

Backstepping zur Synchronisierung nichtlinearer dynamischer Systeme

Backstepping for Synchronization of Nonlinear Dynamical Systems

Kim D. Listmann, Jürgen Adamy, TU Darmstadt,
Craig A. Woolsey, VirginiaTech, Blacksburg

Zusammenfassung Es wird eine systematische Methode zum Entwurf synchronisierender Regler für Systeme in strenger Rückkopplungsform entwickelt. Dabei wird die Äquivalenz unter statischer Zustandsrückführung der gegebenen Systeme zu passiven Systemen ausgenutzt und eine neue Variante des Backstepping-Verfahrens vorgestellt. Es wird gezeigt, dass sich ein Kollektiv identischer Agenten synchronisiert, wenn das Kommunikationsnetzwerk zu allen Zeitpunkten stark zusammenhängend und ausgeglichen ist. Die Methode wird

anhand zweier Beispiele illustriert. ▶▶▶ **Summary** This article presents a methodology to derive control laws synchronizing systems given in strict-feedback form. It exploits feedback equivalence of such systems to passive systems and uses a modified backstepping design. The control laws provably synchronize a collective of identical agents if the underlying communication network is balanced and strongly connected at all times. Two examples demonstrate the effectiveness of the design.

Schlagwörter Multi-Agenten-System, Synchronisierung, Backstepping, Passivität ▶▶▶ **Keywords** Multi-agent systems, synchronization, backstepping, passivity

1 Einleitung

Innerhalb der letzten Jahre wuchs das Interesse an vernetzten dynamischen Systemen stetig. Motiviert durch viele Beispiele aus der Natur und der Technik, wie Fischschwärme, Neuronen des menschlichen Gehirns, das Energieversorgungsnetz und automatisierte Fahrzeugkolonnen, wird dabei sowohl die Analyse des inhärenten Verhaltens dieser sogenannten Multi-Agenten-Systeme¹ als auch der Entwurf von Regelungen zur Erzeugung eines bestimmten Verhaltens für diese betrachtet. Eine fundamentale Rolle spielt dabei in jedem Fall die Kommunikation zwischen den Agenten [19; 23]. Als Spezialfall solch kollektiven Verhaltens, der aber viele weitere Fälle einschließt, betrachtet dieser Beitrag die Synchronisierung von Multi-Agenten-Systemen. Darunter versteht man, dass sich das gesamte Kollektiv der Agenten wie ein Agent verhält.

¹ Das Wort Agent wird hier als Synonym für dynamisches System benutzt. Man beachte aber, dass dies im Allgemeinen (z.B. in der Informatik) nicht der Fall sein muss.

Synchronisierungsprobleme besitzen durch die Verbindung von Regelungs-, Kommunikations- und Graphentheorie eine erhöhte Komplexität. Aus diesem Grund lassen sie sich in zwei Bereiche einteilen: Einerseits werden Agenten mit einfacher, meist linearer Dynamik betrachtet, und das Hauptaugenmerk liegt auf der Analyse der notwendigen Kommunikationstopologie des Netzwerks der Agenten, um die Synchronisierung zu garantieren [19; 23; 27]. Andererseits wird versucht, Entwurfsverfahren für Agenten mit nichtlinearer Dynamik herzuleiten, die – unter starken Einschränkungen an die mögliche Kommunikationstopologie – wiederum zur Synchronisierung führen [17; 25]. Diesem letztem Aspekt widmet sich auch der vorliegende Beitrag.

Es hat sich gezeigt, dass Passivität eine überaus nützliche Eigenschaft zum Entwurf einfacher Regelgesetze zur Synchronisierung ist [2; 5; 20]. In diesem Beitrag, der auf [14; 15] aufbaut, wird dazu eine Erweiterung vorgeschlagen, die es ermöglicht, Systeme in *strenger Rückkopplungsform* [1] zu synchronisieren. Es ist

bekannt, dass Systeme in dieser Form unter statischer Zustandsrückführung äquivalent zu einem passiven System sind [29]. Außerdem lässt sich zur Stabilisierung² dieser Systeme ein rekursiver Entwurf mittels des Backstepping-Verfahrens durchführen [1; 10; 24]. Daher schlagen wir eine neue Variante des Backstepping-Verfahrens vor, welche systematisch auf ein passives, synchronisierbares System führt. Dann können zur Synchronisierung Methoden aus [2; 5] verwendet werden. Dabei bleiben die vorteilhaften Eigenschaften der passivitätsbasierten Synchronisierung erhalten, und das Problem des relativen Grads bei der Passivierung durch statische Zustandsrückführung wird für die Synchronisierung gelöst. Die Klasse der Systeme in strenger Rückkopplungsform ist dabei sehr wichtig, da alle vollständig direkt gesteuerten mechanischen Systeme und viele nichtholonome Systeme in dieser Form darstellbar sind [9].

Daraus ergibt sich der Aufbau des Artikels wie folgt: Zuerst werden einige allgemeine Grundlagen zu Passivität, Graphentheorie und Synchronisierungsalgorithmen erläutert. Danach wird das Problem definiert und der Reglerentwurf durchgeführt. Dabei wird auch die Frage nach den notwendigen Restriktionen an die Netzwerktopologie beantwortet. Abschließend veranschaulichen die Lagesynchronisierung von Satelliten und die Posesynchronisierung mobiler Roboter den Entwurf.

2 Grundlagen

2.1 Passivität

Passivität ist eine systemtheoretische Eigenschaft, welche prinzipiell auf die Erhaltung von Energie innerhalb eines dynamischen Systems zurückgeht. Eine detaillierte Darstellung hierzu findet sich in [28], eine übersichtliche Einführung gibt [11; 12].

Gegeben sei das nichtlineare System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (1)$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem Eingang $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ und dem Ausgang $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$. Die Funktionen $\mathbf{f}(\cdot) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{G}(\cdot) = [\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $\mathbf{h}(\cdot) \in \mathbb{R}^m$ werden als hinreichend glatt angenommen, außerdem gilt $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{h}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Darüber hinaus setzen wir voraus, dass die Eingänge \mathbf{u} stückweise stetig sind.

Definition 1. Das (nichtlineare) System (1) heißt passiv, wenn eine skalare C^1 -Speicherfunktion³ $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, $\mathbf{x}(t) \mapsto V(\mathbf{x}(t))$ mit $V(\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}) = 0$ und eine Funktion $S: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, $\mathbf{x}(t) \mapsto S(\mathbf{x}(t))$ so existieren, dass $V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{u}^\top(t)\mathbf{y}(t) - S(\mathbf{x}(t)) \quad \forall t \geq 0$.

Oft wird in diesem Zusammenhang die Speicherfunktion $V(\mathbf{x})$ als Ljapunov-Funktion zum Nachweis der Stabi-

² Vereinfachend für Stabilisierung der Gleichgewichtslage eines Systems im Ursprung verwendet.

³ C^r bezeichnet die Menge der r -fach stetig differenzierbaren Funktionen.

lität des Systems (1) verwendet. Dabei ist zu beachten, dass $V(\mathbf{x})$ lediglich eine positiv semidefinite Funktion sein muss, sodass zum Nachweis der Stabilität zusätzliche Methoden angewendet werden müssen.

Um bestimmen zu können, wann das System (1) passiv ist, verwenden wir den Begriff der Äquivalenz unter statischer Zustandsrückführung. Dies bedeutet, dass eine statische Zustandsrückführung der Form $\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})\mathbf{v}$ so existiert, dass das System (1) durch diese Rückführung in ein passives System überführt wird. Die dafür notwendigen und hinreichenden Bedingungen entnehmen wir einem bekannten Ergebnis aus [4].

Satz 1. Sei $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ ein regulärer Punkt⁴ für (1). Das System (1) ist genau dann äquivalent unter statischer Zustandsrückführung zu einem passiven System mit einer positiv definiten C^2 -Speicherfunktion $V(\mathbf{x})$, wenn bei \mathbf{x}_0 der Vektorrelativgrad $(1, \dots, 1)$ und das System schwach phasenminimal⁵ ist.

Später wird dies ausgenutzt, um für die betrachteten Systeme einen Ausgang zu konstruieren, der die Bedingungen aus Satz 1 erfüllt.

2.2 Graphentheorie

Zur Synchronisierung von Multi-Agenten-Systemen ist Informationsaustausch unbedingt erforderlich. Zur formalen Beschreibung dieses Informationsaustauschs werden die Agenten als Knoten und der Informationsfluss zwischen ihnen als Kanten eines Graphen interpretiert. Aus diesem Grund werden einige wichtige Begriffe und Zusammenhänge aus der Graphentheorie kurz erläutert. Detailliertere Darstellungen dazu finden sich z. B. in [7; 31], wir folgen hier den Ausführungen in [5].

Definition 2. Ein Graph \mathcal{G} besteht aus einer endlichen Menge $\mathcal{V}(\mathcal{G}) = \{v_1, \dots, v_N\}$, den Knoten, und einer endlichen Menge $\mathcal{E}(\mathcal{G}) \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$, den Kanten. Er heißt ungerichtet, wenn $\forall i, j$ sowohl $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$ als auch $(v_j, v_i) \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$, andernfalls heißt er gerichtet. Der Eingangsgrad (bzw. Ausgangsgrad) eines Knoten $v_i \in \mathcal{V}(\mathcal{G})$ bezeichnet die Anzahl $d_{\text{in}}(\text{out}),i$ der in den Knoten eingehenden (aus dem Knoten austretenden) Kanten. Gilt für alle Knoten $d_{\text{in}} = d_{\text{out}}$, so heißt \mathcal{G} ausgeglichen. Die Knoten v_j , für die $(v_j, v_i) \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$ gilt, heißen Nachbarn des Knoten v_i . Ihre Menge ist definiert als $\mathcal{N}_i = \{v_j \mid (v_j, v_i) \in \mathcal{E}(\mathcal{G})\}$. Eine Kante (v_i, v_i) heißt Schleife. Ein Graph ohne Schleifen heißt schleifenfrei.

Darüber hinaus benötigen wir eine Beschreibung des Zusammenhangs von Graphen, um die Vernetzung der Agenten zu klassifizieren.

⁴ Für einen regulären Punkt \mathbf{x}_0 gilt, dass die Entkopplungsmatrix $[L_{\mathbf{g}_1} \mathbf{h}, \dots, L_{\mathbf{g}_m} \mathbf{h}](\mathbf{x}_0)$, mit der Lie-Ableitung $L_{\mathbf{a}} \mathbf{b}(\mathbf{x}) = \nabla \mathbf{b}(\mathbf{x})^\top \mathbf{a}$, regulär ist. Dabei wird der Gradient $\nabla \mathbf{b}(\mathbf{x})$ als Spaltenvektor interpretiert.

⁵ Ist die Nulldynamik eines dynamischen Systems nur stabil im Sinne von Ljapunov (nicht asymptotisch stabil), so heißt das System schwach phasenminimal.

Definition 3. Eine Sequenz $\{v_0, \dots, v_k\}$ in einem gerichteten Graphen heißt Pfad der Länge k , wenn für jedes $i \in \{0, \dots, k-1\}$ $(v_i, v_{i+1}) \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$. Ein gerichteter Graph heißt vollständig zusammenhängend, wenn für jedes Knotenpaar $v_i, v_j \in \mathcal{V}(\mathcal{G})$ mit $i \neq j$ sowohl $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$ als auch $(v_j, v_i) \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$. Er heißt stark zusammenhängend, wenn ein Pfad von allen Knoten zu allen anderen Knoten des Graphen existiert.

Die Eigenschaften des Kommunikationsnetzwerks der Agenten, dargestellt durch einen gerichteten Graphen, möchten wir wie folgt einschränken.

Annahme 1. Der Graph des Kommunikationsnetzwerks der Agenten ist zu jedem Zeitpunkt schleifenfrei, ausgeglichen und stark zusammenhängend.

Zur Analyse der Eigenschaften von Graphen dienen spezielle, mit ihnen verknüpfte Matrizen. Diese spielen, wie im nächsten Abschnitt gezeigt, bei Synchronisierungsproblemen ebenfalls eine Schlüsselrolle.

2.3 Synchronisierungsalgorithmen

Bevor auf die Eigenschaften einfacher Synchronisierungsalgorithmen eingegangen wird, benötigen wir eine allgemeine, formale Beschreibung der Synchronisierung.

Definition 4. Ein dynamisches Multi-Agenten-System mit identischen Agenten mit der Dynamik (1) heißt synchronisiert, wenn für die Zustände \mathbf{x}_i aller Agenten $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)\| = 0$ gilt.

Der Zusammenhang zwischen Regelungs-, Kommunikations- und Graphentheorie soll nun anhand des Konsensprotokolls [23]

$$\dot{z}_i = - \sum_{j=1}^N a_{ij} (z_i - z_j), \quad i = 1, \dots, N \quad (2)$$

mit $z_i \in \mathbb{R}$ verdeutlicht werden. Dabei sind die Faktoren a_{ij} die Elemente der Adjazenzmatrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ eines Graphen \mathcal{G} . Die Matrix selbst ist gegeben als

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{cases} 1, & \text{wenn } (v_j, v_i) \in \mathcal{E}(\mathcal{G}), \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (3)$$

und charakterisiert die Menge der Nachbarn \mathcal{N}_i eines Knotens. Fasst man alle Zustände z_i des Konsensprotokolls (2) im Vektor $\mathbf{z} = [z_1, \dots, z_N]^T$ zusammen, so ergibt sich

$$\dot{\mathbf{z}} = -\mathbf{L}\mathbf{z} \quad (4)$$

mit der Laplacematrix $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ des Graphen. Sie ist durch $\mathbf{L} = \mathbf{D}_{\text{in}} - \mathbf{A}$, mit der Eingangsgradmatrix $\mathbf{D}_{\text{in}} = \text{diag}(d_{\text{in},i})$, definiert. Für die Eigenwerte von \mathbf{L} gilt $\Re\{\lambda_i\} \geq 0$. Außerdem gilt für beliebige Graphen, dass der kleinste Eigenwert der Laplacematrix $\lambda_1 = 0$ und der zugehörige Eigenvektor $\mathbf{v}_1 = [1, \dots, 1]^T = \mathbf{1}$ ist. Die algebraische Vielfachheit des kleinsten Eigenwerts

$\mu(\lambda_1)$ zeigt die zusammenhängenden Komponenten eines Graphen [7]. Damit muss zur Synchronisierung eines dynamischen Systems $\mu(\lambda_1) = 1$ gelten, da dann $\text{span}\{\mathbf{v}_1\} = \ker(\mathbf{L})$. Zusammenfassend gilt [19; 23]:

Lemma 1. Gegeben sei ein stark zusammenhängender Graph. Dann ist $\lambda_1 = 0$ immer einfacher Eigenwert der zugehörigen Laplacematrix \mathbf{L} und Synchronisierung für das Konsensprotokoll (2) wird erreicht.

Insgesamt wird damit deutlich, wie die Eigenstruktur der Laplacematrix \mathbf{L} die Synchronisierung beeinflusst. Man sieht außerdem, dass unter Verwendung von Annahme 1 die Bedingungen für die Synchronisierung eines Multi-Agenten-Systems erfüllt sind. Darüber hinaus ist Folgendes nützlich für die Stabilitätsanalyse [27; 34].

Lemma 2. Die Laplacematrix \mathbf{L} eines Graphen \mathcal{G} ist positiv semidefinit, wenn der Graph ausgeglichen und stark zusammenhängend ist.

Außerdem kann mit Hilfe der Laplacematrix auch die Konvergenzrate des Synchronisierungsprozesses bestimmt bzw. abgeschätzt werden [19; 33; 35]. Dies wird bei der Erweiterung des Reglerentwurfs in Abschnitt 3.3 noch eine Rolle spielen.

Lemma 3. Die Konvergenzrate des Konsensprotokolls (2) ergibt sich für ungerichtete Graphen zu

$$a_{\mathcal{G}} = \min_{\substack{\mathbf{x}^T \mathbf{1} = 0 \\ \mathbf{x} \neq 0}} \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{L} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = \lambda_2(\mathbf{L}).$$

Für gerichtete, stark zusammenhängende und ausgeglichene Graphen gilt $0 < a_{\mathcal{G}} \leq \Re\{\lambda_2\}$.

Zur Synchronisierung passiver Systeme gilt [2; 5]:

Satz 2. Gegeben seien identische Agenten, deren Dynamik der Form (1) passiv ist bezüglich eines Ausgangs \mathbf{y}_i und eines Eingangs \mathbf{u}_i mit den Speicherfunktionen V_i und S_i . Es gelte Annahme 1. Dann wird das Multi-Agenten-System synchronisiert, wenn für jeden Agenten

$$\mathbf{u}_i = -\mathbf{K} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j), \quad (5)$$

mit positiv definiten Matrix $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und \mathcal{N}_i aus Definition 2, gewählt wird.

3 Reglerentwurf

Aufbauend auf den eingeführten Voraussetzungen wird nun eine Erweiterung der passivitätsbasierten Synchronisierung vorgestellt. Dabei wird die unter Verwendung des Ergebnisses aus Satz 2 synchronisierbare Klasse von Systemen erweitert. Zuerst werden daher die Systeme in strenger Rückkopplungsform eingeführt, bevor im Anschluss ein, an das Backstepping-Verfahren [1; 10; 24] angelehnter, rekursiver Reglerentwurf durchgeführt wird.

3.1 Problemstellung

Der vorgestellte Entwurf beschränkt sich auf Agenten mit der Dynamik

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{0,i} &= \mathbf{a}_{0,i}(\xi_{0,i}) + \mathbf{B}_{0,i}(\xi_{0,i})\xi_{1,i}, \\ \dot{\xi}_{1,i} &= \mathbf{a}_{1,i}(\xi_{0,i}, \xi_{1,i}) + \mathbf{B}_{1,i}(\xi_{0,i}, \xi_{1,i})\xi_{2,i}, \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{k-1,i} &= \mathbf{a}_{k-1,i}(\xi_{0,i}, \dots, \xi_{k-1,i}) + \dots \\ &\quad + \mathbf{B}_{k-1,i}(\xi_{0,i}, \dots, \xi_{k-1,i})\xi_{k,i}, \\ \dot{\xi}_{k,i} &= \mathbf{a}_{k,i}(\xi_{0,i}, \dots, \xi_{k,i}) + \mathbf{B}_{k,i}(\xi_{0,i}, \dots, \xi_{k,i})\mathbf{u}_i, \end{aligned} \quad (6)$$

mit $\xi_{m,i}, \mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{a}_{m,i}(\cdot) \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{B}_{m,i}(\cdot) \in \mathbb{R}^{p \times p}$. Für den Entwurf benötigen wir, dass $\mathbf{a}_{0,i}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ und dass $\mathbf{B}_{m,i}(\cdot)$ invertierbar ist für alle $m = 0, \dots, k$.

Zur Erweiterung passivitätsbasierter Verfahren wird Satz 1 betrachtet. Aus diesem können Bedingungen an eine statische Zustandsrückführung gefolgert werden, sodass das System mit dieser Rückführung äquivalent zu einem passiven System ist. D. h., man kann dann für den entsprechenden neuen Eingang \mathbf{v} das Ergebnis aus Satz 2 zur Synchronisierung des Systems verwenden. Es muss also ein Ausgang \mathbf{y}_k existieren, der sowohl die Relativgradbedingung als auch die Bedingung an die Nulldynamik erfüllt. Außerdem muss eine geeignete Speicherfunktion V gefunden werden.

Zur Erfüllung der Relativgradbedingung kann mittels des Backstepping-Verfahrens ein geeigneter Ausgang rekursiv konstruiert werden. Gleichzeitig wird durch den Entwurf die Bedingung an die Nulldynamik erfüllt. Im Folgenden wird also das Ziel sein, eine zur Synchronisierung (und nicht zur Stabilisierung) geeignete Rückführung auf Basis des Backstepping-Verfahrens für die betrachteten Systeme zu entwerfen. Anschließend ermöglicht die Ausgangskopplung aus Satz 2 dann die Synchronisierung der Agenten. Dies illustriert Bild 1.

Daraus ergibt sich die Aufgabenstellung wie folgt: Finde für jeden Agenten i einen geeigneten Stellgrößenvektor \mathbf{u}_i so, dass für den Zustand $\xi_i = [\xi_{0,i}, \dots, \xi_{k,i}]^\top$ des Agenten $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\xi_i(t) - \xi_j(t)\| = 0 \forall j \in \{1, \dots, N\}$ gilt.

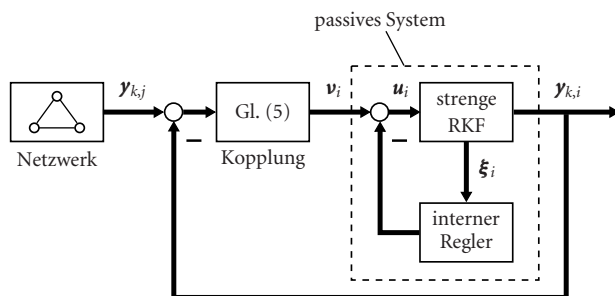


Bild 1 Darstellung der kaskadierten Synchronisierung durch die passive Kopplung und den internen Regler für Systeme in strenger Rückkopplungsform (RKF).

3.2 Rekursiver Entwurf

Der Entwurf des Reglers zur Synchronisierung eines Kollektivs identischer Agenten mit der Dynamik (6) lässt sich in vier Schritten darstellen. Da diese Schritte für alle Agenten durchgeführt werden müssen, wird zur Vereinfachung der Notation der Agentenindex i im Folgenden nur dort verwendet, wo eine Unterscheidung zwischen den Agenten notwendig ist.

Schritt 1: Erstes Teilsystem

Ausgangspunkt ist das erste Teilsystem von (6),

$$\dot{\xi}_0 = \mathbf{a}_0 + \mathbf{B}_0 \xi_1. \quad (7)$$

Für jeden Agenten wird nun $\xi_1 = \alpha_0(\xi_0)$ als virtuelle Stellgröße interpretiert, um diese Dynamik zu stabilisieren. D. h., es existiert eine Funktion $W_1(\xi_0) \geq 0$ mit $W_1(\mathbf{0}) = 0$ und $\dot{W}_1 < 0$ für alle $\xi_0 \neq \mathbf{0}$, die als Ljapunov-Funktion zum Nachweis der Stabilität von (7) verwendet werden kann. Wählt man

$$W_1 = \frac{1}{2} \xi_0^\top \xi_0, \quad (8)$$

so ergibt sich

$$\dot{W}_1 = \xi_0^\top \dot{\xi}_0 = \xi_0^\top (\mathbf{a}_0 + \mathbf{B}_0 \alpha_0).$$

Als virtuelle Stellgröße verwendet man

$$\alpha_0 = -\mathbf{B}_0^{-1} (\mathbf{a}_0 + \xi_0), \quad (9)$$

sodass

$$\dot{W}_1(\xi_0) = -\xi_0^\top \xi_0 < 0, \forall \xi_0 \neq \mathbf{0}$$

gilt. Daraus folgt direkt asymptotische Stabilität von (7). Dieser Schritt entspricht exakt dem Vorgehen beim Standard-Backstepping-Verfahren.

Schritt 2: Erweiterung des Systems

Da obige Stellgröße α_0 aber nur virtuell existiert, führt man im nächsten Schritt die Fehlerkoordinate

$$\mathbf{y}_1 = \xi_1 - \alpha_0$$

ein und erweitert das Teilsystem (7) zu

$$\dot{\xi}_0 = \mathbf{a}_0 + \mathbf{B}_0(\alpha_0 + \mathbf{y}_1), \quad (10)$$

$$\dot{\mathbf{y}}_1 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{B}_1 \xi_2 - \dot{\alpha}_0.$$

In diesem zweiten Schritt wird $\xi_2 = \alpha_1(\xi_0, \mathbf{y}_1)$ als virtuelle Stellgröße interpretiert, um das erweiterte System (10) zu stabilisieren. D. h., es muss auch hier eine Funktion $W_2(\xi_0, \mathbf{y}_1) \geq 0$ gefunden werden, sodass $W_2(\mathbf{0}) = 0$ und $\dot{W}_2 < 0$ für alle $(\xi_0, \mathbf{y}_1) \neq \mathbf{0}$ ist. Verwendet man

$$W_2 = W_1 + \frac{1}{2} \mathbf{y}_1^\top \mathbf{y}_1 \quad (11)$$

als Kandidatin für eine Ljapunov-Funktion und berechnet deren Ableitung nach der Zeit, so erhält man

$$\begin{aligned} \dot{W}_2 &= \xi_0^\top (\mathbf{a}_0 + \mathbf{B}_0 \alpha_0) + \xi_0^\top \mathbf{B}_0 \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_1^\top \dot{\mathbf{y}}_1 \\ &= \tilde{W}_1 + \mathbf{y}_1^\top (\mathbf{B}_0^\top \xi_0 - \dot{\alpha}_0 + \mathbf{a}_1 + \mathbf{B}_1 \alpha_1). \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\tilde{W}_1 = \dot{W}_1|_{y_1=0} = -\tilde{\xi}_0^\top \xi_0. \quad (12)$$

Nun weicht der Entwurf vom Standard-Backstepping-Verfahren ab und man wählt die virtuelle Stellgröße als

$$\alpha_1 = \mathbf{B}_1^{-1} (\dot{\alpha}_0 - \mathbf{a}_1 + \mathbf{B}_0^\top \tilde{\xi}_0 - \mathbf{B}_0^\top \mathbf{B}_0 y_1 - y_1). \quad (13)$$

Damit ergibt sich

$$\dot{W}_2 = -\tilde{W}_2 - y_1^\top y_1 < 0$$

für alle $(\xi_0, y_1) \neq \mathbf{0}$, mit

$$\tilde{W}_2 = (\xi_0 - \mathbf{B}_0 y_1)^\top (\xi_0 - \mathbf{B}_0 y_1). \quad (14)$$

Nun ist auch das System (10) asymptotisch stabil.

Schritt 3: Entwurf der virtuellen Stellgrößen ξ_3, \dots, ξ_k

Diesem Schema entsprechend, führt man in jedem Schritt eine Fehlerkoordinate $y_r = \xi_r - \alpha_{r-1}$ mit $r = 2, \dots, k-1$ ein und erweitert (10) sukzessive zu

$$\dot{\xi}_0 = \mathbf{a}_0 + \mathbf{B}_0 (\alpha_0 + y_1),$$

$$\dot{y}_1 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{B}_1 (\alpha_1 + y_2) - \dot{\alpha}_0,$$

⋮

$$\dot{y}_{r-1} = \mathbf{a}_{r-1} + \mathbf{B}_{r-1} (\alpha_{r-1} + y_r) - \dot{\alpha}_{r-2},$$

$$\dot{y}_r = \mathbf{a}_r + \mathbf{B}_r \xi_{r+1} - \dot{\alpha}_{r-1}.$$

Außerdem wird

$$W_{r+1}(\xi_0, y_1, \dots, y_r) = W_r + \frac{1}{2} y_r^\top y_r \quad (15)$$

als Kandidatin für eine Ljapunov-Funktion verwendet, sodass sich die virtuellen Stellgrößen $\xi_{r+1} = \alpha_r$ aus

$$\alpha_r = \mathbf{B}_r^{-1} (\dot{\alpha}_{r-1} - \mathbf{a}_r + \mathbf{B}_{r-1}^\top y_{r-1} + \mathbf{B}_{r-1}^\top \mathbf{B}_{r-1} y_r - y_r) \quad (16)$$

ergeben. Dies führt für die zeitliche Ableitung der Ljapunov-Funktion jeweils auf

$$\dot{W}_{r+1} = -\tilde{W}_{r+1} - y_r^\top y_r,$$

mit

$$\tilde{W}_{r+1} = \tilde{W}_r - (y_{r-1} - \mathbf{B}_{r-1} y_r)^\top (y_{r-1} - \mathbf{B}_{r-1} y_r).$$

Schritt 4: Entwurf der Stellgrößen u_i

Im letzten Schritt wird dann die Fehlerkoordinate $y_k = \xi_k - \alpha_{k-1}(\xi_0, y_1, \dots, y_{k-1})$ eingeführt und die letztmalige Erweiterung des Systems ergibt

$$\dot{\xi}_0 = \mathbf{a}_0 (\alpha_0 + y_1),$$

$$\dot{y}_1 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{B}_1 (\alpha_1 + y_2) - \dot{\alpha}_0,$$

⋮

$$\dot{y}_{k-1} = \mathbf{a}_{k-1} + \mathbf{B}_{k-1} (\alpha_{k-1} + y_k) - \dot{\alpha}_{k-2}, \quad (17)$$

$$\dot{y}_k = \mathbf{a}_k + \mathbf{B}_k u - \dot{\alpha}_{k-1}.$$

An diesem Punkt des Entwurfs ist man in der Lage, die Restriktion an den Relativgrad zur Passivierung des Systems nach Satz 1 zu erfüllen: Wählt man das soeben konstruierte y_k als Ausgang, so hängt dessen erste Zeitableitung bereits vom echten Eingang u ab. Wird $V = W_k + \frac{1}{2} y_k^\top y_k$ als Speicherfunktion verwendet, so gilt

$$\dot{V} = -\tilde{W}_k - y_{k-1}^\top y_{k-1} + y_k^\top (\mathbf{B}_{k-1}^\top y_{k-1} - \dot{\alpha}_{k-1} + \mathbf{a}_k + \mathbf{B}_k u).$$

Um nun Äquivalenz unter statischer Zustandsrückführung zu einem passiven System nach Satz 1 zu erreichen, wählt man

$$u = \mathbf{B}_k^{-1} (\dot{\alpha}_{k-1} - \mathbf{a}_k + \mathbf{B}_{k-1}^\top y_{k-1} - \mathbf{B}_{k-1}^\top \mathbf{B}_{k-1} y_k + v), \quad (18)$$

sodass

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \tilde{W}_k - (y_{k-1} + \mathbf{B}_{k-1} y_k)^\top (y_{k-1} - \mathbf{B}_{k-1} y_k) + y_k^\top v \\ &= \tilde{V} + y_k^\top v. \end{aligned}$$

Durch den Entwurf ist sichergestellt, dass $\tilde{V} \leq 0$ ist. Somit folgt nach Definition 1, dass das System passiv bezüglich des neuen Eingangs v , des Ausgangs y_k und der Speicherfunktion V ist. Dann kann die Synchronisierung der Systeme nach Satz 2 erreicht werden, wenn

$$v_i = -K \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (y_{k,i} - y_{k,j}) \quad (19)$$

mit positiv definitem K für jeden Agenten gewählt wird.

Satz 3. Gegeben sei ein Kollektiv N identischer Agenten mit der Dynamik (6), verbunden über einen gerichteten Graphen \mathcal{G} . Es gelte Annahme 1. Synchronisierung, nach Definition 4, ist garantiert, wenn als Stellgröße

$$u_i = \mathbf{B}_{k,i}^{-1} \left(\dot{\alpha}_{k-1,i} - \mathbf{a}_{k,i} + \mathbf{B}_{k-1,i}^\top y_{k-1,i} - \dots - \mathbf{B}_{k-1,i}^\top \mathbf{B}_{k-1,i} y_{k,i} - K \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (y_{k,i} - y_{k,j}) \right),$$

mit \mathcal{N}_i aus Definition 2, für jeden Agenten gewählt wird.

Beweis. Eine gemeinsame Ljapunov-Funktion für das Kollektiv ist in diesem Fall $U = 2 \sum_{i=1}^N V_i$. Ihre zeitliche Ableitung ergibt sich als

$$\dot{U} = -2 \sum_{i=1}^N \tilde{V}_i - 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} y_{k,i}^\top K (y_{k,i} - y_{k,j}).$$

Der zweite Teil dieser Gleichung kann mittels der Laplacematrix zusammengefasst werden als

$$\dot{U} = -2 \sum_{i=1}^N \tilde{V}_i + 2 y_k^\top K (\mathbf{L} \otimes \mathbb{I}_n) y_k$$

mit dem Kronecker-Produkt \otimes und der $n \times n$ Einheitsmatrix \mathbb{I}_n . Außerdem ist hier $y_k = [y_{k,1}^\top, \dots, y_{k,N}^\top]^\top$. Wie

bereits erwähnt, gilt durch den Entwurf

$$\begin{aligned} \tilde{V}_i = & -(\xi_{0,i} - \mathbf{B}_{0,i}\mathbf{y}_{1,i})^\top (\xi_{0,i} - \mathbf{B}_{0,i}\mathbf{y}_{1,i}) - \dots \\ & - \sum_{n=2}^k (\mathbf{y}_{n-1,i} - \mathbf{B}_{n-1,i}\mathbf{y}_{n,i})^\top (\mathbf{y}_{n-1,i} - \mathbf{B}_{n-1,i}\mathbf{y}_{n,i}). \end{aligned}$$

Folglich gilt mit Annahme 1 und Lemma 2, dass $\dot{U} \leq 0$.

Um nun noch Synchronisierung nachzuweisen, muss das Invarianzprinzip nach LaSalle angewendet werden [8]. Dazu betrachten wir eine kompakte Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^{kNp}$, die positiv invariant bezüglich (17) ist. Dann ist U eine skalare C^1 -Funktion, für die $\dot{U} \leq 0$ in Ω gilt. Wir suchen nun die größte in $\mathcal{M} = \{z \in \Omega \mid \dot{U} \equiv 0\}$ enthaltene invariante Menge, wobei $z = [\xi_{0,1}^\top, \dots, \xi_{0,N}^\top, \mathbf{y}_{1,1}^\top, \dots, \mathbf{y}_{k,N}^\top]^\top$ ist. Aufgrund der Struktur von \dot{U} folgt daraus $\xi_0 = \mathbf{B}_0\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_{r-1} = \mathbf{B}_{r-1}\mathbf{y}_r$ für $r = 2, \dots, k-1$ und $\mathbf{y}_{k,i} = \mathbf{y}_{k,j}$ für alle Agenten in der Gruppe. Nach Einsetzen der virtuellen Stellgrößen (9), (13), (16) und der echten Eingangsgröße \mathbf{u} aus (18) in Verbindung mit (19) für jeden Agenten reduziert sich die Dynamik (17) zu

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_0 &= -(\xi_0 - \mathbf{B}_0\mathbf{y}_1) \equiv \mathbf{0}, \\ \dot{\mathbf{y}}_1 &= \mathbf{B}_0^\top (\xi_0 - \mathbf{B}_0\mathbf{y}_1) - (\mathbf{y}_1 - \mathbf{B}_1\mathbf{y}_2) \equiv \mathbf{0}, \\ &\vdots \\ \dot{\mathbf{y}}_r &= \mathbf{B}_{r-1}^\top (\mathbf{y}_{r-1} - \mathbf{B}_{r-1}\mathbf{y}_r) - (\mathbf{y}_r - \mathbf{B}_r\mathbf{y}_{r+1}) \equiv \mathbf{0}, \\ &\vdots \\ \dot{\mathbf{y}}_k &= \mathbf{B}_{k-1}^\top (\mathbf{y}_{k-1} - \mathbf{B}_{k-1}\mathbf{y}_k) + \mathbf{v} \equiv \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Auch hier ist $r = 2, \dots, k-1$. Man sieht, dass \mathcal{M} eine Ruhelage von (17) ist, weshalb \mathcal{M} selbst die größte in Ω enthaltene, invariante Menge ist. Aufgrund des Invarianzprinzips wissen wir, dass alle Lösungen, die in Ω anfangen, für $t \rightarrow \infty$ in die Menge \mathcal{M} streben. Daraus folgt, dass $\mathbf{y}_{k,i} = \mathbf{y}_{k,j}$, $\mathbf{y}_{k-1,i} = \mathbf{B}_{k-1,i}\mathbf{y}_{k,j}$, $\mathbf{y}_{p,i} = \prod_{n=k-1}^p \mathbf{B}_{n,i}\mathbf{y}_{k,j}$ für $p = k-2, \dots, 1$, und schließlich $\xi_{0,i} = \prod_{n=k-1}^0 \mathbf{B}_{n,i}\mathbf{y}_{k,j}$. Dabei gibt der Operator \prod_n^p eine Linksmultiplikation der aufeinanderfolgenden Faktoren $\mathbf{B}_{n,i}$ an. Da alle Agenten identisch sind, gilt $\mathbf{B}_{m,i} = \mathbf{B}_{m,j} \forall m \in \{0, \dots, k\}$, und $i, j \in \{1, \dots, N\}$. Folglich ist $\xi_{0,i} = \xi_{0,j}$, $\mathbf{y}_{n,i} = \mathbf{y}_{n,j}$ für $n = 1, \dots, k$, und Synchronisierung nach Definition 4 gezeigt. \square

Bemerkung 1. Die Existenz einer positiv invarianten Menge Ω ist durch Konstruktion der Ljapunov-Funktion U garantiert, da U radial unbeschränkt ist. In diesem Fall ist eine von einer Höhenlinie der Ljapunov-Funktion eingeschlossene Menge, also $\Omega = \{z \mid U(z) \leq c\}$, für jedes $c > 0$ kompakt [8].

3.3 Erweiterung der Systemklasse

Das Backstepping-Verfahren lässt sich auch für nichtholonome Systeme, gegeben in einer sogenannten *verketteten Form*, verwenden [18; 32]. Dabei sind viele

nichtholonome System über eine Eingangs- und Zustandstransformation in eine verkettete Form überführbar [9]. Eine *verkettete Form höherer Ordnung*⁶ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_0^{(\kappa_0)} &= u_1, \\ \dot{\xi}_1^{(\kappa_1)} &= u_1 \xi_2, \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{k-1}^{(\kappa_{k-1})} &= u_1 \xi_k, \\ \dot{\xi}_k^{(\kappa_k)} &= u_2, \end{aligned} \tag{20}$$

wobei κ_m den Grad der zeitlichen Ableitung der jeweiligen Variable $\xi_m \in \mathbb{R}$ mit $m = 0, \dots, k$ angibt. Typische Beispiele dieser Systeme sind mobile Roboter, die Messerklinge, Chaplygin's Schlitten [9], oder planare Manipulatoren, das PVTOL⁷ ohne Schwerkraft und Modelle für Unterwasserfahrzeuge [16]. Nun soll gezeigt werden, wie das Ergebnis aus Satz 3 erweitert werden kann, um auch Systeme der Form (20) zu synchronisieren.

Zuerst wird dazu die Differenzialgleichung κ_0 -ter Ordnung $\dot{\xi}_0^{(\kappa_0)} = u_1$ in das System erster Ordnung

$$\dot{\xi}_{0,1} = \xi_{0,2}, \quad \dots, \quad \dot{\xi}_{0,\kappa_0} = u_1$$

umgewandelt. Dabei definiert man jeweils $\xi_{m,1} := \xi_m$ für $m = 0, \dots, k$. Dieses System liegt dann in der strengen Rückkopplungsform vor, sodass der Entwurf aus Abschnitt 3.2 angewendet und die erste Stellgröße u_1 festgelegt werden kann.

Ganz ähnlich wird nun mit allen weiteren Teilsystemen $\dot{\xi}_l^{(\kappa_l)} = u_1 \xi_{l+1}$ für $l = 1, \dots, k-1$ verfahren. Auch diese werden in Systeme erster Ordnung

$$\dot{\xi}_{l,1} = \xi_{l,2}, \quad \dots, \quad \dot{\xi}_{l,\kappa_l} = u_1 \xi_{l+1}$$

umgeschrieben und für die ersten κ_{l-1} Schritte nutzt man ebenfalls den Entwurf aus Abschnitt 3.2.

Schließlich wird beim letzten Schritt, also dem Entwurf der virtuellen Stellgrößen ξ_{l+1} , bei Anwendung der vorgestellten Methode eine Division durch u_1 notwendig. Da durch den vorangestellten Entwurf $u_1 \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$, muss in diesem Schritt eine Anpassung erfolgen. Dabei muss die Beschränktheit und Konvergenz der virtuellen Stellgrößen sichergestellt werden. Mit der Fehlerkoordinate $y_{l,\kappa_l} = \xi_{l,\kappa_l} - \alpha_{l,\kappa_{l-1}}$ und $W_{l,\kappa_l} = W_{l,\kappa_{l-1}} + \frac{1}{2}y_{l,\kappa_l}^2$ als Kandidatin für eine Ljapunov-Funktion ergibt sich die virtuelle Stellgröße $\xi_{l+1} = \alpha_{l,\kappa_l}$ zu

$$\alpha_{l,\kappa_l} = \frac{(2\kappa_l - 1)y_{l,\kappa_{l-1}} - \kappa_l y_{l,\kappa_l} + \dot{\alpha}_{l,\kappa_{l-1}}}{u_1} - u_1 y_{l,\kappa_l}. \tag{21}$$

Dabei beschreiben $y_{l,\kappa_{l-1}}$ und $\dot{\alpha}_{l,\kappa_{l-1}}$ die im vorherigen Schritt $\kappa_l - 1$ verwendete Fehlerkoordinate und die Ableitung der dort festgelegten virtuellen Stellgröße. Zur

⁶ Nach [16] existiert keine einheitliche Bezeichnung für Systeme dieser Art.

⁷ Planar Vertical Take-Off and Landing Aircraft

Gewährleistung der Beschränktheit und Konvergenz der virtuellen Stellgröße dient der Faktor k_l . Dieser muss so gewählt werden, dass der Zähler von α_{l,k_l} schneller gegen Null konvergiert als der Nenner, also die Stellgröße u_1 . Eine Abschätzung der Konvergenzrate für u_1 ist dabei im Allgemeinen nicht möglich⁸, hängt jedoch immer vom Kommunikationsnetzwerk der Agenten ab, da ein Synchronisierungsalgorithmus verwendet wird.

Nur im Fall von $\kappa_0 = 1$ lässt sich die Konvergenzrate durch den zweitkleinsten Eigenwert λ_2 der Laplacematrix angeben, sodass $k_l > (l+1)\Re\{\lambda_2\}$ gewählt werden muss. Auf diesen Fall gehen wir in einem der Beispiele noch genauer ein. Für alle weiteren Fälle mit $\kappa_0 > 1$ muss der Wert von k_l mittels Simulationen bestimmt werden. Allgemein gilt für die Ableitung der Ljapunov-Funktion dann

$$\dot{W}_{l,k_l} = \tilde{W}_{l,k_l} - u_1^2 y_{l,k_l}^2 \leq 0, \quad (22)$$

mit

$$\tilde{W}_{l,k_l} = \tilde{W}_{l,k_l-1} - k_l (y_{l,k_l-1} - y_{l,k_l})^2.$$

Im nächsten Schritt wird erneut $\xi_{l+1}^{(\kappa_{l+1})} = u_1 \xi_{l+2}$ nach

$$\dot{\xi}_{l+1,1} = \xi_{l+1,2}, \quad \dots, \quad \dot{\xi}_{l+1,k_{l+1}} = u_1 \xi_{l+2}$$

überführt. Entsprechend führt man den Fehler $y_{l+1,1} = \xi_{l+1,1} - \alpha_{l,k_l}$ ein und fährt mit $W_{l+1,1} = W_{l,k_l} + \frac{1}{2} y_{l+1,1}^2$ als mögliche Ljapunov-Funktion fort. Die virtuelle Stellgröße erhält man aus

$$\alpha_{l+1,k_{l+1}} = \dot{\alpha}_{l,k_l} + u_1 y_{l,k_l} - 2y_{l+1,1}, \quad (23)$$

sodass

$$\dot{W}_{l+1,1} = \tilde{W}_{l,k_l} - (u_1 y_{l,k_l} - y_{l+1,1})^2 - y_{l+1,1}^2 < 0$$

sichergestellt ist. Im Weiteren wird wieder wie in Abschnitt 3.2 verfahren, außer dass in jedem κ_l -ten Schritt die Erweiterung aus (21) verwendet werden muss. Schließlich wird für die zweite Stellgröße im System $\xi_k^{(\kappa_k)} = u_2$ dieselbe Prozedur wie für die erste Stellgröße u_1 angewendet und der Entwurf ist abgeschlossen.

Bemerkung 2. Die Beschränktheit und Konvergenz der virtuellen Stellgrößen kann natürlich nicht mehr sichergestellt werden, wenn durch die Anfangsbedingungen $u_1 = 0$ für $t_0 = 0$ gilt. In diesem Fall muss das System für eine (beliebig) kleine Zeit t_ϵ durch eine konstante Stellgröße $u_1 = \text{const.}$ gesteuert werden.

4 Beispiele

In diesem Abschnitt möchten wir anhand zweier Beispiele die vorgestellte Methode illustrieren. Dabei gehen wir auf zwei wichtige Klassen ein, für die der Entwurf möglich ist: erstens die *vollständig direkt gesteuerten mechanischen Systeme* und zweitens die *driftfreien nichtholonomen Systeme*.

⁸ Die nur eingeschränkte Möglichkeit, die Güte der Regelung abzuschätzen, ist ein bekanntes Problem des Backstepping-Verfahrens.

4.1 Lagesynchronisierung von Satelliten

Das Problem der Lagesynchronisierung von Satelliten wurde z. B. in den Arbeiten [3; 22; 25] betrachtet. Dabei werden die Satelliten als vollständig direkt gesteuerte Starrkörper modelliert. Ziel ist es nun, die Lage (Orientierung) bezüglich eines raumfesten Koordinatensystems zu synchronisieren.

Der Schlüssel zur Beschreibung ihrer Dynamik ist die Wahl einer geeigneten Parametrierung zur Darstellung der Lage der Starrkörper. Um dabei Singularitäten zu vermeiden, werden Quaternionen verwendet. Ein Quaternion $\mathbf{q} = [q_0, \boldsymbol{\eta}^\top]^\top$ mit $q_0 \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\eta} = [\eta_1, \eta_2, \eta_3]^\top \in \mathbb{R}^3$ ist so definiert, dass für den Betrag $q_0^2 + \boldsymbol{\eta}^\top \boldsymbol{\eta} = 1$ gilt. Nach [30] ergibt sich für die Lagedynamik eines Satelliten

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{Q}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\omega}, \quad (24)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{J}^{-1} (\mathbf{u} - \widehat{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}),$$

wobei $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$ die Winkelgeschwindigkeit, $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ den Trägheitstensor und $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ den Stellgrößenvektor jeweils bezüglich des körperfesten Koordinatensystems bezeichnen. Außerdem ist

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\eta}^\top \\ q_0 \mathbb{I}_3 + \widehat{\boldsymbol{\eta}} \end{bmatrix},$$

und der Operator $(\widehat{\cdot})$ erzeugt eine schiefsymmetrische Matrix aus einem Vektor $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]^\top$ gemäß

$$\widehat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Da das System vollständig direkt gesteuert ist, lässt sich ein Moment um jede körperfeste Achse aufbringen.

Zur Anwendung des vorgestellten Entwurfs ist es erforderlich, dass die Ruhelage im Ursprung des Systems liegt. Aufgrund obiger Forderung an den Betrag eines Quaternions ist dies nicht der Fall. Deshalb führen wir $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q} - [1, \mathbf{0}^\top]^\top$ ein, sodass (24) wieder die gewünschte Ruhelage besitzt. Man sieht, dass die Dynamik davon unbeeinflusst bleibt, da $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \dot{\mathbf{q}}$.

Im ersten Schritt betrachtet man nun $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\alpha}$ als virtuelle Stellgröße und $W = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^\top \tilde{\mathbf{q}}$ als Kandidatin für eine Ljapunov-Funktion. Setzt man

$$\boldsymbol{\alpha} = -2\mathbf{Q}^{-1} \tilde{\mathbf{q}} = -2\mathbf{Q}^\top \tilde{\mathbf{q}},$$

so ergibt sich $\dot{W} = -\tilde{\mathbf{q}}^\top \tilde{\mathbf{q}} < 0$, $\forall \tilde{\mathbf{q}} \neq \mathbf{0}$. Im zweiten Schritt führt man den Fehler $\mathbf{y} = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\alpha}$ ein und erweitert die Dynamik zu

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{Q}[\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{y}], \quad (25)$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{J}^{-1} \left[\mathbf{u} - \widehat{(\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{y})} \mathbf{J}(\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{y}) \right] - \boldsymbol{\alpha}.$$

Erweitert man gleichermaßen die Ljapunov-Funktion zu $V = W + \frac{1}{2} \mathbf{y}^\top \mathbf{y}$ und verwendet

$$\mathbf{u} = \widehat{(\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{y})} \mathbf{J}(\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{y}) + \mathbf{J} \left(\frac{1}{2} \mathbf{Q}^\top + \dot{\boldsymbol{\alpha}} - \frac{1}{4} \mathbf{y} + \mathbf{v} \right) \quad (26)$$

als Regelgesetz für jeden Agenten, so gilt

$$\dot{V} = -\frac{1}{4} \boldsymbol{\omega}^\top \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{v}.$$

Hieran sieht man direkt, dass das System passiv ist und folglich lässt sich mit

$$\boldsymbol{v}_i = -\mathbf{K} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{y}_j) \quad (27)$$

die Lagesynchronisierung der Satelliten erreichen. Zur Vervollständigung des Regelgesetzes in (26) wird noch

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = -2 \frac{d}{dt} \mathbf{Q}^\top \tilde{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{y} = -2 \frac{d}{dt} \mathbf{Q}^\top \tilde{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{\omega}$$

benötigt. Die Ergebnisse für zufällig gewählte Anfangsbedingungen und $\mathbf{K} = \mathbb{I}_3$ zeigt Bild 2.

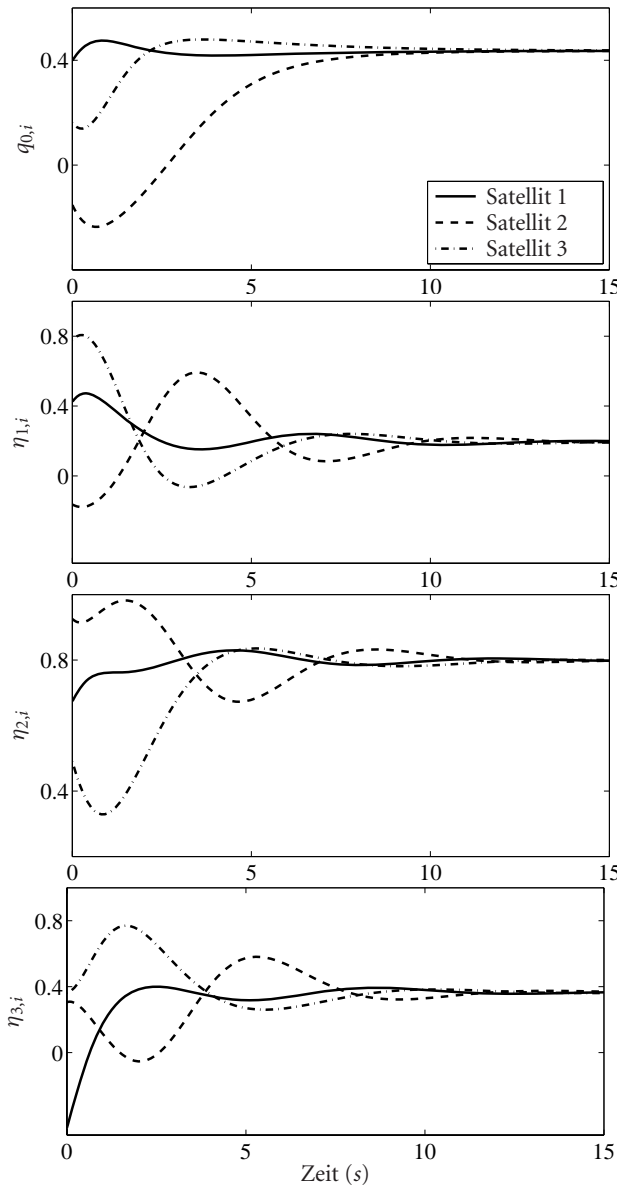


Bild 2 Zeitverlauf der Komponenten der Quaternionen \boldsymbol{q}_i für drei Satelliten mit dem Regler aus (26) mit (27).

4.2 Posesynchronisierung mobiler Roboter

Einspurmodelle stellen einfache, aber gebräuchliche, Modelle für die Bewegung nichtholonomer, mobiler Roboter dar. Kooperative Regelungen für diese Systeme wurden z. B. in den Arbeiten [6; 13; 21] entworfen. Die Bewegung jedes Agenten wird dabei mittels des Modells

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \cos \theta, \\ \dot{y} &= v \sin \theta, \\ \dot{\theta} &= \omega \end{aligned} \quad (28)$$

abgebildet, wobei $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die Position des Roboters und $\theta \in \mathbb{S}^1$ seine Orientierung darstellt. Die translatorische Geschwindigkeit $v \in \mathbb{R}$ und die Winkelgeschwindigkeit $\omega \in \mathbb{R}$ werden als Stellgrößen des Systems betrachtet. Unter Verwendung der Zustands- und Eingangstransformation [9]

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \theta, & u_1 &= \omega, \\ \xi_1 &= x \sin \theta - y \cos \theta, & u_2 &= v - \xi_2 \omega, \\ \xi_2 &= x \cos \theta + y \sin \theta \end{aligned}$$

erhält man aus (28) die verkettete Form

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_0 &= u_1, \\ \dot{\xi}_1 &= u_1 \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= u_2. \end{aligned} \quad (29)$$

Für den Reglerentwurf betrachten wir zunächst die Dynamik von ξ_0 , also die Orientierung der Roboter, und verwenden das Konsensprotokoll (2), sodass

$$u_{1,i} = -\gamma \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\xi_{0,i} - \xi_{0,j}) = -\gamma \eta, \quad (30)$$

mit $\gamma > 0$ und $i = 1, \dots, N$. Es sei angemerkt, dass (30) nicht global, sondern nur lokal zur Synchronisierung der Orientierung führen wird, da $\xi_{0,i} \in \mathbb{S}^1$ ist (im Gegensatz zu $z_i \in \mathbb{R}$ in (2)). Globale Synchronisierung ist daher nur unter stärkeren Einschränkungen an die Kommunikations-topologie als in Annahme 1 möglich [26].

Nimmt man zur Vereinfachung an, dass der Graph des Kommunikationsnetzwerks vollständig zusammenhängt, so ergibt sich $\lambda_2 = N$ als Abschätzung für die Konvergenzrate der Orientierungssynchronisierung. Im zweiten Schritt betrachtet man das System

$$\dot{\xi}_1 = u_1 \xi_2 \quad (31)$$

und verwendet $\xi_2 = \alpha$ als virtuelle Stellgröße und $W_1 = \frac{1}{2} \xi_1^2$ als Kandidatin für eine Ljapunov-Funktion. Deren Ableitung nach der Zeit ergibt sich zu

$$\dot{W}_1 = \xi_1 u_1 \alpha_1 = -\gamma k_1 \xi_1^2 = -2\gamma k_1 W_1. \quad (32)$$

Um Stabilität zu gewährleisten, wurde $\alpha_1 = k_1 \frac{\xi_1}{\eta}$ gewählt. Um darüber hinaus auch die Beschränktheit und Konvergenz der virtuellen Stellgröße α_1 sicherzustellen, muss $k_1 > N$ sein. Man sieht anhand von (32), dass die Ljapunov-Funktion W_1 mit $2\gamma k_1$ abklingt und daher ξ_1

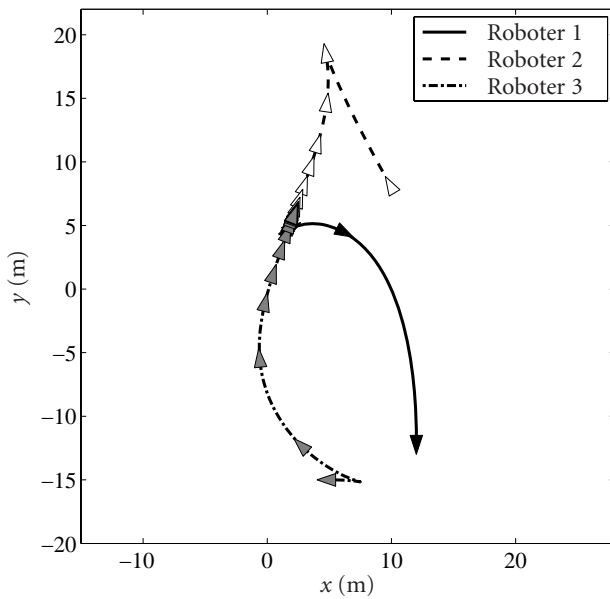


Bild 3 Bewegung der drei mobilen Roboter in der Ebene bei Verwendung der Regelung (30), (34). Die längere Seite des jeweiligen Dreiecks zeigt die Orientierung des Roboters an.

mit γk_1 . Außerdem klingt η nach (30) mit $\gamma \lambda_2$ ab, sodass die Bedingung direkt ablesbar ist aus

$$\alpha_1 = k_1 \frac{\exp(-\gamma k_1)}{\exp(-\gamma \lambda_2)} = k_1 \exp(-\gamma(k_1 - \lambda_2)).$$

Im nächsten Schritt führt man den Fehler $y_1 = \xi_2 - \alpha_1$ ein und erweitert (31) zu

$$\dot{\xi}_1 = u_1(\alpha_1 + y_1), \quad (33)$$

$$\dot{y}_1 = u_2 - \dot{\alpha}_1.$$

Hier taucht bereits die zweite Stellgröße auf und man verwendet $V = W_1 + \frac{1}{2}y_1^2$ als Kandidatin für eine Ljapunov-Funktion. Deren zeitliche Ableitung ist

$$\dot{V} = -\gamma k_1 \xi_1^2 + y_1(\xi_1 u_1 - \dot{\alpha}_1 + u_2).$$

Zur Synchronisierung wählt man nun für jeden Roboter

$$u_2 = (2\gamma k_1 - 1)u_1 \xi_1 - \gamma k_1 u_1^2 y_1 + \dot{\alpha}_1 - k_2 \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (y_{1,i} - y_{1,j}). \quad (34)$$

Aufgrund des vollständig zusammenhängenden Kommunikationsnetzwerks ist $\mathcal{N}_i = \{1, \dots, N\} \setminus \{i\}$. Außerdem benötigt man

$$\dot{\alpha}_1 = k_1 \frac{\dot{\xi}_1 \eta - \xi_1 \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (u_{1,i} - u_{1,j})}{\eta^2}$$

zur Berechnung der zweiten Stellgröße.

Die Ergebnisse für $N = 3$ Roboter mit den Anfangsbedingungen $\mathbf{x}_0 = [12, 10, 5]^\top$, $\mathbf{y}_0 = [-12, 8, -15]^\top$, $\boldsymbol{\theta}_0 = [\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi]^\top$ und den Verstärkungen $\gamma = \frac{1}{N+1}$, $k_1 = N + 1$, $k_2 = 2$ können Bild 3 entnommen werden.

5 Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Beitrag wurde ein Verfahren zur Synchronisierung von Systemen in strenger Rückkopplungsform vorgestellt. Es beruht auf der Äquivalenz unter statischer Zustandsrückführung dieser Systeme zu passiven Systemen und erweitert daher bestehende Ergebnisse der passivitätsbasierten Synchronisierung auf diese Systemklasse. Der Reglerentwurf orientiert sich am bekannten Backstepping-Verfahren und verwendet eine rekursive Entwurfsprozedur. Die so erhaltenen Regelgesetze sind in der Lage, ein Netzwerk identischer dynamischer Systeme, welches stark zusammenhängt, schleifenfrei und ausgeglichen ist, zu synchronisieren.

In Zukunft wäre es einerseits interessant die starken Einschränkungen an die Kommunikationstopologie durch realistischere ersetzen zu können. Andererseits wäre Synchronisierung nur unter Verwendung von Relativinformation eine sinnvolle Erweiterung der vorgestellten Methode. Darüber hinaus wäre eine Interpretation des Entwurfs im Zusammenhang mit flachen Systemen interessant, vor allem im Hinblick auf die in [24] verwendeten quasi-statischen Zustandsrückführungen.

Danksagung

Diese Arbeit wurde durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) innerhalb des GRK 1362 „Cooperative, Adaptive and Responsive Monitoring in Mixed Mode Environments“ (www.gkmm.tu-darmstadt.de) gefördert.

Literatur

- [1] ADAMY, J.: *Nichtlineare Regelungen*. Springer, 2009.
- [2] ARCAK, M.: *Passivity as a Design Tool for Group Coordination*. IEEE Transactions on Automatic Control, 52(8):1380–1390, 2007.
- [3] BAI, H., M. ARCAK und J. T. WEN: *Rigid body attitude coordination without inertial frame information*. Automatica, 44(12):3170–3175, 2008.
- [4] BYRNES, C. I., A. ISIDORI und J. C. WILLEMS: *Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, 36(11):1228–1240, 1991.
- [5] CHOPRA, N. und M. W. SPONG: *Passivity-Based Control of Multi-Agent Systems*. In: KAWAMURA, S. und M. SVININ (Hrsg.): *Advances in Robot Control: From Everyday Physics to Human-Like Movements*, S. 107–134. Springer, 2006.
- [6] DIMAROGONAS, D. V. und K. J. KYRIAKOPOULOS: *On the Rendezvous Problem for Multiple Nonholonomic Agents*. IEEE Transactions on Automatic Control, 52(5):916–922, 2007.
- [7] GODSIL, C. und G. ROYLE: *Algebraic Graph Theory*. Springer, 2001.
- [8] KHALIL, H.: *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, 3. Aufl., 2001.
- [9] KOLMANOVSKY, I. und N. H. McCLAMROCH: *Developments in nonholonomic control problems*. IEEE Control Systems Magazine, 15(6):20–36, 1995.
- [10] KRISTIĆ, M., I. KANELAKOPOULOS und P. KOKOTOVIĆ: *Nonlinear and Adaptive Control Design*. Wiley-Interscience, 1995.
- [11] KUGI, A. und K. SCHLACHER: *Analyse und Synthese nicht-linearer dissipativer Systeme: Ein Überblick (Teil 1)*. at – Automatisierungstechnik, 50(2):63–69, 2002.

- [12] KUGI, A. und K. SCHLACHER: *Analyse und Synthese nichtlinearer dissipativer Systeme: Ein Überblick (Teil 2)*. at – Automatisierungstechnik, 50(3):103–111, 2002.
- [13] LISTMANN, K. D., M. MASALAWALA und J. ADAMY: *Consensus for Formation Control of Nonholonomic Mobile robots*. In: 2009 IEEE International Conference on Robotics and Automation, S. 3886–3891, 2009.
- [14] LISTMANN, K. D. und C. A. WOOLSEY: *Output Synchronization of Systems in Chained Form*. In: Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference, S. 3341–3346, 2009.
- [15] LISTMANN, K. D., C. A. WOOLSEY und J. ADAMY: *Passivity-based Coordination of Multi-Agent Systems: A Backstepping Approach*. In: Proceedings of the European Control Conference 2009, S. 2450–2455, 2009.
- [16] LIZARRAGA, D. A., N. P. ANEKE und H. NIJMEIJER: *Robust Point Stabilization of Underactuated Mechanical Systems via the Extended Chained Form*. SIAM Journal on Control and Optimization, 42(6):2172–2199, 2004.
- [17] NAIR, S. und N. E. LEONARD: *Stable Synchronization of Mechanical System Networks*. SIAM Journal on Control and Optimization, 47(2):661–683, 2008.
- [18] NAM, T.-K., J. JONGUSUK und T. MITA: *Control of high order nonholonomic systems by backstepping*. In: 40th IEEE Conference on Decision and Control, S. 1775–1780, 2001.
- [19] OLFATI-SABER, R., J. A. FAX und R. M. MURRAY: *Consensus and Cooperation in Networked Multi-Agent Systems*. Proceedings of the IEEE, 95(1):215–233, 2007.
- [20] POGROMSKY, A. Y.: *Passivity based design of synchronizing systems*. International Journal of Bifurcation and Chaos, 8(2):295–319, 1998.
- [21] QU, Z., J. WANG und R. A. HULL: *Cooperative Control of Dynamical Systems With Application to Autonomous Vehicles*. IEEE Transactions on Automatic Control, 53(4):894–911, 2008.
- [22] REN, W.: *Distributed attitude synchronization for multiple rigid bodies with Euler-Lagrange equations of motion*. In: 46th IEEE Conference on Decision and Control, S. 2363–2368, 2007.
- [23] REN, W., R. W. BEARD und E. M. ATKINS: *Information consensus in multivehicle cooperative control*. IEEE Control Systems Magazine, 27(2):71–82, 2007.
- [24] RUDOLPH, J.: *Rekursiver Entwurf stabiler Regelkreise durch sukzessive Berücksichtigung von Integratoren und quasi-statische Rückführungen*. at – Automatisierungstechnik, 53(8):389–399, 2005.
- [25] SARLETTE, A., R. SEPULCHRE und N. E. LEONARD: *Autonomous rigid body attitude synchronization*. In: 46th IEEE Conference on Decision and Control, S. 2566–2571, 2007.
- [26] SARLETTE, A., S. E. TUNA, V. D. BLONDEL und R. SEPULCHRE: *Global Synchronization on the Circle*. In: Proceedings of the 17th IFAC World Congress, S. 9045–9050, 2008.
- [27] SCARDOVI, L. und R. SEPULCHRE: *Synchronization in networks of identical linear systems*. Automatica, 45(11):2557–2562, 2009.
- [28] SCHAFT, A. VAN DER: *L2-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control*. Springer, 2. Aufl., 2000.
- [29] SEPULCHRE, R., M. JANKOVIĆ und P. KOKOTOVIĆ: *Constructive Nonlinear Control*. Springer, 1996.
- [30] SHUSTER, M. D.: *A Survey of Attitude Representations*. The Journal of Astronautical Sciences, 41(4):439–517, 1993.
- [31] SWAMY, M. N. S. und K. THULASIRAMAN: *Graphs, Networks, and Algorithms*. John Wiley & Sons, 1981.
- [32] TAYEBI, A., M. TADJINE und A. RACHID: *Discontinuous control design for the stabilization of nonholonomic systems in chained form using the backstepping approach*. In: 36th IEEE Conference on Decision and Control, S. 3089–3090, 1997.
- [33] WIELAND, P., J.-S. KIM, H. SCHEU und F. ALLGÖWER: *On Consensus in Multi-Agent Systems with Linear High-Order Agents*. In: Proceedings of the 17th IFAC World Congress, S. 1541–1546, 2008.
- [34] WILLEMS, J.: *Lyapunov functions for diagonally dominant systems*. Automatica, 12(5):519–523, 1976.
- [35] WU, C. W.: *Algebraic connectivity of directed graphs*. Linear and Multilinear Algebra, 53(3):203–223, 2005.

Manuskripteingang: 29. Januar 2010



Dipl.-Ing. Kim D. Listmann ist Doktorand am Fachgebiet Regelungstheorie und Robotik der TU Darmstadt und Mitglied im Graduiertenkolleg „Cooperative, Adaptive and Responsive Monitoring in Mixed Mode Environments“. Hauptarbeitsgebiete: Kooperative Regelungen, vernetzte dynamische Systeme.

Adresse: TU Darmstadt, FB 18, FG Regelungstheorie & Robotik, Landgraf-Georg-Str. 4, 64283 Darmstadt, E-Mail: kdl@ieee.org



Prof. Dr.-Ing. Jürgen Adamy ist Leiter des Fachgebietes Regelungstheorie und Robotik im Fachbereich Elektro- und Informationstechnik der TU Darmstadt. Hauptarbeitsgebiete: Regelungsverfahren für Systeme mit Beschränkungen, Computational Intelligence, autonome mobile Roboter.

Adresse: TU Darmstadt, FB 18, FG Regelungstheorie & Robotik, Landgraf-Georg-Str. 4, 64283 Darmstadt, E-Mail: adamy@rtr.tu-darmstadt.de



Assoc. Prof. Craig A. Woolsey ist Leiter des Nonlinear Systems Lab an der Fakultät für Aerospace and Ocean Engineering der VirginiaTech in Blacksburg (USA). Hauptarbeitsgebiete: Theorie nichtlinearer Regelungen, insbesondere passivitäts-basierte Verfahren und Controlled Lagrangians, mit Anwendung auf autonome Wasser- und Luftfahrzeuge.

Adresse: VirginiaTech, Aerospace and Ocean Engineering, Blacksburg VA 24061, USA, E-Mail: cwoolsey@vt.edu

Verfügbar unter
lediglich die vom Gesetz vorgesehenen Nutzungsrechte gemäß UrhG