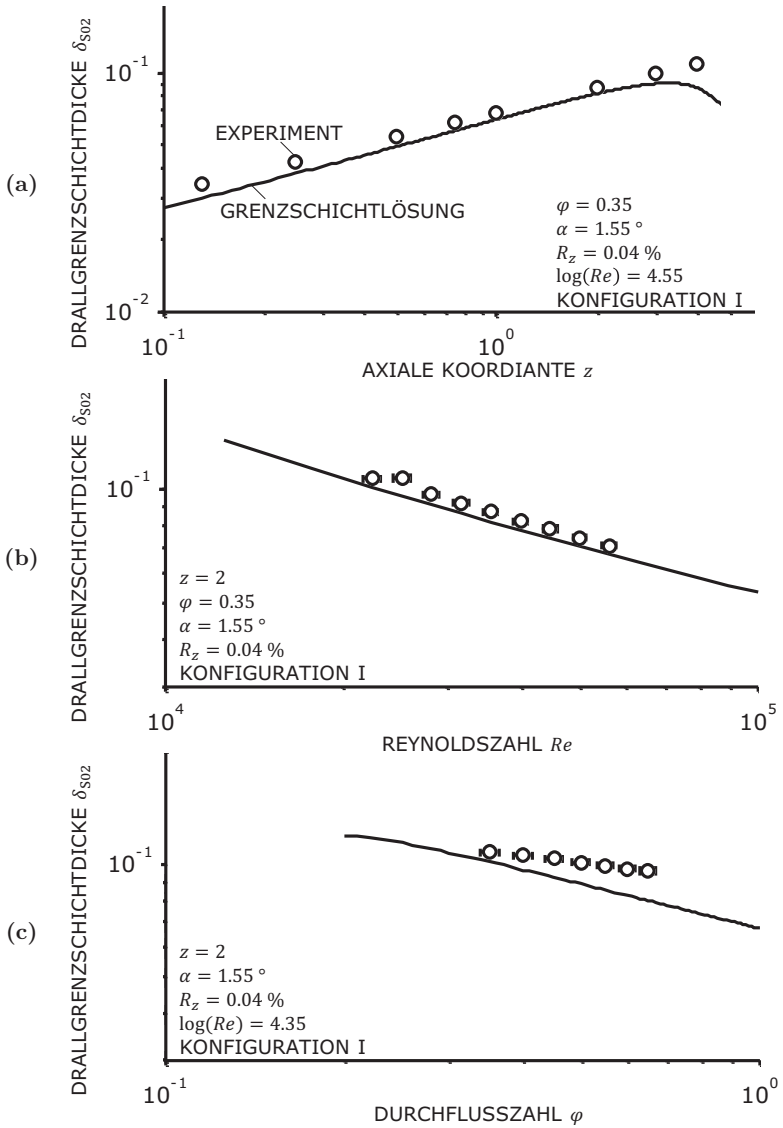


Abbildung F.6 – Drallgrenzschichtdicke vs. (a) axiale Koordinate, (b) Reynoldszahl und (c) Durchflusszahl für $\alpha = 1.55\,°$ und einer laminaren Zuströmung mit $\delta_0 \approx 0.1$. Experimentelle Daten aus [8, 9, 10].

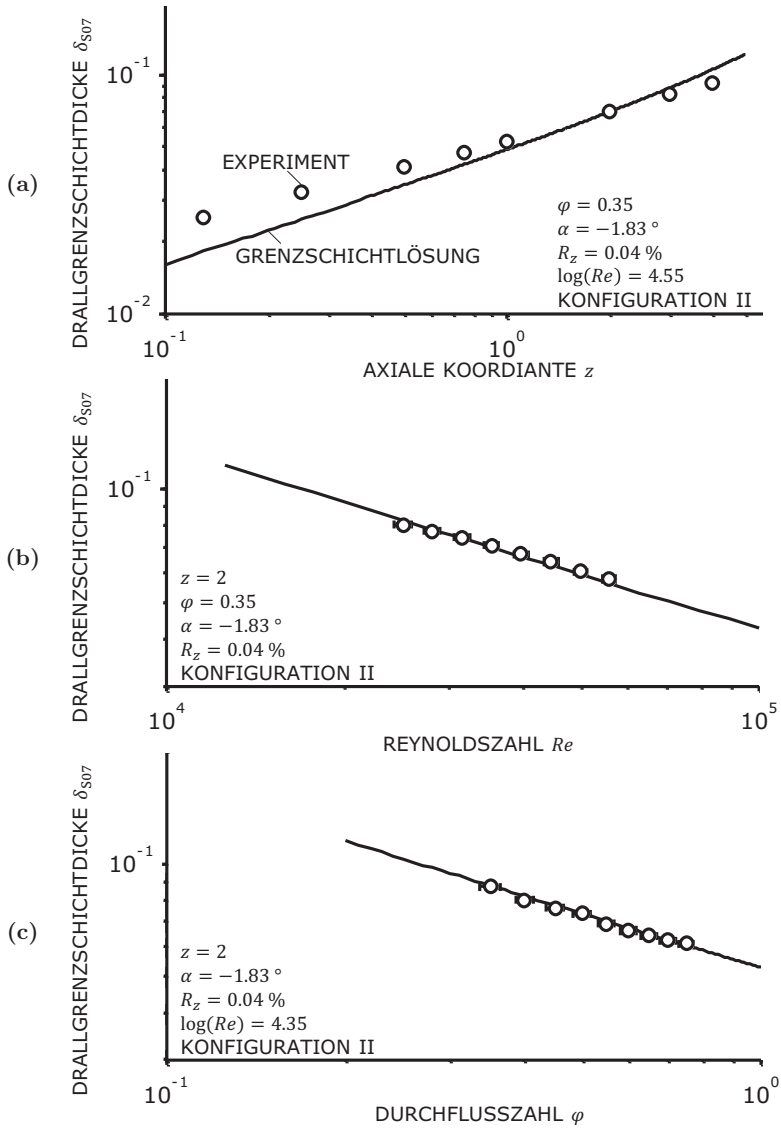


Abbildung F.7 – Drallgrenzschichtdicke vs. (a) axiale Koordinate, (b) Reynoldszahl und (c) Durchflusszahl für $\alpha = -1.83\,°$ und einer turbulenten Zuströmung mit $\delta_0 = 1$. Experimentelle Daten aus [9, 10].

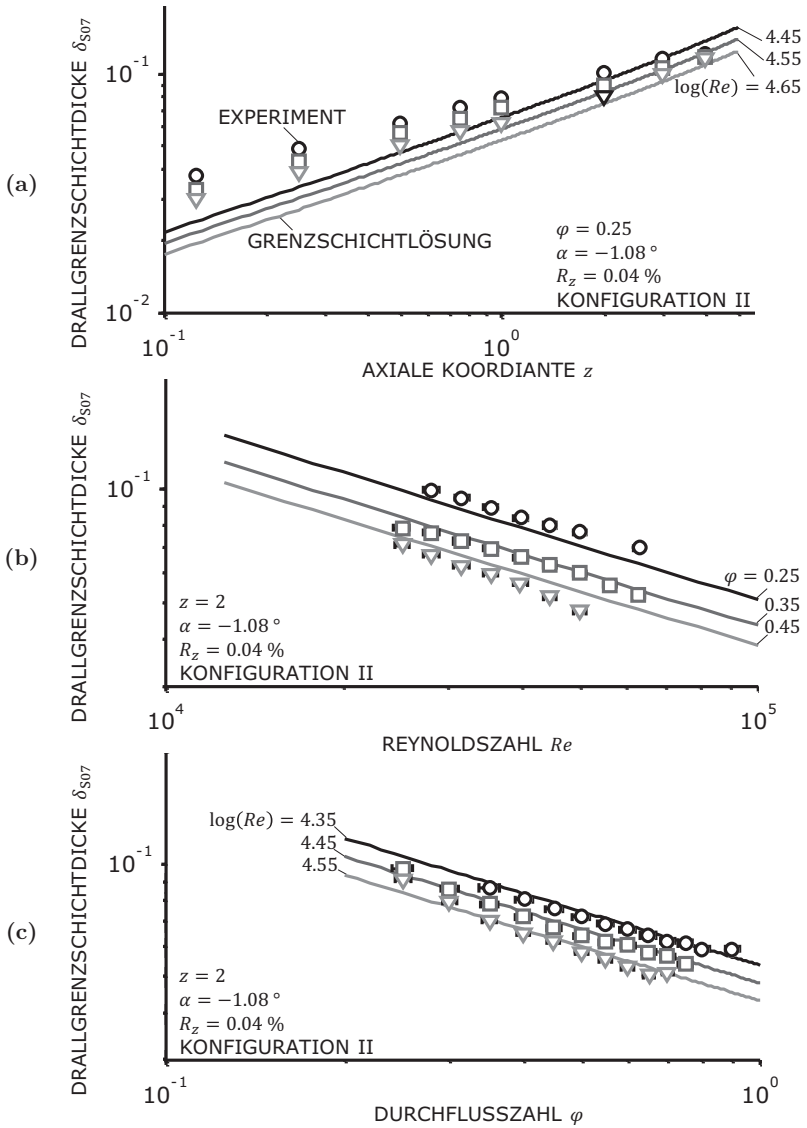


Abbildung F.8 – Drallgrenzschichtdicke vs. (a) axiale Koordinate, (b) Reynoldszahl und (c) Durchflusszahl für $\alpha = -1.08\,°$ und einer turbulenten Zuströmung mit $\delta_0 = 1$. Experimentelle Daten aus [9, 10].

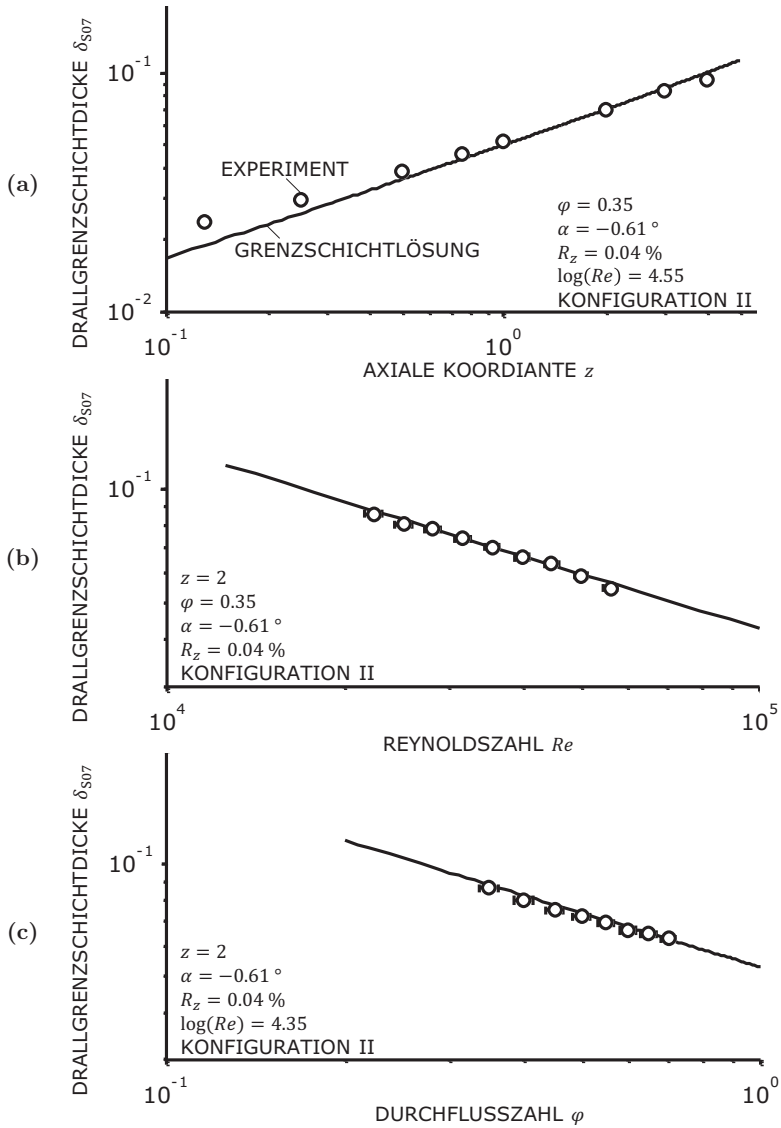


Abbildung F.9 – Drallgrenzschichtdicke vs. (a) axiale Koordinate, (b) Reynoldszahl und (c) Durchflusszahl für $\alpha = -0.67\,°$ und einer turbulenten Zuströmung mit $\delta_0 = 1$. Experimentelle Daten aus [9, 10].

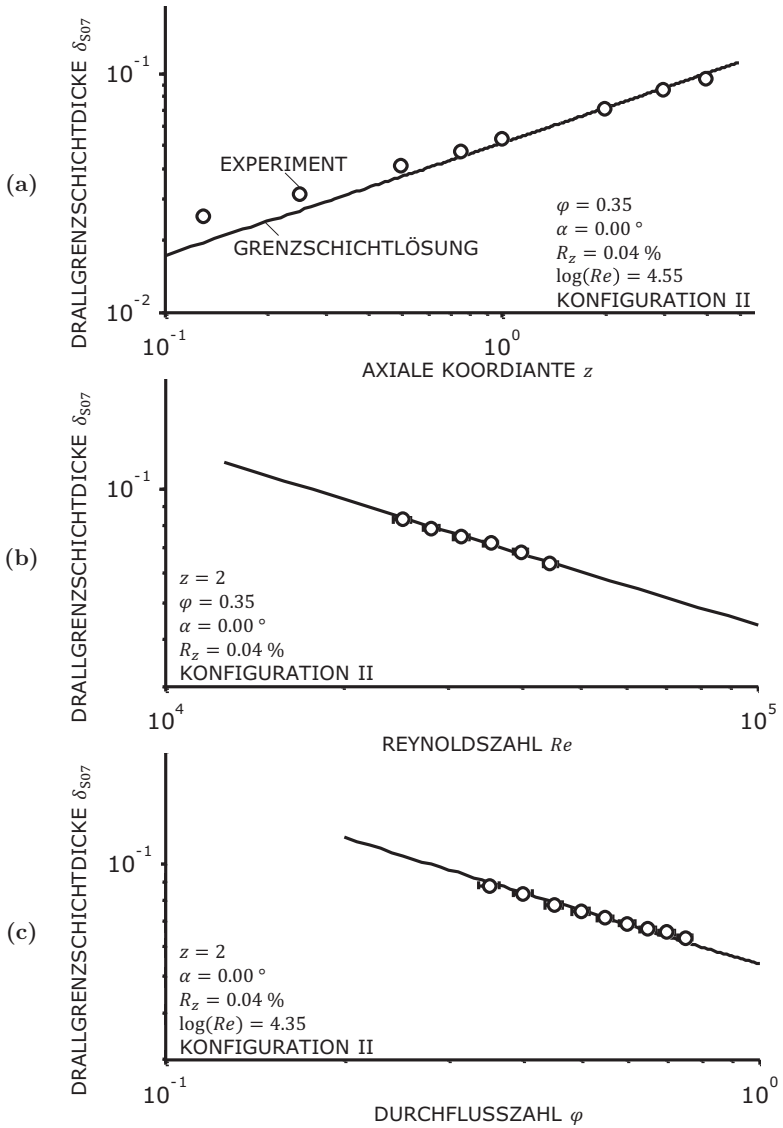


Abbildung F.10 – Drallgrenzschichtdicke vs. (a) axiale Koordinate, (b) Reynoldszahl und (c) Durchflusszahl für $\alpha = 0.00\,°$ und einer turbulenten Zuströmung mit $\delta_0 = 1$. Experimentelle Daten aus [9, 10].

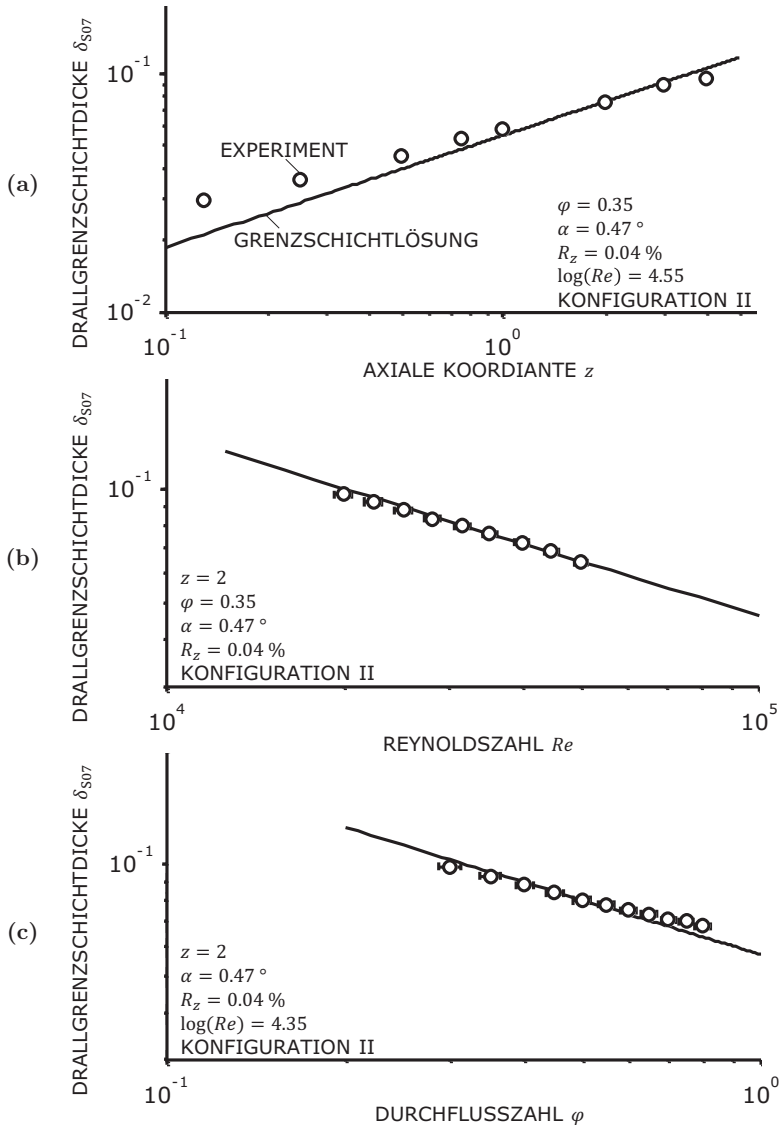


Abbildung F.11 – Drallgrenzschichtdicke vs. (a) axiale Koordinate, (b) Reynoldszahl und (c) Durchflusszahl für $\alpha = 0.47\,°$ und einer turbulenten Zuströmung mit $\delta_0 = 1$. Experimentelle Daten aus [9, 10].

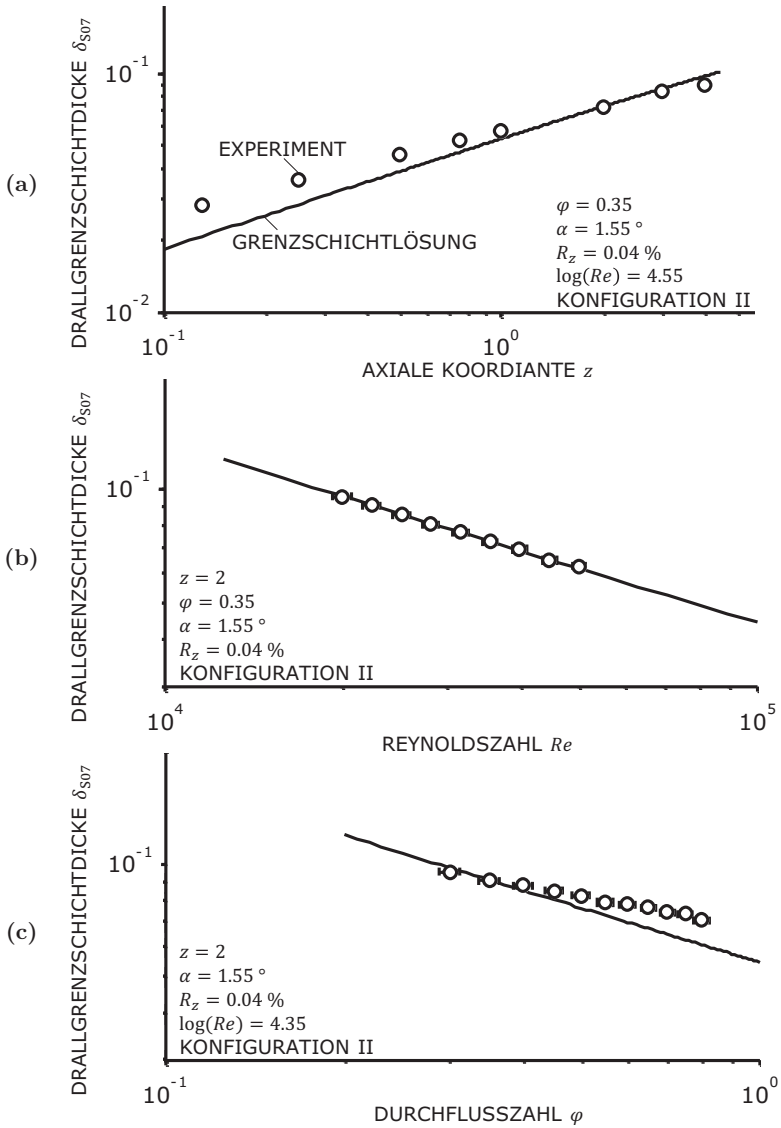


Abbildung F.12 – Drallgrenzschichtdicke vs. (a) axiale Koordinate, (b) Reynoldszahl und (c) Durchflusszahl für $\alpha = 1.55\,°$ und einer turbulenten Zuströmung mit $\delta_0 = 1$. Experimentelle Daten aus [9, 10].