Mehrskalenmodellierung mit minimalen RVE-Randbedingungen und Anwendung auf Balken und Platten

Vom Fachbereich Bau- und Umweltingenieurwissenschaften
der Technischen Universität Darmstadt

zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)

genehmigte

Dissertation

von

M.Sc. Maximilian Müller
aus Berlin

Erstreferent:	Prof. Dr.-Ing. habil. F. Gruttmann
Korreferent:	Prof. Dr.-Ing. habil. R. Müller
Tag der Einreichung:	18.11.2021
Tag der mündlichen Prüfung:	23.02.2022

Darmstadt 2022
D 17

Müller, Maximilian

Mehrskalenmodellierung mit minimalen RVE-Randbedingungen und Anwendung auf Balken und Platten

Verfasser:
Müller, Maximilian

Veröffentlichung:
TUprints, Technische Universität Darmstadt, Darmstadt 2022
URL: http://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de/20891/

Veröffentlicht unter CC BY-NC-ND 4.0 International
https://creativecommons.org/licences/by-nc-nd/4.0/

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit am Fachgebiet Festkörpermechanik der TU Darmstadt. An dieser Stelle möchte ich allen danken, die mich bei der Entstehung begleitet und unterstützt haben.

Insbesondere möchte ich meinem Betreuer Prof. Dr.-Ing. Friedrich Gruttmann für die Möglichkeit zur Promotion, die vielfältige Unterstützung, das Vertrauen und auch die gewährten Freiräume danken, die diese Arbeit erst in dieser Form ermöglicht haben. Ebenso möchte ich Prof. Dr.-Ing. Ralf Müller danken für die unkomplizierte Übernahme des Korreferats.

Danken möchte ich auch allen Kolleginnen und Kollegen für die immer angenehme Atmosphäre und die vielen guten fachlichen und außerfachlichen Gespräche. Insbesondere Simon Klarmann für den Anstoß zum Thema und seine Unterstützung beim Umgang mit FEAP, Gregor Knust für seine moralische und fachliche Unterstützung, Özer Üngör und Thomas Blome für den regen Austausch auch außerhalb des eigenen Themas und Jan Zoller für die unzähligen, anregenden fachlichen und außerfachlichen Diskussionen.
Besonderer Dank gebührt auch Frau Angelika Prießnigg, die mir bei allen größeren und kleineren organisatorischen und bürokratischen Hürden eine große Hilfe war und stets für eine positive Atmosphäre am Fachgebiet gesorgt hat.

Abschließend gilt meiner Familie größte Dankbarkeit für die vielfältige Unterstützung jeglicher Art während des gesamten Studiums bis zum Abschluss dieser Arbeit, wo und wie auch immer sie notwendig war.

Darmstadt, 2022 Maximilian Müller

Inhaltsverzeichnis

Kurzfassung **1**

Abstract **3**

1 Einleitung **5**
1.1 Motivation 5
1.2 Stand der Forschung 6
1.3 Gliederung der Arbeit 8

2 Kontinuumsmechanische Grundlagen **11**
2.1 Kinematik der Deformation 11
2.2 Spannungen 13
2.3 Bilanz- und Erhaltungssätze, Gleichgewichtsbeziehungen 15
2.3.1 Massenbilanz 15
2.3.2 Impuls- und Drehimpulsbilanz 15
2.3.3 Energiebilanz 17
2.4 Materialverhalten 18
2.4.1 Lineare Elastizität 18
2.5 Schwache Form des Gleichgewichts 20

3 Theorie der Tragwerksstrukturen **23**
3.1 Schubweicher Balken 23
3.1.1 Grundlegende Annahmen 23
3.1.2 Kinematik 24
3.1.3 Schnittgrößen, Stoffgesetz und schwache Form 25
3.2 Schubweiche Platte 27
3.2.1 Grundlegende Annahmen 27
3.2.2 Kinematik 28
3.2.3 Schnittgrößen, Stoffgesetz und schwache Form 29

4 Finite-Elemente-Formulierung **33**
4.1 Allgemeine Grundlagen . . . 33
4.1.1 Kinematik . . . 33
4.1.2 Berechnung der Ableitungen der Ansatzfunktionen . . . 35
4.1.3 Virtuelle Größen und schwache Form . . . 36
4.2 Geometrisch lineares Volumenelement . . . 37
4.3 Geometrisch lineares schubweiches 3D-Balkenelement . . . 38
4.4 Geometrisch lineares schubweiches Plattenelement . . . 39

5 Grundlagen der Mehrskalentheorie und Homogenisierung **41**
5.1 Grundlagen . . . 41
5.2 Repräsentatives Volumenelement . . . 44
5.3 Makro-Mikro-Übergang . . . 45
5.4 Mikro-Makro-Übergang . . . 46

6 Neben- und Randbedingungen im RVE **47**
6.1 Umsetzung der Nebenbedingung mit Lagrangeparametern . . . 47
6.2 Verträgliche Randdeformationen . . . 49
6.3 3D-Körper auf der Makroebene . . . 51
6.4 Balken auf der Makroebene . . . 54
6.5 Platte auf der Makroebene . . . 59

7 Numerische Umsetzung des Mehrskalenmodells **63**
7.1 Berechnung der homogenisierten Größen . . . 64

8 Numerische Beispiele **69**
8.1 Bezeichnungen und Definitionen . . . 69
8.2 3D-Körper . . . 70
8.2.1 Homogenes isotropes Material . . . 70
8.2.2 Material mit Einschluss . . . 72
8.3 Balken . . . 75
8.3.1 Homogener isotroper Balken . . . 75
8.3.2 Sandwich-Balken . . . 83
8.3.3 Gelochter Balken . . . 90
8.4 Platten . . . 94
8.4.1 Homogene isotrope Platte . . . 94
8.4.2 Sandwich-Platte . . . 97
8.4.3 Platte mit Einschlüssen . . . 98

9 Zusammenfassung und Ausblick **101**

A Homogenisierung auf Basis der Irving-Kirkwood-Theorie **105**
A.1 Grundlegendes 106
A.2 Konsistenz der Masse-Homogenisierung 107
A.3 Konsistenz der Impuls-Homogenisierung 109

Nomenklatur **117**

Literaturverzeichnis **121**

Kurzfassung

Die Finite-Elemente-Simulation großer inhomogener Strukturen stellt immense Anforderungen an den Modellierungs- und Rechenaufwand. Eine Möglichkeit zur effizienteren Berechnung bieten Homogenisierungsverfahren mittels der FE²-Methode. Die bisherigen Methoden konzentrieren sich dabei vor allem auf die Abbildung von 3D-Körpern, die ähnlich große Abmessungen in allen drei Raumdimensionen aufweisen. Die Abbildung von inhomogenen, insbesondere schubweichen, Balken- und Plattenstrukturen bereitet dagegen erhebliche Probleme. Bei der Berechnung der benötigten Querschnittswerte mit den bisher gängigen Methoden sind vor allem die Schub- und Torsionssteifigkeiten nur schwierig korrekt zu ermitteln, sofern es überhaupt möglich ist.

Diese Arbeit greift einen neuartigen Ansatz für ein Homogenisierungsverfahren auf Basis der Irving-Kirkwood-Theorie auf und liefert eine Erweiterung zur Anwendung auf Balken- und Plattenstrukturen, welche die grundlegenden Probleme zur Ermittlung der Schub- und Torsionssteifigkeiten bisheriger Verfahren nicht aufweist. Durch die Möglichkeit der Verwendung minimaler Randbedingungen bei gleichzeitiger Wiederverwendung der bestehenden Homogenisierungsalgorithmen ist zudem die Modellerstellung und die numerische Implementierung der Methode wesentlich einfacher als bisher. Die vorgestellte Theorie beschränkt sich dabei auf materiell und geometrisch lineare Probleme. Der Ansatz zur Ermittlung der Schubsteifigkeiten basiert auf der Annahme eines quadratischen Schubspannungsverlaufs über die Höhe (und Breite beim Balken) für einen Vollquerschnitt, wodurch Querschnittsverwölbungen infolge einer Schubbelastung entstehen. Das Verfahren wird an verschiedenen Vollquerschnitten (homogene und geschichtete Querschnitte sowie weiche Einschlüsse in Längsrichtung) getestet. Die Ergebnisse zeigen eine gute Übereinstimmung mit Referenzwerten aus der Literatur und Vergleichsmodellen.

Abstract

The finite element simulation of large, inhomogeneous structures places immense demands on the modeling and computing effort. One possibility for more efficient calculation is offered through homogenisation procedures using the FE^2 method. Until now those methods concentrate primarily on the mapping of 3D bodies that have similarly large dimensions in all three spatial dimensions. The mapping of inhomogeneous beam and plate structures, especially with shear modes, on the other hand, causes considerable problems. When calculating the required cross-sectional values using the methods commonly used up to now, the shear and torsional stiffnesses in particular are hard to get correct, if possible at all.
This thesis takes up a novel approach for a homogenisation procedure based on the Irving-Kirkwood theory and provides an extension for application to beam and plate structures, which does not have the fundamental problems in determining the shear and torsional stiffnesses of previous methods. Due to the possibility of using minimal boundary conditions whilst simultaneously reusing existing homogenisation algorithms, the creation of models and the numerical implementation of the method are much easier than before. The presented theory is limited to materially and geometrically linear problems. The approach to determining the shear stiffness is based on the assumption of a quadratic shear stress curve over the height (and width in case of the beam) for a full cross-section, which results in warping of the cross-section as a result of shear loading. The method is tested on various full cross-sections (homogeneous and layered cross-sections as well as soft inclusions in the longitudinal direction). The results show good accordance with reference values from the literature and comparison models.

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation

Im Zuge einer immer stärker werdenden Diskussion um, und gesetzliche Anforderungen an, ressourcen- und emissionssparende Bauweisen werden die im Alltag eingesetzten Materialien und Konstruktionen zunehmend stärker spezialisiert auf ihren Einsatzzweck angepasst und optimiert. Ausdruck solcher materialsparender, spezialisierter Konstruktionen sind beispielsweise faserverstärkte Kunststoffe, Sandwich-Konstruktionen oder „Bubble-Deck“ genannte Hohlkörperdecken, bei denen Deckenkonstruktionen aus Stahlbeton um Kunststoffhohlkörper im Inneren erweitert werden. Während die ersteren beiden inzwischen weit verbreitet sind und eine Vielzahl an numerischen Modellen für eine Verbesserung der Modellierung solcher Konstruktionen erarbeitet wurden, sind die Ergebnisse noch nicht überall zufriedenstellend und es besteht weiterhin enormes Potential für die Entwicklung von einfacheren und verbesserten Methoden zur Modellierung.

Bubble-Decks sind dagegen vergleichsweise neu und finden bislang noch wenig Anwendung. Dies liegt höchstwahrscheinlich auch an den begrenzten Mitteln zur Modellierung solch komplexer Konstruktionen, die eine verlässliche Aussage über das Tragverhalten erschweren oder sehr aufwändig machen. Während zum Beispiel für faserverstärkte Materialien selbst bei mehreren Schichten und Vorzugsrichtungen inzwischen umfangreiche Materialmodelle und Schalenelemente existieren, ist die Menge an veröffentlichter Forschung für Balken-, Platten- und Schalenstrukturen mit Inhomogenitäten in allen drei Dimensionen sehr gering und ihre Simulation für Anwendungen in größeren Konstruktionen bereitet erhebliche Probleme.
Neuartige komplexe Materialien müssen daher bis heute weitestgehend in einem aufwändigen und teuren Verfahren durch die reihenweise Erstellung und Testung von Prototypen entwickelt werden. Eine verlässliche numerische Methode zur Be-

stimmung des Materialverhaltens in solch komplex konstruierten Strukturelementen würde die Entwicklungskosten erheblich senken und Innovationen beschleunigen.

In der jüngeren Vergangenheit ist in der Entwicklung der Rechenleistung von Computersystemen zu beobachten, dass die Rechengeschwindigkeit eines einzelnen CPU-Kerns nur noch wenig steigt. Stattdessen steigt die Anzahl der verfügbaren Rechenkerne auf einem Chip dank kompakterer Bauweise und größeren möglichen Datenübertragungsraten immer weiter an. Das motiviert dazu, Simulationsmethoden zu entwickeln, die sich gut parallelisieren lassen und damit überproportional von der zunehmenden Anzahl an parallel möglichen Rechenoperationen profitieren. Eine solche Methode ist die Multiskalenmodellierung oder FE²-Methode, bei der ein sehr großes Problem in zwei Skalen betrachtet und damit in viele kleine Probleme aufgeteilt wird, die parallel und unabhängig voneinander gelöst werden können.

In der numerischen Umsetzung der Mehrskalenmodellierung spielen teilweise komplexe Rand- und Nebenbedingungen eine große Rolle. Während der Fokus in früheren Veröffentlichungen vor allem auf verschiedenen Randbedingungen auf der Mikroebene lag, um so die Konformität zwischen Makro- und Mikro- bzw. Mesoebene sicher zu stellen, beschäftigen sich neuere Veröffentlichungen vermehrt mit Nebenbedingungen zur Verbesserung der Berechnungsergebnisse. Die Methoden wurden zunehmend komplexer in der Anwendung auf spezifische Probleme und eine kommerzielle Nutzung scheint damit unwahrscheinlicher zu werden.
Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich deshalb damit, einen Weg zu einer möglichst einfachen Anwendung der Mehrskalenmodellierung zu untersuchen, indem eine einheitliche Nebenbedingung zur Verknüpfung der Makro- mit der Mikroebene verwendet wird und darüber hinaus die Notwendigkeit weiterer Neben- und Randbedingungen untersucht und auf möglichst einfach anwendbare reduziert wird.

1.2 Stand der Forschung

In diesem Abschnitt wird ein kurzer Überblick über die wesentlichen, bisherigen Schwerpunkte und Ergebnisse der Forschungen zur Homogenisierungstheorie und der FE²-Methode gegeben. Ein detaillierterer Überblick zu beidem findet sich beispielsweise in [41] und [46]. Anschließend folgt ein ebenfalls kurzer Überblick zur speziellen Problematik der Anwendung auf Balken- und Platten- bzw. Schalenstrukturen.

Die ersten Überlegungen zur Homogenisierungstheorie lieferten Voigt, der eine An-

nahme gleichförmiger Dehnung über das gesamte heterogene Gebiet vorschlug [52], und Reuss, der im Gegensatz dazu gleichförmige Spannungen über das gesamte heterogene Gebiet annahm [45]. Die beiden Annahmen bilden eine obere (Voigt) und untere (Reuss) Schranke für die Verformungsenergie in einem inhomogenen Material aus linear elastischen Werkstoffen [22]. Eine Erweiterung für nichtlineares Materialverhalten lieferten die Taylor- und Sachs-Schranken [2]. In [15] erweiterten Hashin und Shtrikman die Methoden, um mit Hilfe von Variationsformulierungen obere und untere Schranken für die effektiven Materialkonstanten mehrphasiger linear elastischer Werkstoffe zu erhalten. Dabei ist wichtig zu erwähnen, dass die Ansätze bis hierhin ausschließlich das Volumenverhältnis der verschiedenen Werkstoffe berücksichtigen und dabei die Geometrie und die Wechselwirkungen zwischen den Phasen vernachlässigen.
Eine verbesserte Vorgehensweise zur Bestimmung von effektiven Elastizitätskonstanten in heterogenen Werkstoffen unter Beachtung der internen Geometrie lieferte Hill in [23] und schuf damit die Grundlagen der bis heute gebräuchlichsten Methode, die er in [24] auf weitere Größen und Anwendungen verallgemeinerte. Grundlage dieser Überlegungen ist eine Gleichheit der Verzerrungsenergie zwischen der homogenisierten Makroebene und der Mikroebene, welche die Heterogenität berücksichtigt. Diese Energiegleichheit ist als Hill-Mandel-Bedingung bekannt und ihre Einhaltung kann durch spezielle Randbedingungen und a priori Annahmen zur Homogenisierung der betrachteten Größen sichergestellt werden [24, 36].
Eine andere Herangehensweise, basierend auf der Irving-Kirkwood-Theorie [28], zeigten kürzlich Mandadapu et al. in [35] und darauf aufbauend Mercer et al. in [37]. Ihr Ansatz kommt im Gegensatz zur Hill-Mandel-Bedingung ohne a priori Annahmen über die Homogenisierung der gesuchten Größen und ohne die starken Einschränkungen an die möglichen Randbedingungen der heterogenen Ebene aus. Er bildet die Grundlage für die Ausführungen in dieser Arbeit.

Die von Hill in [23] vorgeschlagene Vorgehensweise kann numerisch mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode (FEM) umgesetzt werden. Werden sowohl das Randwertproblem auf der übergeordneten, homogenisierten Ebene als auch diejenigen auf der heterogenen Mikroebene mit der FEM gelöst, spricht man von einer FE²-Methode ([6, 7]). Ein Algorithmus für den Mikro-Makro-Übergang zur Bestimmung der homogenisierten Größen aus der Lösung des Mikroproblems wurde in [38] und [39] vorgestellt, ein weitere Möglichkeit in [47]. Eine gute Übersicht zu den weiteren Entwicklungen der Methode findet sich z.B. in [9] und [41]. Die erforderlichen Randbedingungen auf der Mikroebene stellen dabei nicht nur einen essentiellen Teil der Theorie dar, sondern sind auch in der konkreten Anwendung der Methode bei der numerischen Umsetzung eine Herausforderung, siehe z.B. [42] für einen Überblick.

Die Anwendung der FE²-Methode ist inzwischen weit verbreitet und gut untersucht für Probleme an 3D-Körpern [46]. Bei der Anwendung auf dimensionsreduzierte Strukturelemente wie Balken, Platten und Schalen stehen vor allem die Berechnung von effektiven Querschnittswerten für zunehmend komplexere Geometrien und Materialzusammensetzungen im Vordergrund. Dabei stellen insbesondere die Berechnung der Schubsteifigkeiten im Rahmen der schubweichen Timoshenko- und Reissner-Mindlin-Kinematik sowie die Abbildung von Inhomogenitäten entlang der Referenzachse bzw. -ebene eine Herausforderung dar. Unter anderem in [5, 25, 31, 54, 55] finden sich Beiträge für schubweiche Balken. Schubweiche Platten wurden in [17–19] untersucht. Eine Anwendung der FE²-Methode auf schubweiche Schalen findet sich in [14, 53]. Weitere Untersuchungen zu dem dort vorgestellten Verfahren und der Problematik der Schubsteifigkeiten finden sich in [20, 21]. In [32, 33] wurde das Verfahren erneut aufgegriffen, auf schubweiche Balken angewendet und eine mögliche Lösung für eine korrekte Bestimmung der Schubsteifigkeiten vorgestellt. In [58, 59] wurden Ansätze zur Erweiterung auf schubweiche Schalen gezeigt.
Einen anderen Ansatz für eine Multiskalenmodellierung von schubweichen Schalen lieferte der Beitrag in [10], der auf einer Homogenisierung höherer Ordnung basiert, wie sie in [34] vorgeschlagen wurde. Dabei wurden jedoch zunächst nur sehr komplexe Beispiele betrachtetet, für die keine expliziten Referenzwerte bekannt sind, wodurch eine allgemeine Beurteilung schwierig bleibt.

In der vorliegenden Arbeit wird für den neuartigen Homogenisierungsansatz aus [35, 37] eine Umsetzung vorgestellt, die sich in die bestehenden Algorithmen aus [14] einfügt. Anschließend wird vor allem die Anwendung auf schubweiche Balken und Platten untersucht, da dieser Ansatz wesentlich weniger komplex in Theorie und Implementierung ist als die bisherigen Ansätze auf diesem Gebiet in [10,18,19,33,59] und dabei gleichzeitig weniger Limitierungen in den möglichen Anwendungsszenarien verspricht.

1.3 Gliederung der Arbeit

In Kapitel 2 werden zunächst die relevanten kontinuumsmechanischen Grundlagen dargestellt. Dabei werden grundlegende Zusammenhänge der Kinematik der Deformationen, verschiedene Maße für Spannungen und Verzerrungen und einige Bilanz- und Erhaltungssätze erläutert. Je ein Abschnitt zu Materialgesetzen und der schwachen Form des Gleichgewichts beschließen das Kapitel. Die Ausführungen

beschränken sich dabei auf eine geometrisch und materiell lineare Theorie kleiner Deformationen.

Kapitel 3 führt die Grundlagen der Theorien für schubweiche Balken mit Timoshenko-Kinematik und schubweiche Platten mit Reissner-Mindlin-Kinematik aus. Letztere beschränken sich dabei nicht nur auf reine Plattengrößen, sondern werden um die Membrangrößen (Dehnung und Schub) in der Plattenebene erweitert.

Sowohl für diese dimensionsreduzierten Strukturbeschreibungen als auch für 3D-Körper werden in Kapitel 4 finite Elemente beschrieben. Dazu werden zunächst die allgemeinen Grundlagen zur Finite-Elemente-Methode erläutert und daraus die spezifischen Elemente für die jeweilige Struktur aufgebaut.

Die Kapitel 5 bis 7 beschäftigen sich mit den Grundlagen der Multiskalentheorie und der Verknüpfung der verschiedenen Skalen mithilfe von Nebenbedingungen. Dabei wird insbesondere die numerische Umsetzung der Nebenbedingung mittels globaler Lagrangeparameter und der Algorithmus zur Berechnung der homogenisierten Größen besprochen und auf die jeweiligen Besonderheiten bei der Umsetzung für die verschiedenen Makrostrukturen 3D-Körper, Platte und Balken eingegangen. Weiterhin wird die Notwendigkeit und Umsetzung von Randbedingungen besprochen.

In Kapitel 8 wird für die jeweiligen Makrostrukturen die grundsätzliche Funktionsfähigkeit der vorgestellten Methoden zunächst an Materialien und Strukturen getestet, für die es analytische Vergleichswerte gibt, bevor in komplexeren Modellen Vergleichsrechnungen mit Referenzmodellen durchgeführt und ausgewertet werden.

Das letzte Kapitel fasst die wesentlichen Teile der vorgestellten Modellierung zusammen und bewertet deren Leistungsfähigkeit auf Basis der Ergebnisse im vorhergehenden Kapitel. Anschließend werden Potentiale aufgezeigt, wie das Modell zukünftig weiter verbessert und vielfältiger einsetzbar gestaltet werden kann.

Kapitel 2

Kontinuumsmechanische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die kontinuumsmechanischen Grundlagen für die folgenden Kapitel erläutert. Es erfolgt eine kurze Darstellung der notwendigsten Grundlagen und Gleichungen ohne ausführliche Herleitungen. Für eine umfangreichere Betrachtung und nähere Erläuterungen der einzelnen Zusammenhänge wird auf Standardwerke wie z.B. [26] verwiesen.

2.1 Kinematik der Deformation

Zunächst müssen die Geometrie des betrachteten Körpers und die Verschiebungen aller seiner Punkte über den Verlauf der Zeit beschrieben werden.
Dazu wird ein materieller Körper $\mathcal{B}$ betrachtet. Zur Beschreibung seiner Geometrie wird zunächst der euklidische Raum mit orthonormalem Basissystem $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ und festem Ursprung $\mathcal{O}$ eingeführt. Zum festen Zeitpunkt $t = 0$ nimmt der Körper das Gebiet Ω_0 mit Rand $\partial\Omega_0$ ein. Dieser Zustand wird als Referenzkonfiguration bezeichnet, welche gleichzeitig die Ausgangskonfiguration sein soll. Somit wird hier ausdrücklich nicht zwischen Ausgangs- und Referenzkonfiguration unterschieden. Für einen beliebigen aktuell betrachteten Zeitpunkt $t > 0$ nimmt der Körper das Gebiet Ω mit Rand $\partial\Omega$ ein. Dieser Zustand wird als Momentankonfiguration bezeichnet.
Jeder Punkt des Körpers kann in der Referenzkonfiguration durch seine Koordinaten $\boldsymbol{X}$ und in der Momentankonfiguration durch die Koordinaten $\boldsymbol{x}$ beschrieben werden. Der Übergang von der Referenz- in die Momentankonfiguration kann durch

eine eindeutige, umkehrbare Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi: \quad & \Omega_0 \times \mathbb{R}^+ \to \Omega \\ & (\boldsymbol{X}, t) \mapsto \boldsymbol{x} = \varphi(\boldsymbol{X}, t) \end{aligned} \tag{2.1}$$

beschrieben werden.

Als Grundlage für die Betrachtung der Deformation des Körpers dient ein infinitesimales Linienelement, das als $\mathrm{d}\boldsymbol{X}$ in der Referenzkonfiguration und als $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ in der Momentankonfiguration bezeichnet wird. Das infinitesimale Linienelement $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ der Momentankonfiguration kann zunächst definiert und dann in eine Taylorreihenentwicklung mit Abbruch nach dem linearen Glied überführt und wie folgt dargestellt werden:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \varphi(\boldsymbol{X} + \mathrm{d}\boldsymbol{X}, t) - \varphi(\boldsymbol{X}, t) \tag{2.2}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \varphi(\boldsymbol{X}, t) + \frac{\partial \varphi(\boldsymbol{X}, t)}{\partial \boldsymbol{X}}\, \mathrm{d}\boldsymbol{X} - \varphi(\boldsymbol{X}, t) \tag{2.3}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{X}}\, \mathrm{d}\boldsymbol{X}\,. \tag{2.4}$$

Die partielle Ableitung in (2.4) wird als Deformationsgradient $\boldsymbol{F}$ bezeichnet:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, t) := \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{X}} = \frac{\partial \varphi(\boldsymbol{X}, t)}{\partial \boldsymbol{X}} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}\, \mathrm{d}\boldsymbol{X}\,. \tag{2.5}$$

Die Determinante von $\boldsymbol{F}$ wird als Jacobi-Determinante J bezeichnet:

$$J := \det \boldsymbol{F}. \tag{2.6}$$

Mit Hilfe von J lassen sich infinitesimale Flächenelemente $\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \mathrm{d}A\, \boldsymbol{N}$, mit $\boldsymbol{N}$ dem normierten Normalenvektor der Fläche und $\mathrm{d}A$ dem Flächeninhalt, und Volumenelemente $\mathrm{d}V$ von der Referenzkonfiguration in die Momentankonfiguration überführen:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a} = \mathrm{d}a\, \boldsymbol{n} = J \boldsymbol{F}^{-T}\, \mathrm{d}\boldsymbol{A}\,, \qquad \mathrm{d}v = J\, \mathrm{d}V\,. \tag{2.7}$$

Aus der Anforderung, dass der Körper sich nicht selbst durchdringen darf, um eine Eindeutigkeit und Umkehrbarkeit der Abbildung φ zu gewährleisten, sowie der physikalischen Tatsache, dass das Volumen stets positiv sein muss, folgt daraus für

die Jacobi-Determinante die Anforderung:

$$J = \det \boldsymbol{F} > 0\,. \tag{2.8}$$

Die Verschiebung eines beliebigen Punkts des Körpers ergibt sich als Differenz der Koordinaten in Momentan- und Referenzkonfiguration zu

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}\,. \tag{2.9}$$

Damit lässt sich ein Verschiebungsgradient $\boldsymbol{H}$ definieren:

$$\boldsymbol{H} := \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{X}} = \frac{\partial(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X})}{\partial \boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F} - \mathbf{1}\,. \tag{2.10}$$

Dabei ist $\mathbf{1}$ der Einheitstensor zweiter Stufe.
Mit Hilfe von $\boldsymbol{H}$ und $\boldsymbol{F}$ kann der häufig verwendete, symmetrische Green-Lagrange'sche Verzerrungstensor $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}$ eingeführt werden, der ein von Starrkörperverschiebungen unabhängiges Maß für die Verformung des Körpers darstellt:

$$\boldsymbol{E} := \frac{1}{2}(\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}^T + \boldsymbol{H})\,. \tag{2.11}$$

Aus der letzteren Darstellung wird klar ersichtlich, dass $\boldsymbol{E}$ nichtlinear von den Verschiebungen $\boldsymbol{u}$ abhängt. Hier werden nur kleine Deformationen betrachtet, sodass von geometrisch linearen Zusammenhängen ausgegangen werden kann.
Mit der Annahme kleiner Deformationen gilt $\|\boldsymbol{H}\| \ll 1$ und der Green-Lagrange'sche Verzerrungstensor kann linearisiert werden zu:

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{H}^T + \boldsymbol{H})\,. \tag{2.12}$$

Im Weiteren meint $\boldsymbol{E}$ immer die linearisierte Form entsprechend (2.12).

2.2 Spannungen

Um in einem Körper $\mathcal{B}$ eine wie in Abschnitt 2.1 beschriebene Deformation hervorzurufen, müssen äußere Lasten auf ihn einwirken. Die äußeren Lasten rufen innere Beanspruchungen, sogenannte Spannungen, hervor, welche die Deformation verursachen.
Die Spannungen im Inneren eines Körpers sind definiert als die über eine beliebige Teilfläche Δa eines beliebigen Schnitts durch den Körper gemittelten Kräfte

$\Delta \boldsymbol{f}$, die der Körper dort erfährt. Der Cauchy'sche Spannungsvektor $\boldsymbol{t}$ ist in der Momentankonfiguration definiert als

$$\boldsymbol{t} := \lim_{\Delta a \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{f}}{\Delta a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}a} \,. \tag{2.13}$$

Führt man entsprechend dem Cauchy-Theorem noch den Cauchy'schen Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ ein, lässt sich aus ihm zusammen mit dem zum betrachteten Schnitt gehörenden Normalenvektor $\boldsymbol{n}$ zu jeder Zeit der zugehörige Spannungsvektor bestimmen:

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n} \,. \tag{2.14}$$

Der infinitesimale Kraftvektor $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$ lässt sich in der Referenzkonfiguration darstellen, sodass dort analoge Spannungsgrößen definiert werden können. Die Überführung in die Referenzkonfiguration und die Definition der entsprechenden Größen folgt aus den Transformationsbeziehungen aus dem vorherigen Abschnitt:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{t}\,\mathrm{d}a \quad = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}a = \boldsymbol{\sigma} J \boldsymbol{F}^{-T}\boldsymbol{N}\,\mathrm{d}A = J\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{F}^{-T}\boldsymbol{N}\mathrm{d}A \tag{2.15}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{t}_0\,\mathrm{d}A = \boldsymbol{P}\boldsymbol{N}\,\mathrm{d}A \,. \tag{2.16}$$

Dabei wurden für die Referenzkonfiguration die Größen $\boldsymbol{P} := J\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{F}^{-T}$ als der erste Piola-Kirchhoff'sche Spannungstensor und $\boldsymbol{t}_0 = \boldsymbol{P}\boldsymbol{N}$ als der Spannungsvektor definiert. $\boldsymbol{N}$ bezeichnet den Normalenvektor in der Referenzkonfiguration.
$\boldsymbol{P}$ stellt die arbeitskonforme Größe zum Deformationsgradienten $\boldsymbol{F}$ dar. Auf den Begriff der arbeitskonformen Größen wird in Abschnitt 2.3.3 eingegangen.

Mit diesen Definitionen lassen sich weitere Spannungstensoren formulieren. Hier sei nur noch der zweite Piola-Kirchhoff'sche Spannungstensor $\boldsymbol{S}$ angegeben:

$$\boldsymbol{S} = J\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{F}^{-T} = \boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{P} \,. \tag{2.17}$$

Daraus wird ersichtlich, dass $\boldsymbol{S}$ aus einer Rückführung von $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$ in die Referenzkonfiguration zu einem Kraftvektor $\mathrm{d}\boldsymbol{f}_0 = \boldsymbol{F}^{-1}\,\mathrm{d}\boldsymbol{f}$ entsteht. Seine Einträge haben keine physikalische Interpretation. Allerdings ist $\boldsymbol{S}$ die arbeitskonforme Größe zum Green-Lagrange'schen Verzerrungstensor $\boldsymbol{E}$.

2.3 Bilanz- und Erhaltungssätze, Gleichgewichtsbeziehungen

2.3.1 Massenbilanz

Die hier betrachteten Festkörper stellen in der Kontinuumsmechanik ein geschlossenes System dar. In einem solchen geschlossenen System kann sich keinerlei Masse über die Systemgrenze bewegen und bei einer rein mechanischen Betrachtung außerhalb einer relativistischen Betrachtung keine Masse entstehen oder in etwas anderes umgewandelt werden. Dadurch besitzt der Festkörper unabhängig von seiner aktuellen Konfiguration immer die gleiche Masse. Damit gilt für den Körper $\mathcal{B}$ für alle seine möglichen Konfigurationen Ω für alle Zeitpunkte t:

$$m = \int_{\Omega} \rho(\boldsymbol{x}, t) \, \mathrm{d}v = \int_{\Omega_0} \rho_0(\boldsymbol{X}) \, \mathrm{d}V > 0 \,. \tag{2.18}$$

Dabei sind $\rho(\boldsymbol{x}, t)$ und $\rho_0(\boldsymbol{X})$ die Massendichte des Körpers in der Momentan- und Referenzkonfiguration.
Dieser Zusammenhang lässt sich als Ratengleichung, die sogenannte Massenbilanz, ausdrücken:

$$\dot{m} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\Omega} \rho(\boldsymbol{x}, t) \, \mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\Omega_0} \rho_0(\boldsymbol{X}) \, \mathrm{d}V = 0 \,. \tag{2.19}$$

2.3.2 Impuls- und Drehimpulsbilanz

Der Impuls $\boldsymbol{I}$ eines Körpers $\mathcal{B}$, der in der Momentankonfiguration zum Zeitpunkt t das Gebiet Ω mit Rand $\partial\Omega$ einnimmt und in der Referenzkonfiguration das Gebiet Ω_0 mit Rand $\partial\Omega_0$, kann in beiden Konfigurationen jeweils definiert werden als

$$\boldsymbol{I}(t) = \int_{\Omega} \rho(\boldsymbol{x}, t) \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) \, \mathrm{d}v = \int_{\Omega_0} \rho_0(\boldsymbol{X}) \boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{X}, t) \, \mathrm{d}V \,. \tag{2.20}$$

Dabei ist $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ das Geschwindigkeitsfeld der materiellen Punkte des Körpers. Ohne äußere Einwirkungen bleibt der Impuls in einem geschlossenen System dauerhaft konstant.
Eine zeitliche Änderung $\dot{\boldsymbol{I}}$ des Impulses ergibt sich in dem hier betrachteten geschlossenen System nur aus einem Impulszuwachs über die Oberfläche des Körpers durch

Oberflächenlasten $\boldsymbol{t}$, die über den Rand des Körpers auf ihn einwirken, und einem Zuwachs aus Volumenlasten $\boldsymbol{b}$, die überall im Körper angreifen. Die Impulsbilanz des Körpers kann dann jeweils in den Größen der Momentan- oder Referenzkonfiguration ausgedrückt werden:

$$\dot{\boldsymbol{I}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\Omega} \rho\, \boldsymbol{v}\ \mathrm{d}v = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{t}\ \mathrm{d}a + \int_{\Omega} \boldsymbol{b}\ \mathrm{d}v\,, \tag{2.21}$$

$$\dot{\boldsymbol{I}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\Omega_0} \rho_0\, \boldsymbol{v}_0\ \mathrm{d}V = \int_{\partial\Omega_0} \boldsymbol{t}_0\ \mathrm{d}A + \int_{\Omega_0} \boldsymbol{b}_0\ \mathrm{d}V\,. \tag{2.22}$$

Die Überführung der Größen der Momentankonfiguration in die zugehörigen Größen der Referenzkonfiguration erfolgt dabei nach den geschilderten Regeln aus den vorherigen Abschnitten.
Für quasistatische Belastungen, wie sie hier betrachtet werden, ist $\dot{\boldsymbol{I}} = \boldsymbol{0}$ und $\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{0}$, sodass daraus jeweils

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{t}\ \mathrm{d}a + \int_{\Omega} \boldsymbol{b}\ \mathrm{d}v = \boldsymbol{0}\,, \tag{2.23}$$

$$\int_{\partial\Omega_0} \boldsymbol{t}_0\ \mathrm{d}A + \int_{\Omega_0} \boldsymbol{b}_0\ \mathrm{d}V = \boldsymbol{0} \tag{2.24}$$

folgt.
Durch Anwendung des Gauß'schen Integralsatzes und des Cauchy-Theorems (2.14) bzw. $(2.16)_2$ lässt sich das Oberflächenintegral in ein Volumenintegral überführen:

$$\int_{\Omega} \Big(\mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{b}\Big)\ \mathrm{d}v = \boldsymbol{0}\,, \tag{2.25}$$

$$\int_{\Omega_0} \Big(\mathrm{Div}(\boldsymbol{P}) + \boldsymbol{b}_0\Big)\ \mathrm{d}V = \boldsymbol{0}\,. \tag{2.26}$$

Der Operator $\mathrm{div}(\cdot)$ bezeichnet dabei die Divergenz bezüglich $\boldsymbol{x}$, während $\mathrm{Div}(\cdot)$ die Divergenz bezüglich $\boldsymbol{X}$ bezeichnet. Die Impulsbilanz in integraler Form wird auch als globale Form des Gleichgewichts bezeichnet. Sie erzwingt eine Einhaltung der Differentialgleichung im integralen Mittel.
Die lokale Form des Gleichgewichts, welche die punktweise Einhaltung der Differentialgleichung erfordert, folgt aus der Tatsache, dass das Gleichgewicht für jeden

beliebigen Teilausschnitt von $\mathcal{B}$, d.h. für jede beliebige Teilmenge von Ω, erfüllt werden muss:

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \quad \text{in } \Omega\,, \tag{2.27}$$

$$\operatorname{Div}(\boldsymbol{P}) + \boldsymbol{b}_0 = \boldsymbol{0} \quad \text{in } \Omega_0\,. \tag{2.28}$$

Mit einem Ortsvektor $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$ bezüglich eines festen Bezugspunktes $\boldsymbol{x}_0$ lässt sich analog dazu der Drehimpuls

$$\boldsymbol{\mathcal{L}} = \int_{\Omega} \boldsymbol{r} \times \rho\, \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}v \tag{2.29}$$

in den Größen der Momentankonfiguration definieren und entsprechend die Drehimpulsbilanz formulieren:

$$\dot{\boldsymbol{\mathcal{L}}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\Omega} \boldsymbol{r} \times \rho\, \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}v = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{t}\, \mathrm{d}a + \int_{\Omega} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{b}\, \mathrm{d}v. \tag{2.30}$$

Aus der lokalen Form der Drehimpulsbilanz für den quasistatischen Fall folgt die Symmetrie des Cauchy-Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}$ und entsprechend des zweiten Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensors $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}$.

2.3.3 Energiebilanz

Im Rahmen dieser Arbeit spielen ausschließlich mechanische Prozesse eine Rolle. Deshalb werden von vornherein alle nicht-mechanischen Formen von Energie, Potential oder Leistung, wie chemische, thermische, elektrische oder andere, nicht berücksichtigt. Weiterhin sollen keine Beschleunigungen und keine Starrkörperbewegungen stattfinden, sodass auch keine kinetische Energie berücksichtigt wird.
Die Energiezufuhr aus externen Quellen in das Gebiet Ω des Körpers lässt sich somit als externe mechanische Leistung $\mathcal{P}_{\mathrm{ext}}$ aus (2.21) bestimmen:

$$\mathcal{P}_{\mathrm{ext}} = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}a + \int_{\Omega} \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}v. \tag{2.31}$$

Die Spannungsleistung, oder interne mechanische Leistung, $\mathcal{P}_{\mathrm{int}}$ lässt sich in der Momentankonfiguration durch den Cauchy'schen Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ und dem sym-

metrischen Anteil des räumlichen Geschwindigkeitsgradienten $\boldsymbol{d} = \frac{1}{2}(\mathrm{grad}(\boldsymbol{v}) + \mathrm{grad}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{v})) = \boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{F}^{-1}$ darstellen als

$$\mathcal{P}_{\mathrm{int}} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{d} \, \mathrm{d}v \,. \tag{2.32}$$

Entsprechend dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik, dem Energieerhaltungssatz, muss sich eine Zufuhr von externer Leistung in einer Erhöhung der internen Energie auswirken. Damit ergibt sich die Änderungsrate der internen Energie oder Spannungsleistung aus der Leistungszufuhr aus externen Quellen:

$$\mathcal{P}_{\mathrm{int}} = \mathcal{P}_{\mathrm{ext}} \tag{2.33}$$

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{d} \, \mathrm{d}v = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}a + \int_{\Omega} \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}v. \tag{2.34}$$

Ebenso kann die Energiebilanz in den Größen der Referenzkonfiguration ausgedrückt werden, wodurch sich weitere arbeitskonforme Paare von Spannungs- und Verzerrungstensoren finden lassen. Einige der Paare sind im Folgenden zusammengestellt:

$$\mathcal{P}_{\mathrm{int}} = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{P} : \dot{\boldsymbol{F}} \, \mathrm{d}V = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{S} : \dot{\boldsymbol{E}} \, \mathrm{d}V = \int_{\Omega_0} J\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{d} \, \mathrm{d}V \,. \tag{2.35}$$

2.4 Materialverhalten

Zur vollständigen Beschreibung des Verhaltens des Körpers unter äußeren Lasten muss der Zusammenhang zwischen den Spannungen und Verzerrungen beschrieben werden. Er wird im Allgemeinen durch Materialgesetze wiedergegeben. Aus der Vielzahl an bisher etablierten Materialmodellen wird hier nur auf lineare Elastizität eingegangen, da sich die Ausführungen in dieser Arbeit auf eine vollständig lineare Theorie beschränken.

2.4.1 Lineare Elastizität

Ein linear elastisches Materialverhalten ist gekennzeichnet durch einen linearen Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen sowie Hyperelastizität. Letz-

teres bedeutet eine vollständige Reversibilität der Deformation. Das heißt, wenn auf einen gegebenen Ausgangszustand Ω_1 des Körpers mit Spannungs- und Verzerrungszustand $\boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{E}_1$ eine äußere Belastung aufgebracht wird, die zu einem Spannungszustand $\boldsymbol{S}_2$ und einem Verzerrungszustand $\boldsymbol{E}_2$ führt, dann führt eine Rücknahme der zusätzlich aufgebrachten äußeren Belastung zu einer Rückkehr in den Zustand Ω_1.
Der Zusammenhang kann mathematisch mit Hilfe des Elastizitätstensors $\mathbb{C}$ vierter Stufe mit den Komponenten $\mathbb{C}_{ijkl}$ beschrieben werden:

$$\boldsymbol{S} = \mathbb{C}\boldsymbol{E} \qquad \text{mit } \mathbb{C}_{ijkl} = \mathbb{C}_{klij} \,. \tag{2.36}$$

Aus den bisher schon bekannten Eigenschaften, wie der Symmetrie von $\boldsymbol{S}$ und $\boldsymbol{E}$ sowie der weiteren Voraussetzung von isotropem, also richtungsunabhängigem, Materialverhalten, lassen sich die ursprünglich 81 unabhängigen Komponenten von $\mathbb{C}$ auf zwei unabhängige Materialparameter reduzieren. Als die zwei Parameter werden die im Ingenieurbereich gebräuchlichen, Elastizitätsmodul E und Querkontraktionszahl ν, verwendet.
Das linear elastische Materialgesetz für die jeweils sechs unabhängigen Komponenten von $\boldsymbol{S}$ und $\boldsymbol{E}$ wird in Voigtnotation mit den Vektoren $\boldsymbol{S}_\mathrm{V}$ und $\boldsymbol{E}_\mathrm{V}$ aufgeschrieben:

$$\boldsymbol{S}_\mathrm{V} = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{23} \end{bmatrix} = \boldsymbol{C} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ 2E_{12} \\ 2E_{13} \\ 2E_{23} \end{bmatrix} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{E}_\mathrm{V} \,, \tag{2.37}$$

wobei $\boldsymbol{C}$ die folgende Materialmatrix darstellt:

$$\boldsymbol{C} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} . \tag{2.38}$$

2.5 Schwache Form des Gleichgewichts

Mit Hilfe der bisherigen Gleichungen lässt sich das Randwertproblem für die Verschiebungen eines Körpers $\mathcal{B}$ unter gegebenen äußeren Lasten $\boldsymbol{b}_0$, $\bar{\boldsymbol{t}}_0$ und Randverschiebungen $\bar{\boldsymbol{u}}$ vollständig in Bezug zur Referenzkonfiguration beschreiben:

$$\operatorname{Div}(\boldsymbol{P}) + \boldsymbol{b}_0 = \boldsymbol{0} \qquad \text{in } \Omega_0 \tag{2.39}$$

$$\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}} \qquad \text{in } \partial\Omega_0^{\boldsymbol{u}} \tag{2.40}$$

$$\boldsymbol{t}_0 = \bar{\boldsymbol{t}}_0 \qquad \text{in } \partial\Omega_0^{\boldsymbol{t}}\,. \tag{2.41}$$

Dabei wurde der Rand des Gebiets in einen Teil $\partial\Omega_0^{\boldsymbol{t}}$ mit Spannungsrandbedingungen und einen Teil $\partial\Omega_0^{\boldsymbol{u}}$ mit Verschiebungsrandbedingungen unterteilt:

$$\partial\Omega_0 = \partial\Omega_0^{\boldsymbol{u}} \cup \partial\Omega_0^{\boldsymbol{t}}\,. \tag{2.42}$$

Diese Form der Beschreibung wird als starke Form des Gleichgewichts bezeichnet. Dabei wird die Differentialgleichung lokal in jedem Punkt erfüllt.
Für die spätere numerische Umsetzung wird die sogenannte schwache Form als Grundlage der Finite-Elemente-Methode (FEM) benötigt. Dabei wird die Differentialgleichung global im integralen Mittel erfüllt.
Zur Herleitung wird die Differentialgleichung (2.39) mit einer virtuellen Verrückung, auch Testfunktion genannt, $\delta\boldsymbol{u}$ multipliziert und über das Gebiet Ω_0 integriert. $\delta\boldsymbol{u}$ muss dabei die Verschiebungsrandbedingungen einhalten:

$$g(\boldsymbol{u}, \delta\boldsymbol{u}) = -\int_{\Omega_0} (\operatorname{Div}(\boldsymbol{P}) + \boldsymbol{b}_0) \cdot \delta\boldsymbol{u}\, \mathrm{d}V = 0\,. \tag{2.43}$$

Mit der Produktregel für die Divergenz

$$\operatorname{Div}(\boldsymbol{P}\,\delta\boldsymbol{u}) = \operatorname{Div}(\boldsymbol{P}) \cdot \delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{P} : \operatorname{Grad}(\delta\boldsymbol{u}) \tag{2.44}$$

und dem Gauß'schen Integralsatz mit Anwendung des Cauchy-Theorems

$$\int_{\Omega_0} \operatorname{Div}(\boldsymbol{P} \cdot \delta\boldsymbol{u})\, \mathrm{d}V = \int_{\partial\Omega_0} \delta\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{P}\boldsymbol{N}\, \mathrm{d}A = \int_{\partial\Omega_0} \boldsymbol{t}_0 \cdot \delta\boldsymbol{u}\, \mathrm{d}A \tag{2.45}$$

lässt sich (2.43) darstellen als

$$g(\boldsymbol{u}, \delta\boldsymbol{u}) = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{P} : \mathrm{Grad}\,(\delta\boldsymbol{u})\ \mathrm{d}V - \int_{\partial\Omega_0} \boldsymbol{t}_0 \cdot \delta\boldsymbol{u}\ \mathrm{d}A - \int_{\Omega_0} \boldsymbol{b}_0 \cdot \delta\boldsymbol{u}\ \mathrm{d}V = 0\,. \tag{2.46}$$

Es gilt außerdem $\delta\boldsymbol{u} = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}) = \delta\boldsymbol{x}$, da $\boldsymbol{X}$ konstant ist. Damit folgt

$$\mathrm{Grad}(\delta\boldsymbol{u}) = \mathrm{Grad}(\delta\boldsymbol{x}) = \delta\boldsymbol{F} \tag{2.47}$$

und somit:

$$g(\boldsymbol{u}, \delta\boldsymbol{u}) = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{P} : \delta\boldsymbol{F}\ \mathrm{d}V - \int_{\partial\Omega_0} \boldsymbol{t}_0 \cdot \delta\boldsymbol{u}\ \mathrm{d}A - \int_{\Omega_0} \boldsymbol{b}_0 \cdot \delta\boldsymbol{u}\ \mathrm{d}V = 0\,. \tag{2.48}$$

Der Term der virtuellen inneren Arbeit kann weiterhin umgeformt werden, um ein arbeitskonformes Paar von symmetrischem Spannungs- und Verzerrungstensor nutzen zu können:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P} : \delta\boldsymbol{F} &= \boldsymbol{F}\boldsymbol{S} : \delta\boldsymbol{F} = \boldsymbol{S} : \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{F} && (2.49)\\
&= \boldsymbol{S} : \left[\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{F} + \delta\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\right) + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{F} - \delta\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\right)\right] && (2.50)\\
&= \boldsymbol{S} : \left[\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{F} + \delta\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\right)\right] && (2.51)\\
&= \boldsymbol{S} : \delta\boldsymbol{E}\,. && (2.52)
\end{aligned}$$

Dazu wird zunächst $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{S}$ eingesetzt, anschließend der zweite Teil des inneren Produkts in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Teil aufgeteilt und schließlich die Symmetrie von $\boldsymbol{S}$ ausgenutzt, die dazu führt, dass das innere Produkt aus $\boldsymbol{S}$ und dem antisymmetrischen Anteil null wird. Der verbleibende symmetrische Anteil ist offensichtlich identisch mit der Variation des Green-Lagrange'schen Verzerrungstensors $\delta\boldsymbol{E}$.

Die verwendete schwache Form als Grundlage für die Finite-Elemente-Methode lautet damit

$$g(\boldsymbol{u}, \delta\boldsymbol{u}) = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{S} : \delta\boldsymbol{E}\ \mathrm{d}V - \int_{\partial\Omega_0} \boldsymbol{t}_0 \cdot \delta\boldsymbol{u}\ \mathrm{d}A - \int_{\Omega_0} \boldsymbol{b}_0 \cdot \delta\boldsymbol{u}\ \mathrm{d}V = 0\,. \tag{2.53}$$

Die Randbedingungen (2.40) und (2.41) vervollständigen das Randwertproblem.

Mit der Voigtnotation entsprechend (2.37) und nach Einsetzen des Materialgesetzes (2.37) und der Randbedingungen (2.40) und (2.41) lässt sich (2.53) darstellen als:

$$g(\boldsymbol{u}, \delta\boldsymbol{u}) = \int\limits_{\Omega_0} \delta\boldsymbol{E}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C} \boldsymbol{E}_{\mathrm{V}} \, \mathrm{d}V - \int\limits_{\partial\Omega_0^{\boldsymbol{t}}} \delta\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{t}}_0 \, \mathrm{d}A - \int\limits_{\Omega_0} \delta\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{b}_0 \, \mathrm{d}V = 0 \,,$$

$$g(\boldsymbol{u}, \delta\boldsymbol{u}) = \int\limits_{\Omega_0} \delta\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{V}} \, \mathrm{d}V - \int\limits_{\partial\Omega_0^{\boldsymbol{t}}} \delta\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{t}}_0 \, \mathrm{d}A - \int\limits_{\Omega_0} \delta\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{b}_0 \, \mathrm{d}V = 0 \,. \tag{2.54}$$

Dabei wurde der Vektor $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{V}} = \boldsymbol{E}_{\mathrm{V}}$ und die Matrix $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{C}$ eingeführt, um für die späteren Ausführungen eine vereinheitlichte Darstellung der schwachen Form zu derjenigen bei Balken und Platten in Kapitel 3 zu erhalten.

Kapitel 3

Theorie der Tragwerksstrukturen

In diesem Kapitel werden die theoretischen Grundlagen der Tragwerksstrukturen Balken und Platte erläutert, die später auf der makroskopischen Ebene zur Beschreibung der Struktur verwendet werden. Die Form der Darstellungen ist an die Ausführungen in [12] angelehnt.

3.1 Schubweicher Balken

Als Balken werden Strukturen bezeichnet, deren Länge sehr groß ist im Verhältnis zu ihrer Breite und Höhe. Eine solche Struktur kann makroskopisch näherungsweise auf eine Linie, die sogenannte Bezugsachse, reduziert werden. Anschließend wird jedem Punkt der Bezugsachse ein Querschnitt zugeordnet.
Die Ausführungen in diesem Abschnitt folgen der Balkentheorie nach Timoshenko (z.B. [49, 50]), welche Schubverdrehungen des Querschnitts berücksichtigt.

3.1.1 Grundlegende Annahmen

Für die weitere Betrachtung werden einige vereinfachende Annahmen getroffen.
Zunächst wird von einem prismatischen Balken ausgegangen, bei dem die Bezugsachse in der Referenzkonfiguration gerade ist und alle Schwerpunkte der Querschnitte auf der Bezugsachse liegen. Die betrachteten Querschnitte werden weiterhin auf doppelsymmetrische Querschnitte beschränkt, bei denen der Schubmittelpunkt und der Schwerpunkt zusammenfallen.
Die Querschnitte sollen unter Deformation eben bleiben und es werden weiterhin nur kleine Deformationen betrachtet, sodass eine geometrisch lineare Theorie verwendet werden kann.

3.1.2 Kinematik

Es wird ein orthonormales Basissystem $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z\}$ eingeführt, bei dem $\boldsymbol{e}_x$ in der Referenzkonfiguration in der Balkenachse liegt und $\{\boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z\}$ die Querschnittsebene aufspannen.
Durch die Geometrie des Balkens sind die Spannungsgrößen S_{yy}, S_{zz} und S_{yz} klein gegenüber S_{xx}, S_{xy} und S_{xz} und damit der Anteil der zugehörigen inneren Arbeit, sodass die Größen S_{yy}, S_{zz}, S_{yz}, E_{yy}, E_{zz} und E_{yz} vernachlässigt werden können.

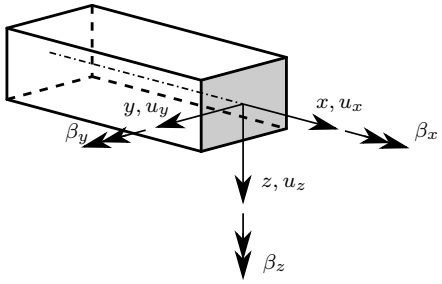

Abbildung 3.1: Balkenkinematik

Mit den bisherigen Annahmen können die Verschiebungen $\bar{\boldsymbol{u}} = [\bar{u}_x, \bar{u}_y, \bar{u}_z]^{\mathrm{T}}$ eines beliebigen Punkts des Balkens entsprechend Abbildung 3.1 dargestellt werden als

$$\bar{u}_x(x, y, z) = u_x(x) + z\beta_y(x) - y\beta_z(x) \tag{3.1}$$

$$\bar{u}_y(x, y, z) = u_y(x) - z\beta_x(x) \tag{3.2}$$

$$\bar{u}_z(x, y, z) = u_z(x) + y\beta_x(x). \tag{3.3}$$

Dabei sind u_x, u_y, u_z die Verschiebungen der Balkenachse in Richtung von $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y$ und $\boldsymbol{e}_z$. Die Größen β_x, β_y und β_z bezeichnen entsprechend die Verdrehungen der Balkenachse um $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y$ und $\boldsymbol{e}_z$. Sie werden in einem Vektor

$$\boldsymbol{u} = [u_x, u_y, u_z, \beta_x, \beta_y, \beta_z]^{\mathrm{T}} \tag{3.4}$$

angeordnet.
Aus den Verschiebungen und Verdrehungen lassen sich nach (2.12) mit der Notation

$(.)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ die benötigten, linearisierten Green'schen Verzerrungen bestimmen:

$$E_{xx} = \bar{u}_{x,x} \qquad = u'_x + z\beta'_y - y\beta'_z \,, \tag{3.5}$$

$$2E_{xy} = \bar{u}_{x,y} + \bar{u}_{y,x} = -\beta_z + u'_y - z\beta'_x \,, \tag{3.6}$$

$$2E_{xz} = \bar{u}_{x,z} + \bar{u}_{z,x} = \beta_y + u'_z + y\beta'_x \,. \tag{3.7}$$

Daraus können für den Balken sechs unabhängige Verzerrungsgrößen definiert und in einem Vektor $\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{B}$ angeordnet werden:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{B} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u'_x \\ u'_y - \beta_z \\ u'_z + \beta_y \\ \beta'_x \\ \beta'_y \\ \beta'_z \end{bmatrix} . \tag{3.8}$$

Damit kann der Zusammenhang zu den maßgeblichen Komponenten von $\boldsymbol{E}_\mathrm{V}$ hergestellt werden:

$$\boldsymbol{E}_\mathrm{B} = \begin{bmatrix} E_{xx} \\ 2E_{xy} \\ 2E_{xz} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z & -y \\ 0 & 1 & 0 & -z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}_\mathrm{B}} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}_\mathrm{B}\, \boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{B}. \tag{3.9}$$

3.1.3 Schnittgrößen, Stoffgesetz und schwache Form

Die zu den sechs Verzerrungsgrößen in $\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{B}$ zugehörigen sechs Schnittgrößen des Balkens sind die Normalkraft N in Richtung $\boldsymbol{e}_x$, die Querkräfte Q_y und Q_z in Richtung $\boldsymbol{e}_y$ bzw. $\boldsymbol{e}_z$, das Torsionsmoment M_x um $\boldsymbol{e}_x$ und die Biegemomente M_y und M_z um $\boldsymbol{e}_y$ bzw. $\boldsymbol{e}_z$.

In Abhängigkeit von den Spannungen $\boldsymbol{S}_\mathrm{B} = [S_{xx}, S_{xy}, S_{xz}]^\mathrm{T}$ sind sie definiert als

$$\boldsymbol{\sigma}_\mathrm{B}(x) = \begin{bmatrix} N \\ Q_y \\ Q_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \int\limits_A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -z & y \\ z & 0 & 0 \\ -y & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{xx} \\ S_{xy} \\ S_{xz} \end{bmatrix} \mathrm{d}A = \int\limits_A \boldsymbol{A}_\mathrm{B}^\mathrm{T}\, \boldsymbol{S}_\mathrm{B}\, \mathrm{d}A\,. \tag{3.10}$$

A ist dabei die betrachtete Querschnittsfläche des Balkens an der Stelle x.

Aus dem allgemeinen linear elastischen Stoffgesetz in Voigtnotation (2.37) folgt mit $S_{yy} = S_{zz} = 0$ für die maßgeblichen Komponenten

$$\boldsymbol{S}_\mathrm{B} = \begin{bmatrix} S_{xx} \\ S_{xy} \\ S_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{xx} \\ 2E_{xy} \\ 2E_{xz} \end{bmatrix} = \boldsymbol{C}_\mathrm{B}\, \boldsymbol{E}_\mathrm{B} \tag{3.11}$$

mit dem Elastizitätsmodul E, der Querkontraktionszahl ν und dem Schubmodul $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$. Damit lässt sich der Zusammenhang zwischen den Schnittgrößen und Balkenverzerrungen herstellen:

$$\boldsymbol{\sigma}_\mathrm{B} = \int\limits_A \boldsymbol{A}_\mathrm{B}^\mathrm{T} \boldsymbol{C}_\mathrm{B} \boldsymbol{A}_\mathrm{B}\, \mathrm{d}A\; \boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{B} = \boldsymbol{D}_\mathrm{B}\, \boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{B}. \tag{3.12}$$

Dabei ist $\boldsymbol{D}_\mathrm{B}$ die Materialmatrix für die Schnittgrößen und beinhaltet mit den hier getroffenen Annahmen die bekannten Einträge

$$\boldsymbol{D}_\mathrm{B} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varkappa_y GA & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varkappa_z GA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GI_T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & EI_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & EI_z \end{bmatrix}. \tag{3.13}$$

Dabei bezeichnen $\varkappa_y$ und $\varkappa_z$ Schubkorrekturfaktoren, welche die zu hohen Schubsteifigkeiten infolge der Annahme von ebenbleibenden Querschnitten korrigieren, und wurden nachträglich in $\boldsymbol{D}_\mathrm{B}$ eingefügt. Sie ergeben sich nicht aus den obigen Betrachtungen. Sie werden mit der Querschnittsfläche A zur Schubfläche $A_{\mathrm{S}_y} = \varkappa_y A$ bzw. $A_{\mathrm{S}_z} = \varkappa_z A$ zusammengefasst.

Mit diesen Beziehungen und $\delta\boldsymbol{u}$, den virtuellen Testfunktionen für die Verschiebungen und Verdrehungen der Balkenachse, lässt sich für einen Balken die schwache Form des Gleichgewichts nach (2.54) in Vektornotation aufstellen zu

$$g(\boldsymbol{u}, \delta\boldsymbol{u}) = \int_x \delta\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D}_{\mathrm{B}} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{B}} \, \mathrm{d}x - \int_x \delta\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \, \bar{\boldsymbol{t}} \, \mathrm{d}x - \sum_k \delta\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(\bar{x}_k) \, \bar{\boldsymbol{F}}_k = 0. \tag{3.14}$$

Dabei ist $\bar{\boldsymbol{t}} = [\bar{\boldsymbol{q}}, \bar{\boldsymbol{m}}]^{\mathrm{T}}$, mit $\bar{\boldsymbol{q}}$ den entlang der Balkenachse angreifenden, linienbezogenen Kräften und $\bar{\boldsymbol{m}}$ den entsprechenden linienbezogenen Momenten. Weiterhin sind $\bar{\boldsymbol{F}}_k = [\bar{\boldsymbol{Q}}_k, \bar{\boldsymbol{M}}_k]^{\mathrm{T}}$ die Vektoren der Einzelkräfte $\bar{\boldsymbol{Q}}_k$ und Einzelmomente $\bar{\boldsymbol{M}}_k$ an der Stelle $\bar{x}_k$. Die Integration über x ist die Integration entlang der Balkenachse.

3.2 Schubweiche Platte

Als Platten werden solche Strukturen bezeichnet, deren Länge und Breite sehr groß ist im Verhältnis zu ihrer Dicke h. Makroskopisch kann eine solche Struktur näherungsweise in zwei Dimensionen beschrieben werden. Dabei wird sie auf eine ebene Bezugsfläche, auch Referenzfläche genannt, reduziert und jedem Punkt der Fläche wird eine Dicke zugeordnet.
Die Ausführungen in diesem Abschnitt basieren auf einer Plattentheorie mit Reissner-Mindlin-Kinematik (siehe z.B. [40, 43]) und werden um die Membrangrößen Dehnung und Schub in der Plattenebene erweitert.

3.2.1 Grundlegende Annahmen

Für die weitere Betrachtung werden einige vereinfachende Annahmen getroffen.

- Die Referenzfläche stellt die Plattenmittelfläche dar.
- Die Referenzfläche ist eben.
- Die Querschnitte bleiben unter Deformation eben.
- Es werden nur kleine Deformationen betrachtet, sodass eine geometrisch lineare Theorie verwendet werden kann.
- Aufgrund der geringen Dicke sind die Normalspannungen in Dickenrichtung klein gegenüber den anderen Spannungen und werden daher vernachlässigt.

3.2.2 Kinematik

Es wird ein orthonormales Basissystem $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z\}$ eingeführt, bei dem $\boldsymbol{e}_x$ und $\boldsymbol{e}_y$ die Ebene der Referenzfläche aufspannen und $\boldsymbol{e}_z$ die Dickenrichtung der Platte bezeichnet.
Die Verschiebungen eines Punkts der Referenzfläche werden mit u_x, u_y, u_z bezeichnet. β_x und β_y werden arbeitskonform zu den Momenten-Schnittgrößen m_x und m_y eingeführt und bezeichnen Verdrehungen um die jeweils andere Achse (siehe Abbildung 3.2). Die Freiheitsgrade werden in einem Vektor $\boldsymbol{u} = [u_x, u_y, u_z, \beta_x, \beta_y]^{\mathrm{T}}$ angeordnet.

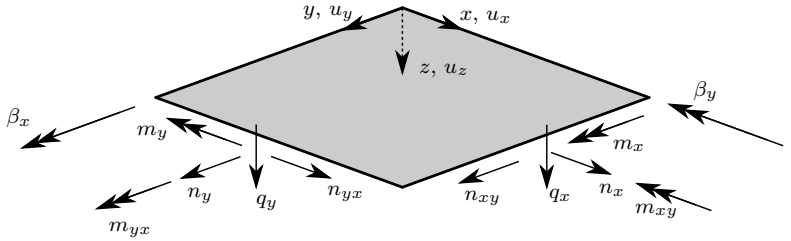

Abbildung 3.2: Referenzfläche der um Dehnung und Schub in der Ebene erweiterten Platte mit den kinematischen Größen und Schnittgrößen

Aus den getroffenen Annahmen können damit die Verschiebungen $\bar{\boldsymbol{u}} = [\bar{u}_x, \bar{u}_y, \bar{u}_z]^{\mathrm{T}}$ eines beliebigen Punkts innerhalb der Platte dargestellt werden:

$$\bar{u}_x = u_x(x, y) + z\beta_x(x, y) \tag{3.15}$$

$$\bar{u}_y = u_y(x, y) + z\beta_y(x, y) \tag{3.16}$$

$$\bar{u}_z = u_z(x, y)\,. \tag{3.17}$$

Daraus ergeben sich die linearisierten Green'schen Verzerrungen zu:

$$E_{xx} = \bar{u}_{x,x} = u_{x,x} + z\beta_{x,x}\,, \tag{3.18}$$

$$E_{yy} = \bar{u}_{y,y} = u_{y,y} + z\beta_{y,y}\,, \tag{3.19}$$

$$E_{zz} = \bar{u}_{z,z} = 0\,, \tag{3.20}$$

$$2E_{xy} = \bar{u}_{x,y} + \bar{u}_{y,x} = u_{x,y} + z\beta_{x,y} + u_{y,x} + z\beta_{y,x}\,, \tag{3.21}$$

$$2E_{xz} = \bar{u}_{x,z} + \bar{u}_{z,x} = \beta_x + u_{z,x}\,, \tag{3.22}$$

$$2E_{yz} = \bar{u}_{y,z} + \bar{u}_{z,y} = \beta_y + u_{z,y}\,. \tag{3.23}$$

Anschließend werden acht unabhängige Verzerrungsgrößen für die Platte definiert und in einem Vektor $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{P}}$ angeordnet:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{P}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{x,x} \\ u_{y,y} \\ u_{x,y} + u_{y,x} \\ \beta_{x,x} \\ \beta_{y,y} \\ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \\ \beta_x + u_{z,x} \\ \beta_y + u_{z,y} \end{bmatrix}. \tag{3.24}$$

Der lineare Zusammenhang zu den maßgeblichen Green'schen Verzerrungen kann in Vektornotation wieder über eine Matrix ausgedrückt werden:

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{P}} = \begin{bmatrix} E_{xx} \\ E_{yy} \\ 2E_{xy} \\ 2E_{xz} \\ 2E_{yz} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}_{\mathrm{P}}} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{P}}\,\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{P}}\,. \tag{3.25}$$

3.2.3 Schnittgrößen, Stoffgesetz und schwache Form

Die zu den acht unabhängigen Platten-Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{P}}$ zugehörigen Schnittgrößen sind die Membrankräfte n_x, n_y, n_{xy}, die Momente m_x, m_y, m_{xy} und die Querkräfte

q_x und q_y. Sie sind längenbezogene Größen und definiert als:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{P}} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \\ m_x \\ m_y \\ m_{xy} \\ q_x \\ q_y \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{xy} \\ S_{xz} \\ S_{yz} \end{bmatrix} \mathrm{d}z = \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{A}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{S}_{\mathrm{P}} \, \mathrm{d}z \,. \quad (3.26)$$

$\boldsymbol{S}_{\mathrm{P}}$ stellt dabei wieder die maßgeblichen Spannungen in Vektornotation dar. Die Normalspannung in Dickenrichtung wurde dabei entsprechend der getroffenen Annahmen vernach-lässigt. h ist die Plattendicke.

Aus dem allgemeinen linear elastischen Stoffgesetz in Vektornotation (2.37) folgt hier mit $S_{zz} = 0$ für die maßgeblichen Größen:

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{P}} = \begin{bmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{xy} \\ S_{xz} \\ S_{yz} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{xx} \\ E_{yy} \\ 2E_{xy} \\ 2E_{xz} \\ 2E_{yz} \end{bmatrix} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{P}} \boldsymbol{E}_{\mathrm{P}} \,. \quad (3.27)$$

Damit kann der Zusammenhang zwischen den Schnittgrößen und den Verzerrungen der Platte angegeben werden:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{P}} = \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{A}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C}_{\mathrm{P}} \boldsymbol{A}_{\mathrm{P}} \, \mathrm{d}z \, \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{P}} = \boldsymbol{D}_{\mathrm{P}} \, \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{P}} \,. \quad (3.28)$$

Die Materialmatrix $\boldsymbol{D}_{\mathrm{P}} = \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{A}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C}_{\mathrm{P}} \boldsymbol{A}_{\mathrm{P}} \, \mathrm{d}z$ enthält die Einträge

$$\boldsymbol{D}_{\mathrm{P}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_{\mathrm{m}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}_{\mathrm{b}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}_{\mathrm{s}} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

mit

$$\boldsymbol{D}_{\mathrm{m}} = \frac{Eh}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \tag{3.30}$$

$$\boldsymbol{D}_{\mathrm{b}} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \tag{3.31}$$

$$\boldsymbol{D}_{\mathrm{s}} = \varkappa\frac{Eh}{(1-\nu^2)}\begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}. \tag{3.32}$$

$\varkappa$ bezeichnet dabei, wie bei den Balken, einen Schubkorrekturfaktor, um die zu hohe Schubsteifigkeit infolge der Annahme von ebenbleibenden Querschnitten zu korrigieren.

Mit diesen Beziehungen und $\delta\boldsymbol{u}$ den virtuellen Testfunktionen für die Verschiebungen und Verdrehungen der Referenzfläche lässt sich für eine Platte die schwache Form des Gleichgewichts nach (2.54) in Vektornotation aufstellen zu

$$g(\boldsymbol{u}, \delta\boldsymbol{u}) = \int_A \delta\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D}_{\mathrm{P}} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{P}} \,\mathrm{d}A - \int_A \delta\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{q}} \,\mathrm{d}A - \int_{\Gamma^{\boldsymbol{\sigma}}} \delta\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{f}} \,\mathrm{d}S = 0. \tag{3.33}$$

Dabei sind $\bar{\boldsymbol{q}} = [0, 0, p, 0, 0]^{\mathrm{T}}$ die auf die Referenzfläche einwirkenden, flächenbezogenen Kräfte und $\bar{\boldsymbol{f}}$ die linienbezogenen Kräfte und Momente, die auf den Rand der Referenzfläche einwirken. Die Integration über A ist die Integration über die Referenzfläche. $\Gamma^{\boldsymbol{\sigma}}$ ist der mit Lasten belegte Teil des zugehörigen Rands.

Kapitel 4

Finite-Elemente-Formulierung

In diesem Kapitel werden zunächst die Grundlagen der Finite-Elemente-Methode zur näherungsweisen Lösung der Differentialgleichungen dargestellt. Die Ausführungen beschränken sich dabei auf die in späteren Kapiteln benötigten Bereiche. Für eine weitergehende Darstellung der Finite-Elemente-Methode wird auf Werke der Standardliteratur verwiesen, z.B. [1], [57] und [56].

4.1 Allgemeine Grundlagen

4.1.1 Kinematik

Das Gebiet Ω des betrachteten Körpers $\mathcal{B}$ wird mit $numel$ Teilbereichen (Elementen) Ω^e näherungsweise diskretisiert:

$$\Omega \approx \Omega^{\mathrm{h}} = \bigcup_{e=1}^{numel} \Omega^e. \tag{4.1}$$

Dabei und im Weiteren bezeichnet $(.)^{\mathrm{h}}$ die Finite-Elemente-Näherung an die entsprechende Größe.
Die Geometrie jedes Elements folgt aus einer Abbildung vom Parameterraum $[\xi, \eta, \zeta]$ mit dem orthonormalen Koordinatensystem $\{\boldsymbol{e}_\xi, \boldsymbol{e}_\eta, \boldsymbol{e}_\zeta\}$ in den tatsächlichen Zustand des Elements e im realen Raum $[x, y, z]$ mit dem orthonormalen Koordinatensystem $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z\}$. Der Wertebereich der Parameter ξ, η, ζ beschränkt sich jeweils auf das Intervall $[-1, 1]$. Im eindimensionalen Fall wird der Parameter ξ verwendet, im zweidimensionalen Fall ξ und η. In den Abbildungen 4.1, 4.2 und 4.3 finden sich entsprechende Veranschaulichungen.

Die Abbildung in den tatsächlichen Zustand des Elements erfolgt mittels *nel* Ansatzfunktionen N_K. Die Anzahl *nel* der Ansatzfunktionen und deren Stützstellen (Knoten) im Element wird entsprechend der Anforderungen an die Ansätze, Stabilität und Konvergenz der Lösung, gewählt. Im Rahmen dieser Arbeit werden lineare und quadratische Ansatzfunktionen verwendet.
Der Ortsvektor $\boldsymbol{X}^{\mathrm{h}}$ eines beliebigen Punkts in Ω^e in der Referenzkonfiguration, bzw. $\boldsymbol{x}^{\mathrm{h}}$ in der Momentankonfiguration ergibt sich damit zu

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{h}} = \sum_{K=1}^{nel} N_K \boldsymbol{X}_K \ , \qquad \boldsymbol{x}^{\mathrm{h}} = \sum_{K=1}^{nel} N_K \boldsymbol{x}_K \ . \tag{4.2}$$

Dabei sind $\boldsymbol{X}_K$ und $\boldsymbol{x}_K$ die Ortsvektoren des Elementknotens K in der Referenz- und Momentankonfiguration.

Im Rahmen des isoparametrischen Konzepts werden die Verschiebungen $\boldsymbol{u}$ eines Punkts in Ω^e mit den gleichen Ansatzfunktionen approximiert wie die Geometrie:

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{h}} = \sum_{K=1}^{nel} N_K \boldsymbol{v}_K . \tag{4.3}$$

Dabei bezeichnet $\boldsymbol{v}_K$ die Verschiebungsgrößen im Knoten K. Die Dimension von $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}_K$ ist abhängig von der gewählten Elementformulierung. Die verwendeten Elementformulierungen werden in den folgenden Abschnitten erläutert.
Die Kinematik der Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}$ lässt sich unabhängig von der Betrachtung eines 3D-Körpers, eines Balkens oder einer Platte mit Hilfe des Differentialoperators $\boldsymbol{L}$ darstellen. $\boldsymbol{L}$ enthält dabei die Ableitungen nach den Koordinaten x, y, z und sein Aussehen hängt von der gewählten Elementformulierung ab. Die Details werden in den folgenden Abschnitten erläutert. Auf die Indizierung mit $(.)_{\mathrm{V}}$, $(.)_{\mathrm{B}}$ oder $(.)_{\mathrm{P}}$ zur Unterscheidung der Größen für 3D-Körper, Balken und Platten wird im Folgenden für eine verallgemeinerte Darstellung verzichtet:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{h}} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{u}^{\mathrm{h}} = \sum_{K=1}^{nel} \boldsymbol{L} N_K \boldsymbol{v}_K = \sum_{K=1}^{nel} \boldsymbol{B}_K \boldsymbol{v}_K . \tag{4.4}$$

Dabei wurde die Matrix $\boldsymbol{B}_K = \boldsymbol{L} N_K$ definiert. Sie enthält die Ableitungen der Ansatzfunktionen nach den Koordinaten x, y, z.

4.1.2 Berechnung der Ableitungen der Ansatzfunktionen

Die Ableitungen der Ansatzfunktionen N_K nach den Koordinaten x, y, z können nicht direkt bestimmt werden, da die Ansatzfunktionen von den Parametern ξ, η, ζ abhängen. Eine Lösung bietet die Anwendung der Kettenregel:

$$\frac{\partial N_K}{\partial x} = \frac{\partial N_K}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_K}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial N_K}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x}. \tag{4.5}$$

Die Ableitungen der Koordinaten ξ, η, ζ nach x, y, z sind zunächst unbekannt. Aus (4.2) können aber die Ableitungen von $\boldsymbol{X}^{\mathrm{h}} = [x, y, z]^{\mathrm{T}}$ nach den Parametern ξ, η, ζ berechnet werden. Diese Ableitungen werden in der Jacobi-Matrix $\boldsymbol{J}$ angeordnet:

$$\begin{bmatrix} \partial_\xi \\ \partial_\eta \\ \partial_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} & z_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} & z_{,\eta} \\ x_{,\zeta} & y_{,\zeta} & z_{,\zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} = \boldsymbol{J} \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix}. \tag{4.6}$$

Dabei wurden die folgenden verkürzenden Schreibweisen verwendet:

$$(.)_{,\xi} = \frac{\partial (.)}{\partial \xi} \quad , \qquad \partial_\xi = \frac{\partial}{\partial \xi} \, . \tag{4.7}$$

Durch die Anforderungen an die Ansatzfunktionen und die Anordnung der Elementknoten ist $\det \boldsymbol{J} > 0$ und somit $\boldsymbol{J}$ invertierbar und es folgt:

$$\begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} = \boldsymbol{J}^{-1} \begin{bmatrix} \partial_\xi \\ \partial_\eta \\ \partial_\zeta \end{bmatrix}. \tag{4.8}$$

Damit lassen sich die gesuchten Ableitungen der Ansatzfunktionen nach den Koordinaten x, y, z darstellen:

$$\begin{bmatrix} N_{K,x} \\ N_{K,y} \\ N_{K,z} \end{bmatrix} = \boldsymbol{J}^{-1} \begin{bmatrix} N_{K,\xi} \\ N_{K,\eta} \\ N_{K,\zeta} \end{bmatrix}. \tag{4.9}$$

4.1.3 Virtuelle Größen und schwache Form

Für die schwache Form (2.54) werden die Variationen $\delta\boldsymbol{u}$ und $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ benötigt. Sie werden ebenfalls mit den gleichen Ansatzfunktionen approximiert:

$$\delta\boldsymbol{u}^{\mathrm{h}} = \sum_{I=1}^{nel} N_I \delta\boldsymbol{v}_I \ , \qquad \delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{h}} = \sum_{I=1}^{nel} \boldsymbol{B}_I \delta\boldsymbol{v}_I . \tag{4.10}$$

Die gewonnenen Zusammenhänge können nun in die schwache Form (2.54) in Vektornotation eingesetzt werden:

$$g(\boldsymbol{u}^{\mathrm{h}}, \delta\boldsymbol{u}^{\mathrm{h}}) = \sum_{e=1}^{numel} \left[\int_{\Omega_0^e} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{h}\mathrm{T}} \boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{h}} \, \mathrm{d}V - \int_{\partial\Omega_0^{\boldsymbol{t}e}} \delta\boldsymbol{u}^{\mathrm{h}\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{t}}_0 \, \mathrm{d}A - \int_{\Omega_0^e} \delta\boldsymbol{u}^{\mathrm{h}\mathrm{T}} \boldsymbol{b}_0 \, \mathrm{d}V \right]$$

$$g(\boldsymbol{u}^{\mathrm{h}}, \delta\boldsymbol{u}^{\mathrm{h}}) = \sum_{e=1}^{numel} \sum_{I=1}^{nel} \left[\sum_{K=1}^{nel} \left(\int_{\Omega_0^e} \delta\boldsymbol{v}_I^{e\mathrm{T}} \boldsymbol{B}_I^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_K \boldsymbol{v}_K^e \, \mathrm{d}V \right) \right.$$

$$\left. - \int_{\partial\Omega_0^{\boldsymbol{t}e}} \delta\boldsymbol{v}_I^{e\mathrm{T}} N_I \, \bar{\boldsymbol{t}}_0 \, \mathrm{d}A - \int_{\Omega_0^e} \delta\boldsymbol{v}_I^{e\mathrm{T}} N_I \, \boldsymbol{b}_0 \, \mathrm{d}V \right] \tag{4.11}$$

$$= \sum_{e=1}^{numel} \sum_{I=1}^{nel} \left[\delta\boldsymbol{v}_I^{e\mathrm{T}} \left(\sum_{K=1}^{nel} \boldsymbol{k}_{IK}^e \boldsymbol{v}_K^e - \boldsymbol{f}_I^e \right) \right] \tag{4.12}$$

$$= \sum_{e=1}^{numel} \delta\boldsymbol{v}^{e\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{k}^e \boldsymbol{v}^e - \boldsymbol{f}^e \right) \tag{4.13}$$

$$= \delta\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{K}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{F} \right) = 0 . \tag{4.14}$$

Dabei wurde die Elementsteifigkeitsmatrix als

$$\boldsymbol{k}^e = \begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_{11}^e & \cdots & \boldsymbol{k}_{1K}^e & \cdots & \boldsymbol{k}_{1\,nel}^e \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{k}_{I1}^e & \cdots & \boldsymbol{k}_{IK}^e & \cdots & \boldsymbol{k}_{I\,nel}^e \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{k}_{nel\,1}^e & \cdots & \boldsymbol{k}_{nel\,K}^e & \cdots & \boldsymbol{k}_{nel\,nel}^e \end{bmatrix} \qquad \text{mit} \quad \boldsymbol{k}_{IK}^e = \int_{\Omega_0^e} \boldsymbol{B}_I^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_K \, \mathrm{d}V$$

sowie der Elementverschiebungsvektor $\boldsymbol{v}^e$ und der Elementlastvektor $\boldsymbol{f}^e$ als

$$\boldsymbol{v}^e = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1^e \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_K^e \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_{nel}^e \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}^e = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_1^e \\ \vdots \\ \boldsymbol{f}_I^e \\ \vdots \\ \boldsymbol{f}_{nel}^e \end{bmatrix} \qquad \text{mit} \quad \boldsymbol{f}_I^e = \int\limits_{\partial\Omega_0^{te}} N_I \, \bar{\boldsymbol{t}}_0 \, \mathrm{d}A + \int\limits_{\Omega_0^e} N_I \, \boldsymbol{b}_0 \, \mathrm{d}V$$

eingeführt.
Der Zusammenbau führt auf die Größen $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{v}$, $\delta\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{F}$ des Gesamtsystems.

4.2 Geometrisch lineares Volumenelement

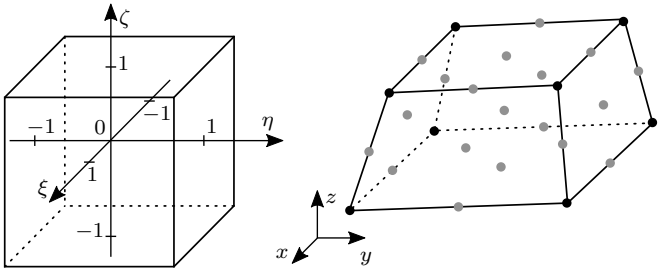

Abbildung 4.1: Volumenelement: Parameterraum (links) wird abgebildet in den tatsächlichen Zustand (rechts); acht Knoten (schwarz) für ein lineares Element und 27 Knoten (schwarz und grau) für ein quadratisches Element.

Das Volumenelement ist vollständig dreidimensional - die Ortsvektoren $\boldsymbol{x}_K$ und $\boldsymbol{X}_K$ sind dreidimensionale Vektoren, jeder Knoten besitzt drei translatorische Freiheitsgrade:

$$\boldsymbol{v}_K = [v_x, v_y, v_z]_K^{\mathrm{T}}. \tag{4.15}$$

Aus der Kinematik (2.12) folgt der Differentialoperator $\boldsymbol{L}$ der Verzerrungen zu:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{V}} = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z \\ \partial_y & \partial_x & 0 \\ \partial_z & 0 & \partial_x \\ 0 & \partial_z & \partial_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{u}\,. \tag{4.16}$$

4.3 Geometrisch lineares schubweiches 3D-Balkenelement

Abbildung 4.2: Balkenelement: Parameterraum (links) wird abgebildet in den tatsächlichen Zustand (rechts); zwei Knoten (schwarz) für ein lineares Element und 3 Knoten (schwarz und grau) für ein quadratisches Element.

Es wird ein räumliches schubweiches Balkenelement mit Timoshenko-Kinematik verwendet. Zur Vereinfachung der Betrachtung soll entsprechend Abschnitt 3.1.2 die Balkenachse in der Ausgangskonfiguration mit der x-Achse zusammenfallen.
Der Verschiebungsvektor $\boldsymbol{v}_K$ enthält die Verschiebungen und Verdrehungen der Balkenachse am Knoten K:

$$\boldsymbol{v}_K = [v_x, v_y, v_z, \beta_x, \beta_y, \beta_z]^{\mathrm{T}}_K. \tag{4.17}$$

Der Differentialoperator $\boldsymbol{L}$ für den kinematischen Zusammenhang nach (3.8) ergibt sich zu:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u'_x \\ u'_y - \beta_z \\ u'_z + \beta_y \\ \beta'_x \\ \beta'_y \\ \beta'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_x & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \partial_x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_z \end{bmatrix} = \boldsymbol{L}_{\mathrm{B}}\,\boldsymbol{u}. \tag{4.18}$$

Zur Vermeidung von Schublocking wird die Steifigkeitsmatrix selektiv reduziert integriert. Dabei werden die Schubterme der Steifigkeitsmatrix je Richtung mit jeweils einem Gaußpunkt weniger integriert als die restlichen Terme.
Eine ausführliche Betrachtung zum Problem des Schublockings und zum Vorgehen bei der selektiv reduzierten Integration sowie deren Auswirkungen findet sich z.B. in [57].

4.4 Geometrisch lineares schubweiches Plattenelement

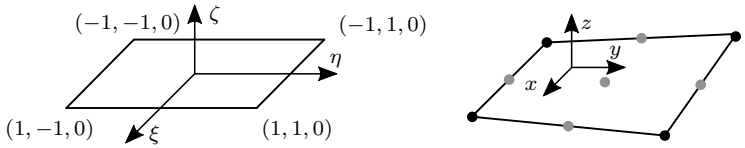

Abbildung 4.3: Plattenelement: Parameterraum (links) wird abgebildet in den tatsächlichen Zustand (rechts); vier Knoten (schwarz) für ein lineares Element und 9 Knoten (schwarz und grau) für ein quadratisches Element.

Ein Plattenelement mit den in Abschnitt 3.2 geschilderten Eigenschaften besitzt Verschiebungsvektoren $\boldsymbol{v}_K$ zu jedem Elementknoten mit den Freiheitsgraden

$$\boldsymbol{v}_K = [v_x, v_y, v_z, \varphi_x, \varphi_y]_K^{\mathrm{T}} . \tag{4.19}$$

Für eine einfachere Anwendung werden in der Elementformulierung nicht die Verdrehungen β_x und β_y, sondern $\varphi_x = -\beta_y$ und $\varphi_y = \beta_x$ verwendet. Dadurch entsprechen die implementierten Verdrehungen den tatsächlichen Verdrehungen um die jeweiligen Achsen (φ_x um $\boldsymbol{e}_x$ und φ_y um $\boldsymbol{e}_y$) mit korrektem Vorzeichen, wie in der Abbildung 3.2 erkennbar wird.

Für den Differentialoperator $\boldsymbol{L}$ ergibt sich nach (3.24) zunächst:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{P}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{x,x} \\ u_{y,y} \\ u_{x,y} + u_{y,x} \\ \beta_{x,x} \\ \beta_{y,y} \\ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \\ \beta_x + u_{z,x} \\ \beta_y + u_{z,y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 & 0 & 0 \\ \partial_y & \partial_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_y \\ 0 & 0 & 0 & \partial_y & \partial_x \\ 0 & 0 & \partial_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_y & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\bar{\boldsymbol{L}}_{\mathrm{P}}} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix} . \tag{4.20}$$

Unter Einbeziehung von φ_x und φ_y anstelle von β_x und β_y ergibt sich der Differentialoperator zu:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{P}} = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 & 0 & 0 \\ \partial_y & \partial_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_x \\ 0 & 0 & 0 & -\partial_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\partial_x & \partial_y \\ 0 & 0 & \partial_x & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \partial_y & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{bmatrix} = \boldsymbol{L}_{\mathrm{P}}\, \boldsymbol{u} . \tag{4.21}$$

Zur Vermeidung von Schublocking wird die Steifigkeitsmatrix selektiv reduziert integriert. Dabei werden die Schubterme der Steifigkeitsmatrix je Richtung mit jeweils einem Gaußpunkt weniger integriert als die restlichen Terme.
Eine ausführliche Betrachtung zum Problem des Schublockings und zum Vorgehen bei der selektiv reduzierten Integration bei Plattenelementen mit Reissner-Mindlin-Kinematik sowie deren Auswirkungen findet sich z.B. in [57].

Kapitel 5

Grundlagen der Mehrskalentheorie und Homogenisierung

Ausgangspunkt der Homogenisierungstheorie ist eine Beschreibung des betrachteten Körpers in zwei Skalen. Auf einer Makroskala wird der Körper als homogen betrachtet und auf einer Mikroskala werden die tatsächlichen Inhomogenitäten im Aufbau des Körpers berücksichtigt.
Eine solche Beschreibung kann anschaulich daher motiviert werden, dass eine rein äußerliche Betrachtung eines Körpers aus großer Entfernung ihn zunächst homogen erscheinen lässt. Sein Verhalten kann mit Hilfe eines homogenen Materialmodells hinreichend genau beschrieben werden. Bei näherer Betrachtung des Körpers unter zunehmender Vergrößerung lassen sich jedoch Inhomogenitäten oder eine Struktur in seinem Aufbau finden, die sein makroskopisches Deformationsverhalten maßgeblich beeinflussen.
Die detailreichen Kenntnisse über den inneren Aufbau des Körpers sollen für ein möglichst präzises Materialmodell genutzt werden. Dabei muss jedoch der Modellierungs- und Berechnungsaufwand moderat bleiben, um große Skalen betrachten zu können.

5.1 Grundlagen

Die Ausführungen in diesem Abschnitt geben die wesentlichen Grundgedanken und Erkenntnisse aus [37] wieder, auf denen weite Teile der hier entwickelten Modellierung basieren. Dort finden sich weitere Details, auf deren Darstellung hier verzichtet wird.
Es wird ein Körper $\mathcal{B}$ betrachtet, der das Gebiet Ω mit Rand $\partial\Omega$ einnimmt. Für die Betrachtung der Makroskala wird ein Koordinatensystem $\{\boldsymbol{e}_{Y1}, \boldsymbol{e}_{Y2}, \boldsymbol{e}_{Y3}\}$ ein-

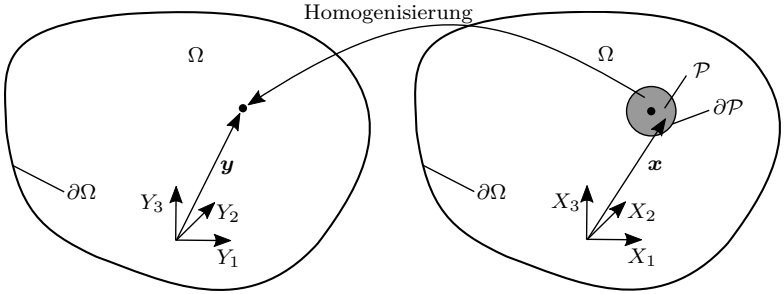

Abbildung 5.1: Darstellung des Körpers $\mathcal{B}$ in der Makroskala (links) und in der Mikroskala (rechts) - die homogenen Eigenschaften in der Makroskala folgen aus einer Betrachtung der inhomogenen Mikroskala.

geführt, für die Mikroskala $\{\boldsymbol{e}_{X1}, \boldsymbol{e}_{X2}, \boldsymbol{e}_{X3}\}$. In der Makroskala wird der Körper als homogen betrachtet. Ein Punkt P der Makroskala wird beschrieben durch seine Koordinaten $\boldsymbol{Y}$ in der Referenzkonfiguration und $\boldsymbol{y}$ in der Momentankonfiguration. Jedem Punkt P der Makroskala wird anschließend ein Bereich $\mathcal{P}$ mit Rand $\partial\mathcal{P}$ in der Mikroskala zugeordnet, der die nähere Umgebung des Punkts darstellt. In der Mikroskala wird der Körper als inhomogen betrachtet. Ein Punkt im Bereich $\mathcal{P}$ wird beschrieben durch die Koordinaten $\boldsymbol{X}$ in der Referenzkonfiguration und $\boldsymbol{x}$ in der Momentankonfiguration (Abbildung 5.1). Die Eigenschaften des Körpers im Punkt P auf der Makroebene gehen aus einer Mittelung (Homogenisierung) der Eigenschaften in $\mathcal{P}$ auf der inhomogenen Mikroebene hervor.

Zunächst gelten die Bilanzgleichungen aus Kapitel 2 für jede Skala einzeln und unabhängig voneinander. Zur Unterscheidung werden in den folgenden Gleichungen Größen der Makroskala mit $(.)^{\mathrm{M}}$ und Größen der Mikroskala mit $(.)^{\mathrm{m}}$ bezeichnet. Es gelten die Massenbilanz (2.19) und die Impulsbilanz (2.21) zunächst einzeln und unabhängig voneinander für beide Skalen:
Massenbilanz:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\Omega} \rho^{\mathrm{M}} \, \mathrm{d}v^{\mathrm{M}} = 0 \,, \tag{5.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathcal{P}} \rho^{\mathrm{m}} \, \mathrm{d}v^{\mathrm{m}} = 0 \,, \tag{5.2}$$

Impulsbilanz:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{\Omega}\rho^{\mathrm{M}}\,\boldsymbol{v}^{\mathrm{M}}\;\mathrm{d}v^{\mathrm{M}}=\int\limits_{\partial\Omega}\boldsymbol{t}^{\mathrm{M}}\;\mathrm{d}a^{\mathrm{M}}+\int\limits_{\Omega}\boldsymbol{b}^{\mathrm{M}}\;\mathrm{d}v^{\mathrm{M}}\,, \tag{5.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{\mathcal{P}}\rho^{\mathrm{m}}\,\boldsymbol{v}^{\mathrm{m}}\;\mathrm{d}v^{\mathrm{m}}=\int\limits_{\partial\mathcal{P}}\boldsymbol{t}^{\mathrm{m}}\;\mathrm{d}a^{\mathrm{m}}+\int\limits_{\mathcal{P}}\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}\;\mathrm{d}v^{\mathrm{m}}\,. \tag{5.4}$$

Die Verbindung zwischen den beiden Skalen wird nun über die Volumenmittelung von Massendichte und Impuls hergestellt:

$$\rho^{\mathrm{M}}=\frac{1}{v^{\mathrm{m}}}\int\limits_{\mathcal{P}}\rho^{\mathrm{m}}\;\mathrm{d}v^{\mathrm{m}}\,, \tag{5.5}$$

$$\rho^{\mathrm{M}}\boldsymbol{v}^{\mathrm{M}}=\frac{1}{v^{\mathrm{m}}}\int\limits_{\mathcal{P}}\rho^{\mathrm{m}}\,\boldsymbol{v}^{\mathrm{m}}\;\mathrm{d}v^{\mathrm{m}}\,. \tag{5.6}$$

Damit wird aus den inhomogenen Eigenschaften in der Umgebung des Punkts P ein Mittelwert berechnet. Hintergründe und detaillierte Ausführungen zur Wahl dieser Homogenisierungsbeziehungen sind im Anhang A dargestellt.
Aus den Beziehungen (5.5) und (5.6) können die lokalen Formen der Bilanzgleichungen für die Makroebene hergeleitet und somit gezeigt werden, dass sie konsistent zu den Bilanzgleichungen sind (ausführlich im Anhang A). Damit ist gezeigt, dass der gewählte Homogenisierungsansatz eine sinnvolle Verknüpfung zwischen den beiden Skalen herstellt.
Im Detail wird aus dieser Betrachtung auch deutlich, dass der Volumenkraftvektor und der Cauchy-Spannungstensor im quasistatischen Fall (keine Relativgeschwindigkeiten zwischen Mikro- und Makroebene) nach dem gleichen Schema homogenisiert werden können und müssen:

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{M}}=\frac{1}{v^{\mathrm{m}}}\int\limits_{\mathcal{P}}\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}\;\mathrm{d}v^{\mathrm{m}}\,, \tag{5.7}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{M}}=\frac{1}{v^{\mathrm{m}}}\int\limits_{\mathcal{P}}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{m}}\;\mathrm{d}v^{\mathrm{m}}\,. \tag{5.8}$$

Die Zusammenhänge gelten entsprechend analog für die anderen Spannungstensoren und die Größen in der Referenzkonfiguration. Eine ausführliche Darlegung der Zusammenhänge findet sich in [35, 37].

Die hier gewählte Herangehensweise an die Homogenisierung der Größen erfordert im Gegensatz zu dem häufig verwendeten Ansatz auf Basis der Hill-Mandel-Bedingung (siehe [11, 16, 23, 46]) keine speziellen Anforderungen an die Randbedingungen in dem Modell auf Mikroebene, um eine Konsistenz zwischen Mikro- und Makroebene sicher zu stellen. Weiterhin sind Volumenkräfte auf der Mikroebene explizit zulässig und widersprechen nicht der allgemeinen Theorie.

5.2 Repräsentatives Volumenelement

Aus der Beobachtung, dass der Körper sich bei makroskopischer Betrachtung wie homogen verhält und damit seine makroskopischen Eigenschaften ortsunabhängig sind, folgt die Annahme, dass die mikroskopischen Inhomogenitäten über den Körper insgesamt statistisch gleichmäßig verteilt sein müssen. Das lässt sich anschaulich so betrachten, dass ein entnommener Probekörper unabhängig vom Entnahmeort immer das gleiche makroskopische Materialverhalten aufweist. Daraus wiederum folgt, dass ein gut gewählter, kleiner Ausschnitt (Probekörper) der Mikroebene bereits ausreichend ist, um die makroskopischen Eigenschaften des gesamten Körpers zu ermitteln. Der Ausschnitt muss lediglich ausreichend groß gewählt werden, dass er eine statistisch repräsentative Anzahl an Inhomogenitäten enthält. Dann ist das Ergebnis der Volumenmittelung der Mikroeigenschaften unabhängig vom Ort und der Form des gewählten Ausschnitts.
Gleichzeitig darf der Ausschnitt allerdings nicht zu groß werden, denn er muss auf der makroskopischen Ebene näherungsweise noch als Punkt betrachtet werden können, um den Ansatz der zwei Skalen und eine Homogenisierung zu rechtfertigen. In [9] wird die Anforderung formuliert als: „Die mikroskopische Längenskala wird als sehr viel kleiner angenommen als die charakteristische Länge, über welche die makroskopische Belastung variiert."
Sind beide Bedingungen erfüllt, spricht man von einem repräsentativen Volumenelement (RVE).
Führt man als charakteristische Längen für eine Inhomogenität l_c, für das RVE L_RVE und für die Makrostruktur L ein, so lassen sich die Anforderungen in einer Ungleichung darstellen:

$$L \gg L_\mathrm{RVE} \gg l_\mathrm{c}\,. \tag{5.9}$$

Sind die Inhomogenitäten nicht statistisch oder zufällig verteilt, sondern periodisch im Körper angeordnet, so reicht bereits die Betrachtung einer Periode des Verteilungsmusters aus, um ein repräsentatives Volumenelement zu erzeugen. Dann

spricht man auch von einer Einheitszelle. Die begriffliche Unterscheidung zwischen RVE und Einheitszelle wird in dieser Arbeit nicht vorgenommen.
Ähnliche und weitere Ausführungen zu den Anforderungen zur Wahl des repräsentativen Ausschnitts finden sich unter anderem in [9, 11, 30].

5.3 Makro-Mikro-Übergang

Aus der bisherigen Betrachtung entstehen zwei zunächst getrennte Randwertprobleme.
Für die Makroebene gilt das Randwertproblem entsprechend Abschnitt 2.5:

$$\operatorname{Div}\left(\boldsymbol{P}^{\mathrm{M}}\right) + \boldsymbol{b}_0^{\mathrm{M}} = 0 \qquad \text{in } \Omega_0 \tag{5.10}$$

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{M}} = \bar{\boldsymbol{u}} \qquad \text{auf } \partial\Omega_0^{\boldsymbol{u}} \tag{5.11}$$

$$\boldsymbol{t}_0^{\mathrm{M}} = \bar{\boldsymbol{t}}_0 \qquad \text{auf } \partial\Omega_0^{\boldsymbol{t}}\,. \tag{5.12}$$

Für die Mikroebene gilt zwar entsprechend

$$\operatorname{Div}\left(\boldsymbol{P}^{\mathrm{m}}\right) + \boldsymbol{b}_0^{\mathrm{m}} = 0 \qquad \text{in } \mathcal{P}_0, \tag{5.13}$$

aber die Randbedingungen und die Lastaufbringung müssen noch definiert werden. Da die äußeren Last- und Verschiebungsrandbedingungen auf der Makroebene aufgebracht werden, müssen die daraus resultierenden Verformungen oder Verzerrungen an das Mikroproblem weitergegeben werden.
Um die Weitergabe der Verzerrungen an die Mikroebene zu gestalten, wird analog zu den anderen Größen eine Homogenisierungsbeziehung für die linearisierten Verzerrungen definiert:

$$\boldsymbol{E}^{M} = \frac{1}{V^{\mathrm{m}}} \int_{\mathcal{P}_0} \boldsymbol{E}^{\mathrm{m}} \, \mathrm{d}V^{\mathrm{m}}. \tag{5.14}$$

Da $\boldsymbol{E}^{\mathrm{M}}$ konstant in ganz $\mathcal{P}_0$ ist, lässt sich das umformen zur Nebenbedingung

$$\int_{\mathcal{P}_0} \left(\boldsymbol{E}^{M} - \boldsymbol{E}^{\mathrm{m}}\right) \, \mathrm{d}V^{\mathrm{m}} = 0. \tag{5.15}$$

Damit besteht das zu lösende Problem auf der Mikroebene aus der Differentialgleichung (5.13) und der Nebenbedingung (5.15), die später mit Hilfe von Lagrangepa-

rametern umgesetzt wird. Randlasten gibt es in der Mikroskala nicht. Die Verschiebungsrandbedingungen werden so gewählt, dass zunächst nur die Starrkörperbewegungen durch minimale Randbedingungen verhindert werden. Die Details zu den benötigten Randbedingungen und deren numerische Umsetzung werden in Kapitel 6 besprochen.

5.4 Mikro-Makro-Übergang

Aus der Lösung des Mikroproblems lässt sich mit Hilfe der Homogenisierungsbeziehung (5.8) die Spannungsantwort für die Makroebene finden. Die Berechnung der homogenisierten Materialmatrix zur Verknüpfung der makroskopischen Verzerrungen und der homogenisierten Spannungen und damit zur Vervollständigung des homogenisierten Materialgesetzes wird in Abschnitt 7.1 erläutert.

Kapitel 6

Neben- und Randbedingungen im RVE

Die zuvor definierte Nebenbedingung (5.15) an die Verzerrungen bringt einige Probleme mit sich, wenn die verwendeten Strukturelemente auf Makro- und Mikroebene nicht die gleichen sind. Wird auf beiden Ebenen ein 3D-Körper bzw. Volumenelemente verwendet, so können als Verzerrungen die linearisierten Green'schen Verzerrungen ohne Probleme auf beiden Ebenen verwendet werden. Wird jedoch auf der Makroebene ein Balken oder eine Platte zur Beschreibung der Geometrie verwendet und auf der Mikroebene weiterhin ein 3D-Körper benötigt, um die Inhomogenitäten abbilden zu können, so ergeben sich aus den jeweiligen Betrachtungen auf Mikro- und Makroebene gänzlich andere Verzerrungswerte, die nicht ohne Weiteres miteinander vergleichbar sind. Im folgenden Kapitel werden diese Probleme und eine mögliche Lösung dafür betrachtet.
Weiterhin werden die Randverformungen des RVE infolge der Lastaufbringung durch die Nebenbedingung betrachtet und auf deren Plausibilität eingegangen sowie zusätzliche Rand- und Nebenbedingungen zur Einhaltung von verträglichen Randverformungen aufgezeigt.
Die numerische Umsetzung der Nebenbedingung und weiterer Randbedingungen innerhalb der Finite-Elemente-Modellierung wird ebenfalls erläutert.
Alle RVE werden so modelliert, dass das globale Koordinatensystem in ihrer räumlichen Mitte liegt.

6.1 Umsetzung der Nebenbedingung mit Lagrangeparametern

Die Nebenbedingung (5.15) soll über Lagrangeparameter in die schwache Form (2.53) auf Mikroebene eingefügt werden. Dazu wird zunächst der Fall betrachtet, bei dem die schwache Form des Problems aus einem Potential Π durch Variation

hergeleitet werden kann:

$$g(\boldsymbol{u}, \delta\boldsymbol{u}) = \delta\Pi(\boldsymbol{u}). \tag{6.1}$$

Eine Erweiterung des Potentials um die Nebenbedingung ist möglich, indem Lagrangeparameter λ_i eingeführt werden, die die Einhaltung von (5.15) erzwingen. Werden die Lagrangeparameter in einem Vektor $\boldsymbol{\lambda}_\mathrm{V} \in \mathbb{R}^6$ angeordnet, kann das erweiterte Potential dargestellt werden als

$$\bar{\Pi} = \Pi + \int_{\mathcal{P}_0} \boldsymbol{\lambda}_\mathrm{V}^\mathrm{T} \left(\boldsymbol{E}_\mathrm{V}^\mathrm{M} - \boldsymbol{E}_\mathrm{V}^\mathrm{m} \right) \, \mathrm{d}V \,. \tag{6.2}$$

Dabei wird deutlich, dass für den Vektor der Lagrangeparameter $\boldsymbol{\lambda}_\mathrm{V}$ geeignete Ansätze gewählt werden müssen, um eine Erfüllung der Nebenbedingung, und damit eine Umsetzung des kinematischen Zusammenhangs zwischen Mikro- und Makroverzerrungen, im (gewichteten) integralen Mittel zu erreichen. Eine punktweise Erfüllung der Nebenbedingung im RVE würde dagegen zu einer exakten Erfüllung des kinematischen Zusammenhangs in jedem Punkt des RVE führen und damit unabhängig von den lokalen Gegebenheiten eine einheitliche Dehnung im gesamten RVE verursachen. Die Multiskalenmodellierung liefert jedoch erst sinnvolle Ergebnisse zwischen der Voigt- und Reuss-Schranke, wenn auf der Mikroebene komplexere Deformationen als auf der Makroebene berücksichtigt werden können (vgl. Abschnitt 1.2).

Die erste Variation von $\bar{\Pi}$ ergibt die allgemeingültige schwache Form, für welche die Existenz eines Potentials nicht mehr vorausgesetzt werden muss:

$$\begin{aligned} \bar{g}(\boldsymbol{u}, \delta\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}_\mathrm{V}, \delta\boldsymbol{\lambda}_\mathrm{V}) = g(\boldsymbol{u}, \delta\boldsymbol{u}) &+ \int_{\mathcal{P}_0} \delta\boldsymbol{\lambda}_\mathrm{V}^\mathrm{T} \left(\boldsymbol{E}_\mathrm{V}^\mathrm{M} - \boldsymbol{E}_\mathrm{V}^\mathrm{m} \right) \, \mathrm{d}V \\ &+ \int_{\mathcal{P}_0} \boldsymbol{\lambda}_\mathrm{V}^\mathrm{T} \left(\delta\boldsymbol{E}_\mathrm{V}^\mathrm{M} - \delta\boldsymbol{E}_\mathrm{V}^\mathrm{m} \right) \, \mathrm{d}V \,. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Dabei wurden nicht nur die Lagrangeparameter $\boldsymbol{\lambda}_\mathrm{V}$, sondern auch die Makroverzerrungen $\boldsymbol{E}_\mathrm{V}^\mathrm{M}$ als unbekannte Größen angenommen. Letztere werden später durch Randbedingungen auf die vom Makroproblem übergebenen Werte gesetzt.

Betrachtet man die einzelnen Terme von $\bar{g}$ in (6.3), so wird deutlich, dass die Lagrangeparameter $\boldsymbol{\lambda}_\mathrm{V}$ Spannungsgrößen darstellen müssen, die arbeitskonform zu

den linearisierten Green'schen Verzerrungen sind.

In der vollständigen schwachen Form der Mikroebene werden keine äußeren Rand- oder Volumenlasten berücksichtigt. Die Belastung des RVE kommt ausschließlich durch den Eintrag der Makroverzerrungen über die Nebenbedingung zustande. Die vollständige schwache Form lautet in Vektornotation:

$$\bar{g}(\boldsymbol{u}, \delta\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}_\mathrm{V}, \delta\boldsymbol{\lambda}_\mathrm{V}) = \int_{\mathcal{P}_0} \delta\boldsymbol{E}_\mathrm{V}^{\mathrm{m}\,\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{S}_\mathrm{V} - \boldsymbol{\lambda}_\mathrm{V}\right) \,\mathrm{d}V + \int_{\mathcal{P}_0} \delta\boldsymbol{\lambda}_\mathrm{V}^\mathrm{T} \left(\boldsymbol{E}_\mathrm{V}^\mathrm{M} - \boldsymbol{E}_\mathrm{V}^\mathrm{m}\right) \,\mathrm{d}V + \int_{\mathcal{P}_0} \delta\boldsymbol{E}_\mathrm{V}^{\mathrm{M}\,\mathrm{T}} \boldsymbol{\lambda}_\mathrm{V} \,\mathrm{d}V \,. \tag{6.4}$$

6.2 Verträgliche Randdeformationen

Eine Erfüllung der Verzerrungsnebenbedingung im integralen Mittel bedeutet, dass auch die Randdeformationen des RVE nur im integralen Mittel den Makroverzerrungen entsprechen. Die Nebenbedingung stellt daher keine starken punktweisen Vorgaben an die Randdeformationen dar. Die Betrachtung des RVE als Ausschnitt eines Kontinuums der Makroebene bedeutet aber, dass an den RVE-Rändern, an denen sich das Makrokontinuum fortsetzt, eine kontinuierliche Aneinanderreihung der RVE möglich sein muss. Daraus folgen deutlich stärkere Anforderungen an die Randdeformationen, welche bisher nicht zwingend eingehalten werden: Weder darf bei einer Aneinanderreihung der RVE eine Material-Überlappung entstehen, noch dürfen zusätzliche Löcher im Kontinuum entstehen. Gegenüberliegende Ränder müssen sich also verträglich deformieren.

Diese zusätzliche Anforderung an die Randdeformationen kann auf mehreren Wegen umgesetzt werden. Die naheliegendste und einfachste Möglichkeit ist das Aufbringen sogenannter linearer Verschiebungsrandbedingungen, auch „linear displacement boundary conditions“ oder kurz DBC genannt. Dabei werden die Randverschiebungen für den gesamten RVE-Rand, an dem sich das Makrokontinuum fortsetzt, durch einen linearen Zusammenhang zwischen Randkoordinate und Makroverzerrungen vorgegeben:

$$\boldsymbol{u}^\mathrm{R} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X})\boldsymbol{E}_\mathrm{V}^\mathrm{M} \,. \tag{6.5}$$

Die Matrix $\boldsymbol{R}$ wird dabei so gewählt, dass die Nebenbedingung auf den entsprechenden Rändern punktweise statt nur im integralen Mittel erfüllt wird. Die Einzelheiten dazu werden in den folgenden Abschnitten beschrieben.
Die Implementierung von DBC bietet den Vorteil, dass sie einfach umzusetzen ist. Für Strukturen wie Balken oder Platten können sie jedoch keine Querschnittsverwölbungen abbilden, da die Verwölbungen die Kinematik nur im integralen Mittel statt punktweise erfüllen. Bei der Modellierung von Balken und Platten ergeben sich aus den dadurch unverwölbten Rändern entsprechende Randeffekte (siehe Kapitel 8).

Eine theoretische Lösung der Problematik liegt im Aufbringen von periodischen Randbedingungen, bei denen zusätzlich zu den linearen Randverschiebungen periodische, das heißt an gegenüberliegenden Rändern identische, Abweichungen zugelassen werden. Dadurch werden die Makroverzerrungen wieder nur noch im integralen Mittel erreicht, aber dennoch verträgliche Randdeformationen gewährleistet.
Bisher ist es allerdings nicht gelungen, die periodischen Randbedingungen und die Lastaufbringung über die hier vorgestellte Nebenbedingung numerisch zu vereinbaren. Sie werden daher nicht weiter betrachtet.

Für Makrostrukturen wie Balken oder Platten lässt sich für einige Materialien eine weitere Möglichkeit finden, die ohne zusätzliche Randbedingungen auskommt. Ist das betrachtete RVE homogen entlang der Balkenachse bzw. der Plattenreferenzfläche, besitzt also nur Inhomogenitäten in Dicken- bzw. Querrichtung (beispielweise ein Sandwich-Balken oder eine Sandwich-Platte), können die Ansätze für die dafür relevanten Lagrangeparameter in Querrichtung abschnittsweise statt global kontinuierlich gewählt werden. Dabei werden sie gegenüber dem globalen Mittelwert mit der lokalen Steifigkeit des Materials skaliert, sodass der globale Mittelwert weiterhin erhalten bleibt. Das hat für einzelne Dehnungsanteile eine punktweise Erfüllung der Nebenbedingung zur Folge, sodass sich die einzelnen Schichten nicht mehr unterschiedlich stark dehnen, sondern für diese Dehnungsanteile einheitlich der entsprechende Eintrag der mittleren Dehnung $\boldsymbol{E}^{\mathrm{M}}$ aufgebracht wird (Abbildung 6.1). Dadurch entstehen ebenfalls Ränder, die keine Materialüberlappungen und -löcher verursachen, aber dennoch in der Lage sind, Querschnittsverwölbungen abzubilden. Denn die zur Verwölbung gehörenden Dehnungsanteile sind von der Skalierung nicht betroffen. Die genaue Umsetzung der dafür notwendigen Anpassungen der Nebenbedingung wird in den folgenden Abschnitten beschrieben.
Die Implementierung dieses Ansatzes ist ebenfalls leicht umzusetzen, sein Einsatzzweck ist jedoch stark begrenzt. Denn die Methode kann nicht für Inhomogenitäten entlang der Balkenachse oder in der Plattenreferenzebene eingesetzt werden, weil

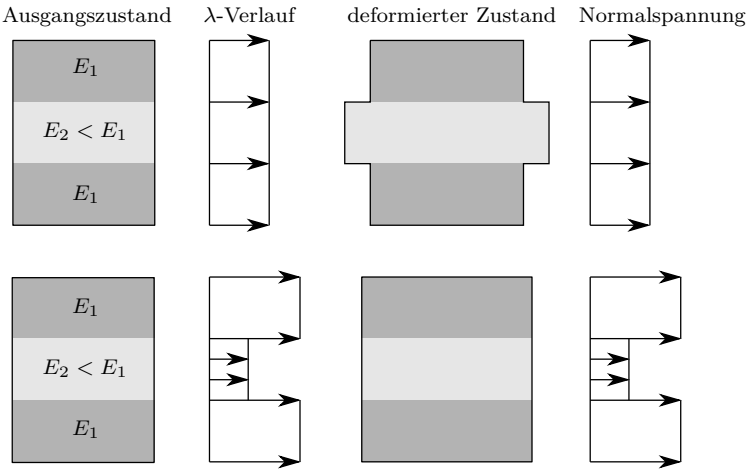

Abbildung 6.1: Veranschaulichung der Auswirkung der Skalierung der Lagrangeparameter mit der lokalen Dehnsteifigkeit - oben: keine Skalierung der Lagrangeparameter, unten: mit Skalierung der Lagrangeparameter

eine Vereinheitlichung der Dehnungen in Normalenrichtung über mehrere Materialien mit verschiedenen Steifigkeiten hinweg Sprünge im Verlauf der Normalspannung an den Materialgrenzschichten zur Folge hätte. Ein Sprung im Verlauf der Normalspannung entlang ihrer Wirkungsrichtung verletzt aber das innere Gleichgewicht und stellt daher keinen sinnvollen Ansatz dar.

6.3 3D-Körper auf der Makroebene

Bei der Betrachtung eines 3D-Körpers und folglich Volumenelementen auf Mikro- und Makroebene sind die linearisierten Green'schen Makroverzerrungen ohne Weiteres direkt aus den Elementen auf Makroebene zugänglich und können für die Nebenbedingung auf der Mikroebene verwendet werden.
Um verträgliche Randverformungen zu erhalten, können von den im vorherigen Abschnitt geschilderten Methoden nur die linearen Verschiebungsrandbedingungen DBC verwendet werden. Dabei werden die Verschiebungen $\boldsymbol{u}^{\mathrm{R}}$ für alle Punkte $\boldsymbol{X}^{\mathrm{R}}$ auf den Rändern $\partial\mathcal{P}_0$ vorgegeben. Dazu wird zunächst die lineare Beziehung zu den Makroverzerrungen über die Tensornotation aufgestellt und in die Vektornotation

überführt:

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{R}} = \begin{bmatrix} E_{xx} & E_{xy} & E_{xz} \\ E_{xy} & E_{yy} & E_{yz} \\ E_{xz} & E_{yz} & E_{zz} \end{bmatrix}^{\mathrm{M}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} x & 0 & 0 & \frac{1}{2}y & \frac{1}{2}z & 0 \\ 0 & y & 0 & \frac{1}{2}x & 0 & \frac{1}{2}z \\ 0 & 0 & z & 0 & \frac{1}{2}x & \frac{1}{2}y \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{R}_{\mathrm{V}}} \begin{bmatrix} E_{xx} \\ E_{yy} \\ E_{zz} \\ 2E_{xy} \\ 2E_{xz} \\ 2E_{yz} \end{bmatrix}^{\mathrm{M}}$$

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{R}} = \boldsymbol{R}_{\mathrm{V}}\, \boldsymbol{E}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{M}} \,. \tag{6.6}$$

Für die Finite-Elemente-Approximation wird das in Kapitel 4 beschriebene Vorgehen genutzt. Die zusätzlichen Unbekannten der Lagrangeparameter $\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{V}}$ und makroskopischen Verzerrungen $\boldsymbol{E}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{M}}$ werden als konstant angenommen:

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{M\,h}} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{V}}\, \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{M}} \,, \qquad \delta\boldsymbol{E}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{M\,h}} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{V}}\, \delta\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{M}} \,, \tag{6.7}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{h}} = \bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{V}}\, \boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{V}} \,, \qquad \delta\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{h}} = \bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{V}}\, \delta\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{V}} \,. \tag{6.8}$$

Dabei ist

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{V}} = \bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{V}} = \mathrm{diag}\{1,1,1,1,1,1\} \,. \tag{6.9}$$

Die Bezeichnungen für $\boldsymbol{A}_{\mathrm{V}}$ und $\bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{V}}$ werden in der folgenden Darstellung beibehalten, um die Vorgehensweise und Darstellungen für die folgenden Abschnitte und Kapitel einheitlich mit denen für Balken und Platten zu gestalten.
Damit lautet die schwache Form für das RVE (6.4) nach Einsetzen der Finite-Elemente-Formulierung:

$$\begin{aligned} \bar{g}^{\mathrm{h}} = \sum_{e=1}^{numel} \Bigg[& \sum_{I=1}^{nel} \delta\boldsymbol{v}_I^{e\,\mathrm{T}} \Bigg(\boldsymbol{f}_{v\,I}^{e} + \sum_{K=1}^{nel} \boldsymbol{k}_{IK}^{e} \boldsymbol{v}_K^{e} - \Big[\int_{\mathcal{P}_0^e} \boldsymbol{B}_I^{\mathrm{T}}\, \bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{V}}\, \mathrm{d}V^e \Big] \boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{V}} \Bigg) \\ & + \delta\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{T}} \Bigg(\boldsymbol{f}_{\lambda}^{e} + \Big[\int_{\mathcal{P}_0^e} \bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{T}}\, \boldsymbol{A}_{\mathrm{V}}\, \mathrm{d}V^e \Big] \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{M}} - \sum_{K=1}^{nel} \Big[\int_{\mathcal{P}_0^e} \bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{T}}\, \boldsymbol{B}_K\, \mathrm{d}V^e \Big] \boldsymbol{v}_K^{e} \Bigg) \\ & + \delta\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{M}} \Bigg(\boldsymbol{f}_{\varepsilon}^{e} + \Big[\int_{\mathcal{P}_0^e} \boldsymbol{A}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{T}}\, \bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{V}}\, \mathrm{d}V^e \Big] \boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{V}} \Bigg) \Bigg] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\bar{g}^{\mathrm{h}} = \sum_{e=1}^{numel} \Bigg[& \sum_{I=1}^{nel} \delta \boldsymbol{v}_I^{e\,\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{f}_{v\,I}^{e} + \sum_{K=1}^{nel} \boldsymbol{k}_{IK}^{e} \boldsymbol{v}_K^{e} - \boldsymbol{M}_{\mathrm{V}\,I}^{e} \boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{V}} \right) \\
& + \delta \boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{f}_{\lambda}^{e} + \boldsymbol{T}_{\mathrm{V}}^{e}\, \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{M}} - \sum_{K=1}^{nel} \left(\boldsymbol{M}_{\mathrm{V}\,K}^{e} \right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{v}_K^{e} \right) + \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{M}} \left(\boldsymbol{f}_{\varepsilon}^{e} + \boldsymbol{T}_{\mathrm{V}}^{e\,\mathrm{T}}\, \boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{V}} \right) \Bigg] \\
= \sum_{e=1}^{numel} \Bigg[& \delta \boldsymbol{v}^{e\,\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{f}_{v}^{e} + \boldsymbol{k}^{e} \boldsymbol{v}^{e} - \boldsymbol{M}_{\mathrm{V}}^{e}\, \boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{V}} \right) + \delta \boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{f}_{\lambda}^{e} + \boldsymbol{T}_{\mathrm{V}}^{e}\, \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{M}} - \boldsymbol{M}_{\mathrm{V}}^{e\,\mathrm{T}}\, \boldsymbol{v}^{e} \right) \\
& + \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{M}} \left(\boldsymbol{f}_{\varepsilon}^{e} + \boldsymbol{T}_{\mathrm{V}}^{e}\, \boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{V}} \right) \Bigg] \,.
\end{aligned}
$$

Dabei werden definiert:

$$
\boldsymbol{M}_{\mathrm{V}}^{e} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{\mathrm{V}\,1}^{e} \\ \vdots \\ \boldsymbol{M}_{\mathrm{V}\,I}^{e} \\ \vdots \\ \boldsymbol{M}_{\mathrm{V}\,nel}^{e} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_{v}^{e} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_{v\,1}^{e} \\ \vdots \\ \boldsymbol{f}_{v\,I}^{e} \\ \vdots \\ \boldsymbol{f}_{v\,nel}^{e} \end{bmatrix}, \qquad
\begin{aligned}
\boldsymbol{T}_{\mathrm{V}}^{e} &= \int_{\mathcal{P}_0^e} \bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}_{\mathrm{V}}\, \mathrm{d}V^{e} \,, \\
\boldsymbol{f}_{\lambda}^{e} &= \int_{\mathcal{P}_0^e} \bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{E}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{M}} - \boldsymbol{E}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{m}} \right) \mathrm{d}V^{e} \,, \\
\boldsymbol{f}_{\varepsilon}^{e} &= \int_{\mathcal{P}_0^e} \boldsymbol{A}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{V}}\, \mathrm{d}V^{e}
\end{aligned}
$$

mit

$$
\boldsymbol{M}_{\mathrm{V}\,I}^{e} = \int_{\mathcal{P}_0^e} \boldsymbol{B}_I^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{V}}\, \mathrm{d}V^{e} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{f}_{v\,I}^{e} = \int_{\mathcal{P}_0^e} \boldsymbol{B}_I^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{S}_{\mathrm{V}} - \boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{V}} \right) \mathrm{d}V^{e} \,.
$$

Der Zusammenbau in ein Gesamtsystem mit den entsprechenden Gesamtgrößen ohne Superskript $(.)^e$ ergibt

$$
\begin{aligned}
\bar{g}^{\mathrm{h}} = & \delta \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{F}_v + \boldsymbol{K} \boldsymbol{v} - \boldsymbol{M}_{\mathrm{V}}\, \boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{V}} \right) + \delta \boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{F}_{\lambda} + \boldsymbol{T}_{\mathrm{V}}\, \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{M}} - \boldsymbol{M}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{T}}\, \boldsymbol{v} \right) \\
& + \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{M}} \left(\boldsymbol{F}_{\varepsilon} + \boldsymbol{T}_{\mathrm{V}}\, \boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{V}} \right) = 0 \,.
\end{aligned} \tag{6.10}
$$

Noch übersichtlicher lässt sich (6.10) aufschreiben als

$$
\begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{v} \\ \delta \boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{V}} \\ \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{M}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{K} & -\boldsymbol{M}_{\mathrm{V}} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{M}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{T}_{\mathrm{V}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{T}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{V}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{M}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_v \\ \boldsymbol{F}_{\lambda} \\ \boldsymbol{F}_{\varepsilon} \end{bmatrix} \right) = 0. \tag{6.11}
$$

Daraus wird ersichtlich, dass eine symmetrische Systemmatrix entsteht, da $\boldsymbol{K}$ ebenfalls symmetrisch ist. Die Systemmatrix besitzt die für die Umsetzung einer Nebenbedingung mit Lagrangeparametern typischen Nulleinträge auf der Hauptdiagonalen. Dadurch ist ein entsprechend geeigneter Löser notwendig, um das Gleichungssystem numerisch lösen zu können.

6.4 Balken auf der Makroebene

Werden auf der Makroebene Balkenelemente verwendet, so geben sie als Makroverzerrungen die Balkenverzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{M}}$ entsprechend (3.8) an das Mikroproblem weiter. Das Mikroproblem ist jedoch ein 3D-Körper und besitzt die Green'schen Verzerrungen $\boldsymbol{E}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{m}}$. Daher müssen die Makroverzerrungen erst mit Hilfe von (3.9) in die entsprechenden Anteile der Green'schen Verzerrungen $\boldsymbol{E}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{M}} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}\,\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{M}}$ umgerechnet werden, bevor sie in (6.4) in der Nebenbedingung verwendet werden können. Da $\boldsymbol{E}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{M}}$ nur drei maßgebliche Komponenten der Green'schen Verzerrungen enthält, kann folglich nur für sie eine Nebenbedingung formuliert werden. Dementsprechend reduziert sich die Anzahl der Nebenbedingungen und zugehörigen Lagrangeparameter auf drei. Für eine konsistente Darstellung wird die Matrix $\boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{B}}$ wie folgt eingeführt:

$$\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{V}} = \begin{bmatrix} \lambda_{xx} \\ 0 \\ 0 \\ \lambda_{xy} \\ \lambda_{xz} \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{B}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_{xx} \\ \lambda_{xy} \\ \lambda_{xz} \end{bmatrix}}_{\bar{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathrm{B}}} = \boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{B}}\,\bar{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathrm{B}}\,, \quad \boldsymbol{E}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{m}} = \boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{E}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{m}}\,. \tag{6.12}$$

Analog zu (6.4) ergibt sich damit die schwache Form für das RVE zunächst zu:

$$\begin{aligned} \bar{g}(\boldsymbol{u}, \delta\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{V}}, \delta\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{V}}) = &\int_{\mathcal{P}_0} \delta\boldsymbol{E}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{m}\,\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{S}_{\mathrm{V}} - \boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{B}}\bar{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathrm{B}}\right) \mathrm{d}V + \int_{\mathcal{P}_0} \delta\bar{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}\,\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{M}} - \boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{E}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{m}}\right) \mathrm{d}V \\ &+ \int_{\mathcal{P}_0} \delta\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{M}\,\mathrm{T}}\,\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\,\bar{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathrm{B}}\,\mathrm{d}V. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Daraus wird ersichtlich, dass die drei Lagrangeparameter eine zu den Spannungen $\boldsymbol{S}_{\mathrm{B}} = [S_{xx}, S_{xy}, S_{xz}]^{\mathrm{T}}$ vergleichbare Größe darstellen. Daraus entstehen einige Probleme, die im Folgenden erläutert werden. Anschließend wird ein Ansatz zur Lösung

vorgestellt.

Während bei einem 3D-Körper auf der Makroebene die Mikroebene als ein Punkt der Makroebene betrachtet wird, muss bei einer Modellierung der Makroebene als Balken immer der komplette Querschnitt auf der Mikroebene abgebildet werden, um eine sinnvolle Homogenisierung zu ermöglichen (Abbildung 6.2 zur Veranschaulichung).

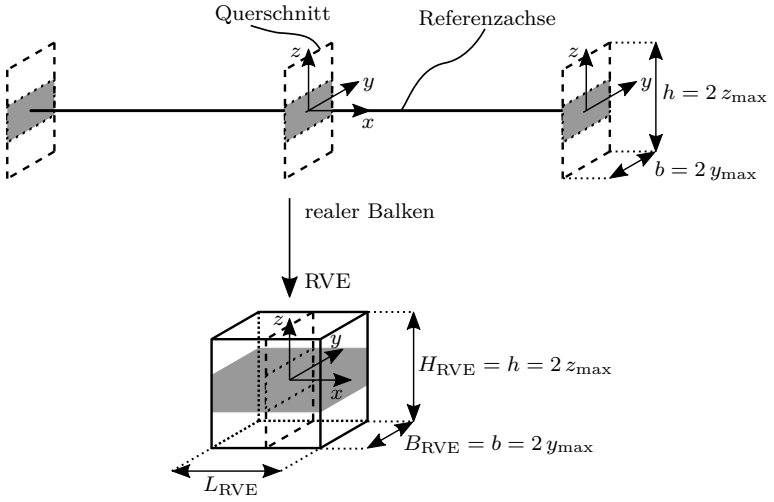

Abbildung 6.2: RVE für einen Balken: oben die Balkenreferenzachse und zugeordneter Querschnitt, unten das RVE

Betrachtet man als Beispiel einen homogenen Balken mit doppelsymmetrischem Querschnitt unter reiner Biegung um die y-Achse, so muss sich daraus im RVE ein in z-Richtung linearer Verlauf der Normalspannungen S_{xx} über den Querschnitt ergeben, bei dem die Spannungsnulllinie die y-Achse ist. Nimmt man nun wie beim 3D-Körper im vorherigen Abschnitt wieder global konstante Lagrangeparameter an, folgt durch die Mittelung ein Wert von $\lambda_{xx} = 0$ für denjenigen Lagrangeparameter, der den Normalspannungen zugeordnet ist. Daraus ließe sich bei Rückgabe an das Makrosystem nicht die benötigte Information über die tatsächliche Spannungsantwort des RVE ablesen. Daher ist die Annahme von konstanten Lagrangeparametern, die den einzelnen Spannungen zugeordnet werden können, in dem Fall nicht sinnvoll. Es braucht stattdessen einen Ansatz, der sowohl die Eigenschaft der Lagrangepa-

rameter als Spannungsgröße berücksichtigt und gleichzeitig die Möglichkeit bietet, aus der über das gesamte RVE gemittelten Größe Informationen über die Spannungsantwort des RVE zu erhalten.

Dazu wird ein Ansatz mit globalen Stützwerten und Ansatzfunktionen gewählt, sodass es weiterhin nur eine kleine Anzahl von elementübergreifenden Lagrangeparametern gibt, die im gesamten RVE konstant sind. Die Motivation dazu liefert die Überlegung, dass die zugehörige arbeitskonforme Größe zu den Balkenverzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{B}$ die sechs Balkenschnittgrößen $\boldsymbol{\sigma}_\mathrm{B}$ sind. Die Balkenschnittgrößen gelten wieder global einheitlich für das gesamte RVE.

Über die Beziehung (3.10) ist ein Zusammenhang zwischen den Balkenschnittgrößen und den Spannungen bekannt, auf dessen Basis die Ansätze für den Verlauf der Spannungen im RVE entwickelt werden können.
Es soll eine Beziehung in der Art

$$\bar{\boldsymbol{\lambda}}_\mathrm{B} = \bar{\boldsymbol{A}}_\mathrm{B}\, \boldsymbol{\lambda}_\mathrm{B} \tag{6.14}$$

gefunden werden. Dabei bezeichnet $\boldsymbol{\lambda}_\mathrm{B} = [\lambda_N, \lambda_{Q_y}, \lambda_{Q_z}, \lambda_{M_x}, \lambda_{M_y}, \lambda_{M_z}]^\mathrm{T}$ die den Balkenschnittgrößen zugeordneten Lagrangeparameter, welche über das gesamte RVE konstant sind.

Die Matrix $\bar{\boldsymbol{A}}_\mathrm{B}$ wird festgelegt auf

$$\bar{\boldsymbol{A}}_\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z & -y \\ 0 & 1-\left(\frac{y}{y_\mathrm{max}}\right)^2 & 0 & -z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\left(\frac{z}{z_\mathrm{max}}\right)^2 & y & 0 & 0 \end{bmatrix} . \tag{6.15}$$

Dieser Ansatz liefert eine konstante Normalspannung infolge einer Normalkraft und eine lineare Normalspannungsverteilung infolge der zugehörigen Biegemomente.
Die Schubspannungen infolge einer Querkraft ergeben sich quadratisch entsprechend der verbesserten Lösung für einen Rechteck-Querschnitt. Die Breite des Querschnitts ist $b = 2\, y_\mathrm{max}$ und die Höhe $h = 2\, z_\mathrm{max}$, sodass die Randbedingungen für die Schubspannungen an den äußeren Rändern des Querschnitts eingehalten werden. Inwieweit ein solcher Ansatz für die Schubspannungen gute Ergebnisse in den homogenisierten Schubsteifigkeiten für andere Querschnitte liefern kann, wird in Kapitel 8 untersucht.
Für ein Torsionsmoment ergeben sich die Schubspannungen τ_{xy} linear in z und τ_{xz} linear in y, sodass sich radius-proportionale Schubspannungen $\tau_r = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}$ in-

folge Torsion ergeben. Das entspricht der gewählten Balkenkinematik, in der keine Torsionsverwölbungen berücksichtigt werden.

Wie in Abschnitt 6.2 erläutert, führt der Ansatz bei einem inhomogenen RVE ohne weitere Randbedingungen unter Umständen zu unverträglichen Randdeformationen. Die linearen Verschiebungsrandbedingungen werden an den Rändern aufgebracht, an denen sich das Material fortsetzt - das heißt an den beiden Oberflächen des RVE, welche den Balkenquerschnitt bilden.
Dabei werden die Schubdeformationen ausschließlich als Verschiebungen in $\boldsymbol{e}_x$-Richtung aufgebracht:

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{R}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x + z\kappa_y - y\kappa_z & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ -z\kappa_x & 0 & 0 \\ y\kappa_x & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{M}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

bzw.

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{R}} = \begin{bmatrix} x & y & z & 0 & xz & -xy \\ 0 & 0 & 0 & -xz & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & xy & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix}^{\mathrm{M}} .$$

Eine Aufbringung der Randbedingungen auch für u_y^{R} und u_z^{R} führt ähnlich wie bei den Schalen in [14] dazu, dass die Dehn- und Biegesteifigkeit gegen falsche Werte konvergieren. Da damit ausschließlich Randverschiebungen für die Torsion aufgebracht werden und die wölbfreie Torsion des RVE auch ohne Randbedingungen keine inkompatiblen Randverschiebungen verursacht, werden u_y^{R} und u_z^{R} nicht mit Randbedingungen belegt.
Es folgt

$$u_x^{\mathrm{R}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x & y & z & 0 & xz & -xy \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{R}_{\mathrm{B}}} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix}^{\mathrm{M}} = \boldsymbol{R}_{\mathrm{B}}\, \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{M}} .$$

Für den speziellen Fall von Balken ohne Inhomogenitäten entlang der Balkenachse, zum Beispiel bei einem geschichteten Aufbau oder der Ummantelung eines Kerns, kann zur Einhaltung der verträglichen Randdeformationen statt der Randbedingungen auch ein leicht modifizierter Ansatz für die Lagrangeparameter verwendet werden. Dabei werden die Normalspannungen mit dem Eintrag $C_{11} = E$ der Materialmatrix $\boldsymbol{C}_\mathrm{B}$ (siehe 3.11) jedes Volumenelements des RVE skaliert, sodass einheitliche Normaldehnungen entsprechend Abbildung 6.1 entstehen:

$$\bar{\boldsymbol{A}}_\mathrm{B} = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & 0 & 0 & z\,C_{11} & -y\,C_{11} \\ 0 & 1-\left(\frac{y}{y_\mathrm{max}}\right)^2 & 0 & -z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\left(\frac{z}{z_\mathrm{max}}\right)^2 & y & 0 & 0 \end{bmatrix} . \tag{6.16}$$

Die Schubspannungen sollten dagegen nicht skaliert werden, da die Schubdehnungen keine unverträglichen Randdeformationen verursachen und sich die Schubdeformationen weiterhin materialabhängig unterschiedlich einstellen können sollten.

Unabhängig vom gewählten Vorgehen zur Einhaltung von verträglichen Randdeformationen lässt sich (6.13) schreiben als:

$$\begin{aligned} \bar{g}(\boldsymbol{u}, \delta\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}, \delta\boldsymbol{\lambda}) = &\int_{\mathcal{P}_0} \delta\boldsymbol{E}_\mathrm{V}^{\mathrm{m}\,\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{S}_\mathrm{V} - \boldsymbol{\Lambda}_\mathrm{B}\,\bar{\boldsymbol{A}}_\mathrm{B}\,\boldsymbol{\lambda}_\mathrm{B}\right)\,\mathrm{d}V \\ &+ \int_{\mathcal{P}_0} \delta\boldsymbol{\lambda}_\mathrm{B}^\mathrm{T}\,\bar{\boldsymbol{A}}_\mathrm{B}^\mathrm{T} \left(\boldsymbol{A}_\mathrm{B}\,\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{B}^\mathrm{M} - \boldsymbol{\Lambda}_\mathrm{B}^\mathrm{T}\,\boldsymbol{E}_\mathrm{V}^\mathrm{m}\right)\,\mathrm{d}V \\ &+ \int_{\mathcal{P}_0} \delta\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{B}^{\mathrm{M}\,\mathrm{T}}\,\boldsymbol{A}_\mathrm{B}^\mathrm{T}\,\bar{\boldsymbol{A}}_\mathrm{B}\,\boldsymbol{\lambda}_\mathrm{B}\,\mathrm{d}V\,. \end{aligned} \tag{6.17}$$

Das weitere Vorgehen erfolgt analog zum Abschnitt 6.3 und liefert

$$\begin{aligned} \bar{g}^\mathrm{h} = \sum_{e=1}^{numel} \Big[&\delta\boldsymbol{v}^{e\,\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{f}_v^e + \boldsymbol{k}^e\boldsymbol{v}^e - \boldsymbol{M}_\mathrm{B}^e\,\boldsymbol{\lambda}_\mathrm{B}\right) + \delta\boldsymbol{\lambda}_\mathrm{B}^\mathrm{T} \left(\boldsymbol{f}_\lambda^e + \boldsymbol{T}_\mathrm{B}^e\,\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{B}^\mathrm{M} - \boldsymbol{M}_\mathrm{B}^{e\,\mathrm{T}}\boldsymbol{v}^e\right) \\ &+ \delta\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{B}^\mathrm{M} \left(\boldsymbol{f}_\varepsilon^e + \boldsymbol{T}_\mathrm{B}^{e\,\mathrm{T}}\,\boldsymbol{\lambda}_\mathrm{B}\right) \Big] \end{aligned}$$

mit den Größen

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{B}}^{e} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{\mathrm{B}\,1}^{e} \\ \vdots \\ \boldsymbol{M}_{\mathrm{B}\,I}^{e} \\ \vdots \\ \boldsymbol{M}_{\mathrm{B}\,nel}^{e} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_{v}^{e} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_{v\,1}^{e} \\ \vdots \\ \boldsymbol{f}_{v\,I}^{e} \\ \vdots \\ \boldsymbol{f}_{v\,nel}^{e} \end{bmatrix}, \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{T}_{\mathrm{B}}^{e} &= \int_{\mathcal{P}_0^e} \bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\, \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}\, \mathrm{d}V^{e}\,, \\ \boldsymbol{f}_{\lambda}^{e} &= \int_{\mathcal{P}_0^e} \bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{M}} - \boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\, \boldsymbol{E}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{m}} \right)\, \mathrm{d}V^{e}\,, \\ \boldsymbol{f}_{\varepsilon}^{e} &= \int_{\mathcal{P}_0^e} \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\, \bar{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathrm{B}}\, \mathrm{d}V^{e} \end{aligned}$$

und

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{B}\,I}^{e} = \int_{\mathcal{P}_0^e} \boldsymbol{B}_{I}^{\mathrm{T}}\, \boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{B}}\, \bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{B}}\, \mathrm{d}V^{e} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{f}_{v\,I}^{e} = \int_{\mathcal{P}_0^e} \boldsymbol{B}_{I}^{\mathrm{T}}\, (\boldsymbol{S}_{\mathrm{V}} - \boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{V}})\, \mathrm{d}V^{e}\,.$$

Entsprechend ergibt sich nach Zusammenbau zu einem Gesamtsystem die schwache Form in Vektornotation als

$$\begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{v} \\ \delta\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{B}} \\ \delta\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{M}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{K} & -\boldsymbol{M}_{\mathrm{B}} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{M}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{T}_{\mathrm{B}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{T}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{B}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{M}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_{v} \\ \boldsymbol{F}_{\lambda} \\ \boldsymbol{F}_{\varepsilon} \end{bmatrix} \right) = 0\,. \tag{6.18}$$

6.5 Platte auf der Makroebene

Das Vorgehen für eine Plattenstruktur auf der Makroebene erfolgt analog zum vorherigen Abschnitt bei den Balken.
Die Anzahl der Lagrangeparameter und Nebenbedingungen reduziert sich zunächst auf fünf für die fünf maßgeblichen Komponenten in $\boldsymbol{E}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{M}}$, siehe (3.25). Entsprechend wird anstelle von $\boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{B}}$ ein $\boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{P}}$ eingeführt mit

$$\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{V}} = \begin{bmatrix} \lambda_{xx} \\ \lambda_{yy} \\ 0 \\ \lambda_{xy} \\ \lambda_{xz} \\ \lambda_{yz} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{P}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_{xx} \\ \lambda_{yy} \\ \lambda_{xy} \\ \lambda_{xz} \\ \lambda_{yz} \end{bmatrix}}_{\bar{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathrm{P}}} = \boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{P}} \bar{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathrm{P}}\,, \quad \boldsymbol{E}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{m}} = \boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{T}}\, \boldsymbol{E}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{m}}\,. \tag{6.19}$$

Anschließend werden erneut globale Lagrangeparameter definiert, die auf den Makroschnittgrößen $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{M}}$ basieren. Daraus ergibt sich $\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{P}} \in \mathbb{R}^8$.
Aus ähnlichen Überlegungen wie zuvor beim Balken wird die entsprechende Umrechnung der Lagrangeparameter $\bar{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathrm{P}} = \bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{P}} \boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{P}}$, mit $z_{\max}$ der halben Höhe der Platte, festgelegt auf:

$$\bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{P}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - \left(\frac{z}{z_{\max}}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - \left(\frac{z}{z_{\max}}\right)^2 \end{bmatrix} . \tag{6.20}$$

Um die Randdeformationen verträglich zu halten, können wieder Verschiebungsrandbedingungen verwendet werden. Analog zum Balken werden sie auf die vier Oberflächen des RVE aufgebracht, welche den Plattenquerschnitt bilden. Die Schubdeformationen γ_{xz} und γ_{yz} werden ebenfalls analog zum Balken nur als Verschiebungen in Normalenrichtung des Querschnitts aufgebracht und die z-Komponente u_z^{R} der Randverschiebungen bleibt entsprechend ohne Vorgaben:

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}^{\mathrm{R}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x & 0 & \frac{1}{2}y & xz & 0 & \frac{1}{2}yz & z & 0 \\ 0 & y & \frac{1}{2}x & 0 & yz & \frac{1}{2}xz & 0 & z \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{R}_{\mathrm{P}}} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}^{\mathrm{M}} = \boldsymbol{R}_{\mathrm{P}} \, \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{M}} .$$

Für einen geschichteten Aufbau kann statt der Randbedingungen wieder ein modifizierter Ansatz für die Lagrangeparameter verwendet werden, der diejenigen Spannungen, die zu unverträglichen Randverformungen führen, mit den zugehörigen Einträgen C_{ij} der Materialmatrix C_{P} aus (3.27) im entsprechenden Volumenelement des RVE skaliert. Das betrifft die Spannungen in der Ebene der Plattenreferenzflä-

che, sodass für diesen Fall der Ansatz modifiziert wird zu:

$$\bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{P}} = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & 0 & C_{11}z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} & 0 & 0 & C_{22}z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 & C_{44}z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\left(\frac{z}{z_{\max}}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\left(\frac{z}{z_{\max}}\right)^2 \end{bmatrix}. \tag{6.21}$$

Alle weiteren Größen ergeben sich analog zum Vorgehen beim Balken. Es werden lediglich die entsprechenden Größen der Platte mit Index $(.)_{\mathrm{P}}$ statt $(.)_{\mathrm{B}}$ und die entsprechenden Lagrangeparameter für die Platte verwendet.

Kapitel 7

Numerische Umsetzung des Mehrskalenmodells

Der hier vorgestellte Algorithmus folgt im Wesentlichen den Ausführungen in [14]. Es wird das gesamte Problem betrachtet, das aus dem Makromodell und allen Mikromodellen besteht. Die schwache Form für das Gesamtproblem stellt sich dar als

$$g(\boldsymbol{u}^{\mathrm{M}}, \delta\boldsymbol{u}^{\mathrm{M}}, \boldsymbol{u}^{\mathrm{m}}, \delta\boldsymbol{u}^{\mathrm{m}}, \boldsymbol{\lambda}, \delta\boldsymbol{\lambda}) = \int_{\Omega_0^{\mathrm{M}}} \delta\boldsymbol{E}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{M}\,\mathrm{T}} \boldsymbol{S}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{M}}\, \mathrm{d}V^{\mathrm{M}} + \{\text{Randterme}\} + \sum_{i=1}^{NGP} \frac{1}{\Gamma_i}\, \bar{g}_i(\boldsymbol{u}_i^{\mathrm{m}}, \delta\boldsymbol{u}_i^{\mathrm{m}}, \boldsymbol{\lambda}_i, \delta\boldsymbol{\lambda}_i). \tag{7.1}$$

Dabei stellt der erste Term das Makromodell dar, das zudem noch die Randterme für die äußeren Lasten und die vorgegebenen Randverschiebungen beinhaltet. Zusätzlich gibt es für jeden der NGP Gaußpunkte des Makromodells ein Mikromodell. Diese werden durch den letzten Term repräsentiert. Γ_i bewirkt die notwendige Mittelung der Mikrogrößen und stellt dabei je nach Art des Problems etwas anderes dar. Bei einem 3D-Körper auf Makroebene ist Γ_i das Volumen des Mikromodells, bei einer Platte auf Makroebene ist Γ_i die Mittelfläche (Länge mal Breite) des Mikromodells und bei einem Balken auf Makroebene ist Γ_i die Länge des RVE.
Setzt man die bereits in den vorherigen Kapiteln beschriebenen Finite-Elemente-Ausdrücke für $\bar{g}_i$ ein und fasst auf der Mikroebene alle Freiheitsgrade, Systemmatrizen und Lastvektoren gemeinsam mit Γ_i verallgemeinernd in Vektoren und Matrizen $\hat{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{m}}$, $\hat{\boldsymbol{K}}^{\mathrm{m}}$ und $\hat{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{m}}$ zusammen, kann das diskretisierte Gesamtproblem dargestellt

werden als

$$g^{\mathrm{h}} = \sum_{e=1}^{numel} \left[\delta \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}\,\mathrm{T}}, \delta \hat{\boldsymbol{v}}_1^{\mathrm{m}\,\mathrm{T}}, \cdots, \delta \hat{\boldsymbol{v}}_{NGP}^{\mathrm{m}}{}^{\mathrm{T}}\right]^e \left\{ \begin{bmatrix} \boldsymbol{k}^{\mathrm{M}} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\boldsymbol{K}}_1^{\mathrm{m}} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \hat{\boldsymbol{K}}_{NGP}^{\mathrm{m}} \end{bmatrix}^e \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}} \\ \hat{\boldsymbol{v}}_1^{\mathrm{m}} \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{v}}_{NGP}^{\mathrm{m}} \end{bmatrix}^e + \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}^{\mathrm{M}} \\ \hat{\boldsymbol{F}}_1^{\mathrm{m}} \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{F}}_{NGP}^{\mathrm{m}} \end{bmatrix}^e \right\}. \tag{7.2}$$

NGP ist dabei die Anzahl der Gaußpunkte in einem Element des Makromodells. Die Elementsteifigkeitsmatrix $\boldsymbol{k}^{e\,\mathrm{M}}$ und der Elementlastvektor $\boldsymbol{f}^{e\,\mathrm{M}}$ des Makromodells sind dabei abhängig von den Eigenschaften und den Lösungen der zugehörigen Mikroprobleme. Die Größen, die ein Mikroproblem beschreiben, hängen dagegen nur von den Verzerrungen in dem einen jeweils zugehörigen Gaußpunkt des Makrosystems ab. Dadurch sind die Mikroprobleme alle untereinander unabhängig und können gleichzeitig in parallelen Rechnungen gelöst werden.

7.1 Berechnung der homogenisierten Größen

Nachdem in den vorherigen Kapiteln ausführlich dargestellt wurde, wie die Mikroprobleme in Abhängigkeit des Makroproblems aufgebaut werden und wie die Verzerrungen aus dem Makroproblem an das Mikroproblem weitergegeben werden, fehlt als letzter Schritt zur Lösung des Gesamtproblems der Zusammenhang zwischen der Lösung des Mikroproblems und den homogenisierten Materialeigenschaften, die an das Makroproblem zurückgegeben werden müssen.
Die allgemeine Struktur der schwachen Form für das RVE i ist nicht davon abhängig, welche Strukturelemente auf der Makroebene verwendet werden. Daher kann sie unter Vernachlässigung der entsprechenden Indizes $(.)_{\mathrm{V}}$, $(.)_{\mathrm{B}}$, $(.)_{\mathrm{P}}$ und des Superskripts $(.)^{\mathrm{m}}$ allgemein beschrieben werden durch die Darstellung

$$\frac{1}{\Gamma_i}\bar{g}_i = \frac{1}{\Gamma_i} \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{v} \\ \delta\boldsymbol{\lambda} \\ \delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{M}} \end{bmatrix}_i^{\mathrm{T}} \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{K} & -\boldsymbol{M} & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} & \boldsymbol{T} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{M}} \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_v \\ \boldsymbol{F}_\lambda \\ \boldsymbol{F}_\varepsilon \end{bmatrix}_i \right) \tag{7.3}$$

bzw.

$$\frac{1}{\Gamma_i}\bar{g}_i = \frac{1}{\Gamma_i}\sum_{e=1}^{numel}\begin{bmatrix}\delta\boldsymbol{v}^e\\ \delta\boldsymbol{\lambda}\\ \delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{M}}\end{bmatrix}_i^{\mathrm{T}}\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{k}^e & -\boldsymbol{M}^e & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{M}^{e\,\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{T}^e\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{T}^{e\,\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}_i\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}^e\\ \boldsymbol{\lambda}\\ \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{M}}\end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix}\boldsymbol{f}_v^e\\ \boldsymbol{f}_\lambda^e\\ \boldsymbol{f}_\varepsilon^e\end{bmatrix}_i\right). \tag{7.4}$$

Die genauen Inhalte der entsprechenden Einträge wurden in den vorherigen Kapiteln erläutert.
In dieser Darstellung sollen weiterhin alle Starrkörpermoden bereits durch entsprechende Randbedingungen verhindert sein und die zugehörigen Freiheitsgrade auskondensiert sein, sodass die Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ in (7.3) invertierbar ist.

Sofern Verschiebungsrandbedingungen aufgebracht wurden, lassen sich die Verschiebungen in einen mit Randbedingungen belegten Teil $\boldsymbol{v}_{\mathrm{R}}$ und einen Teil ohne Randbedingungen $\boldsymbol{v}_{\mathrm{F}}$ unterteilen. Mit $\boldsymbol{a}^e$ der Zusammenbaumatrix für die Verschiebungsfreiheitsgrade eines Elements e gegenüber dem Gesamtverschiebungsvektor $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{R}_I$ der Matrix zur Aufbringung der Verschiebungsrandbedingungen auf einen Knoten I entsprechend Kapitel 6 ergibt sich damit für den Elementverschiebungsvektor $\boldsymbol{v}^e$ der Zusammenhang

$$\boldsymbol{v}^e = \begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_{\mathrm{F}}\\ \boldsymbol{v}_{\mathrm{R}}\end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix}\boldsymbol{a}^e\,\boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{R}^e\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{M}}\end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad \delta\boldsymbol{v}^e = \begin{bmatrix}\delta\boldsymbol{v}_{\mathrm{F}}\\ \delta\boldsymbol{v}_{\mathrm{R}}\end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix}\boldsymbol{a}^e\,\delta\boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{R}^e\,\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{M}}\end{bmatrix}. \tag{7.5}$$

Dabei ist

$$\boldsymbol{R}^e = \begin{bmatrix}\delta_1\boldsymbol{R}_1\\ \vdots\\ \delta_I\boldsymbol{R}_I\\ \vdots\\ \delta_{nel}\boldsymbol{R}_{nel}\end{bmatrix} \qquad \text{mit } \delta_I = \begin{cases}1 \text{ bei Randbedingungen am Knoten } I,\\ 0 \text{ sonst.}\end{cases}$$

Einsetzen von (7.5) in (7.4) liefert mit einer analogen Unterteilung der Matrizen $\boldsymbol{k}^e$ und $\boldsymbol{M}^e$ sowie des Vektors $\boldsymbol{f}_v^e$ in

$$\boldsymbol{k}^e = \begin{bmatrix}\boldsymbol{k}^e_{\mathrm{FF}} & \boldsymbol{k}^e_{\mathrm{FR}}\\ \boldsymbol{k}^e_{\mathrm{RF}} & \boldsymbol{k}^e_{\mathrm{RR}}\end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{M}^e = \begin{bmatrix}\boldsymbol{M}^e_{\mathrm{F}}\\ \boldsymbol{M}^e_{\mathrm{R}}\end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}_v^e = \begin{bmatrix}\boldsymbol{f}^e_{v\,\mathrm{F}}\\ \boldsymbol{f}^e_{v\,\mathrm{R}}\end{bmatrix} \tag{7.6}$$

zunächst den Ausdruck

$$\frac{1}{\Gamma_i}\bar{g}_i = \frac{1}{\Gamma_i}\sum_{e=1}^{numel}\begin{bmatrix}\delta\boldsymbol{v}\\ \delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{M}}\\ \delta\boldsymbol{\lambda}\\ \delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{M}}\end{bmatrix}_i^{\mathrm{T}} \left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}^{e\,\mathrm{T}}\boldsymbol{k}^e_{\mathrm{FF}}\,\boldsymbol{a}^e & \boldsymbol{a}^{e\,\mathrm{T}}\boldsymbol{k}^e_{\mathrm{FR}}\boldsymbol{R}^e & -\boldsymbol{a}^{e\,\mathrm{T}}\boldsymbol{M}^e_{\mathrm{F}} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{R}^{e\,\mathrm{T}}\boldsymbol{k}^e_{\mathrm{RF}}\,\boldsymbol{a}^e & \boldsymbol{R}^{e\,\mathrm{T}}\boldsymbol{k}^e_{\mathrm{RR}}\boldsymbol{R}^e & -\boldsymbol{R}^{e\,\mathrm{T}}\boldsymbol{M}^e_{\mathrm{R}} & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{M}^{e\,\mathrm{T}}_{\mathrm{F}}\boldsymbol{a}^e & -\boldsymbol{M}^{e\,\mathrm{T}}_{\mathrm{R}}\boldsymbol{R}^e & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{T}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}_i \begin{bmatrix}\boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{M}}\\ \boldsymbol{\lambda}\\ \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{M}}\end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix}\boldsymbol{a}^{e\,\mathrm{T}}\boldsymbol{f}^e_{\mathrm{F}}\\ \boldsymbol{R}^{e\,\mathrm{T}}\boldsymbol{f}^e_{\mathrm{R}}\\ \boldsymbol{f}^e_{\lambda}\\ \boldsymbol{f}^e_{\varepsilon}\end{bmatrix}_i\right). \tag{7.7}$$

Mit Einführung der Größen

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{FF}} = \sum_{e=1}^{numel}\boldsymbol{a}^{e\,\mathrm{T}}\,\boldsymbol{k}^e_{\mathrm{FF}}\,\boldsymbol{a}^e\,, \qquad \boldsymbol{K}_{\mathrm{RR}} = \sum_{e=1}^{numel}\boldsymbol{R}^{e\,\mathrm{T}}\boldsymbol{k}^e_{\mathrm{RR}}\boldsymbol{R}^e\,,$$

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{RF}} = \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{FR}} = \sum_{e=1}^{numel}\boldsymbol{R}^{e\,\mathrm{T}}\boldsymbol{k}^e_{\mathrm{RF}}\,\boldsymbol{a}^e\,,$$

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{F}} = \sum_{e=1}^{numel}\boldsymbol{a}^{e\,\mathrm{T}}\boldsymbol{M}^e_{\mathrm{F}}\,, \qquad \boldsymbol{M}_{\mathrm{R}} = \sum_{e=1}^{numel}\boldsymbol{R}^{e\,\mathrm{T}}\boldsymbol{M}^e_{\mathrm{R}}\,,$$

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{F}} = \sum_{e=1}^{numel}\boldsymbol{a}^{e\,\mathrm{T}}\boldsymbol{f}^e_{\mathrm{F}}\,, \qquad \boldsymbol{F}_{\mathrm{R}} = \sum_{e=1}^{numel}\boldsymbol{R}^{e\,\mathrm{T}}\boldsymbol{f}^e_{\mathrm{R}}\,,$$

$$\boldsymbol{F}_{\lambda} = \sum_{e=1}^{numel}\boldsymbol{f}^e_{\lambda}\,, \qquad \boldsymbol{F}_{\varepsilon} = \sum_{e=1}^{numel}\boldsymbol{f}^e_{\varepsilon}$$

und einer jeweiligen Zusammenführung beider $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{M}}$- bzw. $\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{M}}$-Zeilen und -Spalten wird (7.7) dargestellt als

$$\frac{1}{\Gamma_i}\bar{g}_i = \frac{1}{\Gamma_i}\begin{bmatrix}\delta\boldsymbol{v}\\ \delta\boldsymbol{\lambda}\\ \delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{M}}\end{bmatrix}_i^{\mathrm{T}}\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_{\mathrm{FF}} & -\boldsymbol{M}_{\mathrm{F}} & \boldsymbol{K}_{\mathrm{FR}}\\ -\boldsymbol{M}_{\mathrm{F}}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{T}-\boldsymbol{M}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{K}_{\mathrm{FR}}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{M}_{\mathrm{R}} & \boldsymbol{K}_{\mathrm{RR}}\end{bmatrix}_i\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{\lambda}\\ \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{M}}\end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix}\boldsymbol{F}_{\mathrm{F}}\\ \boldsymbol{F}_{\lambda}\\ \boldsymbol{F}_{\varepsilon}+\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}\end{bmatrix}_i\right). \tag{7.8}$$

Eine Zusammenfassung der ungebundenen Verschiebungsfreiheitsgrade und der Freiheitsgrade für die Lagrangeparameter zu

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{\lambda}\end{bmatrix}, \quad \delta\bar{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix}\delta\boldsymbol{v}\\ \delta\boldsymbol{\lambda}\end{bmatrix} \tag{7.9}$$

und die Einführung von

$$\bar{\boldsymbol{K}}_{\mathrm{FF}} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_{\mathrm{FF}} & -\boldsymbol{M}_{\mathrm{F}}\\ -\boldsymbol{M}_{\mathrm{F}}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \bar{\boldsymbol{K}}_{\mathrm{FR}} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_{\mathrm{FR}}\\ \boldsymbol{T}-\boldsymbol{M}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix} \tag{7.10}$$

sowie

$$\bar{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{F}} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{F}_{\mathrm{F}}\\ \boldsymbol{F}_{\lambda}\end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \bar{\boldsymbol{F}}_{\varepsilon} = \boldsymbol{F}_{\varepsilon}+\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}} \tag{7.11}$$

liefert die Darstellung

$$\frac{1}{\Gamma_i}\bar{g}_i = \frac{1}{\Gamma_i}\begin{bmatrix}\delta\bar{\boldsymbol{v}}\\ \delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{M}}\end{bmatrix}_i^{\mathrm{T}}\left(\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{K}}_{\mathrm{FF}} & \bar{\boldsymbol{K}}_{\mathrm{FR}}\\ \bar{\boldsymbol{K}}_{\mathrm{FR}}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{K}_{\mathrm{RR}}\end{bmatrix}_i\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{v}}\\ \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{M}}\end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{F}}_{F}\\ \bar{\boldsymbol{F}}_{\varepsilon}\end{bmatrix}_i\right). \tag{7.12}$$

Mit $[\delta\bar{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{T}}, \delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{M}\mathrm{T}}]_i \neq \boldsymbol{0}$ lässt sich eine statische Kondensation durchführen. Für die gesuchten Verschiebungen $\bar{\boldsymbol{v}}$ gilt aus der ersten Zeile von (7.12)

$$\begin{aligned}&\bar{\boldsymbol{K}}_{\mathrm{FF}}\,\bar{\boldsymbol{v}} + \bar{\boldsymbol{K}}_{\mathrm{FR}}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{M}} + \bar{\boldsymbol{F}}_{F} = 0\\ &\Rightarrow \bar{\boldsymbol{v}} = -\bar{\boldsymbol{K}}_{\mathrm{FF}}^{-1}\left(\bar{\boldsymbol{K}}_{\mathrm{FR}}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{M}} + \bar{\boldsymbol{F}}_{F}\right).\end{aligned} \tag{7.13}$$

Durch Einsetzen von (7.13) in die zweite Zeile von (7.12) lässt sich ein Koeffizientenvergleich mit dem Makrosystem im Gaußpunkt i des Makroelements ableiten:

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}_i^{\mathrm{M}\,\mathrm{T}} \left[\boldsymbol{D}^{\mathrm{M}}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{M}} + \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{M}}\right]_i = \frac{1}{\Gamma_i}\delta\boldsymbol{\varepsilon}_i^{\mathrm{M}\,\mathrm{T}} \left[\left(\boldsymbol{K}_{\mathrm{RR}} - \bar{\boldsymbol{K}}_{\mathrm{FR}}^{\mathrm{T}}\,\bar{\boldsymbol{K}}_{\mathrm{FF}}^{-1}\,\bar{\boldsymbol{K}}_{\mathrm{FR}}\right)\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{M}} + \bar{\boldsymbol{F}}_{\varepsilon} - \bar{\boldsymbol{K}}_{\mathrm{FR}}^{\mathrm{T}}\,\bar{\boldsymbol{K}}_{\mathrm{FF}}^{-1}\,\bar{\boldsymbol{F}}_{F}\right]_i . \tag{7.14}$$

Damit können die homogenisierte Materialmatrix $\boldsymbol{D}_i^{\mathrm{M}}$ und der Vektor der homogenisierten Spannungen bzw. Schnittgrößen $\boldsymbol{\sigma}_i^{\mathrm{M}}$ für den entsprechenden Gaußpunkt i im Element e des Makroproblems angegeben werden zu

$$\boldsymbol{D}_i^{\mathrm{M}} = \frac{1}{\Gamma_i}\left(\boldsymbol{K}_{\mathrm{RR}} - \bar{\boldsymbol{K}}_{\mathrm{FR}}^{\mathrm{T}}\,\bar{\boldsymbol{K}}_{\mathrm{FF}}^{-1}\,\bar{\boldsymbol{K}}_{\mathrm{FR}}\right)_i , \tag{7.15}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_i^{\mathrm{M}} = \frac{1}{\Gamma_i}\left(\bar{\boldsymbol{F}}_{\varepsilon} - \bar{\boldsymbol{K}}_{\mathrm{FR}}^{\mathrm{T}}\,\bar{\boldsymbol{K}}_{\mathrm{FF}}^{-1}\,\bar{\boldsymbol{F}}_{F}\right)_i . \tag{7.16}$$

Kapitel 8

Numerische Beispiele

In diesem Kapitel werden einige Beispiele betrachtet, die zum einen die grundlegende Funktionsfähigkeit der vorgestellten Theorie und deren Implementierung zeigen und zum anderen deren Grenzen und Verbesserungspotentiale verdeutlichen.
Zunächst wird jeweils ein Basistest an einem homogenen isotropen Material durchgeführt, um die grundsätzliche Funktionsfähigkeit der Theorie zu überprüfen und das Konvergenzverhalten zu beurteilen. Anschließend werden inhomogene Materialverbünde betrachtet.
Der Fokus liegt hierbei zunächst darauf, die Qualität der Homogenisierung zu beurteilen. Dabei werden lediglich die Einträge der homogenisierten Materialmatrix untersucht. Stimmen sie mit den Referenzwerten überein, so wird für jedes beliebige linear elastische Makroproblem die Lösung korrekt ermittelt.
Für die Balken- und Plattenstrukturen werden für inhomogene Beispiele jeweils auch Vergleichsrechnungen zwischen einer FE²-Rechnung am Mehrskalenmodell und einem vollständig mit Volumenelementen aufgebauten FE-Referenzmodell durchgeführt.
Die Referenzmodelle für die Platten in Abschnitt 8.4.3 wurden in Abaqus CAE 6.14 [4] erstellt und berechnet, alle anderen Rechnungen wurden im „Finite Element Analysis Program“ FEAP [48] umgesetzt.

8.1 Bezeichnungen und Definitionen

In den folgenden Abschnitten werden im Text und in allen Abbildungen die Abkürzungen und Bezeichnungen nach Tabelle 8.1 zur Unterscheidung der verschiedenen Modellierungen verwendet.

Wird in den folgenden Abschnitten ein normierter Wert W_{norm} angegeben, so wird

stets der numerisch, mittels Homogenisierungsverfahren bzw. Multiskalenmodellierung, ermitteltete Wert W_{hom} auf den zuvor definierten, zugehörigen Referenzwert W_{ref} bezogen. Wird ein relativer Fehler oder eine relative Abweichung ΔW_{rel} angegeben, so werden sie berechnet nach

$$W_{\text{norm}} = \frac{W_{\text{hom}}}{W_{\text{ref}}}\,, \qquad\qquad \Delta W_{\text{rel}} = W_{\text{norm}} - 1\,.$$

Bezeichnung	Bedeutung
$p = [1, 2]$	Ansatzordnung der verwendeten Elemente (1: linear, 2: quadratisch).
HM+DBC	Das RVE verwendet eine Formulierung nach Hill-Mandel mit linearen Verschiebungsrandbedingungen.
NB+DBC	Das RVE verwendet die Formulierung nach Kapitel 6 mit linearen Verschiebungsrandbedingungen.
NB+Skal	Das RVE verwendet die Formulierung nach Kapitel 6 mit einer Skalierung einzelner Lagrangeparameter mit den Einträgen der lokalen Materialmatrix.

Tabelle 8.1: Tabellarische Übersicht der verwendeten Bezeichnungen und Abkürzungen

8.2 3D-Körper

In diesem Abschnitt werden Beispiele betrachtet, bei denen die makroskopische Struktur mit Volumenelementen approximiert wird. Alle Beispiele werden in der Modellierung NB+DBC gerechnet. Das heißt, die Nebenbedingung wird wie in Abschnitt 6.3 beschrieben umgesetzt und die verträglichen Randverschiebungen durch das Aufbringen linearer Verschiebungsrandbedingungen (DBC) sichergestellt.

8.2.1 Homogenes isotropes Material

Zur Verifizierung des in den vorhergehenden Kapiteln vorgestellten Modells wird zunächst ein homogenes isotropes RVE untersucht. Dazu wird ein linear elastisches Material mit einem Elastizitätsmodul von $E = 21\,000\,\text{kN/cm}^2$ und einer Querkontraktionszahl von $\nu = 0.3$ verwendet.

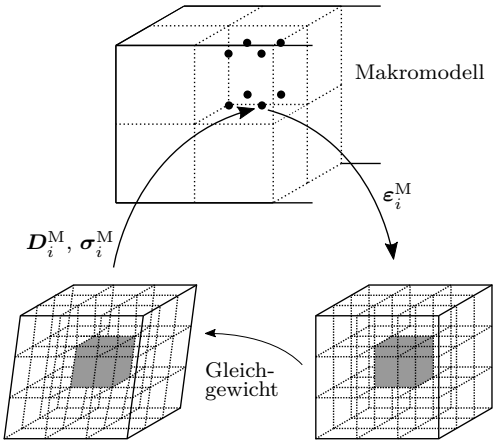

Abbildung 8.1: Schematische Darstellung der Homogenisierung für einen 3D-Körper

Nach (2.38) ergibt sich daraus eine Materialmatrix

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \tag{8.1}$$

mit den analytischen Referenzwerten

$$\begin{aligned} C_{11} = C_{22} = C_{33} &= \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 28\,269\,\mathrm{kN/cm^2}\,, \\ C_{12} = C_{13} = C_{23} &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 12\,115\,\mathrm{kN/cm^2}\,, \\ C_{44} = C_{55} = C_{66} &= \frac{(1-2\nu)E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} = 8\,077\,\mathrm{kN/cm^2}. \end{aligned}$$

Das Modell NB+DBC liefert sowohl für lineare als auch für quadratische Elemente bereits in der jeweils kleinstmöglichen Diskretisierungsstufe, mit drei Knoten je Raumrichtung, homogenisierte Materialwerte, die bis zur Ausgabegenauigkeit exakt mit den analytischen Referenzwerten in $\boldsymbol{C}$ übereinstimmen. Das gilt sowohl für die Nulleinträge als auch für die Einträge $C_{ij} \neq 0$. Die RVE-Abmessungen haben keine

Auswirkungen auf die berechneten Materialwerte. Die homogenisierten Spannungen werden ebenfalls bis zur Ausgabegenauigkeit exakt bestimmt.

Ergebnisse homogenes RVE

	NB+DBC	
	p=1	p=2
$C_{ij} = 0$	exakt	exakt
$C_{11} = C_{22} = C_{33}$	exakt	exakt
$C_{12} = C_{13} = C_{23}$	exakt	exakt
$C_{44} = C_{55} = C_{66}$	exakt	exakt

Tabelle 8.2: Ergebnisse für ein homogenes isotropes RVE für einen 3D-Körper

8.2.2 Material mit Einschluss

Im nächsten Schritt wird das Modell an einem RVE mit einem würfelförmigen Einschluss mit erheblich reduzierter Steifigkeit gegenüber dem Umgebungsmaterial getestet. Damit können bei einer Steifigkeit des Einschlusses nahe null auch Löcher im Material simuliert werden. Zur Veranschaulichung ist das verwendete RVE in Abbildung 8.2 dargestellt. Die Kantenlänge l hat keinen Einfluss auf das Ergebnis der Berechnungen.

Für dieses RVE gibt es keine analytischen Werte, mit denen die Einträge der homogenisierten Materialmatrix verglichen werden können. Stattdessen werden die

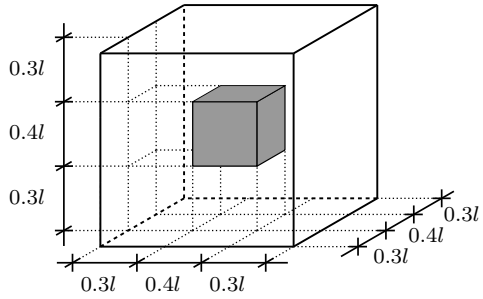

Abbildung 8.2: RVE mit würfelförmigem Einschluss

Einträge aus dem hier vorgestellten Modell NB+DBC mit denen aus einer Modellierung nach Hill-Mandel mit linearen Verschiebungsrandbedingungen (Bezeichnung HM+DBC) verglichen.

Das Hauptmaterial besitzt wie zuvor einen E-Modul von $E_1 = 21\,000\,\mathrm{kN/cm^2}$ und eine Querkontraktionszahl von $\nu_1 = 0.3$. Für den weicheren Einschluss wird ein Material mit deutlich reduziertem E-Modul $E_2 = 1\,\mathrm{kN/cm^2}$ und $\nu_2 = 0$ verwendet. Nach einer Konvergenzstudie werden alle Rechnungen an einem RVE mit zehn quadratischen Elementen je Raumrichtung durchgeführt (Abbildung 8.3).

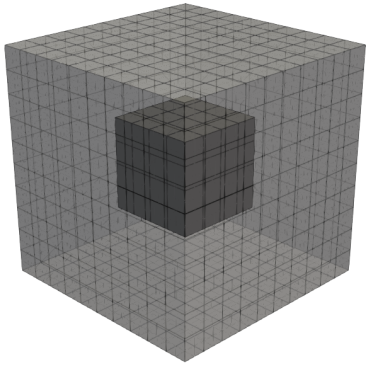

Abbildung 8.3: Diskretisierung des RVE mit einem würfelförmigen Einschluss mit zehn quadratischen Elementen je Raumrichtung.

Auch hier muss die homogenisierte Materialmatrix $\boldsymbol{C}$ aufgebaut sein wie in (8.1) dargestellt. Die Ergebnisse aus den Modellierungen NB+DBC und HM+DBC liefern die korrekte Struktur sowohl für die Nulleinträge $C_{ij} = 0$ als auch für die Einträge $C_{ij} \neq 0$. Für Letztere stimmen die Ergebnisse aus beiden Modellierungen bis zur Ausgabegenauigkeit exakt überein (Tabelle 8.3). In Abbildung 8.4 sind für einen Schnitt durch die Mitte des RVE jeweils bei einer reinen Schub- und einer reinen Normaldehnung die zugehörigen Spannungen auf der verformten Geometrie mit zehnfacher Überhöhung dargestellt. Dabei ist klar zu erkennen, wie der weiche Kern jeweils weitaus stärkere Deformationen erfährt als das Umgebungsmaterial.
Damit ist die gezeigte Modellierungsvariante grundsätzlich in der Lage, die Effekte von Inhomogenitäten im Material gut abzubilden. Der Fokus liegt im Folgenden darauf, dies auch für Balken- und Plattenstrukturen auf Makroebene zu zeigen. Daher wird auf weitere Betrachtungen mit 3D-Körpern auf Makroebene verzichtet.

Ergebnisse Einschluss

Eintrag	NB+DBC	HM+DBC
$C_{ij} = 0$	0	0
$C_{11} = C_{22} = C_{33}$ [kN/cm^2]	24 121	24 121
$C_{12} = C_{13} = C_{23}$ [kN/cm^2]	9 615	9 615
$C_{44} = C_{55} = C_{66}$ [kN/cm^2]	7 037	7 037

Tabelle 8.3: Tabellarische Übersicht der Einträge der homogenisierten Materialmatrix für ein RVE für einen 3D-Körper mit weichem Einschluss bei unterschiedlichen Rand- und Nebenbedingungen

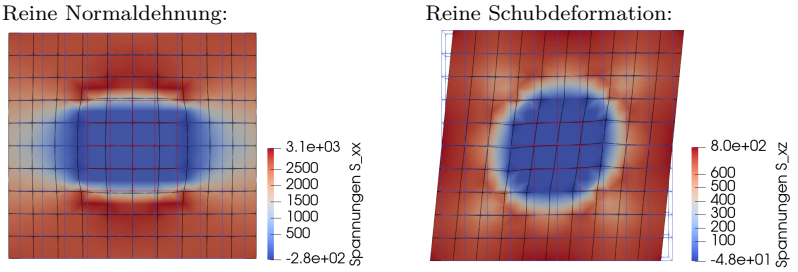

Abbildung 8.4: Spannungen S_{xx} (links) und S_{xz} (rechts) in kN/cm^2 und verformte (schwarz) gegenüber unverformter (rot/blau) Geometrie in der x-z-Ebene des Volumen-RVE mit weichem Einschluss bei Vorgabe von nur $E_{xx} = 1\%$ (links) oder nur $E_{xz} = 1\%$ (rechts) in zehnfacher Überhöhung.

8.3 Balken

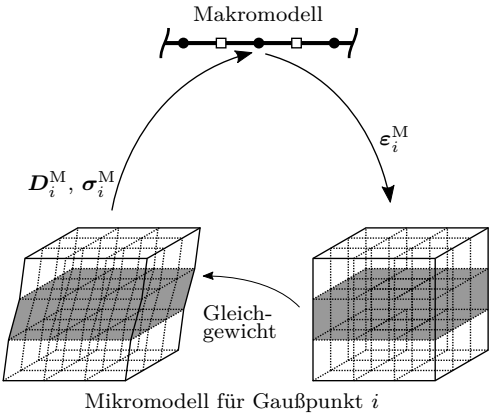

Abbildung 8.5: Schematische Darstellung der Homogenisierung für einen Balken

In diesem Abschnitt werden Beispiele betrachtet, bei denen die makroskopische Struktur mit räumlichen Balkenelementen nach 4.3 approximiert wird.
Auf der Mikroebene werden für das RVE die Volumenelemente entsprechend Abschnitt 6.4 verwendet. In Abschnitt 8.3.1 werden für diese Elemente die Auswirkungen linearer und quadratischer Ansatzfunktionen am Beispiel eines homogenen Balkens mit quadratischem Querschnitt verglichen. Aufgrund der wesentlich besseren Konvergenzeigenschaften der quadratischen Elemente werden für alle weiteren Untersuchungen auf der Mikroebene ausschließlich quadratische Elemente verwendet.

8.3.1 Homogener isotroper Balken

In einem ersten Schritt wird erneut ein homogenes isotropes RVE betrachtet, um die Methode an einfachen Materialien und Querschnitten zu testen, für welche in der Literatur analytische Vergleichswerte existieren. Dadurch können erste grundlegende Aussagen zur Qualität der Ergebnisse und zum Konvergenzhalten bei verschiedenen Querschnitten getroffen werden.
Die Modellierung mit NB+Skal führt bei einem homogenen Querschnitt zu identischen Ergebnissen wie eine Modellierung ohne veränderte Nebenbedingung, da die Lagrangeparameter effektiv mit 1 skaliert werden. Die Bezeichnung NB+Skal wird

für eine einheitliche Darstellung über alle Abschnitte des Kapitels dennoch beibehalten.
Für den folgenden Abschnitt wird wie zuvor ein linear elastisches Material mit einem Elastizitätsmodul von $E = 21\,000\,\mathrm{kN/cm^2}$ und einer Querkontraktionszahl von $\nu = 0.3$ verwendet.

Einfluss der RVE-Abmessungen auf die homogenisierte Materialmatrix

Die Einträge der homogenisierten Materialmatrix sind in der klassischen Modellierung mit Verschiebungsrandbedingungen oder periodischen Randbedingungen entsprechend der Hill-Mandel-Bedingung abhängig von der Länge des RVE. Insbesondere konvergieren die Schubsteifigkeiten und Torsionssteifigkeiten je nach gewählten Randbedingungen erst bei großen RVE-Längen gegen die analytischen Referenzwerte oder im Fall der Schubsteifigkeiten gar gegen null, siehe dazu z.B. [20, 21] und [32, 33].
In den hier untersuchten Beispielen kann für die Modellierung NB+DBC ein Randeffekt beobachtet werden, der daraus resultiert, dass sich an den gelagerten RVE-Rändern im Gegensatz zum RVE-Inneren keine Querschnittsverwölbungen einstellen können. Bei zunehmender RVE-Länge wird der verfälschende Effekt auf die Schubsteifigkeiten kleiner, siehe dazu die Untersuchungen in Abschnitt 8.3.1. Auf die Torsionssteifigkeit hat dies keinen Einfluss, da das Modell auch im Inneren keine Torsionsverwölbungen abbilden kann.
Bei der Modellierung NB+Skal wurde dagegen keinerlei Abhängigkeit der berechneten homogenisierten Materialwerte von der gewählten Länge des RVE festgestellt.

Quadratischer Querschnitt

Es wird ein quadratischer Balkenquerschnitt mit einer Breite und Höhe von $B_{\mathrm{RVE}} = H_{\mathrm{RVE}} = 1\,\mathrm{cm}$ untersucht. Dabei werden die Einträge der homogenisierten Materialmatrix bezüglich ihrer Konvergenz gegen die analytischen Referenzwerte in Abhängigkeit von der Ansatzordnung der Elemente, der Diskretisierungsdichte des RVE und der RVE-Länge betrachtet.

Die analytischen Referenzwerte für die Einträge der homogenisierten Materialmatrix

$$\boldsymbol{D}_{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \tag{8.2}$$

ergeben sich aus (3.13). Für den Schubkorrekturfaktor werden in der Literatur, z.B. [3, 8, 13, 27, 29, 44], zahlreiche verschiedene Werte aufgeführt, die teilweise von der Querkontraktionszahl abhängen. Für $\nu = 0$ fallen die Literaturwerte bei $\varkappa = 5/6$ zusammen, für $\nu = 0.3$ und einen quadratischen Querschnitt sind die Abweichungen zu $\varkappa = 5/6$ klein. Für den Referenzwert wird daher hier $\varkappa = 5/6$ verwendet. Damit ergeben sich die Referenzwerte

$$\begin{aligned} D_{11} &= EA &&= 21\,000\,\mathrm{kN}, & D_{44} &= GI_P = G(I_y + I_z) = 1\,346\,\mathrm{kNcm}^2, \\ D_{22} = D_{33} &= GA_S = 6\,731\,\mathrm{kN}, & D_{55} = D_{66} &= EI &&= 1\,750\,\mathrm{kNcm}^2. \end{aligned}$$

Dabei wird für die Torsionssteifigkeit GI_P verwendet, da die Modellierung keine Torsionsverwölbungen zulässt und somit lediglich GI_P anstelle von GI_T liefert.

Die Konvergenzstudie anhand eines RVE mit der Länge $L_{\mathrm{RVE}} = H_{\mathrm{RVE}} = 1\,\mathrm{cm}$ zeigt zunächst unabhängig von der Diskretisierungsdichte, dem Elementtyp und der Modellierungsvariante eine korrekte Besetzung von $\boldsymbol{D}_{\mathrm{B}}$ als Diagonalmatrix entsprechend (8.2) ohne zusätzliche falsche Koppelterme. Weiterhin sind die Werte für

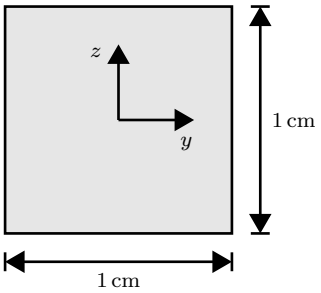

Abbildung 8.6: Quadratischer Balkenquerschnitt mit Breite und Höhe $B_{\mathrm{RVE}} = H_{\mathrm{RVE}} = 1\,\mathrm{cm}$

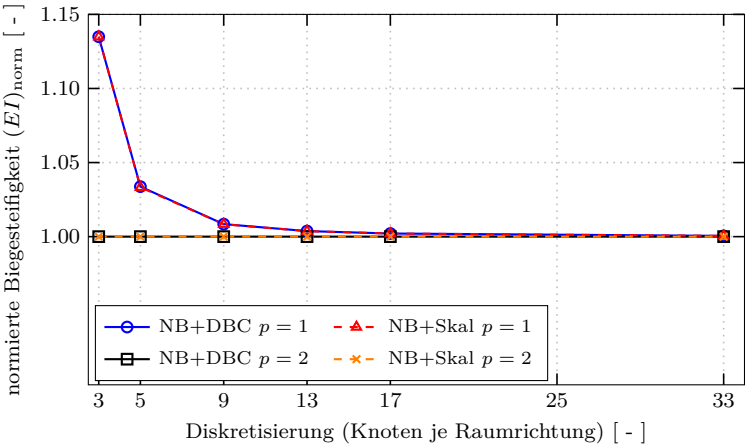

Abbildung 8.7: Konvergenzverhalten der homogenisierten Biegesteifigkeit für ein Balken-RVE der Länge $L_{\text{RVE}} = H_{\text{RVE}}$ mit quadratischem Querschnitt und homogenem Material

die Dehn- und Torsionssteifigkeiten EA und GI_T konstant über alle getesteten Varianten und entsprechen bis zur Ausgabegenauigkeit exakt den Referenzwerten.
Die Werte für die Biegesteifigkeit EI sind unabhängig von der verwendeten Modellierung (NB+DBC oder NB+Skal). Sie konvergieren für Elemente mit linearen Ansatzfunktionen ($p = 1$) mit zunehmender Diskretisierung gegen die analytischen Werte. Für Elemente mit quadratischen Ansatzfunktionen ($p = 2$) stimmen die berechneten Werte bereits in der kleinstmöglichen Diskretisierung bis zur Ausgabegenauigkeit exakt mit den analytischen Werten überein (Abbildung 8.7).

Die berechneten Schubsteifigkeiten GA_S sind in allen betrachteten Konfigurationen fehlerbehaftet gegenüber dem analytischen Wert. Eine Betrachtung des relativen Fehlers zeigt hier ebenfalls ein deutlich besseres Konvergenzverhalten der quadratischen Elemente. Die Werte aus der Modellierung NB+Skal konvergieren dabei gegen den analytischen Referenzwert. Die Werte aus der Modellierung NB+DBC konvergieren dagegen gegen einen um etwa 3 % zu hohen Wert (Abbildung 8.8).
Eine weitere Konvergenzuntersuchung zur Abhängigkeit der Einträge der homogenisierten Materialmatrix von der Länge des RVE zeigt, dass einzig die Schubsteifigkeit in der Modellierung NB+DBC von der RVE-Länge abhängt. Mit zunehmender RVE-Länge konvergiert sie auch hier gegen den analytischen Referenzwert (Abbildung 8.9). Das liegt darin begründet, dass die linearen Verschiebungsrandbedingungen

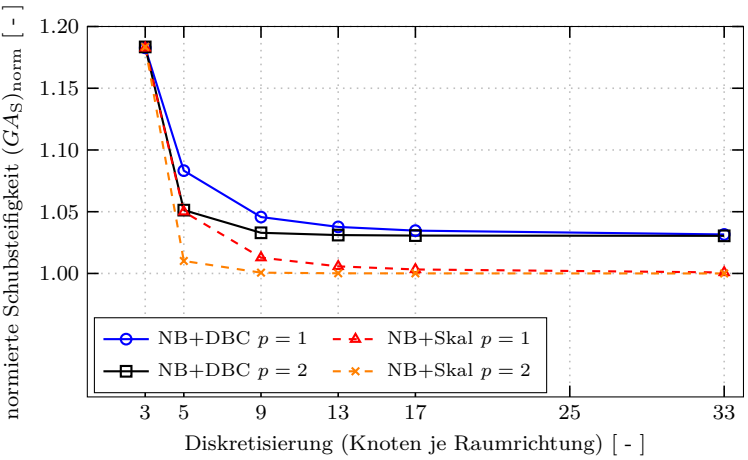

Abbildung 8.8: Konvergenzverhalten der homogenisierten Schubsteifigkeit für ein Balken-RVE der Länge $L_{\mathrm{RVE}} = H_{\mathrm{RVE}}$ mit quadratischem Querschnitt und homogenem Material

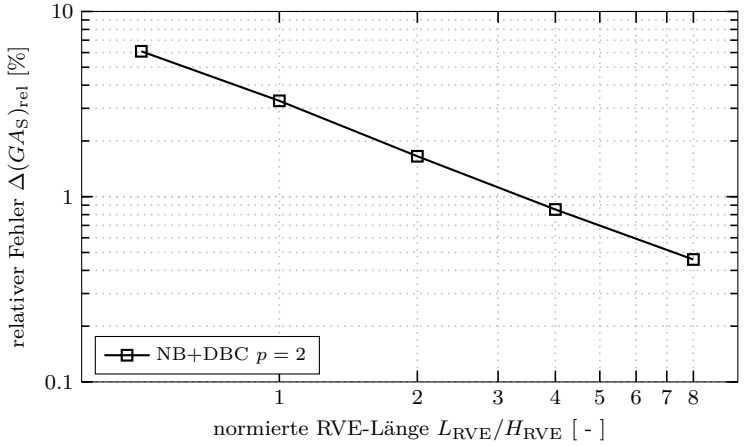

Abbildung 8.9: Relativer Fehler der homogenisierten Schubsteifigkeit für ein Balken-RVE mit quadratischem Querschnitt und homogenem Material bei Modellierung NB+DBC in Abhängigkeit der RVE-Länge L_{RVE}; Elementkantenlänge $l_e = 0.25\, H_{\mathrm{RVE}}$; doppel-logarithmische Auftragung

einen ebenen Querschnitt am Rand erzwingen und somit dort keine Verwölbungen infolge einer Schubbelastung möglich sind. Die Auswirkungen dieses Randeffekts werden umso kleiner, je länger das RVE wird. Bei einer Verwendung der Modellierung NB+DBC muss daher auf eine ausreichende RVE-Länge geachtet werden, um den Einfluss des Randeffekts vernachlässigbar klein zu halten.
Die Konvergenzuntersuchung zur RVE-Länge wurde mit würfelförmigen quadratischen Elementen mit fester Kantenlänge $l_e = 0.25\,\text{cm}$ durchgeführt, sodass mit zunehmender RVE-Länge mehr Elemente verwendet werden.

Ergebnisse Quadrat-Querschnitt

	NB+DBC		NB+Skal	
	$p=1$	$p=2$	$p=1$	$p=2$
$D_{ij}=0$	exakt	exakt	exakt	exakt
EA	exakt	exakt	exakt	exakt
GI_P	exakt	exakt	exakt	exakt
EI	Abb. 8.7	exakt	Abb. 8.7	exakt
GA_S	Abb. 8.8 und 8.9		Abb. 8.8	

Tabelle 8.4: Ergebnisse für ein Balken-RVE mit homogenem quadratischem Querschnitt

Kreisförmiger Querschnitt

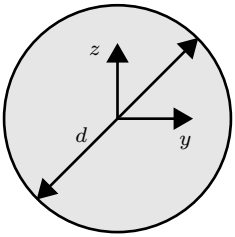

Abbildung 8.10: Kreisförmiger Balkenquerschnitt mit Durchmesser d

In diesem Abschnitt werden die Einträge der homogenisierten Materialmatrix für einen kreisförmigen Querschnitt mit einem Durchmesser von $d = 1\,\text{cm}$ hinsichtlich Konvergenz mit zunehmender Diskretisierungsdichte und RVE-Länge untersucht.

Für die Referenzwerte der Materialmatrix bleibt die Struktur wie in (8.2) erhalten. Aus der Geometrie ergeben sich die Querschnittswerte $I_y = \pi d^4/64 \approx 0.0491\,\mathrm{cm}^4$, $I_z = I_y$ und $I_T = I_p = I_y + I_z \approx 0.0982\,\mathrm{cm}^4$. Für den Schubkorrekturfaktor lassen sich in der Literatur (z.B. [3, 27, 44]) verschiedene Angaben unter Berücksichtigung der Querkontraktionszahl ν finden. Für die hier verwendete Querkontraktionszahl von $\nu = 0.3$ variieren die angegebenen Werte zwischen $\varkappa = 0.85$ und $\varkappa = 0.92$. Daraus folgen die Referenzwerte für die Einträge der homogenisierten Materialmatrix zu

$$D_{11} = EA = 16\,493\,\mathrm{kN}, \qquad D_{44} = GI_T = 793\,\mathrm{kNcm}^2,$$
$$D_{22} = D_{33} = GA_S = \varkappa \cdot 6\,344\,\mathrm{kN}, \qquad D_{55} = D_{66} = EI = 1\,030\,\mathrm{kNcm}^2.$$

Für die numerischen Berechnungen wird zunächst wieder ein RVE mit der Länge $L_{\mathrm{RVE}} = 1\,\mathrm{cm}$ und einer Diskretisierung mit quadratischen Elementen verwendet. Die verschiedenen Diskretisierungsstufen sind in Abbildung 8.11 dargestellt.

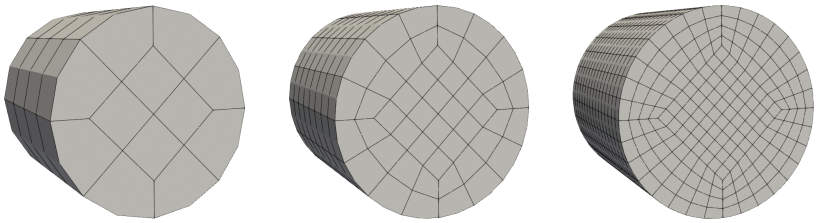

Abbildung 8.11: Vernetzung des RVE mit quadratischen Elementen für einen Balken mit kreisförmigem Querschnitt in verschiedenen Diskretisierungsstufen

Die Dehn-, Biege- und Torsionssteifigkeiten EA, EI und GI_T sind in beiden Modellierungsvarianten NB+DBC und NB+Skal unabhängig von der RVE-Länge. Minimale Abweichungen gegenüber den Referenzwerten, unterhalb von 0.2 % in der kleinsten Diskretisierungsstufe, liegen lediglich in den Ungenauigkeiten bei der Approximation der Geometrie begründet.

Der Schubkorrekturfaktor liegt bei einer Modellierung mit NB+Skal konstant bei $\varkappa = 0.90$ und damit im Bereich der Referenzwerte. Bei einer Modellierung mit NB+DBC liegt er abhängig von der gewählten RVE-Länge zwischen $\varkappa = 0.90$ und $\varkappa = 0.92$. Bei großen RVE-Längen konvergiert der Wert gegen $\varkappa = 0.90$ (Abbildung 8.12).
Der Schubkorrekturfaktor ist in allen hier modellierten Varianten unabhängig von

der Querkontraktionszahl ν. Für die meisten Werte von ν liegt $\varkappa = 0.90$ weiterhin im Bereich der Literaturwerte. Je kleiner ν wird, desto näher liegen die Literaturwerte beisammen. Für $\nu = 0$ fallen sie alle bei $\varkappa = 0.85$ zusammen. Für den berechneten Wert $\varkappa = 0.90$ bedeutet das für den Fall $\nu = 0$ einen relativen Fehler von 5.9 %.

Ergebnisse Kreis-Querschnitt

$p = 2$	NB+DBC	NB+Skal
$D_{ij} = 0$	exakt	exakt
EA	exakt	exakt
GI_T	exakt	exakt
EI	exakt	exakt
$\varkappa$	Abb. 8.12	

Tabelle 8.5: Ergebnisse für ein Balken-RVE mit kreisförmigem Querschnitt; exakt heißt im Rahmen der Genauigkeit der Geometrie-Approximation.

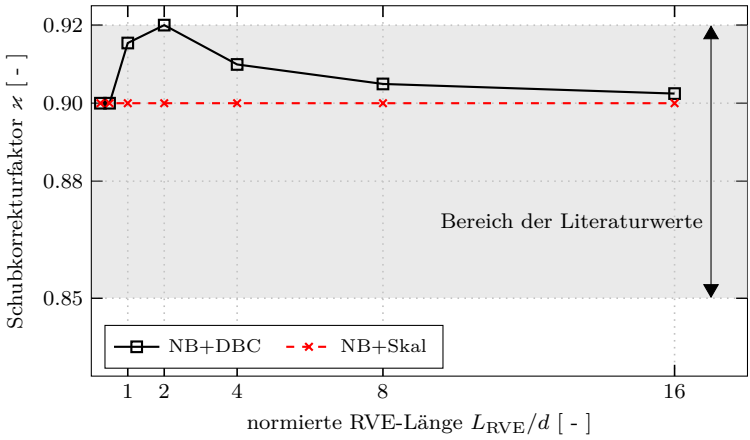

Abbildung 8.12: Konvergenzverhalten des Schubkorrekturfaktors eines Balken-RVE mit Kreis-Querschnitt und homogenem Material bei acht Elementen über den Durchmesser und variabler Länge L_{RVE}

8.3.2 Sandwich-Balken

Es wird ein Sandwich-Balken, analog zu den Betrachtungen in [32], mit quadratischem Querschnitt untersucht, der einen weichen Kern und zwei harte Deckschichten besitzt. Die Dicke der Deckschichten h_D im Verhältnis zur Dicke des Kerns h_K wird dabei variiert. Die Gesamthöhe und die Breite des Querschnitts betragen $b = h = 1\,\text{cm}$.

Der Kernanteil des Balkens wird als $\rho_K = h_K/h$ definiert. Die Deckschichten besitzen einen E-Modul von $E_D = 1\,000\,\text{kN/cm}^2$ und der Kern von $E_K = \alpha E_D$. Dabei stellt α das Steifigkeitsverhältnis zwischen Kern und Deckschichten dar. Kern und Deckschichten besitzen die gleiche Querkontraktionszahl $\nu = 0.3$.
Die Parameter ρ_K und α werden im Folgenden variiert und ihr Einfluss auf die Ergebnisse untersucht. Aufgrund des typischen Einsatzgebietes eines solchen Balkens werden dabei nur die für ebene Probleme relevanten homogenisierten Werte für die Dehnsteifigkeit EA, die Biegesteifigkeit EI_y und die Schubsteifigkeit GA_{S_z} betrachtet. Anschließend wird das Mehrskalenmodell für einen beidseitig eingespannten Balken unter Einzellast verwendet und mit einem Referenzmodell verglichen.

Homogenisierte Steifigkeiten

Die Struktur der homogenisierten Materialmatrix als Diagonalmatrix entsprechend (8.2) bleibt erhalten.
Mit $s_D = (h_K + h_D)/2$ ergeben sich die Referenzwerte der Dehn-, Biege- und

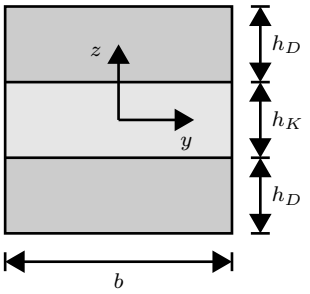

Abbildung 8.13: Schematische Darstellung des Querschnitts des Sandwichbalkens mit Gesamthöhe und Breite $b = h = 1\,\text{cm}$

Schubsteifigkeit zu:

$$
\begin{aligned}
D_{11} &= EA = E_D b\,(\alpha h_K + 2h_D) \\
D_{55} &= EI_y = E_D b \left(\alpha \frac{h_K^3}{12} + 2 \left[\frac{h_D^3}{12} + s_D^2 h_D \right] \right) \\
D_{33} &= GA_{S_z} = \varkappa_z G_D b\,(\alpha h_K + 2h_D)\ .
\end{aligned}
$$

Der Schubkorrekturfaktor $\varkappa_z$ für die Schubsteifigkeit kann nach [51] wie folgt berechnet werden:

$$
\varkappa_z = \frac{4}{9} \frac{T_1^2}{T_2 T_4}. \tag{8.3}
$$

Dabei sind definiert:

$$
\tilde{A} = \frac{(1-\rho_K)^3}{15} \left(3\rho_K^2 + 9\rho_K + 8 \right), \tag{8.4}
$$

$$
T_1 = \left(1 - \rho_K^3 \right) + \rho_K^3\, \alpha\,, \tag{8.5}
$$

$$
T_2 = \frac{1-\rho_K}{\alpha} + \rho_K\,, \tag{8.6}
$$

$$
T_3 = \left(1 - \rho_K^2 \right)^2 + \frac{8}{15} \alpha^2 \rho_K^4 + \frac{4}{3} \alpha\, \rho_K^2 \left(1 - \rho_K^2 \right), \tag{8.7}
$$

$$
T_4 = \tilde{A}\, \alpha + \rho_K T_3\,. \tag{8.8}
$$

Zunächst wird die Modellierungsvariante NB+Skal untersucht. Die Ergebnisse sind hier ebenfalls nicht von der RVE-Länge abhängig. Das Verfahren liefert die korrekte Struktur für $\boldsymbol{D}_{\mathrm{B}}$ mit den entsprechenden Nulleinträgen außerhalb der Diagonale.

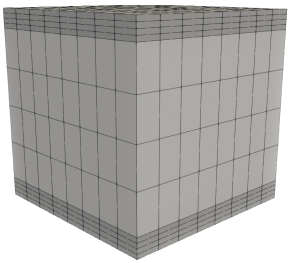

Abbildung 8.14: Diskretisierung des RVE für den Sandwich-Balken zur Untersuchung der homogenisierten Steifigkeiten

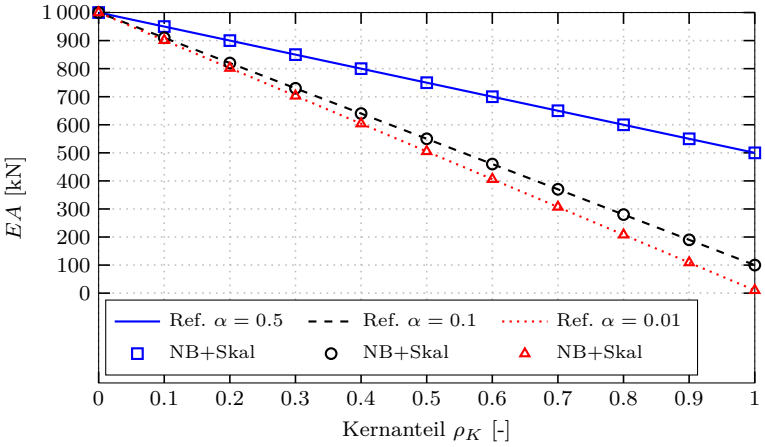

Abbildung 8.15: Vergleich der Dehnsteifigkeiten für ein Balken-RVE mit Sandwich-Struktur bei verschiedenen Steifigkeitsverhältnissen α und Kernanteilen ρ_K

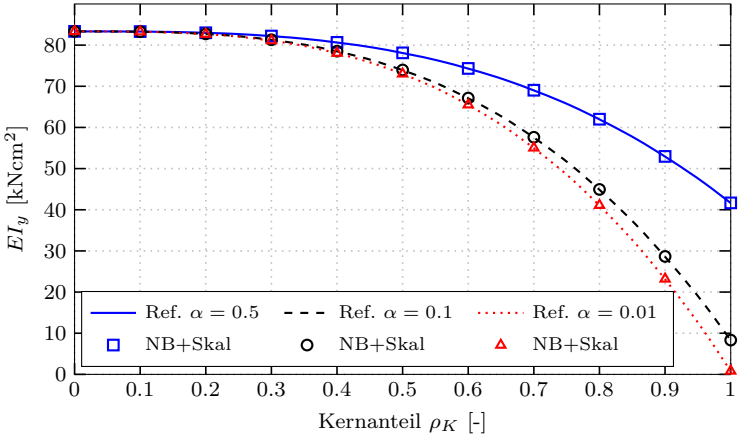

Abbildung 8.16: Vergleich der Biegesteifigkeiten für ein Balken-RVE mit Sandwich-Struktur bei verschiedenen Steifigkeitsverhältnissen α und Kernanteilen ρ_K

Nach einer Konvergenzstudie werden die Berechnungen mit einer Diskretisierung von vier quadratischen Elementen pro Schicht über die Höhe und acht quadratischen Elementen über die Länge und Breite durchgeführt (Abbildung 8.14). Die Länge des RVE wird zu $L_{\mathrm{RVE}} = 1\,\mathrm{cm}$ gewählt.
Die berechneten Dehn- und Biegesteifigkeiten stimmen für alle untersuchten Varianten von α und ρ_K bis zur Ausgabegenauigkeit mit den Referenzwerten überein (Abbildungen 8.15 und 8.16). Der berechnete Schubkorrekturfaktor $\varkappa_z$ wird systematisch unterschätzt. Der relative Fehler ist dabei umso größer, je größer der Steifigkeitsunterschied α zwischen Deckschichten und Kern ist, siehe dazu auch die weiteren Untersuchungen der Spannungsverläufe in der Mehrskalenrechnung auf den nächsten Seiten. Der größte relative Fehler der getesteten Varianten beträgt 16.7 % für die Konfiguration $\alpha = 0.01$, $\rho_K = 0.8$ (Abbildung 8.17). Für Kernanteile von $\rho_K = 0$ und $\rho_K = 1$, das heißt für den homogenen Balken, ergibt sich der bereits zuvor ermittelte Referenzwert für den Schubkorrekturfaktor von $\varkappa_z = 5/6$.

Für die Modellierungsvariante NB+DBC wird zunächst eine Konfiguration mit $\alpha = 0.1$ und $\rho_K = 0.6$ untersucht. Es wird die Längenabhängigkeit und die Diskretisierung betrachtet.
Das Verfahren liefert hier ebenfalls die korrekte Struktur für $\boldsymbol{D}_{\mathrm{B}}$ mit den entsprechenden Nulleinträgen außerhalb der Diagonale. Die Ergebnisse der Dehn- und Biegesteifigkeit sind erneut unabhängig von der RVE-Länge. Die Schubsteifigkeit konvergiert hingegen mit zunehmender RVE-Länge gegen den Wert aus der Variante NB+Skal. Die für ein akzeptables Ergebnis benötigte RVE-Länge, die zu einer Abweichung von deutlich unter 1 % führt, ist mit $L_{\mathrm{RVE}} = 64\,h$ aber unverhältnismäßig hoch. Dabei ist gleichzeitig eine sehr hohe Anzahl an Elementen über die Länge notwendig, sodass die Anzahl der notwendigen Freiheitsgrade für ein ähnlich gutes Ergebnis wie in der Variante NB+Skal etwa das 30-fache beträgt. Der enorm hohe Aufwand ohne Verbesserung der Ergebnisse gegenüber NB+Skal spricht klar dafür, die Variante NB+DBC hier nicht zu verwenden. Es werden daher keine weiteren Untersuchungen dazu durchgeführt.

Ergebnisse Sandwich-Balken

$p = 2$	NB+DBC	NB+Skal
$D_{ij} = 0$	exakt	exakt
EA	exakt	exakt
EI_y	exakt	exakt
$\varkappa_z$	Abb. 8.18	Abb. 8.17

Tabelle 8.6: Ergebnisse der Homogenisierung für den Sandwich-Balken

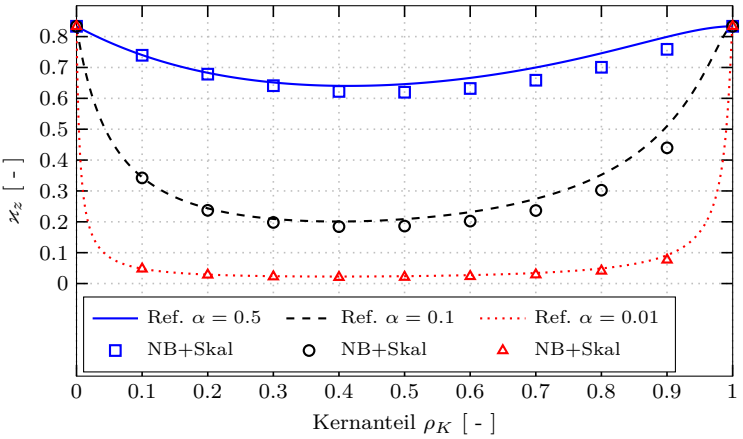

Abbildung 8.17: Vergleich der Schubkorrekturfaktoren für ein Balken-RVE mit Sandwich-Struktur bei verschiedenen Steifigkeitsverhältnissen α und Kernanteilen ρ_K

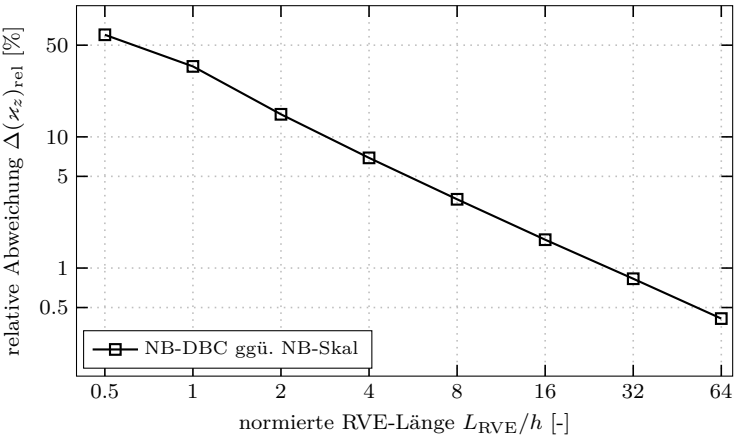

Abbildung 8.18: Relative Abweichung des Schubkorrekturfaktors für ein Balken-RVE mit Sandwich-Struktur zwischen den Modellierungsvarianten (für $\alpha = 0.1$, $\rho_K = 0.6$) bei zunehmender RVE-Länge und jeweils angepasster auskonvergierter Diskretisierung, doppellogarithmische Auftragung

Mehrskalenrechnung

Als Makroproblem für den Sandwich-Balken wird ein beidseitig eingespannter Balken unter Einzellast in der Mitte betrachtet (Abbildung 8.19). Dabei werden die Absenkung w in der Mitte des Balkens und die Verläufe der Normalspannung S_{xx} und der Schubspannung S_{xz} über die Höhe des Balkens an der Stelle $x = 7.75\,\text{cm}$ mit einem Referenzmodell verglichen. Der Ursprung des Koordinatensystems liegt dabei am linken Ende in der Mitte des Querschnitts. Verwendet werden die Konfigurationen $\alpha = 0.5$, $\rho = 0.5$ und $\alpha = 0.01$, $\rho = 0.8$.

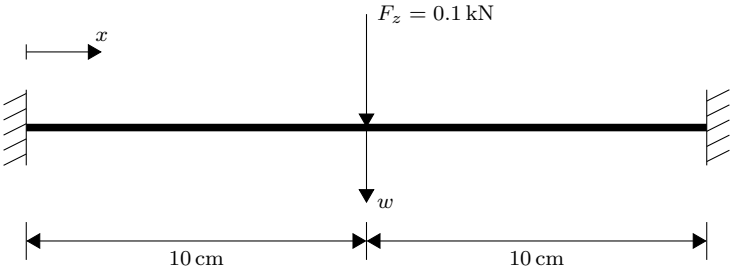

Abbildung 8.19: Beidseitig eingespannter Balken mit Last F_z und Absenkung w

Unter Ausnutzung der Symmetrie wird nur die linke Systemhälfte modelliert. Die Diskretisierung erfolgt für das Referenzmodell mit quadratischen Volumenelementen (Abschnitt 4.2), wobei nach einer Konvergenzstudie je Schicht acht quadratische Volumenelemente über die Höhe (insgesamt 24), acht über die Breite und 80 über die Länge ($L = 10\,\text{cm}$) verwendet werden. Damit enthält das Referenzmodell insgesamt 15 360 quadratische Volumenelemente.
Das Mehrskalenmodell wird auf der Makroebene mit 20 linearen, reduziert integrierten Balkenelementen (Abschnitt 4.3) diskretisiert. Für das RVE werden quadrati-

Absenkung w

	$\alpha = 0.5,\ \rho = 0.5$	$\alpha = 0.01,\ \rho = 0.8$
Referenzmodell	0.111 cm	0.445 cm
Mehrskalenmodell	0.112 cm	0.509 cm
relative Abweichung	0.9 %	14.4 %

Tabelle 8.7: Vergleich der Absenkungen der Balkenreferenzachse Referenz- und Mehrskalenmodell für den Sandwichbalken

sche Volumenelemente (Abschnitt 6.4) verwendet, wobei entsprechend der Konvergenzstudien für das RVE aus dem vorherigen Abschnitt ebenfalls acht Elemente je Schicht über die Höhe und acht Elemente über die Breite und Länge des RVE verwendet werden (ähnlich Abbildung 8.14, aber mit der doppelten Elementanzahl über die Höhe jeder Schicht). Die RVE-Länge beträgt $L_{\mathrm{RVE}} = h = 1\,\mathrm{cm}$.
Der Vergleich der Absenkungen zeigt zunächst für die Konfiguration mit geringem Steifigkeitsunterschied und 50% Kernanteil ($\alpha = 0.5$, $\rho = 0.5$) eine gute Übereinstimmung - die Absenkung liegt im Mehrskalenmodell 0.9% über derjenigen des Referenzmodells. Für die Konfiguration mit hohem Steifigkeitsunterschied und 80% Kernanteil ($\alpha = 0.01$, $\rho = 0.8$) wird die Absenkung im Mehrskalenmodell um 14.4% gegenüber dem Referenzmodell überschätzt (Tabelle 8.7).
Der Vergleich der Normalspannungsverläufe zeigt dabei eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Referenz- und Mehrskalenmodell. Die Skalierung der Lagrangeparameter liefert hier korrekt den Sprung an den Grenzschichten zwischen Deckschichten und Kern (Abbildung 8.20).
Bei den Schubspannungsverläufen zeigt sich dagegen, dass der parabelförmige Ansatz für die zugehörigen Lagrangeparameter für die Konfiguration $\alpha = 0.5$, $\rho = 0.5$ zwar von der Referenzlösung abweicht, diese aber noch grob abbilden kann. Für $\alpha = 0.01$, $\rho = 0.8$ ergeben sich dagegen deutliche Abweichungen und der parabelförmige Ansatz zeigt sich weniger geeignet bei großen Steifigkeitsunterschieden und dünnen Deckschichten (Abbildung 8.21).

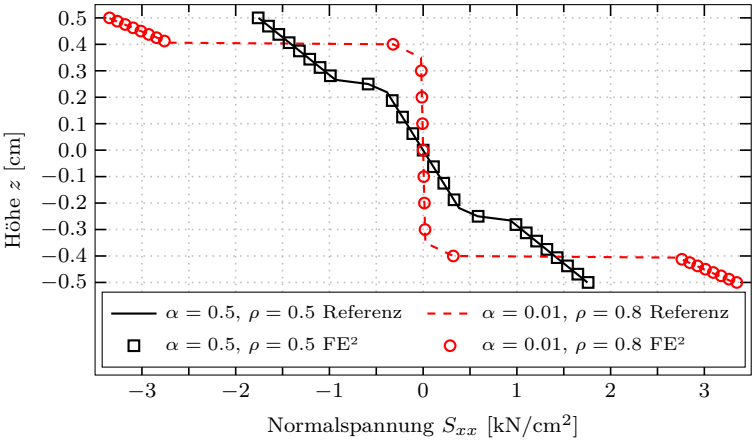

Abbildung 8.20: Vergleich der Normalspannungsverläufe über die Höhe im Sandwich-Balken

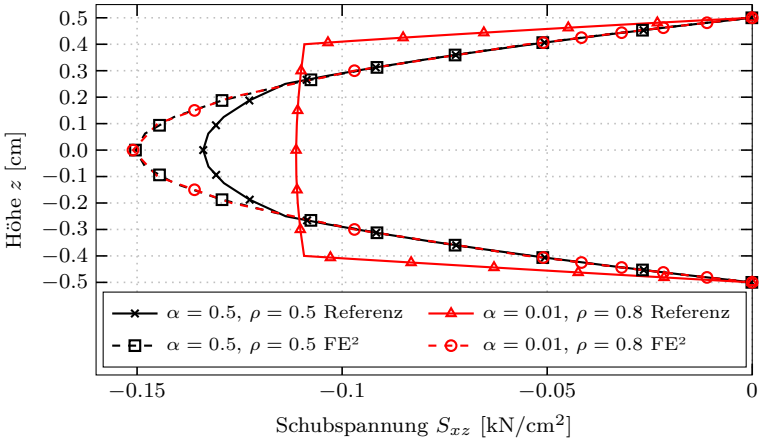

Abbildung 8.21: Vergleich der Schubspannungsverläufe über die Höhe im Sandwichbalken

8.3.3 Gelochter Balken

Als Beispiel für eine Inhomogenität in Längsrichtung wird ein Balken mit einer Höhe von 20 mm und einer Breite von 8 mm betrachtet, der in regelmäßigen Abständen mit rechteckigen Löchern in Querrichtung zur Balkenachse versehen ist (Abbildung 8.22). Als Material wird wie zuvor ein linear elastisches Material mit $E = 21\,000\,\mathrm{kN/cm^2}$ und $\nu = 0.3$ verwendet.

Für solche Inhomogenitäten entlang der Balkenachse können keine analytischen Referenzwerte für die Einträge der homogenisierten Materialmatrix ermittelt werden, sodass nur der Vergleich der FE²-Rechnung mit einem vollständig modellierten FE-Referenzmodell bleibt, um die Ergebnisse beurteilen zu können.

Aufgrund der Art der Umsetzung der Nebenbedingung kann das Loch im RVE nicht als tatsächliche Aussparung modelliert werden. Das würde zu konstanten Spannungsverläufen im RVE führen und damit zu grob falschen Steifigkeitswerten. Stattdessen wird das Loch mit Elementen mit einem sehr weichen, linear elastischen Material ($E_2 = 10\,\mathrm{kN/cm^2}$, $\nu_2 = 0$) modelliert. Über das Gleichgewicht stellt sich dadurch eine realistische Spannungsverteilung im eigentlichen Material ein, während der Anteil der virtuellen inneren Arbeit der Elemente im Loch vernachlässigbar klein bleibt.

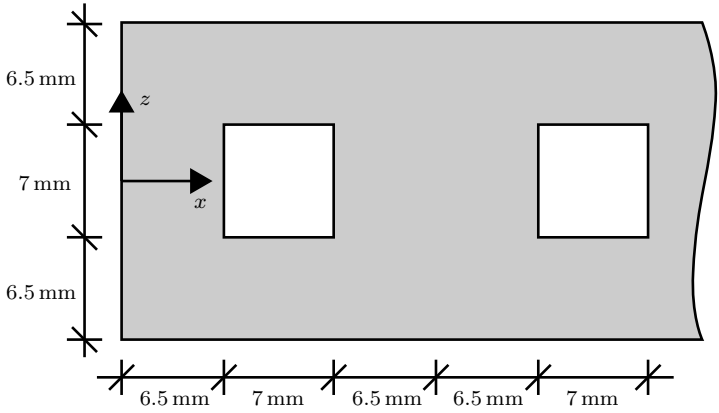

Abbildung 8.22: Ausschnitt des Lochbalkens mit Angaben zur Geometrie, Breite in y-Richtung: 8 mm

Durch die Inhomogenität in Längsrichtung kommt als Modellierungsvariante nur NB+DBC infrage. Die Modellierung mit NB+Skal ist wegen der daraus entstehenden Verletzung des inneren Gleichgewichts am Übergang zwischen Material und „Loch“ nicht möglich (siehe Abschnitt 6.4).
Aufgrund der Ergebnisse aus den vorhergehenden Beispielen wird zunächst eine Konvergenzstudie für das RVE bezüglich Diskretisierungsdichte und RVE-Länge durchgeführt. Die RVE-Länge kann dabei nur in ganzen Vielfachen der Periodenlänge des Ausschnitts mit Loch variiert werden. Ein RVE besteht dann aus einer Aneinanderreihung von solchen Ausschnitten mit Loch. Für ein RVE mit einer Länge von drei Ausschnitten und einer Diskretisierung mit Elementen der Kantenlänge von $l_e \approx 0.9\,\text{mm}$ sind die Abweichungen in den Einträgen der homogenisierten Materialmatrix im Vergleich zur jeweils nächsten Verdoppelung von Diskretisierung oder RVE-Länge unterhalb von 1 %. Das für die gekoppelte Rechnung verwendete RVE ist in Abbildung 8.23 dargestellt.

Als Makroproblem wird ein beidseitig eingespannter Balken unter Einzellast in Balkenmitte untersucht (Abbildung 8.24). Dabei wird die Symmetrie ausgenutzt und nur eine Hälfte des Systems modelliert. Die Berechnung erfolgt verschiebungsgesteuert durch Vorgabe der Absenkung in der Balkenmitte. Im Ergebnis werden die vertikale Auflagerkraft F_z und das Lagermoment M_y untersucht.

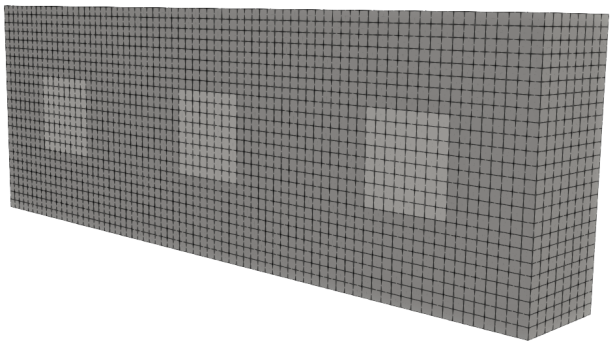

Abbildung 8.23: Verwendetes RVE für den gelochten Balken

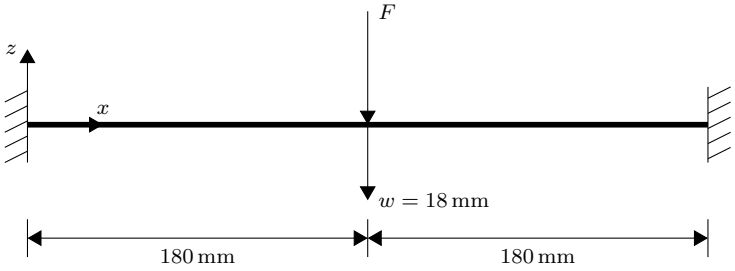

Abbildung 8.24: Beidseitig eingespannter Balken mit Belastung F und Verschiebung w in z-Richtung

Nach einer Konvergenzstudie erfolgt die Diskretisierung des Makroproblems mit 16 linearen Balkenelementen (entsprechend Abschnitt 4.3) für eine Systemhälfte. Die Diskretisierung des Referenzmodells erfolgt nach einer weiteren Konvergenzstudie bei gleicher Diskretisierungsdichte wie im RVE (siehe Abbildung 8.23) mit 36 864 quadratischen Volumenelementen entsprechend Abschnitt 4.2.
Zusätzlich wird ein homogener Balken aus dem gleichen Material ohne Löcher bei gleicher Diskretisierungsdichte untersucht, um eventuelle systematische Fehler aus den unterschiedlichen Modellierungen von Referenzmodell und Mehrskalenmodell auszuschließen und um den allgemeinen Einfluss der Löcher besser einschätzen zu können. Daraus wird ersichtlich, dass zwischen homogenem Referenzmodell und Balkenmodell nur minimale Abweichungen von bis zu 0.13 % in den Lagerreaktionen auftreten.

Reaktionskraft F_z

	homogen	gelocht
Referenzmodell	40.22 kN	37.27 kN
Mehrskalenmodell	40.19 kN	36.81 kN
relative Abweichung	−0.07 %	−1.23 %

Tabelle 8.8: Vergleich der Reaktionskraft F_z im Referenz- und Mehrskalenmodell für den homogenen und den gelochten Balken

Reaktionsmoment M_y

	homogen	gelocht
Referenzmodell	3 612 kNmm	3 364 kNmm
Mehrskalenmodell	3 617 kNmm	3 313 kNmm
relative Abweichung	−0.13 %	−1.51 %

Tabelle 8.9: Vergleich des Reaktionsmoments M_y im Referenz- und Mehrskalenmodell für den homogenen und den gelochten Balken

Der direkte Vergleich der Auswirkungen der Löcher auf die Lagerreaktionen im Referenzmodell und im Mehrskalenmodell zeigt eine ähnliche Größenordnung. Während im Referenzmodell die Löcher die Lagerreaktionen F_z um 7.34% und M_y um 6.88% reduzieren, ist der Effekt im Mehrskalenmodell mit einer Reduzierung beider Lagerreaktionen um je 8.4 % etwas stärker ausgeprägt (Tabellen 8.8 und 8.9).
Damit überschätzt die Mehrskalenmodellierung die Schwächung des Balkens infolge der Löcher gegenüber dem Referenzmodell leicht mit etwa 1.2 - 1.5 %, kann sie aber dennoch gut abbilden.

8.4 Platten

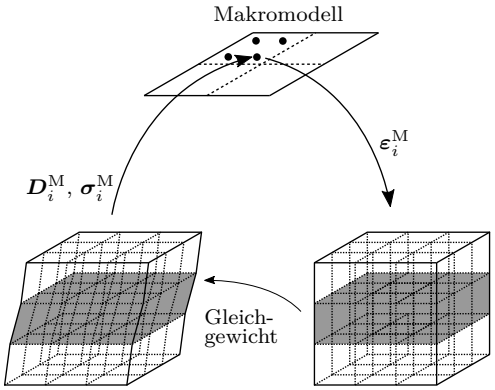

Abbildung 8.25: Schematische Darstellung der Homogenisierung für eine Platte

In diesem Abschnitt werden Beispiele betrachtet, bei denen die makroskopische Struktur mit Plattenelementen nach Abschnitt 3.2 approximiert wird.
Die Ergebnisse ähneln hier erwartbar denen des Balkens. Erneut zeigen auf der Mikroebene die Volumenelemente mit quadratischen Ansatzfunktionen das wesentlich bessere Konvergenzverhalten gegenüber den linearen Ansatzfunktionen. Deshalb werden nur erstere verwendet. Weiterhin sind die Einträge der homogenisierten Materialmatrix für die Modellierungsvariante NB+Skal unabhängig von der gewählten Länge und Breite des RVE. Bei der Modellierung NB+DBC zeigen sich erneut Randeffekte, die mit zunehmenden RVE-Maßen abnehmen. All diese Effekte sind sehr ähnlich oder teilweise identisch zu denen beim Balken. Daher wird im Folgenden jeweils nur kurz darauf eingegangen.

8.4.1 Homogene isotrope Platte

Zunächst wird ein homogener isotroper Plattenaufbau gewählt, für den Referenzwerte einfach zu ermitteln sind, sodass die grundsätzliche Funktionsfähigkeit des Modells gezeigt werden kann.
Es wird wie zuvor das linear elastische Material mit einem E-Modul von $E = 21\,000\,\mathrm{kN/cm^2}$ und einer Querkontraktionszahl von $\nu = 0.3$ verwendet. Die Dicke der Platte beträgt $h = 1\,\mathrm{cm}$.

Damit ergibt sich aus (3.29)-(3.32) eine Materialmatrix

$$\boldsymbol{D}_{\mathrm{P}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_{\mathrm{m}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}_{\mathrm{b}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}_{\mathrm{s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & D_{45} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{54} & D_{55} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{77} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{88} \end{bmatrix} \tag{8.9}$$

mit den Referenzwerten

$$\begin{aligned} D_{11} &= D_{22} = 23\,077\,\mathrm{kN/cm}\,, & D_{12} &= D_{21} = 6\,923\,\mathrm{kN/cm}\,, \\ D_{33} &= 8\,077\,\mathrm{kN/cm}\,, & & \\ D_{44} &= D_{55} = 1\,923\,\mathrm{kNcm}\,, & D_{45} &= D_{54} = 577\,\mathrm{kNcm}\,, \\ D_{66} &= 673\,\mathrm{kNcm}\,, & & \\ D_{77} &= D_{88} = 6\,731\,\mathrm{kN/cm}\,. & & \end{aligned}$$

Dabei wurde analog zu Abschnitt 8.3.1 (Balken mit quadratischem Querschnitt) der Schubkorrekturfaktor zu $\varkappa = 5/6$ gesetzt.

Aus der Homogenisierung ergibt sich erneut, unabhängig von der verwendeten Modellierung (NB-Skal, NB-DBC), der verwendeten Ansatzordnung der Elemente (linear, quadratisch) und der Länge und Breite des RVE, die korrekte Struktur von $\boldsymbol{D}_{\mathrm{P}}$ nach (8.9) mit den korrekten Nulleinträgen für die Koppelterme. Bei Verwendung von quadratischen Elementen entsprechen in beiden Modellierungsvarianten NB+Skal und NB+DBC alle Größen $D_{ij} \neq 0$, außer den Schubsteifigkeiten, bereits in der kleinsten Diskretisierung bis zur Ausgabegenauigkeit exakt den Referenzwerten.
Die Schubsteifigkeiten konvergieren in der Variante NB+Skal unabhängig von Länge und Breite des RVE mit zunehmender Diskretisierungsdichte gegen den Referenzwert. In der Variante NB+DBC müssen zusätzlich ausreichende RVE-Abmessungen gewählt werden, um den Einfluss der Randeffekte zu minimieren. Dabei sind etwas größere RVE-Abmessungen notwendig als beim Balken, da nun doppelt so viele Ränder des RVE mit Randbedingungen belegt sind, wodurch die Randeffekte etwas größer werden. Details sind in den Abbildungen 8.26 und 8.27 dargestellt.

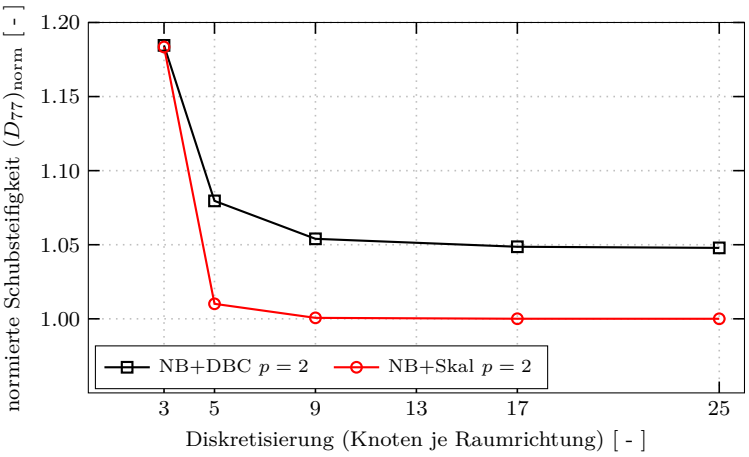

Abbildung 8.26: Konvergenzverhalten der homogenisierten Schubsteifigkeit für ein Platten-RVE der Länge, Breite und Höhe $L_{\text{RVE}} = B_{\text{RVE}} = h = 1\,\text{cm}$ und homogenem Material

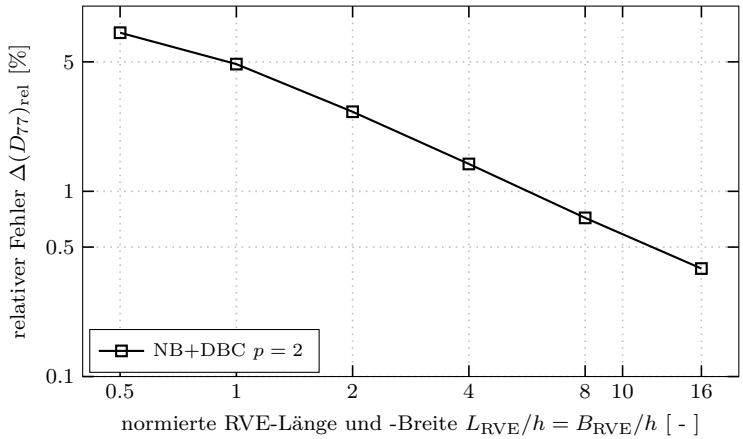

Abbildung 8.27: Konvergenzverhalten der homogenisierten Schubsteifigkeit für ein Platten-RVE mit homogenem Material, der Höhe $h = 1\,\text{cm}$ und variabler Länge und Breite; Diskretisierung mit einer Elementkantenlänge von 0.125 cm in alle Richtungen

Ergebnisse homogene Platte

$p = 2$	NB+DBC	NB+Skal
$D_{ij} = 0$	exakt	exakt
$\boldsymbol{D}_{\mathrm{m}}$	exakt	exakt
$\boldsymbol{D}_{\mathrm{b}}$	exakt	exakt
$\boldsymbol{D}_{\mathrm{s}}$	Abb. 8.26 & 8.27	Abb. 8.26

Tabelle 8.10: Ergebnisse der Homogenisierung für die homogene Platte

8.4.2 Sandwich-Platte

Als nächstes wird die bereits in Abschnitt 8.3.2 untersuchte Struktur auf ein RVE für ein Plattentragwerk angewendet. Die Sandwich-Platte besteht wie beim Balken aus steifen Deckschichten und einem weichen Kern. Es werden die Geometrie- und Materialwerte aus Abschnitt 8.3.2 verwendet und erneut der Einfluss des Steifigkeitsverhältnisses α zwischen Deckschichten und Kern sowie des Kernanteils ρ_K auf die Einträge der homogenisierten Materialmatrix untersucht.
Durch den symmetrischen Aufbau der Platte bleibt die Struktur der Materialmatrix nach (8.9) erhalten. Als Referenzwerte für die Einträge der Materialmatrix ergeben sich entsprechend der klassischen Laminattheorie analog zu den entsprechenden Größen beim Balken:

$$
\begin{aligned}
D_{11} &= \frac{E_D}{1-\nu^2}\,(\alpha\, h_K + 2\, h_D) = D_{22}\,, \\
D_{12} &= \nu\, D_{11} = D_{21}\,, \\
D_{33} &= \frac{1-\nu}{2}\, D_{11}\,, \\
D_{44} &= \frac{E_D}{1-\nu^2}\left(\alpha \frac{h_K^3}{12} + 2\left[\frac{h_D^3}{12} + \left(\frac{h_K + h_D}{2}\right)^2 h_D\right]\right) = D_{55} \\
D_{45} &= \nu\, D_{44} = D_{54}\,, \\
D_{66} &= \frac{1-\nu}{2}\, D_{44}\,, \\
D_{77} &= \varkappa\, G_D\,(\alpha\, h_K + 2\, h_D) = D_{88}\,.
\end{aligned}
$$

Alle nicht angegebenen Einträge D_{ij} sind null. Der Schubkorrekturfaktor kann wie beim Balken mit (8.3) berechnet werden.
Die Ergebnisse für die Sandwich-Platte unterscheiden sich ebenfalls nicht wesentlich von denen beim Sandwich-Balken, es wird daher auf eine ausführliche Darstellung verzichtet.

Für die Modellierung NB+Skal zeigen sich bis zur Ausgabegenauigkeit exakte Werte für die Einträge $D_{11} = D_{22}$, $D_{12} = D_{21}$, D_{33}, D_{44}, $D_{45} = D_{54}$ und D_{66}.
Der Schubkorrekturfaktor wird zu den gleichen Werten berechnet wie schon beim Balken und weist entsprechend den gleichen Fehler gegenüber den Referenzwerten auf (Abbildung 8.17). Für die Modellierung NB+DBC steigt durch die benötigten RVE-Abmessungen und entsprechend feine Diskretisierung auch hier der Rechenaufwand unverhältnismäßig stark an, um brauchbare Ergebnisse zu erzielen. Daher wird eine solche Berechnung nicht näher betrachtet.

8.4.3 Platte mit Einschlüssen

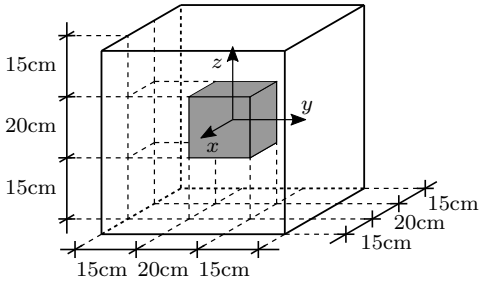

Abbildung 8.28: Geometrie des Platten-RVE mit würfelförmigem Einschluss

In diesem Abschnitt wird eine Platte betrachtet, die hauptsächlich aus einem linear elastischen Material mit $E = 21\,000\,\mathrm{kN/cm^2}$ und $\nu = 0.3$ besteht und regelmäßige würfelförmige Einschlüsse aus einem Material mit $E = 100\,\mathrm{kN/cm^2}$ und $\nu = 0.45$ besitzt.

Die Platte besitzt eine Dicke von $h = 50\,\mathrm{cm}$. Die würfelförmigen Einschlüsse besitzen eine Kantenlänge von $l_\mathrm{E} = 20\,\mathrm{cm}$ und sind in der Höhe mittig zentriert in der Platte eingebracht. Der Abstand in x- und y-Richtung zwischen zwei Einschlüssen beträgt 30 cm. Damit ergibt sich ein RVE, das genau einen Einschluss enthält, als Würfel mit einer Kantenlänge von 50 cm und dem würfelförmigen Einschluss mit Kantenlänge 20 cm in der Mitte (siehe Abbildung 8.28).

Das RVE kann wegen der Längsinhomogenität nur mit der Konfiguration NB+DBC modelliert werden. Zunächst wird eine Konvergenzstudie bezüglich der Diskretisierungsdichte durchgeführt, anschließend bezüglich der RVE-Länge. Bei letzterer wird das RVE stets in beide Richtungen um je eine Periode erweitert. Daraus ergibt sich

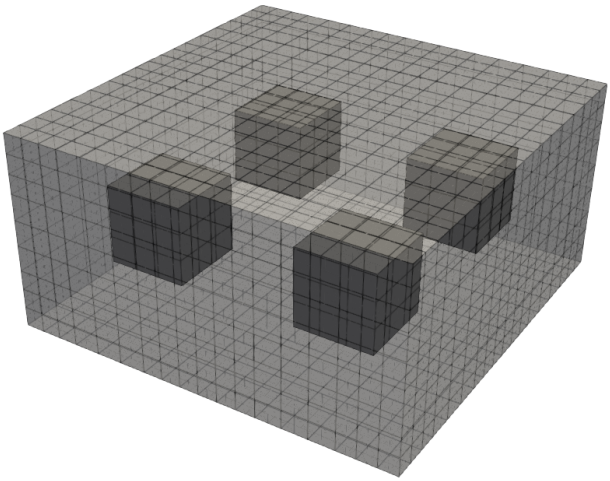

Abbildung 8.29: RVE für die Platte mit würfelförmigem Einschluss

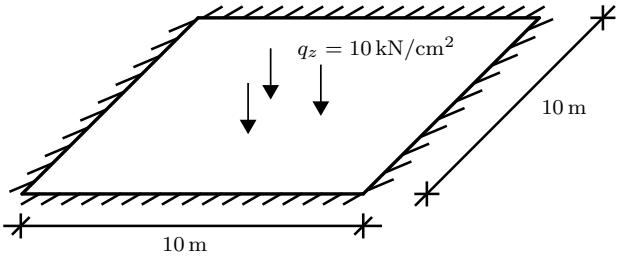

Abbildung 8.30: Allseitig eingespannte Platte mit gleichförmiger Flächenlast

letztlich bei einer Diskretisierung je Periode mit neun quadratischen Elementen je Raumrichtung und einer Abbildung von zwei Perioden je Raumrichtung ein Fehler von unter 1% zur nächsten Verdopplungsstufe. Dieses auskonvergierte und für die weitere Rechnung verwendete RVE ist in Abbildung 8.29 dargestellt.

Als Makroproblem wird eine allseitig eingespannte Platte untersucht. Dabei wird die Absenkung der Plattenmitte bei Belastung mit einer gleichförmigen Flächenlast $q_z = 10\,\mathrm{kN/cm^2}$ betrachtet (siehe Abbildung 8.30). Unter Ausnutzung der Symmetrie wird nur ein Viertel der Platte modelliert. Dieses wird mit 50 linearen, selektiv reduziert integrierten 4-Knoten-Plattenelementen (Abschnitt 4.4) je Richtung diskretisiert.

Wie zuvor beim Balken wird auch für die Platte zunächst eine homogene Vergleichsrechnung zwischen einem Referenzmodell mit quadratischen Volumenelementen und der FE²-Modellierung durchgeführt, um systematische Fehler auszuschließen. Die Vergleichsrechnung wird am gleichen Makroproblem der eingespannten Platte durchgeführt. Sie besitzt das gleiche Material aber keine Einschlüsse. Nach entsprechenden Konvergenzstudien wurde das Referenzmodell für die homogene Platte mit 1.16 Millionen Freiheitsgraden und das Referenzmodell für die Platte mit den Einschlüssen mit 5.19 Millionen Freiheitsgraden diskretisiert. Die Referenzmodelle wurden in Abaqus CAE 6.14 mit Elementen vom Typ 3D20 realisiert.

Für die homogene Platte zeigt sich, dass die Modellierung mit Plattenelementen eine um 0.46 % geringfügig größere Durchbiegung liefert als das Referenzmodell.
Der Vergleich der Rechnungen für die Platte mit den Einschlüssen zeigt eine um 0.27 % größere Absenkung der Plattenmitte im FE²-Modell gegenüber dem Referenzmodell. Der Effekt der Plattenschwächung durch die weichen Einschlüsse wird in der Mehrskalenmodellierung also mit 0.2 % kaum merklich unterschätzt gegenüber dem Referenzmodell (Tabelle 8.11).

Absenkung w

	homogen	Einschlüsse
Referenzmodell	54.95 cm	56.57 cm
Mehrskalenmodell	55.21 cm	56.72 cm
relative Abweichung	0.46 %	0.27 %

Tabelle 8.11: Vergleich der Absenkungen der Plattenmittelfläche im Referenz- und Mehrskalenmodell für die homogene Platte und die Platte mit den Einschlüssen

Kapitel 9

Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde ein Homogenisierungsverfahren vorgestellt, das für verschiedene makroskopische Strukturen wie Balken, Platten und 3D-Körper genutzt werden kann. Der wesentliche Teil ist dabei die Übertragung der Verzerrungen von der makroskopischen Ebene auf den 3D-Körper der mikroskopischen Ebene mit einer Nebenbedingung. Sie wird elementweise mit Hilfe von wenigen globalen Lagrangeparametern umgesetzt, sodass die Verformungen des 3D-Körpers auf der Mikroebene die Kinematik der Makrostruktur im integralen Mittel einhalten.

Der Fokus der Anwendung liegt dabei vor allem auf Balken- und Plattenstrukturen und insbesondere der verbesserten Berechnung von deren Schubsteifigkeiten. Denn diese lassen sich mit den etablierten Methoden nach Hill-Mandel nur unzureichend modellieren, da dort die Schubsteifigkeiten mit zunehmender RVE-Länge gegen null konvergieren, wie in [20] und [32] gezeigt wurde. In [32] wurde dabei kürzlich eine Möglichkeit zur Überwindung der Schwierigkeit vorgestellt. Sie erfordert jedoch zusätzliche Interface-Elemente im RVE und weiterhin spezielle Randbedingungen, sodass sowohl die Modellierung des RVE als auch die Implementierung der dort vorgestellten Methode vergleichsweise kompliziert und umfangreich sind.

Die hier vorgestellte Methode zur Homogenisierung stellt dagegen a priori keine Anforderungen an die Randbedingungen auf der Mikroebene. Dadurch ist es auch möglich, auf der Mikroebene vollständig auf Randbedingungen zu verzichten, welche über die Verhinderung der Starrkörpermoden hinausgehen. Bei der Implementierung erfordert die Methode lediglich die Umsetzung der Nebenbedingung auf Elementebene. Durch die globalen Lagrangeparameter wird die Anzahl der Gesamtfreiheitsgrade und damit der Rechenaufwand je RVE auch nicht merklich erhöht.

Für homogene Balken und Platten liefert das Verfahren ohne weiteres Zutun die

korrekte Struktur der Materialmatrix und korrekte Werte für alle ihre Einträge. Für inhomogene Strukturen lässt sich je nach Art der Inhomogenität die Nebenbedingung geringfügig verändern, sodass weiterhin nur minimale Randbedingungen zur Verhinderung der Starrkörperbewegungen notwendig sind. Für Inhomogenitäten in Längsrichtung, wie sie in den Abschnitten 8.3.3 und 8.4.3 besprochen wurden, können dagegen die sehr einfach zu implementierenden und aufzubringenden linearen Verschiebungsrandbedingungen genutzt werden.

Für die untersuchten inhomogenen Strukturen zeigt die Methode gute Ergebnisse. Die relativen Fehler gegenüber den Referenzwerten liegen überwiegend im unteren einstelligen Prozentbereich. Dabei ist bei der Modellierung lediglich auf die korrekte Auswahl der Methode zur Einhaltung von physikalisch sinnvollen Randdeformationen und eine ausreichend feine Diskretisierung sowie bei den linearen Verschiebungsrandbedingungen auf eine ausreichende RVE-Länge zur Minimierung der Randeffekte zu achten. Damit sind die Ergebnisse zwar etwas schlechter als diejenigen der Methode in [32], aber durchaus gut brauchbar. Die Implementierung und Anwendung des hier vorgestellten Verfahrens ist hingegen wesentlich einfacher.

Die vorliegende Arbeit ist als ein Grundlagenbeitrag zur Behebung der Abhängigkeit der Schubsteifigkeiten von der RVE-Länge in der Mehrskalenmodellierung von Balken- und Plattenstrukturen zu verstehen. Sie liefert darüber hinaus durch die weniger komplexe Implementierung und Modellerstellung einen wesentlichen Schritt zu einer leichteren und damit breiteren Anwendung der Mehrskalenmodellierung.
Die vorgestellte Theorie beschränkt sich auf kleine Deformationen und eine lineare Geometrie sowie ausschließlich linear elastisches Materialverhalten. Für eine Weiterentwicklung empfiehlt es sich, durch eine Umsetzung von geometrischer Nichtlinearität und nichtlinearem Materialverhalten, wie z.B. allgemeiner Hyperelastizität oder Plastizität, die Einsatzmöglichkeiten der Methode zu erweitern.
Für Balkenstrukturen wurden aufgrund des Ansatzes für die Schubverwölbungen bzw. den Schubspannungsverlauf im Querschnitt nur doppelsymmetrische Vollquerschnitte betrachtet. Auch hier besteht Potential zur Erweiterung auf allgemeinere Querschnittsformen. Eine Erweiterung zur Berücksichtigung von Torsionsverwölbungen würde zusätzlich bessere Ergebnisse für die Torsionssteifigkeiten und die Betrachtung komplexerer Querschnittsgeometrien ermöglichen. Weiterhin wurden keine periodischen Randbedingungen umgesetzt. Sie könnten jedoch zu weniger oder keinen Randeffekten gegenüber den linearen Verschiebungsrandbedingungen führen und somit eine wesentliche Verbesserung erzielen.
Auch eine Anwendung der Methode auf allgemeine Schalenstrukturen sollte sehr gut möglich sein.

Anhang A

Homogenisierung auf Basis der Irving-Kirkwood-Theorie

In diesem Anhang werden die in Kapitel 5 vorgestellten Homogenisierungsbeziehungen genauer betrachtet und begründet. Die Darstellungen fassen dabei die wesentlichen Inhalte aus [35] und [37] zusammen und sind ergänzt um einige Zwischenschritte für eine bessere Lesbarkeit und Verständlichkeit.

Wenn nicht anders angegeben gilt für diesen Anhang die Einstein'sche Summenkonvention - über doppelt auftauchende Indizes in einem Produkt wird summiert. Weiterhin wird der Nabla-Operator ∇ mit Index x oder y verwendet. Er bezeichnet dabei in den folgenden Schreibweisen verschiedene Differentialoperatoren und führt so zu einer übersichtlicheren Notation. In der folgenden Übersicht bezeichnet a ein Skalar, $\boldsymbol{a}$ einen Vektor und $\boldsymbol{A}$ einen Tensor zweiter Stufe.

$$\begin{aligned}
\nabla_x\, a &:= \mathrm{grad}_x(a) = \frac{\partial a}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i \\
\nabla_x \cdot \boldsymbol{a} &:= \mathrm{div}_x(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \\
\boldsymbol{a} \otimes \nabla_x &:= \mathrm{grad}_x(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \\
\nabla_x \cdot \boldsymbol{A} &:= \mathrm{div}_x(\boldsymbol{A}) = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_i
\end{aligned}$$

Es bezeichnet weiterhin ein Punkt über einer Größe dessen zeitliche Ableitung:

$$\dot{a} = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\,.$$

A.1 Grundlegendes

Die allgemeinen Impuls- und Massenbilanzen (5.1)-(5.4) für die Mikro- und Makroebene können in lokaler Form dargestellt werden:
Massenbilanzen:

$$\dot{\rho}^{\mathrm{M}} + \rho^{\mathrm{M}} \nabla_y \cdot (\boldsymbol{v}^{\mathrm{M}}) = 0\,, \tag{A.1}$$

$$\dot{\rho}^{\mathrm{m}} + \rho^{\mathrm{m}} \nabla_x \cdot (\boldsymbol{v}^{\mathrm{m}}) = 0\,, \tag{A.2}$$

Impulsbilanzen:

$$\rho^{\mathrm{M}} \dot{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{M}} = \nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{M}} + \rho^{\mathrm{M}} \bar{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{M}}\,, \tag{A.3}$$

$$\rho^{\mathrm{m}} \dot{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{m}} = \nabla_x \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{m}} + \rho^{\mathrm{m}} \bar{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{m}}\,. \tag{A.4}$$

Dabei wurde der spezifische Volumenkraftvektor $\bar{\boldsymbol{b}}$ mit $\boldsymbol{b} = \rho\,\bar{\boldsymbol{b}}$ eingeführt.

Die Gleichungen gelten für beide Skalen unabhängig voneinander. Zunächst sind nur die Größen der Mikroskala bekannt. Im Folgenden wird ein Zusammenhang zwischen den beiden Skalen hergestellt. Die Massendichte ρ^{M} und der Impuls $\rho^{\mathrm{M}}\boldsymbol{v}^{\mathrm{M}}$ der Makroskala werden durch eine gewichtete integrale Mittelung der entsprechenden Größen der Mikroskala gewonnen:

$$\rho^{\mathrm{M}}(\boldsymbol{y}, t) = \int_{\Omega} \rho^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x}, t)\, g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\, \mathrm{d}V^{\mathrm{m}}, \tag{A.5}$$

$$\rho^{\mathrm{M}}(\boldsymbol{y}, t)\, \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}}(\boldsymbol{y}, t) = \int_{\Omega} \rho^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x}, t)\, \boldsymbol{v}^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x}, t)\, g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\, \mathrm{d}V^{\mathrm{m}}. \tag{A.6}$$

Die Gewichtungsfunktion $g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ erfüllt die Eigenschaften

$$(i) \qquad \int_{\Omega} g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\, \mathrm{d}V^{\mathrm{m}} = 1, \tag{A.7}$$

$$(ii) \qquad l_c \ll \text{supp } g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \ll \Omega, \tag{A.8}$$

$$(iii) \qquad g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \tag{A.9}$$

(iv) $g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ maximal, wenn $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$,

(v) $g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ invariant unter Starrkörperbewegungen .

Bedingung (i) ist eine Normalisierungsbedingung und stellt die Konsistenz von Masse und Impuls zwischen den beiden Skalen sicher.
Die Ungleichung (ii) setzt die Anforderungen (5.9) an die Abmessungen des RVE bzw. des Gebiets der Mikroskala um, über das integriert wird, während Bedingung (iii) sicherstellt, dass nur interne Größen des Körpers zur Homogenisierung verwendet werden. Dabei ist in (ii) l_c die charakteristische Länge einer Inhomogenität und supp$(\cdot)$ der Träger einer Funktion.
(iv) stellt den lokalen Charakter der makroskopischen Eigenschaften sicher, sodass die Eigenschaften der Makroebene im Punkt $\boldsymbol{y}$ auch aus den Eigenschaften des Mikrosystems in einer Umgebung des Punktes $\boldsymbol{y}$ hervorgehen.
Eine nähere Betrachtung (siehe [35, 37]) der Forderung in (v) liefert die Beziehung

$$\nabla_x \, g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}} g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = -\nabla_y \, g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \, . \tag{A.10}$$

In den folgenden Abschnitten wird gezeigt, dass die so gewählte Homogenisierung die beiden Skalen konsistent verbindet.

A.2 Konsistenz der Masse-Homogenisierung

Zuerst wird gezeigt, dass die vorgeschlagene Homogenisierung der Massendichte (A.5) durch die Voraussetzungen an $g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ mit den Bilanzgleichungen konsistent ist. Dazu wird aus der Homogenisierungsbeziehung (A.5) durch Ausnutzung der Eigenschaften von $g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ und der Massenbilanz der Mikroebene (A.2) die lokale Form der Massenbilanz der Makroebene (A.1) hergeleitet. Damit ist gezeigt, dass die Homogenisierungsbeziehung (A.5) eine konsistente Theorie und makroskopische Größen liefert, die untereinander wieder die Massenbilanz erfüllen.

Ausgehend von (A.5) folgt durch Bildung der Zeitableitung und Anwendung des Reynolds'schen Transporttheorems:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}^{\mathrm{M}}(\boldsymbol{y}, t) =& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\Omega} \rho^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x}, t) \, g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}V^{\mathrm{m}} \\ =& \int_{\Omega} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Big[\rho^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x}, t) \, g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \Big] + \rho^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x}, t) \, g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \nabla_x \cdot \boldsymbol{v}^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}V^{\mathrm{m}}. \end{aligned} \tag{A.11}$$

Die Anwendung von Produkt- und Kettenregel liefert:

$$\begin{aligned}\dot{\rho}^{\mathrm{M}}(\boldsymbol{y},t) = &\int_{\Omega}\Big[\dot{\rho}^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x},t)\,g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) + \rho^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x},t)\dot{g}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) \\ &\qquad + \rho^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x},t)\,g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\nabla_x\cdot\boldsymbol{v}^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x})\Big]\,\mathrm{d}V^{\mathrm{m}} \\ = &\int_{\Omega}\Big[\dot{\rho}^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x},t)\,g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) + \rho^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x},t)\,\big(\nabla_x\,g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x}) \\ &\qquad +\nabla_y\,g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}^{\mathrm{M}}(\boldsymbol{y})\big) + \rho^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x},t)\,g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\nabla_x\cdot\boldsymbol{v}^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x})\Big]\,\mathrm{d}V^{\mathrm{m}}. \quad \text{(A.12)}\end{aligned}$$

Mit der Massenbilanz für die Mikroebene (A.2) ergibt die Summe aus dem ersten und letzten Term im Integral von (A.12) null und aus der Invarianz von $g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ gegenüber Starrkörperbewegungen folgt mit (A.10):

$$\dot{\rho}^{\mathrm{M}}(\boldsymbol{y},t) = \int_{\Omega} -\rho^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x},t)\nabla_y\,g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x}) + \rho^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x},t)\nabla_y\,g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}^{\mathrm{M}}(\boldsymbol{y})\;\mathrm{d}V^{\mathrm{m}}\,. \quad \text{(A.13)}$$

Das Integrationsgebiet sowie die Massendichte $\rho^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x},t)$ und Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x})$ der Mikroebene hängen nicht von $\boldsymbol{y}$ ab, sodass folgt:

$$\begin{aligned}\dot{\rho}^{\mathrm{M}}(\boldsymbol{y},t) = &-\nabla_y\cdot\left[\int_{\Omega}\rho^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x},t)\,g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{v}^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x})\;\mathrm{d}V^{\mathrm{m}}\right] \\ &+\nabla_y\left[\int_{\Omega}\rho^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x},t)\,g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\;\mathrm{d}V^{\mathrm{m}}\right]\cdot\boldsymbol{v}^{\mathrm{M}}(\boldsymbol{y})\,. \quad \text{(A.14)}\end{aligned}$$

Die Terme in den eckigen Klammern stellen entsprechend der Homogenisierungsbeziehungen (A.5) und (A.6) die makroskopische Massendichte und den makroskopischen Impuls dar. Damit erhält man schließlich die lokale Form der Massenbilanz

in der Makroskala (A.1):

$$\begin{aligned}\dot{\rho}^{\mathrm{M}}(\boldsymbol{y},t) =& -\nabla_y \cdot \left[\rho^{\mathrm{M}}(\boldsymbol{y},t)\,\boldsymbol{v}^{\mathrm{M}}(\boldsymbol{y})\right] + \nabla_y \left[\rho^{\mathrm{M}}(\boldsymbol{y},t)\right] \cdot \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}}(\boldsymbol{y}) \\ =& -\nabla_y \left[\rho^{\mathrm{M}}(\boldsymbol{y},t)\right] \cdot \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}}(\boldsymbol{y}) - \rho^{\mathrm{M}}(\boldsymbol{y},t) \left[\nabla_y \cdot \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}}(\boldsymbol{y})\right] \\ &+ \nabla_y \left[\rho^{\mathrm{M}}(\boldsymbol{y},t)\right] \cdot \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}}(\boldsymbol{y}) \\ \dot{\rho}^{\mathrm{M}}(\boldsymbol{y},t) =& -\rho^{\mathrm{M}}(\boldsymbol{y},t) \nabla_y \cdot \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}}(\boldsymbol{y})\,.\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass die gewählte Homogenisierung eine konsistente Massendichte für die Makroebene liefert.

A.3 Konsistenz der Impuls-Homogenisierung

Für die zweite Homogenisierungsbeziehung (A.6) lässt sich die Konsistenz auf analoge Weise durch die Ausnutzung von Reynolds-Transport-Theorem, Gauß'schem Integralsatz, den Homogenisierungsbeziehungen selbst sowie der lokalen Bilanzgleichungen (A.1) und (A.2) zeigen.

Dazu wird die Homogenisierungsbeziehung für den Impuls (A.6) nach der Zeit abgeleitet und das Reynolds'sche Transporttheorem angewendet. Die expliziten Abhängigkeiten werden für eine bessere Übersichtlichkeit nicht mehr mitgeschrieben:

$$\begin{aligned}\overline{\dot{\rho^{\mathrm{M}}\boldsymbol{v}^{\mathrm{M}}}} =& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\Omega} \rho^{\mathrm{m}} \boldsymbol{v}^{\mathrm{m}} g \; \mathrm{d}V^{\mathrm{m}} \\ =& \int_{\Omega} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\rho^{\mathrm{m}} \boldsymbol{v}^{\mathrm{m}} g\right) + \left(\rho^{\mathrm{m}} \boldsymbol{v}^{\mathrm{m}} g\right) \nabla_x \cdot \boldsymbol{v}^{\mathrm{m}} \; \mathrm{d}V^{\mathrm{m}} \\ \overline{\dot{\rho^{\mathrm{M}}\boldsymbol{v}^{\mathrm{M}}}} =& \int_{\Omega} \dot{\rho}^{\mathrm{m}} \boldsymbol{v}^{\mathrm{m}} g + \rho^{\mathrm{m}} \dot{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{m}} g + \rho^{\mathrm{m}} \boldsymbol{v}^{\mathrm{m}} \left(\nabla_x g \cdot \boldsymbol{v}^{\mathrm{m}} + \nabla_y g \cdot \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}}\right) \\ &+ \left(\rho^{\mathrm{m}} \boldsymbol{v}^{\mathrm{m}} g\right) \nabla_x \cdot \boldsymbol{v}^{\mathrm{m}} \; \mathrm{d}V^{\mathrm{m}}. \end{aligned} \tag{A.15}$$

Aufgrund der Massenbilanz im Mikrosystem (A.2) addieren sich der erste und der letzte Term unter dem Integral in (A.15) zu null. Der zweite Term im Integral wird

anschließend mit Hilfe der Impulsbilanz im Mikrosystem (A.4) ersetzt:

$$\overline{\dot{\rho^{\mathrm{M}}}\boldsymbol{v}^{\mathrm{M}}} = \int_{\Omega} \left(\nabla_x \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{m}} + \rho^{\mathrm{m}}\bar{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{m}}\right) g + \left(\nabla_x\, g \cdot \boldsymbol{v}^{\mathrm{m}} + \nabla_y\, g \cdot \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}}\right) \rho^{\mathrm{m}}\boldsymbol{v}^{\mathrm{m}}\ \mathrm{d}V^{\mathrm{m}}. \quad \text{(A.16)}$$

Mit der Definition des dyadischen Produkts für drei Vektoren $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$

$$(\boldsymbol{a}_1 \otimes \boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{a}_3 := (\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_3)\boldsymbol{a}_1 \quad \text{(A.17)}$$

und Gleichung (A.10) (Invarianz von g unter Starrkörperbewegungen) lässt sich nun schreiben:

$$\begin{aligned}\overline{\dot{\rho^{\mathrm{M}}}\boldsymbol{v}^{\mathrm{M}}} = \int_{\Omega} \Big\{ &\left(\nabla_x \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{m}} + \rho^{\mathrm{m}}\bar{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{m}}\right) g \\ &+ \left[(\boldsymbol{v}^{\mathrm{m}} \otimes \boldsymbol{v}^{\mathrm{m}})(-\nabla_y\, g) + (\boldsymbol{v}^{\mathrm{m}} \otimes \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}})\nabla_y\, g\right] \rho^{\mathrm{m}} \Big\}\ \mathrm{d}V^{\mathrm{m}}. \end{aligned} \quad \text{(A.18)}$$

Der erste Term unter dem Integral in (A.18) wird durch die Beziehung

$$\int_{\Omega} (\nabla_x \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{m}})\, g\ \mathrm{d}V^{\mathrm{m}} = \nabla_y \cdot \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{m}} g\ \mathrm{d}V^{\mathrm{m}} \quad \text{(A.19)}$$

ersetzt. Dies ergibt sich durch Anwendung des Gauß'schen Integralsatzes und anschließender Ausnutzung der Eigenschaften von g ($g = 0$ auf $\partial\Omega$ und (A.10) $\nabla_x g = -\nabla_y\, g$):

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} (\nabla_x \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{m}})\, g\ \mathrm{d}V^{\mathrm{m}} &= \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{m}}\, \boldsymbol{n})\ g\ \mathrm{d}A^{\mathrm{m}} - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{m}}\, (\nabla_x\, g)\ \mathrm{d}V^{\mathrm{m}} \\ &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{m}}\, (\nabla_y\, g)\ \mathrm{d}V^{\mathrm{m}} \\ &= \nabla_y \cdot \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{m}} g\ \mathrm{d}V^{\mathrm{m}}\,. \end{aligned}$$

Somit folgt aus (A.18) mit (A.19):

$$\begin{aligned}
\overline{\dot{\rho^{\mathrm{M}}}\boldsymbol{v}^{\mathrm{M}}} =& \nabla_y \cdot \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{m}}\, g \,\mathrm{d}V^{\mathrm{m}} + \int_\Omega \rho^{\mathrm{m}}\, \bar{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{m}}\, g \,\mathrm{d}V^{\mathrm{m}} \\
&+ \int_\Omega \rho^{\mathrm{m}} \left[(\boldsymbol{v}^{\mathrm{m}} \otimes \boldsymbol{v}^{\mathrm{m}})(-\nabla_y\, g) + (\boldsymbol{v}^{\mathrm{m}} \otimes \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}}) \nabla_y\, g \right] \mathrm{d}V^{\mathrm{m}} \\
\overline{\dot{\rho^{\mathrm{M}}}\boldsymbol{v}^{\mathrm{M}}} =& \nabla_y \cdot \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{m}}\, g \,\mathrm{d}V^{\mathrm{m}} + \int_\Omega \rho^{\mathrm{m}}\, \bar{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{m}}\, g \,\mathrm{d}V^{\mathrm{m}} \\
&- \nabla_y \cdot \int_\Omega \rho^{\mathrm{m}}\, g\, (\boldsymbol{v}^{\mathrm{m}} \otimes \boldsymbol{v}^{\mathrm{m}}) \,\mathrm{d}V^{\mathrm{m}} + \int_\Omega \rho^{\mathrm{m}} \left(\boldsymbol{v}^{\mathrm{m}} \otimes \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}} \right) \nabla_y\, g \,\mathrm{d}V^{\mathrm{m}}. \quad \text{(A.20)}
\end{aligned}$$

Für den dritten Term der rechten Seite in (A.20) wird das Integral näher betrachtet:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \rho^{\mathrm{m}}\, g\, (\boldsymbol{v}^{\mathrm{m}} \otimes \boldsymbol{v}^{\mathrm{m}}) \,\mathrm{d}V^{\mathrm{m}} &= \int_\Omega \rho^{\mathrm{m}}\, g \left[(\boldsymbol{v}^{\mathrm{m}} - \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}} + \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}}) \otimes (\boldsymbol{v}^{\mathrm{m}} - \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}} + \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}}) \right] \mathrm{d}V^{\mathrm{m}} \\
&= \int_\Omega \rho^{\mathrm{m}} g \left[(\boldsymbol{v}^{\mathrm{m}} - \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}}) \otimes (\boldsymbol{v}^{\mathrm{m}} - \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}} + \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}}) \right] \mathrm{d}V^{\mathrm{m}} \\
&\quad + \int_\Omega \rho^{\mathrm{m}} g \left[\boldsymbol{v}^{\mathrm{M}} \otimes (\boldsymbol{v}^{\mathrm{m}} - \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}} + \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}}) \right] \mathrm{d}V^{\mathrm{m}} \\
&= \int_\Omega \rho^{\mathrm{m}} g \left[(\boldsymbol{v}^{\mathrm{m}} - \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}}) \otimes (\boldsymbol{v}^{\mathrm{m}} - \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}}) \right] \mathrm{d}V^{\mathrm{m}} \\
&\quad + \int_\Omega \rho^{\mathrm{m}} g \left[(\boldsymbol{v}^{\mathrm{m}} - \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}}) \otimes \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}} + \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}} \otimes \boldsymbol{v}^{\mathrm{m}} \right] \mathrm{d}V^{\mathrm{m}} \\
\int_\Omega \rho^{\mathrm{m}}\, g\, (\boldsymbol{v}^{\mathrm{m}} \otimes \boldsymbol{v}^{\mathrm{m}}) \,\mathrm{d}V^{\mathrm{m}} &= \int_\Omega \rho^{\mathrm{m}} g \left[(\boldsymbol{v}^{\mathrm{m}} - \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}}) \otimes (\boldsymbol{v}^{\mathrm{m}} - \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}}) \right] \mathrm{d}V^{\mathrm{m}} \\
&\quad + \int_\Omega \rho^{\mathrm{m}} g \left[\boldsymbol{v}^{\mathrm{m}} \otimes \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}} - \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}} \otimes \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}} + \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}} \otimes \boldsymbol{v}^{\mathrm{m}} \right] \mathrm{d}V^{\mathrm{m}}.
\end{aligned} \quad \text{(A.21)}$$

Für den letzten Teil in (A.21) lässt sich mit Hilfe der Homogenisierungsbeziehungen zeigen, dass

$$\begin{aligned}\int_\Omega \rho^\mathrm{m} g \left(-\boldsymbol{v}^\mathrm{M} \otimes \boldsymbol{v}^\mathrm{M} + \boldsymbol{v}^\mathrm{M} \otimes \boldsymbol{v}^\mathrm{m}\right)\, \mathrm{d}V^\mathrm{m} &= -\left[\int_\Omega \rho^\mathrm{m} g\, \mathrm{d}V^\mathrm{m}\right] \boldsymbol{v}^\mathrm{M} \otimes \boldsymbol{v}^\mathrm{M} \\ &\quad + \boldsymbol{v}^\mathrm{M} \otimes \left[\int_\Omega \rho^\mathrm{m} g\, \boldsymbol{v}^\mathrm{m}\, \mathrm{d}V^\mathrm{m}\right] \\ &= -\rho^\mathrm{M} \boldsymbol{v}^\mathrm{M} \otimes \boldsymbol{v}^\mathrm{M} + \boldsymbol{v}^\mathrm{M} \otimes \left[\rho^\mathrm{M} \boldsymbol{v}^\mathrm{M}\right] \\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

gilt und sich (A.21) somit zu

$$\begin{aligned}\int_\Omega \rho^\mathrm{m}\, g\, (\boldsymbol{v}^\mathrm{m} \otimes \boldsymbol{v}^\mathrm{m})\, \mathrm{d}V^\mathrm{m} = \int_\Omega \rho^\mathrm{m} g \left((\boldsymbol{v}^\mathrm{m} - \boldsymbol{v}^\mathrm{M}) \otimes (\boldsymbol{v}^\mathrm{m} - \boldsymbol{v}^\mathrm{M})\right)\, \mathrm{d}V^\mathrm{m} \\ + \int_\Omega \rho^\mathrm{m} g \left(\boldsymbol{v}^\mathrm{m} \otimes \boldsymbol{v}^\mathrm{M}\right)\, \mathrm{d}V^\mathrm{m}\end{aligned} \tag{A.22}$$

vereinfacht.
Einsetzen von (A.22) in (A.20) liefert:

$$\begin{aligned}\overline{\dot{\rho^\mathrm{M}} \boldsymbol{v}^\mathrm{M}} = &\nabla_y \cdot \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}^\mathrm{m} g\, \mathrm{d}V^\mathrm{m} + \int_\Omega \rho^\mathrm{m}\, \bar{\boldsymbol{b}}^\mathrm{m}\, g\, \mathrm{d}V^\mathrm{m} \\ &- \nabla_y \cdot \int_\Omega \rho^\mathrm{m}\, g \left(\boldsymbol{v}^\mathrm{m} - \boldsymbol{v}^\mathrm{M}\right) \otimes \left(\boldsymbol{v}^\mathrm{m} - \boldsymbol{v}^\mathrm{M}\right)\, \mathrm{d}V^\mathrm{m} \\ &- \nabla_y \cdot \int_\Omega \rho^\mathrm{m}\, g \left(\boldsymbol{v}^\mathrm{m} \otimes \boldsymbol{v}^\mathrm{M}\right)\, \mathrm{d}V^\mathrm{m} + \int_\Omega \rho^\mathrm{m} \left(\boldsymbol{v}^\mathrm{m} \otimes \boldsymbol{v}^\mathrm{M}\right) \nabla_y\, g\, \mathrm{d}V^\mathrm{m}.\end{aligned} \tag{A.23}$$

Eine nähere Betrachtung der beiden letzten Integrale in (A.23) liefert:

$$
\begin{aligned}
-\nabla_y \cdot \int_\Omega \rho^{\mathrm{m}}\, g\, (\boldsymbol{v}^{\mathrm{m}} \otimes \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}})\, \mathrm{d}V^{\mathrm{m}} &+ \int_\Omega \rho^{\mathrm{m}} (\boldsymbol{v}^{\mathrm{m}} \otimes \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}}) \nabla_y g\, \mathrm{d}V^{\mathrm{m}} \\
&= -\nabla_y \cdot \left[\left(\rho^{\mathrm{M}} \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}} \right) \otimes \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}} \right] + \int_\Omega \rho^{\mathrm{m}} \left(\nabla_y g \cdot \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}} \right) \boldsymbol{v}^{\mathrm{m}}\, \mathrm{d}V^{\mathrm{m}} && \text{(A.24)} \\
&= -\nabla_y \cdot \left[\left(\rho^{\mathrm{M}} \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}} \right) \otimes \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}} \right] + \int_\Omega \left[(\rho^{\mathrm{m}} \boldsymbol{v}^{\mathrm{m}} g) \otimes \nabla_y \right] \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}}\, \mathrm{d}V^{\mathrm{m}} && \text{(A.25)} \\
&= -\nabla_y \cdot \left[\left(\rho^{\mathrm{M}} \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}} \right) \otimes \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}} \right] + \left[\int_\Omega \rho^{\mathrm{m}} \boldsymbol{v}^{\mathrm{m}} g\, \mathrm{d}V^{\mathrm{m}} \otimes \nabla_y \right] \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}} && \text{(A.26)} \\
&= -\nabla_y \cdot \left[\left(\rho^{\mathrm{M}} \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}} \right) \otimes \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}} \right] + \left[\left(\rho^{\mathrm{M}} \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}} \right) \otimes \nabla_y \right] \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}} && \text{(A.27)} \\
&= -\left[(\rho^{\mathrm{M}} \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}}) \otimes \nabla_y \right] \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}} - \rho^{\mathrm{M}} \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}} \left(\nabla_y \cdot \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}} \right) + \left[\left(\rho^{\mathrm{M}} \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}} \right) \otimes \nabla_y \right] \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}} && \text{(A.28)} \\
&= -\rho^{\mathrm{M}} \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}} \left(\nabla_y \cdot \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}} \right) && \text{(A.29)}
\end{aligned}
$$

Die Überführung des jeweils zweiten Terms von (A.24) nach (A.25) erfolgt durch Aufschreiben des Terms in Indexnotation bezüglich einer kartesischen Basis sowie Umstellen und Zusammenfassen der einzelnen Faktoren. Dies ist hier nicht näher ausgeführt.
Die restlichen Schritte ergeben sich durch Ausnutzen der Homogenisierungsbeziehungen und der Produktregel für Divergenzen.

Damit folgt für (A.23) durch Einsetzen von (A.29):

$$\begin{aligned}
\overline{\dot{\rho^{\mathrm{M}}\boldsymbol{v}^{\mathrm{M}}}} =& \nabla_y \cdot \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{m}} g \, \mathrm{d}V^{\mathrm{m}} + \int_{\Omega} \rho^{\mathrm{m}} \bar{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{m}} \, g \, \mathrm{d}V^{\mathrm{m}} \\
& - \nabla_y \cdot \int_{\Omega} \rho^{\mathrm{m}} \, g \left(\boldsymbol{v}^{\mathrm{m}} - \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}}\right) \otimes \left(\boldsymbol{v}^{\mathrm{m}} - \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}}\right) \, \mathrm{d}V^{\mathrm{m}} - \rho^{\mathrm{M}} \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}} \left(\nabla_y \cdot \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}}\right) \\
\overline{\dot{\rho^{\mathrm{M}}\boldsymbol{v}^{\mathrm{M}}}} =& \nabla_y \cdot \int_{\Omega} \left[\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{m}} - \rho^{\mathrm{m}} \left(\boldsymbol{v}^{\mathrm{m}} - \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}}\right) \otimes \left(\boldsymbol{v}^{\mathrm{m}} - \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}}\right)\right] g \, \mathrm{d}V^{\mathrm{m}} \\
& + \int_{\Omega} \rho^{\mathrm{m}} \, \bar{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{m}} \, g \, \mathrm{d}V^{\mathrm{m}} - \rho^{\mathrm{M}} \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}} \left(\nabla_y \cdot \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}}\right) . \qquad \text{(A.30)}
\end{aligned}$$

Definiert man nun mit

$$\rho^{\mathrm{M}} \bar{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{M}} := \int_{\Omega} \rho^{\mathrm{m}} \bar{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{m}} g \, \mathrm{d}V^{\mathrm{m}} , \qquad \text{(A.31)}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{M}} := \int_{\Omega} \left[\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{m}} - \rho^{\mathrm{m}} (\boldsymbol{v}^{\mathrm{m}} - \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}}) \otimes (\boldsymbol{v}^{\mathrm{m}} - \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}})\right] g \, \mathrm{d}V^{\mathrm{m}} \qquad \text{(A.32)}$$

passende Homogenisierungsbeziehungen für den makroskopischen Volumenkraftvektor und Spannungstensor, folgt durch Anwenden der Produktregel auf die linke Seite der Gleichung (A.30):

$$\begin{aligned}
\overline{\dot{\rho^{\mathrm{M}}\boldsymbol{v}^{\mathrm{M}}}} =& \nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{M}} + \rho^{\mathrm{M}} \bar{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{M}} - \rho^{\mathrm{M}} \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}} \left(\nabla_y \cdot \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}}\right) \\
\rho^{\mathrm{M}} \dot{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{M}} =& \nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{M}} + \rho^{\mathrm{M}} \bar{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{M}} - \rho^{\mathrm{M}} \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}} \left(\nabla_y \cdot \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}}\right) - \dot{\rho}^{\mathrm{M}} \boldsymbol{v}^{\mathrm{M}} . \qquad \text{(A.33)}
\end{aligned}$$

Die Summe der letzten beiden Terme der rechten Seite in (A.33) ergibt entsprechend der makroskopischen Massenbilanz (A.1) null und es verbleibt die makroskopische Impulsbilanz:

$$\rho^{\mathrm{M}} \dot{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{M}} = \nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{M}} + \rho^{\mathrm{M}} \bar{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{M}} .$$

Damit ist gezeigt, dass die Homogenisierungsbeziehungen konsistent mit den Bilanzgleichungen sind. Zusätzlich wurden mit (A.31) und (A.32) allgemeine Homogenisierungsbeziehungen für den Volumenkraftvektor und den Spannungstensor gefunden.

Die Gewichtungsfunktion g wird für alle weiteren Betrachtungen auf den Kehrwert des Mikrovolumens innerhalb von $\mathcal{P}$ und null außerhalb festgelegt:

$$g = \begin{cases} \dfrac{1}{v^{\mathrm{m}}} & \text{in } \mathcal{P}\,, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases} \tag{A.34}$$

Somit ergeben sich die in Kapitel 5 dargestellten Homogenisierungsbeziehungen. Das Gebiet $\mathcal{P}$ wird entsprechend der Anforderungen an das RVE (Abschnitt 5.2) gewählt.

Nomenklatur

Abkürzungen

FE	Finite-Elemente
RVE	Repräsentatives Volumenelement
$\dot{(\cdot)}$	zeitliche Ableitung
$(\cdot)^e$	FE-Elementgrößen
$(\cdot)^{\mathrm{h}}$	FE-Näherung einer Größe
$(\cdot)_{\mathrm{K}}$, $(\cdot)_{\mathrm{I}}$	FE-Knotengrößen
$(\cdot)^{\mathrm{M}}$	Größen der Makroebene
$(\cdot)^{\mathrm{m}}$	Größen der Mikroebene

Griechische Buchstaben

$\delta(\cdot)$	Variation von
$\partial\Omega$	Rand des Gebiets des Kontinuumskörpers in der Momentankonfiguration
$\partial\Omega_0$	Rand des Gebiets des Kontinuumskörpers in der Referenzkonfiguration
$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{B}}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{P}}$	Vektor der Balken- / Plattenverzerrungen
$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{V}}$	Vektor der sechs unabhängigen Komponenten von $\boldsymbol{E}$ in Voigtnotation
Γ_i	Homogenisierungsgröße des RVE: Länge für Balken, Fläche für Platten, Volumen für 3D-Körper
$\varkappa$, $\varkappa_y$, $\varkappa_z$	Schubkorrekturfaktoren
$\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{V}}$, $\bar{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathrm{B}}$, $\bar{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathrm{P}}$	Vektoren der Lagrangeparameter konform zu $\boldsymbol{E}_{\mathrm{V}}$, $\boldsymbol{E}_{\mathrm{B}}$, $\boldsymbol{E}_{\mathrm{P}}$
$\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{B}}$, $\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{P}}$	Vektoren der Lagrangeparameter konform zu $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{B}}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{P}}$
Λ_{B}, Λ_{P}	Matrix zur Umrechnung von $\bar{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathrm{B}}$ / $\bar{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathrm{P}}$ in $\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{V}}$
∇	Nabla-Operator
ν	Querkontraktionszahl
Ω	Gebiet des Kontinuumskörpers in der Momentankonfiguration
Ω_0	Gebiet des Kontinuumskörpers in der Referenzkonfiguration
φ	Abbildung der Ortsvektoren von der Referenz- in die Momentan-

	konfiguration
ρ	Massendichte der Momentankonfiguration
ρ_0	Massendichte der Referenzkonfiguration
$\boldsymbol{\sigma}$	Cauchy'scher Spannungstensor
$\boldsymbol{\sigma}_\mathrm{B}$, $\boldsymbol{\sigma}_\mathrm{P}$	Vektor der Schnittgrößen des Balkens / der Platte

Lateinische Buchstaben

$\mathbf{1}$	Einheitstensor oder Einheitsvektor nach Kontext
Δa	Flächeninhalt einer Schnittfläche der Momentankonfiguration
A	Flächeninhalt eines Balkenquerschnitts
$\boldsymbol{A}_\mathrm{B}$, $\boldsymbol{A}_\mathrm{P}$	Matrix zur Umrechnung von $\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{B}$ / $\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{P}$ in $\boldsymbol{E}_\mathrm{B}$ / $\boldsymbol{E}_\mathrm{P}$
$\bar{\boldsymbol{A}}_\mathrm{B}$, $\bar{\boldsymbol{A}}_\mathrm{P}$	Matrix zur Umrechnung von λ_B / λ_P in $\bar{\lambda}_\mathrm{B}$ / $\bar{\lambda}_\mathrm{P}$
A_S	Schubfläche
$\boldsymbol{b}$	Volumenlastvektor der Momentankonfiguration
$\boldsymbol{b}_0$	Volumenlastvektor der Referenzkonfiguration
$\mathcal{B}$	Kontinuumskörper
$\mathbb{C}$	Elastizitätstensor vierter Stufe
$\boldsymbol{C}$	Elastizitätsmatrix für Voigtnotation
$\boldsymbol{C}_\mathrm{B}$, $\boldsymbol{C}_\mathrm{P}$	Elastizitätsmatrix für die Spannungen eines Balkens / einer Platte
$\boldsymbol{d}$	räumlicher Geschwindigkeitsgradient
$\boldsymbol{D}$	Materialmatrix für einen 3D-Körper
$\boldsymbol{D}_\mathrm{B}$, $\boldsymbol{D}_\mathrm{P}$	Materialmatrix für die Schnittgrößen eines Balkens / einer Platte
$\boldsymbol{D}_\mathrm{m}$, $\boldsymbol{D}_\mathrm{b}$, $\boldsymbol{D}_\mathrm{s}$	Membran-, Biege- und Schubanteil von $\boldsymbol{D}_\mathrm{P}$
$\mathrm{d}A$	Flächeninhalt eines infinitesimalen Flächenelements der Referenzfiguration
$\mathrm{d}a$	Flächeninhalt eines infinitesimalen Flächenelements der Momentankonfiguration
$\mathrm{d}\boldsymbol{A}$	infinitesimales Flächenelement der Referenzkonfiguration
$\mathrm{d}\boldsymbol{a}$	infinitesimales Flächenelement der Momentankonfiguration
$\mathrm{d}\boldsymbol{f}$	infinitesimaler Kraftvektor auf ein infinitesimales Flächenelement der Momentankonfiguration
$\mathrm{d}\boldsymbol{f}_0$	in die Referenzkonfiguration transformierter Kraftvektor $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$
$\partial\mathcal{P}$	Rand von $\mathcal{P}$
$\mathrm{d}V$	infinitesimales Volumenelement der Referenzkonfiguration
$\mathrm{d}v$	infinitesimales Volumenelement der Momentankonfiguration
$\mathrm{d}\boldsymbol{X}$	infinitesimales Linienelement in der Referenzkonfiguration
$\mathrm{d}\boldsymbol{x}$	infinitesimales Linienelement in der Momentankonfiguration
$\boldsymbol{E}$	Green-Lagrange'scher Verzerrungstensor

$\boldsymbol{e}_i$	Basisvektoren eines orthonormalen Koordinatensystems
E	E-Modul
$\boldsymbol{E}_\mathrm{B}$, $\boldsymbol{E}_\mathrm{P}$	Vektor der maßgeblichen Komponenten von $\boldsymbol{E}$ beim Balken / der Platte
$\boldsymbol{E}_\mathrm{V}$	Vektor der sechs unabhängigen Komponenten von $\boldsymbol{E}$ in Voigtnotation
$\boldsymbol{F}$	Deformationsgradient
$\boldsymbol{F}_k$	Kraftvektor
$\Delta\boldsymbol{f}$	resultierender Kraftvektor auf eine Schnittfläche der Momentankonfiguration
G	Schubmodul
$\boldsymbol{H}$	Verschiebungsgradient
$\boldsymbol{I}$	Impuls
I_P	polares Flächenträgheitsmoment
I_T	Torsionsträgheitsmoment
I_y, I_z	Flächenträgheitsmomente
$\boldsymbol{J}$	Jacobi-Matrix
J	Jacobi-Determinante
$\boldsymbol{K}$	Steifigkeitsmatrix
$\boldsymbol{\mathcal{L}}$	Drehimpuls
$\boldsymbol{L}$	Differentialoperator zur Bestimmung der Verzerrungen aus den Verschiebungen
L	Charakteristische Länge der Makrostruktur
l_c	Charakteristische Länge einer Inhomogenität
L_RVE	Charakteristische Länge des RVE
m	Masse
$\boldsymbol{N}$	normierter Normalenvektor eines Flächenelements der Referenzkonfiguration
$\boldsymbol{n}$	normierter Normalenvektor eines Flächenelements der Momentankonfiguration
N	FE-Ansatzfunktionen
$\mathcal{O}$	Koordinatenursprung
$\boldsymbol{P}$	erster Piola-Kirchhoff'scher Spannungstensor
$\mathcal{P}$	Gebiet der Mikroebene für die Homogenisierung
$\mathcal{P}_\mathrm{ext}$	externe Energiezufuhr
$\mathcal{P}_\mathrm{int}$	interne mechanische Leistung / Spannungsleistung
$\boldsymbol{R}_\mathrm{V}$, $\boldsymbol{R}_\mathrm{B}$, $\boldsymbol{R}_\mathrm{P}$	Matrizen zur Aufbringung der Randverschiebungen im RVE
$\mathbb{R}^+$	Menge der positiven reellen Zahlen einschließlich der Null

$\boldsymbol{S}$	zweiter Piola-Kirchhoff'scher Spannungstensor
$\boldsymbol{S}_\mathrm{B}$, $\boldsymbol{S}_\mathrm{P}$	Vektor der maßgeblichen Komponenten von $\boldsymbol{S}$ beim Balken / der Platte
$\boldsymbol{S}_\mathrm{V}$	Vektor der sechs unabhängigen Komponenten von $\boldsymbol{S}$ in Voigtnotation
$\bar{\boldsymbol{t}}$	Randlastvektor der Momentankonfiguration
$\bar{\boldsymbol{t}}_0$	Randlastvektor der Referenzkonfiguration
$\boldsymbol{t}$	Cauchy'scher Spannungsvektor in der Momentankonfiguration
$\boldsymbol{t}_0$	Cauchy'scher Spannungsvektor in der Referenzkonfiguration
t	Zeit
$\boldsymbol{u}$	Verschiebungsvektor
$\boldsymbol{v}$	1. Geschwindigkeit eines materiellen Punkts in der Momentankonfiguration (Kapitel 2,5 und Anhang A) 2. Vektor aller FE-Knotenfreiheitsgrade (sonst)
$\boldsymbol{v}_0$	Geschwindigkeit eines materiellen Punkts in der Referenzkonfiguration
$\boldsymbol{X}$	Ortsvektor in der Referenzkonfiguration
$\boldsymbol{x}$	Ortsvektor in der Momentankonfiguration

Literaturverzeichnis

[1] Bathe, K.-J.: *Finite-Elemente-Methoden*. Springer, Berlin [u.a.], Zweite Auflage (2002), ISBN 978-097-90049-5-7

[2] Bishop, J.; Hill, R.: XLVI. A theory of the plastic distortion of a polycrystalline aggregate under combined stresses. In: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 42 (1951), Nr. 327, S. 414–427, ISSN 1941-5982, URL http://dx.doi.org/10.1080/14786445108561065

[3] Cowper, G. R.: The shear coefficient in Timoshenko's beam theory. In: *Journal of Applied Mechanics* 33 (1966), Nr. 2, S. 335–340, ISSN 0021-8936, URL http://dx.doi.org/10.1115/1.3625046

[4] Dassault Systèmes: ABAQUS CAE. https://www.3ds.com/products-services/simulia/products/abaqus/abaquscae/

[5] Erhart, P.; Juslin, N.; Goy, O.; Nordlund, K.; Müller, R.; Albe, K.: Analytic bond-order potential for atomistic simulations of zinc oxide. In: *Journal of Physics: Condensed Matter* 18 (2006), Nr. 29, S. 6585–6605, ISSN 0953-8984, URL http://dx.doi.org/10.1088/0953-8984/18/29/003

[6] Feyel, F.: Multiscale FE2 elastoviscoplastic analysis of composite structures. In: *Computational Materials Science* 16 (1999), Nr. 1-4, S. 344–354, ISSN 09270256, URL http://dx.doi.org/10.1016/S0927-0256(99)00077-4

[7] Feyel, F.; Chaboche, J.-L.: FE2 multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fibre SiC/Ti composite materials. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 183 (2000), Nr. 3-4, S. 309–330, ISSN 00457825, URL http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00224-8

[8] Freund, J.; Karakoc, A.: Warping displacement of Timoshenko beam model. In: *International Journal of Solids and Structures* 92-93 (2016), S. 9–16, ISSN 00207683, URL http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.05.002

[9] Geers, M.; Kouznetsova, V. G.; Brekelmans, W.: Multi-scale computational homogenization: Trends and challenges. In: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 234 (2010), Nr. 7, S. 2175–2182, ISSN 03770427, URL http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2009.08.077

[10] Geers, M. G. D.; Coenen, E. W. C.; Kouznetsova, V. G.: Multi-scale computational homogenization of structured thin sheets. In: *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering* 15 (2007), Nr. 4, S. S393–S404, ISSN 0965-0393, URL http://dx.doi.org/10.1088/0965-0393/15/4/S06

[11] Gross, D.; Seelig, T.: *Bruchmechanik: Mit einer Einführung in die Mikromechanik*. Lehrbuch, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 6. Auflage (2016), ISBN 978-3-662-46737-4, URL http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-46737-4

[12] Gruttmann, F.: Finite-Elemente-Methoden II, Skript zur Vorlesung (2019)

[13] Gruttmann, F.; Wagner, W.: Shear correction factors in Timoshenko's beam theory for arbitrary shaped cross-sections. In: *Computational Mechanics* 27 (2001), Nr. 3, S. 199–207, ISSN 0178-7675, URL http://dx.doi.org/10.1007/s004660100239

[14] Gruttmann, F.; Wagner, W.: A coupled two-scale shell model with applications to layered structures. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 94 (2013), Nr. 13, S. 1233–1254, ISSN 00295981, URL http://dx.doi.org/10.1002/nme.4496

[15] Hashin, Z.; Shtrikman, S.: A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 11 (1963), Nr. 2, S. 127–140, ISSN 00225096, URL http://dx.doi.org/10.1016/0022-5096(63)90060-7

[16] Hazanov, S.; Amieur, M.: On overall properties of elastic heterogeneous bodies smaller than the representative volume. In: *International Journal of Engineering Science* 33 (1995), Nr. 9, S. 1289–1301, ISSN 00207225, URL http://dx.doi.org/10.1016/0020-7225(94)00129-8

[17] Helfen, C.; Diebels, S.: Numerical multiscale modelling of sandwich plates. In: *Technische Mechanik* 32 (2012), S. 251–264

[18] Helfen, C.; Diebels, S.: A numerical homogenisation method for sandwich plates based on a plate theory with thickness change. In: *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 93 (2013), Nr. 2-3, S. 113–125, URL http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1002/zamm.201100173

[19] Helfen, C.; Diebels, S.: Computational homogenisation of composite plates: Consideration of the thickness change with a modified projection strategy. In: *Computers & Mathematics with Applications* 67 (2014), Nr. 5, S. 1116–1129, ISSN 0898-1221, URL http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/j.camwa.2013.12.017

[20] Heller, D.: *A nonlinear multiscale finite element model for comb-like sandwich panels*. Dissertation, Technische Universität Darmstadt, Darmstadt (2015), URL http://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de/5288/

[21] Heller, D.; Gruttmann, F.: Nonlinear two-scale shell modeling of sandwiches with a comb-like core. In: *Composite Structures* 144 (2016), S. 147–155, ISSN 02638223, URL http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.02.042

[22] Hill, R.: The elastic behaviour of a crystalline aggregate. In: *Proceedings of the Physical Society. Section A* 65 (1952), Nr. 5, S. 349–354, ISSN 0370-1298, URL http://dx.doi.org/10.1088/0370-1298/65/5/307

[23] Hill, R.: Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 11 (1963), Nr. 5, S. 357–372, ISSN 00225096, URL http://dx.doi.org/10.1016/0022-5096(63)90036-X

[24] Hill, R.: On constitutive macro-variables for heterogeneous solids at finite strain. In: *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* 326 (1972), Nr. 1565, S. 131–147, ISSN 0080-4630, URL http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1972.0001

[25] Hodges, D. H.: *Nonlinear composite beam theory*. Progress in astronautics and aeronautics, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston, Va. (2006), ISBN 978-1-56347-697-6

[26] Holzapfel, G. A.: *Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering*. Wiley, Chichester and Weinheim and New York and Brisbane and Singapore and Toronto (2000), ISBN 978-0-471-82319-3

[27] Hutchinson, J. R.: Shear coefficients for Timoshenko beam theory. In: *Journal of Applied Mechanics* 68 (2001), Nr. 1, S. 87–92, ISSN 0021-8936, URL http://dx.doi.org/10.1115/1.1349417

[28] Irving, J. H.; Kirkwood, J. G.: The statistical mechanical theory of transport processes. IV. The equations of hydrodynamics. In: *The Journal of Chemical Physics* 18 (1950), Nr. 6, S. 817–829, ISSN 0021-9606, URL http://dx.doi.org/10.1063/1.1747782

[29] Kaneko, T.: On Timoshenko's correction for shear in vibrating beams. In: *Journal of Physics D: Applied Physics* 8 (1975), Nr. 16, S. 1927–1936, ISSN 0022-3727, URL http://dx.doi.org/10.1088/0022-3727/8/16/003

[30] Kanit, T.; Forest, S.; Galliet, I.; Mounoury, V.; Jeulin, D.: Determination of the size of the representative volume element for random composites: statistical and numerical approach. In: *International Journal of Solids and Structures* 40 (2003), Nr. 13-14, S. 3647–3679, ISSN 00207683, URL http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00143-4

[31] Kennedy, G.; Martins, J.: A homogenization-based theory for anisotropic beams with accurate through-section stress and strain prediction. In: *International Journal of Solids and Structures* 49 (2012), Nr. 1, S. 54–72, ISSN 00207683, URL http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.09.012

[32] Klarmann, S.: *Geometrisch und physikalisch nichtlineare Mehrskalenmodellierung räumlicher Stabtragwerke.* Dissertation, Universitäts- und Landesbibliothek Darmstadt, Darmstadt (2018), URL http://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de/7638/

[33] Klarmann, S.; Gruttmann, F.; Klinkel, S.: Homogenization assumptions for coupled multiscale analysis of structural elements: beam kinematics. In: *Computational Mechanics* 65 (2020), Nr. 3, S. 635–661, ISSN 0178-7675, URL http://dx.doi.org/10.1007/s00466-019-01787-z

[34] Kouznetsova, V.; Geers, M. G. D.; Brekelmans, W. A. M.: Multi-scale constitutive modelling of heterogeneous materials with a gradient-enhanced computational homogenization scheme. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 54 (2002), Nr. 8, S. 1235–1260, ISSN 00295981, URL http://dx.doi.org/10.1002/nme.541

[35] Mandadapu, K.; Sengupta, A.; Papadopoulos, P.: A homogenization method for thermomechanical continua using extensive physical quantities. In: *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 468 (2012), Nr. 2142, S. 1696–1715, ISSN 1364-5021, URL http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2011.0578

[36] Mandel, J.: *Plasticité classique et viscoplasticité*. CISM International Centre for Mechanical Sciences, Springer Vienna (1971), ISBN 9780387811970

[37] Mercer, B.; Mandadapu, K.; Papadopoulos, P.: Novel formulations of microscopic boundary-value problems in continuous multiscale finite element methods. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 286 (2015), S. 268–292, ISSN 00457825, URL http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2014.12.021

[38] Miehe, C.: Computational micro-to-macro transitions for discretized microstructures of heterogeneous materials at finite strains based on the minimization of averaged incremental energy. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 192 (2003), Nr. 5-6, S. 559–591, ISSN 00457825, URL http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(02)00564-9

[39] Miehe, C.; Koch, A.: Computational micro-to-macro transitions of discretized microstructures undergoing small strains. In: *Archive of Applied Mechanics* 72 (2002), Nr. 4-5, S. 300–317, ISSN 09391533, URL http://dx.doi.org/10.1007/s00419-002-0212-2

[40] Mindlin, R. D.: Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. In: *Journal of Applied Mechanics* 18 (1951), Nr. 1, S. 31–38, ISSN 0021-8936, URL http://dx.doi.org/10.1115/1.4010217

[41] Nguyen, V.; Stroeven, M.; Sluys, L. J.: Multiscale continuous and discontinuous modeling of heterogeneous materials: A review on recent developments. In: *Journal of Multiscale Modelling* 03 (2011), Nr. 04, S. 229–270, ISSN 1756-9737, URL http://dx.doi.org/10.1142/S1756973711000509

[42] Nguyen, V.-D.; Wu, L.; Noels, L.: Unified treatment of microscopic boundary conditions and efficient algorithms for estimating tangent operators of the homogenized behavior in the computational homogenization method. In: *Computational Mechanics* 59 (2017), Nr. 3, S. 483–505, ISSN 0178-7675, URL http://dx.doi.org/10.1007/s00466-016-1358-z

[43] Reissner, E.: The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. In: *Journal of Applied Mechanics* 12 (1945), Nr. 2, S. A69–A77, ISSN 0021-8936, URL http://dx.doi.org/10.1115/1.4009435

[44] Renton, J. D.: Generalized beam theory applied to shear stiffness. In: *International Journal of Solids and Structures* 27 (1991), Nr. 15, S. 1955–1967, ISSN 00207683, URL http://dx.doi.org/10.1016/0020-7683(91)90188-L

[45] Reuss, A.: Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle. In: *ZAMM - Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 9 (1929), Nr. 1, S. 49–58, ISSN 00442267, URL http://dx.doi.org/10.1002/zamm.19290090104

[46] Saeb, S.; Steinmann, P.; Javili, A.: Aspects of computational homogenization at finite deformations: A unifying review from Reuss' to Voigt's bound. In: *Applied Mechanics Reviews* 68 (2016), Nr. 5, ISSN 0003-6900, URL http://dx.doi.org/10.1115/1.4034024

[47] Spahn, J.; Andrä, H.; Kabel, M.; Müller, R.: A multiscale approach for modeling progressive damage of composite materials using fast fourier transforms. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 268 (2014), S. 871–883, ISSN 00457825, URL http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2013.10.017

[48] Taylor, R. L.; Govindjee, S.: FEAP - A finite element analysis program. http://projects.ce.berkeley.edu/feap/

[49] Timošenko, S. P.; Goodier, J. N.: *Theory of elasticity*. Engineering societies monographs, McGraw-Hill, New York, Dritte Auflage (1987), ISBN 0070647208

[50] Timoshenko, S. P.: LXVI. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. In: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 41 (1921), Nr. 245, S. 744–746, ISSN 1941-5982, URL http://dx.doi.org/10.1080/14786442108636264

[51] Vlachoutsis, S.: Shear correction factors for plates and shells. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 33 (1992), Nr. 7, S. 1537–1552, ISSN 00295981, URL http://dx.doi.org/10.1002/nme.1620330712

[52] Voigt, W.: Ueber die Beziehung zwischen den beiden Elasticitätsconstanten isotroper Körper. In: *Annalen der Physik* 274 (1889), Nr. 12, S. 573–587, ISSN 00033804, URL http://dx.doi.org/10.1002/andp.18892741206

[53] Wagner, W.; Gruttmann, F.: A consistently linearized multi-scale model for shell structures. In: *Shell structures : theory and applications. Vol. 3. Ed.: W. Pietraszkiewicz*, S. 453–456, CRC Press, ISBN 978-1-138-00082-7 (2013), URL http://dx.doi.org/10.1201/b15684-113

[54] Xu, L.; Cheng, G.; Yi, S.: A new method of shear stiffness prediction of periodic Timoshenko beams. In: *Mechanics of Advanced Materials and Structures* 23 (2016), Nr. 6, S. 670–680, ISSN 1537-6494, URL http://dx.doi.org/10.1080/15376494.2015.1029156

[55] Yu, W.; Hodges, D. H.; Volovoi, V.; Cesnik, C.: On Timoshenko-like modeling of initially curved and twisted composite beams. In: *International Journal of Solids and Structures* 39 (2002), Nr. 19, S. 5101–5121, ISSN 00207683, URL http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00399-2

[56] Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L.: *The Finite Element Method Volume 1 The Basis*. Butterworth-Heinemann, Fünfte Auflage (2000), ISBN 0-7506-5049-4

[57] Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L.: *The Finite Element Method Volume 2 Solid Mechanics*. Butterworth-Heinemann, Fünfte Auflage (2000), ISBN 0-7506-5055-9

[58] Zoller, J.; Gruttmann, F.: On boundary conditions and constraints for representative volume elements of a two-scale shell formulation. In: *PAMM* 19 (2019), Nr. 1, ISSN 1617-7061, URL http://dx.doi.org/10.1002/pamm.201900123

[59] Zoller, J.; Gruttmann, F.: Shear deformations in a multiscale shell formulation. In: *Proceedings of 8th GACM Colloquium on Computational Mechanics* 19 (2019), S. 437–440, URL http://dx.doi.org/10.19211/KUP9783737650939