



Entwurf sättigender Regler für polynomiale Systeme mit Stellgrößenbeschränkung

Design of Saturating Controllers for Polynomial Systems with Input Constraints

Thomas Gußner, Hendrik Lens, Jürgen Adamy, TU Darmstadt

Zusammenfassung In diesem Artikel wird eine Reglerentwurfsmethode für polynomiale Systeme mit Stellgrößenbeschränkungen vorgestellt, die auf der Sum-of-squares-Zerlegung von Polynomen basiert. Die betrachteten Regelgesetze bestehen aus einer Komposition der Sättigungsfunktion und einer polynomialen bzw. gebrochen rationalen Funktion. Neben dem Regelgesetz errechnet die Methode eine Abschätzung des Einzugsgebiets. Es werden zwei mögliche Entwurfsziele betrachtet: Die Konvergenzrate und die Größe des Einzugsgebiets. Das dem Entwurf zu Grunde liegende Optimierungsproblem ist multilinear in den Parametern und daher nicht konvex. Deshalb wird ein Algorithmus zur lokalen Optimierung solcher nichtkonvexen Probleme vorgeschlagen, der zur Lösung des zuvor aufgestellten Entwurfsproblems verwen-

det wird. Anhand eines Beispielsystems werden die Ergebnisse illustriert. ▶▶▶ **Summary** In this article we present a controller design for polynomial systems with input constraints, which is based on the sum of squares decomposition of polynomials. The resulting control laws are a composition of the saturation function and a polynomial or rational function. The method computes an estimation of the region of attraction in addition to the control law. Two possible design objectives are considered: The rate of exponential convergence and the size of the region of attraction. The underlying optimization problem is multilinear in the decision variables and thus, not convex. Therefore, an algorithm for local nonconvex optimization is proposed. This algorithm is used to solve the optimization problem derived before. Results are illustrated by means of an example.

Schlagwörter Nichtlineare Regelung, Stellgrößenbeschränkung, Sum-of-squares, Polynomiale Systeme ▶▶▶

Keywords Nonlinear control, input constraints, sum of squares, polynomial systems

1 Einleitung

In praktisch allen technischen Regelungssystemen treten Beschränkungen der Stellgröße auf. Diese werden beim Reglerentwurf jedoch häufig ignoriert oder der Regler wird sehr konservativ parametrisiert, sodass die Stellgröße immer weit unter ihrer Begrenzung bleibt. In den letzten Jahren sind Verfahren entwickelt worden, die es erlauben, die Stellgrößenbeschränkung direkt im Entwurf zu berücksichtigen. Beim Entwurf für polynomiale Systeme hat sich dabei inzwischen die Methode der Sum-of-squares (SOS) in Verbindung mit konvexen Optimierungsverfahren etabliert.

Die Anwendung SOS-basierter Optimierung auf regelungstechnische Probleme ist ein in den letzten Jahren viel beachtetes Forschungsfeld. In [14] wird die SOS-Methodik in der Systemanalyse erstmals angewendet. Es gelingt, die Stabilitätsanalyse polynomialer Systeme als konvexes Optimierungs- bzw. Validierungsproblem zu beschreiben. In [3–6; 8; 9; 17; 20] wird gezeigt, wie SOS-basierte Optimierung zum Reglerentwurf genutzt werden kann. In [3] werden dabei Zustandsbeschränkungen in den Entwurf einbezogen.

In den Verfahren aus [4; 6; 8; 9] werden Stellgrößenbeschränkungen im Reglerentwurf für polynomiale

Systeme direkt berücksichtigt. Die Regelungen erlauben es, Anfangsauslenkungen eines Systems, die in einem beschränkten Gebiet um die Ruhelage liegen, zu stabilisieren, ohne dass die Stellgröße einen zulässigen Bereich verlässt. Die entstehenden Regelgesetze basieren auf Polynomen [8;9] bzw. auf gebrochen rationalen Funktionen [4;6]. In [4;6;9] werden dazu iterative Entwürfe verwendet, da die entstehenden Optimierungsprobleme nicht konvex sind. In [8] wird ein Entwurf vorgeschlagen, der auf zustandsabhängigen linearen Matrixungleichungen basiert und mit Inkaufnahme von Konservativität einen iterativen Entwurf vermeidet. Die in [4;9] gezeigten Ansätze haben den Nachteil, dass bei den meisten erlaubten Anfangsauslenkungen die zur Verfügung stehende Stellgröße nicht voll ausgenutzt wird, was zu langsamen Ausregelungen führen kann.

In diesem Artikel wird ein neuer Ansatz zur Stabilisierung polynomialer Systeme der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u, \tag{1a}$$

$$|u| \leq u_{\max} \tag{1b}$$

beschrieben, der die Ansätze aus [4;9] so erweitert, dass sättigende Regelgesetze $u = \text{sat}(r(\mathbf{x}))$ entstehen. Dabei ist die Funktion $r(\mathbf{x})$ ein Polynom in \mathbf{x} oder eine gebrochen rationale Funktion, also der Quotient zweier Polynome in \mathbf{x} . Die resultierenden Entwurfsbedingungen können in Form von SOS-Bedingungen dargestellt werden, die – wie auch in [4;9] – multilinear in den Entwurfsparametern und dadurch nicht mehr konvex sind. In den genannten Arbeiten wird der Regler durch abwechselndes Lösen konvexer Optimierungsprobleme berechnet, wobei jeweils nur ein Freiheitsgrad des Entwurfs variiert wird. Dieses Vorgehen birgt das Problem, dass die Optimierung unter Umständen nicht einmal zu einem lokalen Optimum konvergiert [18]. Daher wird in diesem Artikel eine alternative Methode zur lokalen Lösung des multilinearen, nichtkonvexen Optimierungsproblems vorgeschlagen, die auf einer Linearisierung der Nebenbedingungen basiert, ähnlich wie in [12] für bilineare Matrixungleichungen gezeigt.

Der Artikel ist wie folgt strukturiert: In Abschnitt 2 werden zunächst Grundlagen und Nomenklatur der SOS-Methodik dargestellt. In Abschnitt 3 werden dann die SOS-Entwurfsbedingungen für eine sättigende Regelung in zwei Varianten hergeleitet. In Abschnitt 4 wird der Algorithmus zur Lösung des multilinearen SOS-Optimierungsproblems vorgestellt. Abschnitt 5 zeigt Ergebnisse für die Regelung anhand eines Beispiels.

2 Optimierung mittels SOS

Im Folgenden wird die SOS-Methodik kurz beschrieben; eine ausführlichere Einführung findet sich z. B. in [5;13]. Zunächst werden folgende Definitionen benötigt:

Definition 1 (Polynom). Ein Polynom $p(\mathbf{x})$ in $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$ vom Grad d mit den Koeffizienten $c_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$

ist eine Linearkombination von Monomen $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$:

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq d} c_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

Die Menge aller Polynome in \mathbf{x} mit Koeffizienten $c_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \in \mathbb{R}$ wird mit $\mathbb{R}[\mathbf{x}]$ bezeichnet. Der Spaltenvektor, der alle Koeffizienten $c_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ des Polynoms $p(\mathbf{x})$ enthält, wird mit $\mathcal{C}[p(\mathbf{x})]$ bezeichnet.

Definition 2 (SOS-Polynome). Die Menge der SOS-Polynome (Sum-of-squares-Polynome) $\Sigma[\mathbf{x}]$ ist die Menge aller Polynome $p(\mathbf{x})$, die sich als Summe von quadrierten Polynomen darstellen lassen:

$$\Sigma[\mathbf{x}] = \left\{ p(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}[\mathbf{x}] \mid p(\mathbf{x}) = \sum_i p_i^2(\mathbf{x}), p_i(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}[\mathbf{x}] \right\}.$$

Offensichtlich ist ein Polynom nichtnegativ im gesamten \mathbb{R}^n , wenn es zur Menge der SOS-Polynome $\Sigma[\mathbf{x}]$ gehört, da es sich als eine Summe von quadrierten – also nicht negativen – Polynomen darstellen lässt. Diese Erkenntnis kann genutzt werden, um die Forderung nach globaler Nichtnegativität eines Polynoms durch die Zugehörigkeit zur Menge $\Sigma[\mathbf{x}]$ zu ersetzen:

$$p(\mathbf{x}) \in \Sigma[\mathbf{x}] \Rightarrow p(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Eine Forderung, dass ein Polynom zur Menge der SOS-Polynome gehört, lässt sich als lineare Matrixungleichung (LMI) darstellen [14]. Dies gilt auch dann, wenn das zu untersuchende Polynom eine Linearkombination von Polynomen

$$p(\mathbf{x}) = p_0(\mathbf{x}) + \sum_i y_i p_i(\mathbf{x})$$

mit unbekanntem Koeffizienten y_i ist. Dadurch können SOS-Polynome genutzt werden, um folgende wichtige Klasse von Optimierungsproblemen zu lösen:

$$\max_{\mathbf{y}} \mathbf{b}^T \mathbf{y}, \quad \text{sodass}$$

$$p_{01}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^k y_i p_{i1}(\mathbf{x}) \geq 0,$$

⋮

$$p_{0m}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^k y_i p_{im}(\mathbf{x}) \geq 0.$$

Dabei sind alle Funktionen $p_{ij}(\mathbf{x})$ Polynome in \mathbf{x} . Der Vektor $\mathbf{y} = [y_1 \dots y_k]^T$ enthält die freien Parameter des Optimierungsproblems und \mathbf{b}^T ist ein gegebener Vektor. Das Problem kann wegen (2) angenähert werden durch

$$\max_{\mathbf{y}} \mathbf{b}^T \mathbf{y}, \quad \text{sodass die folgenden Polynome SOS sind:}$$

$$p_{0j}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^k y_i p_{ij}(\mathbf{x}), \quad j = 1, \dots, m. \tag{4}$$

Dieses wiederum ist äquivalent zu einem LMI-Optimierungsproblem.

Ein Algorithmus für die Umformung von (4) in ein Optimierungsproblem mit LMI-Nebenbedingungen ist in [15] beschrieben. Für Matlab stehen verschiedene Softwarepakete, wie z. B. YALMIP [11] oder SOSTOOLS [16], zur Verfügung, die dem Anwender diese Umformung abnehmen. Das entstehende Optimierungsproblem ist konvex und kann mit Algorithmen, wie sie z. B. in SDPT3 [21] implementiert sind, sehr effizient gelöst werden.

Mit den bisher gezeigten Prinzipien lässt sich globale Nichtnegativität von Polynomen zeigen. Wenn man Stabilitätsbedingungen für den geschlossenen Regelkreis eines polynomialen Systems formuliert, treten auch Bedingungen auf, bei denen lediglich die lokale Nichtnegativität eines Polynoms gefordert wird. Um eine Stabilitätsanalyse und darauf aufbauend einen Reglerentwurf zu ermöglichen, müssen auch solche Forderungen als SOS-Bedingung ausgedrückt werden können. Dies wird durch folgenden Satz ermöglicht.

Satz 1 ([20]). *Gegeben seien ein Polynom $q(\mathbf{x})$ und N Polynome $p_1(\mathbf{x}), \dots, p_N(\mathbf{x})$. Wenn dann N Hilfspolynome $a_1(\mathbf{x}), \dots, a_N(\mathbf{x}) \in \Sigma[\mathbf{x}]$ existieren, sodass*

$$q(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^N a_i(\mathbf{x})p_i(\mathbf{x}) \in \Sigma[\mathbf{x}],$$

dann gilt

$$q(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \in \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid p_i(\mathbf{x}) \geq 0, i = 1, \dots, N\}.$$

Mit dem Satz kann also eine hinreichende SOS-Bedingung dafür angegeben werden, dass ein Polynom $q(\mathbf{x})$ nichtnegativ auf einer von den Polynomen $p_i(\mathbf{x})$ beschriebenen Menge ist. Satz 1 ist eine Konsequenz des Positivstellensatzes¹ [14; 20]. Die Koeffizienten der Hilfspolynome $a_i(\mathbf{x})$ werden üblicherweise im Rahmen einer Optimierung variiert, die Grade der Hilfspolynome werden dagegen a priori festgelegt.

3 Entwurf sättigender Regler

In diesem Abschnitt werden Stabilitätsbedingungen für sättigende, nichtlineare Regelgesetze entwickelt. Diese Stabilitätsbedingungen dienen später als Grundlage, SOS-Nebenbedingungen für ein Optimierungsproblem zum Reglerentwurf aufzustellen. Als Regelstrecke betrachten wir zunächst allgemein Systeme der Form (1), deren Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ mit einer Zustandsrückführung

$$u = r(\mathbf{x}) \quad (5)$$

für alle Anfangszustände $\mathbf{x}(0)$ aus einem Gebiet \mathcal{X}_0 stabilisiert werden soll. Dabei müssen die Funktionen \mathbf{f} , \mathbf{g} und

¹ Alternativ zu Satz 1 kann der Positivstellensatz auch direkt verwendet werden. Dann werden zwar mehr Hilfspolynome benötigt, die jedoch häufig kleineren Grades sind [20].

r für die Herleitung der allgemeinen Stabilitätsbedingungen zunächst keine Polynome sein. Die Einschränkung auf polynomiale Systeme wird jedoch später beim Überführen der Bedingungen in SOS-Form erforderlich sein.

Mit Regler (5) ergibt sich der geschlossene Regelkreis

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})r(\mathbf{x}). \quad (6)$$

Aus Ljapunovs direkter Methode (siehe z. B. [1]) folgt:

Lemma 1. *Wenn eine positiv definite Funktion $V(\mathbf{x})$ existiert, sodass*

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})r(\mathbf{x})) < 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{0}\}, \quad (7)$$

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \mid V(\mathbf{x}) \leq 1\} \quad (8)$$

gilt, dann ist die Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ des geschlossenen Regelkreises (6) lokal asymptotisch stabil, wobei \mathcal{V} ein invariantes Einzugsgebiet ist.

Gilt jedoch $u = \text{sat}(r(\mathbf{x}))$ mit der Sättigungsfunktion

$$\text{sat}(u) = \text{sgn}(u) \cdot \min\{|u|, u_{\max}\},$$

so gewährleistet Bedingung (7) nicht mehr, dass \mathcal{V} ein Einzugsgebiet ist.

Ein gängiger Ansatz zur Lösung dieses Problems ist es, durch den Entwurf sicherzustellen, dass das Regelgesetz nur Stellgrößen im zulässigen Bereich erzeugt. Dazu muss

$$|r(\mathbf{x})| \leq u_{\max} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}, \quad (9)$$

gelten. Der Regler wird also nur im nichtsättigenden Bereich betrieben. Dies bringt den Nachteil mit sich, dass die Möglichkeiten des Stellglieds nicht ausgeschöpft werden und die Regelung langsamer als nötig ist. Um diesen Nachteil zu vermeiden, verzichten wir auf Forderung (9) und verwenden einen Satz über die Stabilität sättigender Regler, der in [7] für lineare Systeme formuliert und im folgenden Satz auf nichtlineare Systeme erweitert wird.

Satz 2. *Gegeben seien ein System der Form (1), eine Zustandsrückführung $u = \text{sat}(r(\mathbf{x}))$, eine positiv definite Funktion $V(\mathbf{x})$ und eine Menge $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \mid V(\mathbf{x}) \leq 1\}$, sodass die Differentialgleichung (1) auf \mathcal{V} eine eindeutige Lösung hat und*

$$\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})r(\mathbf{x})) < 0, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{0}\}, \quad (10)$$

gilt. Die Menge \mathcal{V} ist genau dann ein Einzugsgebiet der lokal asymptotisch stabilen Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ des geschlossenen Regelkreises, wenn eine Funktion $h(\mathbf{x})$ existiert, sodass

$$\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})h(\mathbf{x})) < 0, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{0}\}, \quad (11)$$

$$|h(\mathbf{x})| \leq u_{\max}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{V}, \quad (12)$$

gilt.

Beweis. Die Notwendigkeit ist offensichtlich, da $h(\mathbf{x}) = \text{sat}(r(\mathbf{x}))$ immer eine mögliche Wahl sein muss.

Die Bedingungen von Satz 3 sind auch hinreichend: Es gilt zu jeder Zeit entweder $|\text{sat}(r(\mathbf{x}))| < u_{\max}$ oder $|\text{sat}(r(\mathbf{x}))| = u_{\max}$. Wegen Bedingung (12) bedeutet dies, dass für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ ein $\lambda \in [0, 1]$ existiert, sodass

$$\text{sat}(r(\mathbf{x})) = (1 - \lambda)h(\mathbf{x}) + \lambda r(\mathbf{x}). \quad (13)$$

Aus den Bedingungen (10) und (11) folgt dann, dass $V(\mathbf{x})$ eine lokale Ljapunov-Funktion des geschlossenen Regelkreises (6) ist, denn

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \text{sat}(r(\mathbf{x}))) \\ &= (1 - \lambda) \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})h(\mathbf{x})) \\ &\quad + \lambda \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})r(\mathbf{x})) < 0, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{0}\}. \end{aligned}$$

Somit ist \mathcal{V} ein Einzugsgebiet der Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. \square

Damit das Einzugsgebiet \mathcal{V} die Menge \mathcal{X}_0 zulässiger Anfangszustände enthält, ergänzen wir die Stabilitätsbedingungen um die Forderung

$$\mathcal{X}_0 \subseteq \mathcal{V}. \quad (14)$$

Satz 2 trifft keine Aussage über die Regelgüte. Um ein Optimierungsproblem für den Reglerentwurf aufstellen zu können, wird eine Gütefunktion benötigt. Es werden im Folgenden zwei mögliche Gütefunktionen besprochen: Die Maximierung der Konvergenzrate bei einem gegebenen Gebiet zulässiger Anfangszustände, sowie die Maximierung des Einzugsgebietes bei gegebener minimaler Konvergenzrate.

3.1 Maximierung der Konvergenzrate

Herleitung des Optimierungsproblems

Zunächst betrachten wir den Fall, dass ein Gebiet zulässiger Anfangsauslenkungen \mathcal{X}_0 bekannt ist. Dann ist es sinnvoll, den Regler so zu entwerfen, dass jeder Zustand $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_0$ möglichst schnell in die Ruhelage geregelt wird. Als Gütefunktion betrachten wir daher die Konvergenzrate, die wie folgt definiert ist [19].

Definition 3 (Konvergenzrate). Gegeben sei ein System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ mit der Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Die Konvergenzrate bezüglich eines Gebietes \mathcal{G} ist definiert als die größte Zahl $\delta > 0$, sodass eine positive Zahl κ existiert, für die

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \kappa \|\mathbf{x}(0)\| e^{-\delta t}$$

für alle Anfangszustände $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{G}$ gilt.

Kennt man eine Ljapunov-Funktion des Systems, so kann mit folgendem Satz eine Aussage über eine untere Schranke der Konvergenzrate getroffen werden (vgl. [2]):

Satz 3. Gegeben sei ein System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ mit der asymptotisch stabilen Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Gilt für eine stetige Ljapunov-Funktion $V(\mathbf{x})$ des Systems

$$\alpha_1 \|\mathbf{x}\|^{2d} \leq V(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{V}, \quad (15)$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -2d\underline{\delta}V(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{V}, \quad (16)$$

mit $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \mid V(\mathbf{x}) \leq 1\}$ und positiven Konstanten α_1 und d , dann ist $\underline{\delta}$ eine untere Schranke der Konvergenzrate δ des Systems bezüglich \mathcal{V} .

Beweis. Aus (16) folgt $V(\mathbf{x}(t)) \leq V(\mathbf{x}(0))e^{-2d\underline{\delta}t}$ [19]. Daraus ergibt sich mit (15) $\alpha_1 \|\mathbf{x}(t)\|^{2d} \leq V(\mathbf{x}(0))e^{-2d\underline{\delta}t}$ woraus sich wiederum $\|\mathbf{x}(t)\| \leq \alpha_1^{-\frac{1}{2d}} V(\mathbf{x}(0))^{\frac{1}{2d}} e^{-\underline{\delta}t}$ ergibt. Da $V(\mathbf{0}) = 0$ gilt und V stetig ist, lässt sich für einen gegebenen Startwert $\mathbf{x}(0)$ immer eine Konstante α_2 finden, sodass $V(\mathbf{x}(0)) \leq \alpha_2 \|\mathbf{x}(0)\|^{2d}$ ist. Dann gilt die Abschätzung $\|\mathbf{x}(t)\| \leq \alpha_1^{-\frac{1}{2d}} V(\mathbf{x}(0))^{\frac{1}{2d}} e^{-\underline{\delta}t} \leq (\alpha_1^{-1} \alpha_2)^{\frac{1}{2d}} \|\mathbf{x}(0)\| e^{-\underline{\delta}t}$. Daher ist $\underline{\delta}$ eine untere Schranke der Konvergenzrate δ bezüglich \mathcal{V} . \square

Bemerkung 1. Für polynomiale Ljapunov-Funktionen wählt man $2d$ gleich dem höchsten Grad der Ljapunov-Funktion, um eine möglichst gute untere Schranke für die Konvergenzrate zu erhalten.

Unter Anwendung von Satz 3 werden die Stabilitätsbedingungen modifiziert, sodass eine untere Schranke $\underline{\delta}$ für die Konvergenzrate des künstlichen Regelkreises

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})r(\mathbf{x}),$$

also des geschlossenen Regelkreises unter Vernachlässigung der Sättigung, maximiert wird. Diese ist natürlich nur dann identisch mit der unteren Schranke der Konvergenzrate des tatsächlichen Regelkreises, wenn $|r(\mathbf{x})| \leq u_{\max}$ ist. Wenn der Regler in Sättigung ist, also $|r(\mathbf{x})| > u_{\max}$ gilt, kann die wahre Konvergenzrate kleiner sein als die des künstlichen Regelkreises. Es kann unter Umständen sogar der Fall auftreten, dass ein sättigender Regler mit einem kleineren Wert für $\underline{\delta}$ eine schnellere Ausregelung erreicht, als ein sättigender Regler mit größerem $\underline{\delta}$. Dennoch bietet diese Hilfsgröße für die Optimierung ein anschaulich sinnvolles Maß für die Regelgüte des tatsächlichen Regelkreises. Man gelangt schließlich mit Satz 2 und 3 zum Optimierungsproblem

$$\max \gamma = 2d\underline{\delta}, \quad \text{sodass}$$

$$V(\mathbf{0}) = 0, \quad (17a)$$

$$V(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \quad (17b)$$

$$\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})h(\mathbf{x})) < 0, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{0}\}, \quad (17c)$$

$$\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})r(\mathbf{x})) \leq -\gamma V(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{V}, \quad (17d)$$

$$|h(\mathbf{x})| \leq u_{\max}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{V}, \quad (17e)$$

$$\mathcal{X}_0 \subseteq \mathcal{V}. \quad (17f)$$

Im Optimierungsproblem (17) ist der Regler $r(\mathbf{x})$ keiner Stellgrößenbeschränkung unterworfen. Es stellt sich heraus, dass dies dazu führen kann, dass das Optimierungsproblem (fast) unbeschränkt ist bezüglich der Koeffizienten von $r(\mathbf{x})$, was numerische Probleme mit sich bringt. Daher ist es hilfreich, auch für $r(\mathbf{x})$ eine virtuelle Stellgrößenbeschränkung

$$|r(\mathbf{x})| \leq \mu u_{\max}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{V}. \quad (18)$$

einzuführen, wobei $\mu \gg 1$ gewählt werden sollte.

Überführung in SOS-Bedingungen

Mit der in Abschnitt 2 vorgestellten Methode lassen sich die Nebenbedingungen (17a) bis (17e) durch SOS-Nebenbedingungen beschreiben, wenn die betrachtete Systemklasse auf Systeme der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u, \quad f_i \in \mathbb{R}[\mathbf{x}], g_i \in \mathbb{R}[\mathbf{x}], \quad (19)$$

also auf Systeme mit polynomialen Vektorfeldern, eingeschränkt wird. Außerdem beschränken wir uns auf polynomiale Ljapunov-Funktionen ohne konstanten und linearen Term und auf polynomiale Regelgesetze, d. h. $V(\mathbf{x}), r(\mathbf{x}), h(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$. Um auch Bedingung (17f) als SOS-Nebenbedingung formulieren zu können, beschränken wir uns außerdem auf solche Anfangsgebiete, die mit einem Polynom $p_1(\mathbf{x})$ als

$$\mathcal{X}_0 = \{\mathbf{x} \mid p_1(\mathbf{x}) \geq 0\}, \quad p_1(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$$

beschrieben werden können. Wir erhalten schließlich ein Entwurfsverfahren für sättigende polynomiale Regler:

Satz 4. Die Lösung des bilinearen SOS-Optimierungsproblems

$\max \gamma$, sodass die folgenden Polynome SOS sind:

$$V(\mathbf{x}) - \varepsilon(\mathbf{x}), \quad (20a)$$

$$-\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})h(\mathbf{x})) - a_1(\mathbf{x})(1 - V(\mathbf{x})) - \varepsilon(\mathbf{x}), \quad (20b)$$

$$-\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})r(\mathbf{x})) - \gamma V(\mathbf{x}) - a_2(\mathbf{x})(1 - V(\mathbf{x})), \quad (20c)$$

$$V(\mathbf{x}) - 1 - a_3(\mathbf{x})(h(\mathbf{x}) - u_{\max}), \quad (20d)$$

$$V(\mathbf{x}) - 1 + a_4(\mathbf{x})(h(\mathbf{x}) + u_{\max}), \quad (20e)$$

$$V(\mathbf{x}) - 1 - a_5(\mathbf{x})(r(\mathbf{x}) - \mu u_{\max}), \quad (20f)$$

$$V(\mathbf{x}) - 1 + a_6(\mathbf{x})(r(\mathbf{x}) + \mu u_{\max}), \quad (20g)$$

$$1 - V(\mathbf{x}) - a_7(\mathbf{x})p_1(\mathbf{x}), \quad (20h)$$

$$a_1(\mathbf{x}), \dots, a_7(\mathbf{x}), \quad (20i)$$

mit den Optimierungsparametern γ , $\mathcal{C}[V(\mathbf{x})]$, $\mathcal{C}[h(\mathbf{x})]$, $\mathcal{C}[r(\mathbf{x})]$, $\mathcal{C}[a_1(\mathbf{x})]$, ..., $\mathcal{C}[a_7(\mathbf{x})]$, einem a priori festgelegten positiv definiten Stützpolynom

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon_1 x_1^2 + \dots + \varepsilon_n x_n^2, \quad \varepsilon_i > 0, \quad (21)$$

und einem festen $\mu \gg 1$, ergibt einen Regler

$$u = \text{sat}(r(\mathbf{x})),$$

sodass die Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ des Systems (19) für alle Anfangszustände $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}_0 = \{\mathbf{x} \mid p_1(\mathbf{x}) \geq 0\}$ stabil ist.

Beweis. Es wird im Folgenden gezeigt, dass die SOS-Bedingungen (20) garantieren, dass die ursprünglichen Nebenbedingungen (17) erfüllt sind.

Aus (20a) folgt $V(\mathbf{x}) \geq \varepsilon(\mathbf{x})$. Da $\varepsilon(\mathbf{x})$ positiv definit gewählt wird, sind (17a) und (17b) erfüllt.

Aus Bedingung (20b) folgt nach Satz 1

$$\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})h(\mathbf{x})) \leq \varepsilon(\mathbf{x}) < 0, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{0}\},$$

also ist (17c) erfüllt. Analog ist Bedingung (20c) nach Satz 1 hinreichend für Bedingung (17d).

Bedingung (17e) ist äquivalent zu den Bedingungen

$$-h(\mathbf{x}) + u_{\max} \geq 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \in \{\mathbf{x} \mid -V(\mathbf{x}) + 1 \geq 0\}, \quad (22)$$

$$h(\mathbf{x}) + u_{\max} \geq 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \in \{\mathbf{x} \mid -V(\mathbf{x}) + 1 \geq 0\},$$

was wiederum

$$V(\mathbf{x}) - 1 \geq 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \in \{\mathbf{x} \mid h(\mathbf{x}) - u_{\max} \geq 0\}, \quad (23)$$

$$V(\mathbf{x}) - 1 \geq 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \in \{\mathbf{x} \mid -h(\mathbf{x}) - u_{\max} \geq 0\}$$

entspricht. Nach Satz 1 sind die SOS-Bedingungen (20d) und (20e) hinreichend für (23) und somit auch für (17e). Analog sind (20f) und (20g) hinreichend für die virtuelle Stellgrößenbeschränkung (18).

Schließlich ist mit (20h) Forderung (17f) gewährleistet, also dass \mathcal{X}_0 in \mathcal{V} liegt. \square

Bemerkung 2. In der Praxis kann oft $\varepsilon(\mathbf{x}) = 0$ gewählt werden, da der Solver ohnehin eine Lösung errechnet, die (17) erfüllt. Das Einhalten von (17b) und (17c) muss dann im Nachhinein verifiziert werden. Dieses Vorgehen reduziert unter Umständen die Konservativität des Entwurfs.

Bemerkung 3. Die direkte Anwendung von Satz 1 auf die Bedingungen (22) wäre anstelle des Umwegs über (23) möglich, allerdings ergäben sich multiplikative Terme von $V(\mathbf{x})$ und den Hilfspolynomen $a_i(\mathbf{x})$. Wie sich später zeigen wird, wäre dies ungünstig.

Mit dem Reglerentwurf aus Satz 4 gelingt also der Entwurf einer polynomialen Zustandsrückführung, die über \mathcal{V} auch im sättigenden Betrieb Stabilität gewährleistet.

Gebrochen rationale Regelgesetze

In [4] wird vorgeschlagen, anstelle eines polynomialen Regelgesetzes einen gebrochen rationalen Regler der Form

$$u = \frac{r_Z(\mathbf{x})}{r_0 + r_N(\mathbf{x})}$$

anzusetzen und dessen Parameter mittels SOS zu bestimmen. Dabei sind $r_Z(\mathbf{x})$ und $r_N(\mathbf{x})$ Polynome in \mathbf{x} und r_0

ist ein positiver Skalar. Die gebrochen rationalen Stabilitätsbedingungen können dann durch Erweitern mit dem Nenner in polynomiale Form gebracht werden. Dafür wird zusätzlich gefordert, dass $r_N(\mathbf{x}) \geq 0$ ist.

Diese Idee kann auf sättigende Regelungen erweitert werden. Das Regelgesetz lautet dann

$$u = \text{sat} \left(\frac{r_Z(\mathbf{x})}{r_0 + r_N(\mathbf{x})} \right).$$

Für den Stabilitätsnachweis wird ein Hilfsregler

$$h(\mathbf{x}) = \frac{h_Z(\mathbf{x})}{h_0 + h_N(\mathbf{x})}.$$

angesetzt, der ebenfalls gebrochen rational ist. Dabei ist h_0 wiederum ein positiver Skalar und $h_N(\mathbf{x}) \geq 0$. Der Hilfsregler $h(\mathbf{x})$ muss auch ohne Sättigung die Stellgrößenbeschränkung einhalten. Der SOS-Entwurf für den sättigenden Regler folgt dann wiederum aus dem Optimierungsproblem (17).

Satz 5. Die Lösung des trilinearen SOS-Problems

$\max \gamma$, sodass die folgenden Polynome SOS sind:

$$V(\mathbf{x}) - \varepsilon(\mathbf{x}), \quad (24a)$$

$$-\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{f}(\mathbf{x})(h_0 + h_N(\mathbf{x})) + \mathbf{g}(\mathbf{x})h_Z(\mathbf{x})) - a_1(\mathbf{x})(1 - V(\mathbf{x})) - \varepsilon(\mathbf{x}), \quad (24b)$$

$$-\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{f}(\mathbf{x})(r_0 + r_N(\mathbf{x})) + \mathbf{g}(\mathbf{x})r_Z(\mathbf{x})) - \gamma V(\mathbf{x})(r_0 + r_N(\mathbf{x})) - a_2(\mathbf{x})(1 - V(\mathbf{x})), \quad (24c)$$

$$V(\mathbf{x}) - 1 - a_3(\mathbf{x})(h_Z(\mathbf{x}) - u_{\max}(h_0 + h_N(\mathbf{x}))), \quad (24d)$$

$$V(\mathbf{x}) - 1 + a_4(\mathbf{x})(h_Z(\mathbf{x}) + u_{\max}(h_0 + h_N(\mathbf{x}))), \quad (24e)$$

$$V(\mathbf{x}) - 1 - a_5(\mathbf{x})(r_Z(\mathbf{x}) - \mu u_{\max}(r_0 + r_N(\mathbf{x}))), \quad (24f)$$

$$V(\mathbf{x}) - 1 + a_6(\mathbf{x})(r_Z(\mathbf{x}) + \mu u_{\max}(r_0 + r_N(\mathbf{x}))), \quad (24g)$$

$$1 - V(\mathbf{x}) - a_7(\mathbf{x})p_1(\mathbf{x}), \quad (24h)$$

$$a_1(\mathbf{x}), \dots, a_7(\mathbf{x}), h_N(\mathbf{x}), r_N(\mathbf{x}), \quad (24i)$$

mit den Parametern γ , $\mathcal{C}[V(\mathbf{x})]$, $\mathcal{C}[h_Z(\mathbf{x})]$, $\mathcal{C}[h_N(\mathbf{x})]$, $\mathcal{C}[r_Z(\mathbf{x})]$, $\mathcal{C}[r_N(\mathbf{x})]$, $\mathcal{C}[a_1(\mathbf{x})]$, ..., $\mathcal{C}[a_7(\mathbf{x})]$, festen Werten für $h_0 > 0$, $r_0 > 0$ und $\mu > 1$ und dem a priori festgelegten Stützpolynom (21) ergibt einen Regler

$$u = \text{sat} \left(\frac{r_Z(\mathbf{x})}{r_0 + r_N(\mathbf{x})} \right),$$

sodass die Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ des Systems (19) für alle Startzustände $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}_0 = \{\mathbf{x} \mid p_1(\mathbf{x}) \geq 0\}$ stabil ist.

Beweis. Die SOS-Bedingungen (24) entsprechen weitestgehend den Bedingungen (20) aus Satz 4. Um rein polynomiale Ungleichungen zu erhalten, müssen lediglich die Ungleichungen (17d), (17c), (17e) und (18) auf beiden Seiten mit dem Term $r_0 + r_N(\mathbf{x})$ bzw.

$h_0 + h_N(\mathbf{x})$ multiplikativ erweitert werden, bevor sie zu SOS-Bedingungen relaxiert werden können. Dadurch entsteht ein trilinearer Term in Bedingung (24c). Durch die SOS-Bedingung (24i) ist gewährleistet, dass $h_N(\mathbf{x}) \geq 0$ und $r_N(\mathbf{x}) \geq 0$ gilt. Mit vorher gewählten positiven Skalaren h_0 und r_0 ist also sichergestellt, dass das Regelgesetz wohldefiniert ist und dass die erwähnten multiplikativen Erweiterungen zulässig sind. \square

3.2 Maximierung des Einzugsgebiets

Für eine alternative Gütefunktion wird der Fall betrachtet, dass kein Gebiet zulässiger Anfangsauslenkungen vorgegeben ist. Dann ist es sinnvoll, die Größe des Gebietes zulässiger Anfangsauslenkungen zu maximieren. Dies ist durch eine leichte Modifikation von (17) möglich. Dazu stellen wir das Gebiet \mathcal{X}_0 in Abhängigkeit eines Skalars β und eines Polynoms $p_2(\mathbf{x})$ dar:

$$\mathcal{X}_0(\beta) = \{\mathbf{x} \mid \beta - p_2(\mathbf{x}) \geq 0\}.$$

Je größer β ist, desto größer wird das Gebiet $\mathcal{X}_0(\beta)$. Das tatsächliche Einzugsgebiet des geschlossenen Regelkreises ist \mathcal{V} (siehe Satz 2). Hier ist $\mathcal{X}_0(\beta)$ also nur eine Hilfsgröße im Rahmen der Optimierung.

Das allgemeine Optimierungsproblem für den Reglerentwurf lautet

$$\max \beta, \quad \text{sodass} \quad (25a)$$

$$V(\mathbf{0}) = 0, \quad (25b)$$

$$V(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \quad (25c)$$

$$\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})h(\mathbf{x})) < 0, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{0}\}, \quad (25d)$$

$$\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})r(\mathbf{x})) \leq -\gamma V(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{V}, \quad (25e)$$

$$|h(\mathbf{x})| \leq u_{\max}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{V}, \quad (25f)$$

$$|r(\mathbf{x})| \leq \mu u_{\max}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{V}, \quad (25g)$$

$$\mathcal{X}_0(\beta) \subseteq \mathcal{V}. \quad (25h)$$

Der Parameter γ ist nun ein festzulegender Entwurfparameter, der ein Maß für die minimal geforderte Konvergenzrate des Regelkreises ist. Das neue Optimierungsproblem (25) kann analog zur oben gezeigten Vorgehensweise in bilineare SOS-Probleme umgewandelt werden, indem polynomiale bzw. gebrochen rationale Regler angesetzt werden. Nur die Bedingung bezüglich des Anfangsgebiets muss angepasst werden. Der SOS-Entwurf lautet dann

$\max \beta$, sodass die folgenden Polynome SOS sind:

$$(20a) - (20g), (20i), \quad (\text{für polynomiale Regler}),$$

$$(24a) - (24g), (24i), \quad (\text{für gebrochen rationale Regler}),$$

$$1 - V(\mathbf{x}) - a_7(\mathbf{x})(\beta - p_2(\mathbf{x})).$$

Die Parameter des Optimierungsproblems sind β , $\mathcal{C}[V(\mathbf{x})]$, $\mathcal{C}[h(\mathbf{x})]$, $\mathcal{C}[r(\mathbf{x})]$, $\mathcal{C}[a_1(\mathbf{x})]$, ..., $\mathcal{C}[a_7(\mathbf{x})]$. Dieses Problem ist im Gegensatz zu dem Fall aus Abschnitt 3.1 auch für gebrochen rationale Regler bilinear.

4 Lösung der nichtkonvexen SOS-Probleme

Die im vorigen Abschnitt aufgestellten SOS-Optimierungsprobleme sind bi- bzw. trilinear in den Parametern und entsprechen daher nicht der in Abschnitt 2 vorgestellten Klasse von Optimierungsproblemen (4). Algorithmen zur Lösung von LMI-Optimierungsproblemen wie etwa SDPT3 [21] können nicht mehr direkt zur Lösung solcher Probleme verwendet werden.

In [4; 9] werden die dort betrachteten multilinearen SOS-Probleme gelöst, indem abwechselnd ein Freiheitsgrad des Entwurfs optimiert wird und die anderen jeweils konstant gehalten werden. Der Nachteil dieser einfachen Iteration besteht darin, dass eine Konvergenz zu einem lokalen Minimum nicht gewährleistet ist. Dies ist dadurch zu erklären, dass Optimalität bezüglich zweier fester Richtungen nicht in allen Fällen Optimalität bezüglich beider Parameter impliziert. Dieses Phänomen wird z. B. in [18] im Zusammenhang mit der DK-Iteration, die den gleichen Ansatz für spezielle bilineare Optimierungsprobleme verwendet, diskutiert. Motiviert von dieser Schwäche des beschriebenen Ansatzes wird daher hier eine alternative, neue Methode zur Lösung nichtlinearer SOS-Probleme vorgeschlagen.

Der Algorithmus orientiert sich an dem Pfadverfolgungs-Verfahren für bilineare Matrixungleichungen nach [12]. Diese Methode ist genau wie die oben beschriebene Iteration ein lokales Suchverfahren und liefert somit keine global optimale Lösung. Hier werden jedoch in jedem Iterationsschritt alle Optimierungsparameter variiert, wodurch das oben beschriebene Problem der Methode mit abwechselndem Lösen konvexer Optimierungsprobleme vermieden wird. Die Methode ist auf alle in Abschnitt 3 gezeigten multilinearen SOS-Optimierungsprobleme anwendbar und wird hier beispielhaft für das bilineare Problem in Satz 4 gezeigt.

Die Grundidee der Methode ist es, die nichtlinearen Nebenbedingungen um Arbeitspunkte herum mittels einer Taylor-Entwicklung erster Ordnung zu linearisieren und lediglich Abweichungen um diese Punkte im Zuge der Optimierung zu variieren. Damit die Linearisierung eine möglichst gute Näherung ist, werden zusätzliche Bedingungen eingeführt, die gewährleisten, dass die Abweichungen nicht zu groß werden. Analog zu einer Schrittweitensteuerung wird die Größe dieser erlaubten Abweichungen von Iteration zu Iteration angepasst.

Im Folgenden ist der Algorithmus detailliert dargestellt:

1. *Initialisierung*: Zunächst müssen gültige Startwerte für die Reglerpolynome $r(\mathbf{x})$ und $h(\mathbf{x})$ und für die Ljapunov-Funktion $V(\mathbf{x})$ festgelegt werden. Es bietet sich an, $r(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x})$ zu wählen und gültige Startwerte z. B. aus einem Entwurf nach [9] zu erzeugen.

2. *Berechnung von Startwerten für $a_i(\mathbf{x})$* : Aus den Startwerten für $h(\mathbf{x})$, $r(\mathbf{x})$ und $V(\mathbf{x})$ können Startwerte für die Hilfspolynome $a_i(\mathbf{x})$, $i = 1, \dots, 6$, bestimmt werden, indem folgendes konvexes SOS-Problem gelöst wird:

$\max \gamma$, sodass die folgenden Polynome SOS sind:

$$-\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})h(\mathbf{x})) - a_1(\mathbf{x})(1 - V(\mathbf{x})) - \varepsilon(\mathbf{x}),$$

$$-\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})r(\mathbf{x})) - \gamma V(\mathbf{x}) - a_2(\mathbf{x})(1 - V(\mathbf{x})),$$

$$V(\mathbf{x}) - 1 - a_3(\mathbf{x})(h(\mathbf{x}) - u_{\max}),$$

$$V(\mathbf{x}) - 1 + a_4(\mathbf{x})(h(\mathbf{x}) + u_{\max}),$$

$$V(\mathbf{x}) - 1 - a_5(\mathbf{x})(r(\mathbf{x}) - \mu u_{\max}),$$

$$V(\mathbf{x}) - 1 + a_6(\mathbf{x})(r(\mathbf{x}) + \mu u_{\max}),$$

$$a_1(\mathbf{x}), \dots, a_6(\mathbf{x}).$$

Optimierungsparameter sind γ , $\mathcal{C}[a_1(\mathbf{x})]$, ..., $\mathcal{C}[a_6(\mathbf{x})]$.

3. *Linearisierung*: Die bilinearen Nebenbedingungen in Satz 4 werden um die in Schritt 1 und 2 gefundenen Polynome $V(\mathbf{x})$, $h(\mathbf{x})$, $r(\mathbf{x})$ und $a_i(\mathbf{x})$ linearisiert. Zur Veranschaulichung betrachten wir einen bilinearen Term $q_1(\mathbf{x})q_2(\mathbf{x})$. Stellen wir beide Polynome in Form von Abweichungen $\Delta q_i(\mathbf{x})$ von Arbeitspunkten $q_{i0}(\mathbf{x})$ dar, also als

$$q_i(\mathbf{x}) = q_{i0}(\mathbf{x}) + \Delta q_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, 2,$$

dann gilt für kleine Abweichungsterme $\Delta q_i(\mathbf{x})$

$$q_1(\mathbf{x})q_2(\mathbf{x}) \approx q_{10}(\mathbf{x})q_{20}(\mathbf{x}) + q_{10}(\mathbf{x})\Delta q_2(\mathbf{x}) + \Delta q_1(\mathbf{x})q_{20}(\mathbf{x}).$$

Entsprechend lässt sich auch ein trilinearer Term der Form $q_1(\mathbf{x})q_2(\mathbf{x})q_3(\mathbf{x})$ annähern:

$$q_1(\mathbf{x})q_2(\mathbf{x})q_3(\mathbf{x}) \approx q_{10}(\mathbf{x})q_{20}(\mathbf{x})q_{30}(\mathbf{x}) + q_{10}(\mathbf{x})q_{20}(\mathbf{x})\Delta q_3(\mathbf{x}) + q_{10}(\mathbf{x})\Delta q_2(\mathbf{x})q_{30}(\mathbf{x}) + \Delta q_1(\mathbf{x})q_{20}(\mathbf{x})q_{30}(\mathbf{x}).$$

Um zu gewährleisten, dass die Abweichungen $\Delta q_i(\mathbf{x})$ klein bleiben, wird zusätzlich

$$\|\mathcal{C}[\Delta q_i(\mathbf{x})]\|^2 < \sigma \|\mathcal{C}[q_{i0}(\mathbf{x})]\|^2, \quad \forall i, \quad (26)$$

gefordert. Mit dem Faktor σ kann eingestellt werden, wie groß die Abweichungsterme $\Delta q_i(\mathbf{x})$ in Relation zu den Arbeitspunkten $q_{i0}(\mathbf{x})$ werden dürfen. Mit dem Schur-Komplement [2] lässt sich (26) als lineare Matrixungleichung darstellen:

$$\begin{bmatrix} \sigma \mathcal{C}[q_{i0}(\mathbf{x})]^T \mathcal{C}[q_{i0}(\mathbf{x})] & \mathcal{C}[\Delta q_i(\mathbf{x})]^T \\ \mathcal{C}[\Delta q_i(\mathbf{x})] & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0,$$

wobei \mathbf{I} die Einheitsmatrix passender Dimension ist. Angewandt auf den Reglerentwurf in Satz 4 erhält man mit $\gamma_0 := \gamma$, $\tilde{\gamma} := \gamma_0 + \Delta\gamma$, $V_0(\mathbf{x}) := V(\mathbf{x})$, $\tilde{V}(\mathbf{x}) := V_0(\mathbf{x}) + \Delta V(\mathbf{x})$, $h_0(\mathbf{x}) := h(\mathbf{x})$, $\tilde{h}(\mathbf{x}) := h_0(\mathbf{x}) + \Delta h(\mathbf{x})$,

$r_0(\mathbf{x}) := r(\mathbf{x})$, $\tilde{r}(\mathbf{x}) := r_0(\mathbf{x}) + \Delta r(\mathbf{x})$, $a_{i0}(\mathbf{x}) := a_i(\mathbf{x})$, $\tilde{a}_i(\mathbf{x}) := a_{i0}(\mathbf{x}) + \Delta a_i(\mathbf{x})$, $i = 1, \dots, 6$, das konvexe Optimierungsproblem

$\max \Delta \gamma$, sodass

$$\begin{bmatrix} \sigma \mathcal{C}[V_0(\mathbf{x})]^T \mathcal{C}[V_0(\mathbf{x})] & \mathcal{C}[\Delta V(\mathbf{x})]^T \\ \mathcal{C}[\Delta V(\mathbf{x})] & \mathbf{I} \end{bmatrix} \succ 0,$$

$$\begin{bmatrix} \sigma \mathcal{C}[h_0(\mathbf{x})]^T \mathcal{C}[h_0(\mathbf{x})] & \mathcal{C}[\Delta h(\mathbf{x})]^T \\ \mathcal{C}[\Delta h(\mathbf{x})] & \mathbf{I} \end{bmatrix} \succ 0,$$

$$\begin{bmatrix} \sigma \mathcal{C}[r_0(\mathbf{x})]^T \mathcal{C}[r_0(\mathbf{x})] & \mathcal{C}[\Delta r(\mathbf{x})]^T \\ \mathcal{C}[\Delta r(\mathbf{x})] & \mathbf{I} \end{bmatrix} \succ 0,$$

$$\begin{bmatrix} \sigma \mathcal{C}[a_{i0}(\mathbf{x})]^T \mathcal{C}[a_{i0}(\mathbf{x})] & \mathcal{C}[\Delta a_i(\mathbf{x})]^T \\ \mathcal{C}[\Delta a_i(\mathbf{x})] & \mathbf{I} \end{bmatrix} \succ 0,$$

für alle $i = 1, \dots, 6$,

und die folgenden Polynome SOS sind:

$$\tilde{V}(\mathbf{x}) - \varepsilon(\mathbf{x}),$$

$$-\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})h_0(\mathbf{x})) - \varepsilon(\mathbf{x}) - \frac{\partial V_0}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x})\Delta h(\mathbf{x}) - \tilde{a}_1(\mathbf{x})(1 - V_0(\mathbf{x})) + a_{10}\Delta V(\mathbf{x}),$$

$$-\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})r_0(\mathbf{x})) - \frac{\partial V_0}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x})\Delta r(\mathbf{x}) - \tilde{\gamma}V_0(\mathbf{x})$$

$$- \gamma_0\Delta V(\mathbf{x}) - \tilde{a}_2(\mathbf{x})(1 - V_0(\mathbf{x})) + a_{20}(\mathbf{x})\Delta V(\mathbf{x}),$$

$$\tilde{V}(\mathbf{x}) - 1 - \tilde{a}_3(\mathbf{x})(h_0(\mathbf{x}) - u_{\max}) - a_{30}(\mathbf{x})\Delta h(\mathbf{x}),$$

$$\tilde{V}(\mathbf{x}) - 1 + \tilde{a}_4(\mathbf{x})(h_0(\mathbf{x}) + u_{\max}) + a_{40}(\mathbf{x})\Delta h(\mathbf{x}),$$

$$\tilde{V}(\mathbf{x}) - 1 - \tilde{a}_5(\mathbf{x})(r_0(\mathbf{x}) - \mu u_{\max}) - a_{50}(\mathbf{x})\Delta r(\mathbf{x}),$$

$$\tilde{V}(\mathbf{x}) - 1 + \tilde{a}_6(\mathbf{x})(r_0(\mathbf{x}) + \mu u_{\max}) + a_{60}(\mathbf{x})\Delta r(\mathbf{x}),$$

$$1 - \tilde{V}(\mathbf{x}) - a_7(\mathbf{x})p_1(\mathbf{x}),$$

$$\tilde{a}_1(\mathbf{x}), \dots, \tilde{a}_6(\mathbf{x}), a_7(\mathbf{x}),$$

mit den Parametern $\Delta \gamma$, $\mathcal{C}[\Delta V(\mathbf{x})]$, $\mathcal{C}[\Delta h(\mathbf{x})]$, $\mathcal{C}[\Delta r(\mathbf{x})]$, $\mathcal{C}[\Delta a_1(\mathbf{x})]$, ..., $\mathcal{C}[\Delta a_6(\mathbf{x})]$, $\mathcal{C}[a_7(\mathbf{x})]$. Dieses Problem besitzt immer eine Lösung, da $\Delta \gamma = 0$, $\Delta V(\mathbf{x}) = 0$, usw. immer einer gültige Wahl ist.

4. *Update-Schritt*: Setze $\gamma := \tilde{\gamma}$, $h(\mathbf{x}) := \tilde{h}(\mathbf{x})$, $r(\mathbf{x}) := \tilde{r}(\mathbf{x})$, $a_1(\mathbf{x}) := \tilde{a}_1(\mathbf{x})$, $a_2(\mathbf{x}) := \tilde{a}_2(\mathbf{x})$.

5. *Verifikation und Berechnung von $V(\mathbf{x})$ und $a_i(\mathbf{x})$* : Die in Schritt 3 gefundenen Polynome erfüllen zwar das linearisierte Optimierungsproblem, unter Umständen aber nicht das zugrunde liegende multilineare Problem. Deshalb werden auf der Basis der in Schritt 4 genannten Parameter neue Polynome $V(\mathbf{x})$ und $a_i(\mathbf{x})$, $i = 3, \dots, 7$ aus folgendem linearen SOS-Problem berechnet:

Finde Polynome $V(\mathbf{x})$, $a_3(\mathbf{x})$, ..., $a_7(\mathbf{x})$, sodass

folgende Polynome SOS sind:

$$V(\mathbf{x}) - \varepsilon(\mathbf{x}),$$

$$-\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})h(\mathbf{x})) - a_1(\mathbf{x})(1 - V(\mathbf{x})) - \varepsilon(\mathbf{x}),$$

$$-\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})r(\mathbf{x}))$$

$$- \gamma V(\mathbf{x}) - a_2(\mathbf{x})(1 - V(\mathbf{x})),$$

$$V(\mathbf{x}) - 1 - a_3(\mathbf{x})(h(\mathbf{x}) - u_{\max}),$$

$$V(\mathbf{x}) - 1 + a_4(\mathbf{x})(h(\mathbf{x}) + u_{\max}),$$

$$V(\mathbf{x}) - 1 - a_5(\mathbf{x})(r(\mathbf{x}) - \mu u_{\max}),$$

$$V(\mathbf{x}) - 1 + a_6(\mathbf{x})(r(\mathbf{x}) + \mu u_{\max}),$$

$$1 - V(\mathbf{x}) - a_7(\mathbf{x})p_1(\mathbf{x}),$$

$$a_3(\mathbf{x}), \dots, a_7(\mathbf{x}).$$

An dieser Stelle ist erkennbar, warum keine Produkte von $V(\mathbf{x})$ und $a_i(\mathbf{x})$ in den Bedingungen zur Einhaltung der Stellgrößenbeschränkung auftreten sollten, denn dann wäre das obige Optimierungsproblem nicht konvex (vgl. Bemerkung 3).

Wenn das SOS-Problem lösbar ist, dann kann σ in einer Schrittweisenanpassung mittels $\sigma := \eta^+ \sigma$ mit $\eta^+ > 1$ vergrößert werden [10]. Wenn das SOS-Problem nicht lösbar ist, war offensichtlich die Abweichung zwischen der Linearisierung in Schritt 3 und dem multilinearen Problem zu groß. Deshalb werden die in Schritt 4 neu gefundenen Werte für $h(\mathbf{x})$, $r(\mathbf{x})$, $a_1(\mathbf{x})$, $a_2(\mathbf{x})$ und γ verworfen und auf die Werte der vorherigen Iteration gesetzt. Außerdem wird dann die erlaubte Größe der Abweichungsterme für die nächste Iteration mittels $\sigma := \eta^- \sigma$ mit $0 < \eta^- < 1$ verkleinert. Es zeigt sich, dass mit $\eta^+ = 1,2$ und $\eta^- = 0,5$ gute Ergebnisse erzielt werden können.

6. *Abbruchbedingung*: Wenn σ kleiner wird als ein festgelegter Wert σ_{\min} , sich also auch für sehr kleine zulässige Abweichungen keine Verbesserung von γ erreichen lässt, wird der Algorithmus abgebrochen. Ansonsten wird eine weitere Iteration bei Schritt 3 begonnen.

Für das trilineare Problem aus Satz 5 bzw. für die Varianten unter Maximierung des Einzugsgebiets aus Abschnitt 3.2 verläuft der Algorithmus analog.

5 Beispiel

Als Beispiel wird das System

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = x_1^2 x_2 - x_1 - x_2 + u$$

mit der Stellgrößenbeschränkung $|u| \leq 1$ betrachtet. Das Gebiet zulässiger Anfangsbedingungen wird zu

$$\mathcal{X}_0 = \{x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$$

gewählt. Es sollen Regler unter Maximierung der Konvergenzrate entworfen werden.

Dazu wird zunächst ein Regler gemäß Satz 4 berechnet. Der Grad der Ljapunov-Funktion $V(\mathbf{x})$ wird zu zwei,

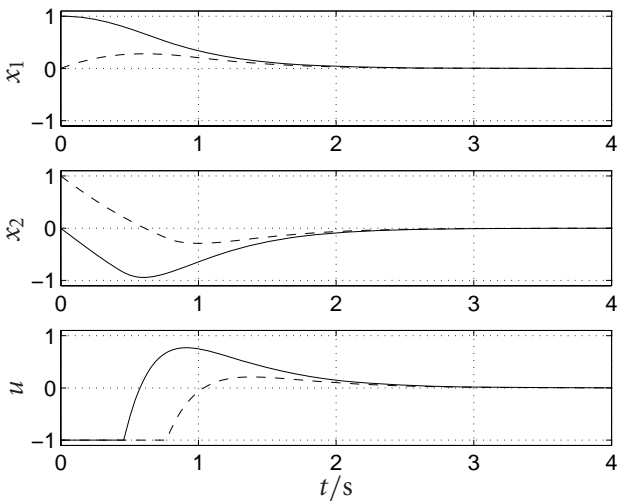


Bild 1 Verlauf der Zustände und der Stellgröße für Reglerentwurf nach Satz 4. Die Anfangszustände sind $\mathbf{x}(0) = [1 \ 0]^T$ (—) und $\mathbf{x}(0) = [0 \ 1]^T$ (---).

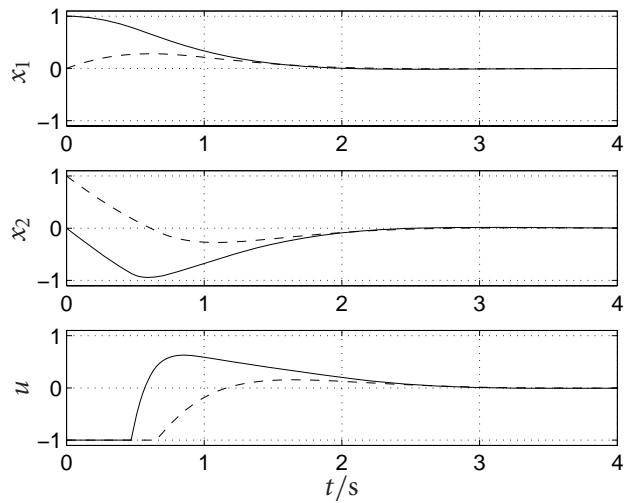


Bild 3 Verlauf der Zustände und der Stellgröße für Reglerentwurf nach Satz 5. Die Anfangszustände sind $\mathbf{x}(0) = [1 \ 0]^T$ (—) und $\mathbf{x}(0) = [0 \ 1]^T$ (---).

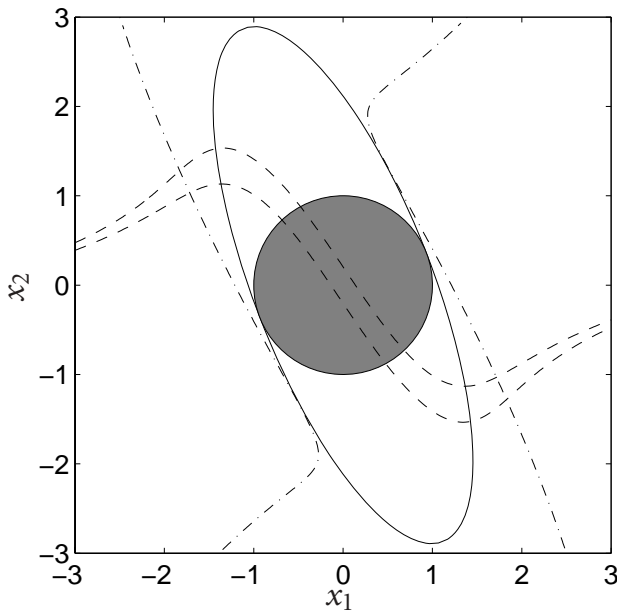


Bild 2 Ergebnisse nach Satz 4: Zustandsebene mit dem Gebiet \mathcal{X}_0 (···), dem Einzugsgebiet \mathcal{V} (—) und den Linien $|h(\mathbf{x})| = u_{\max}$ (··) und $|r(\mathbf{x})| = u_{\max}$ (---).

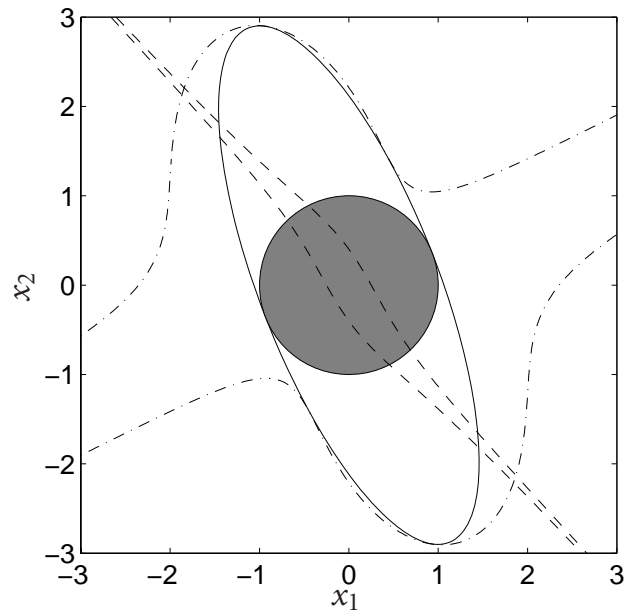


Bild 4 Ergebnisse nach Satz 5: Zustandsebene mit dem Gebiet \mathcal{X}_0 (···), dem Einzugsgebiet \mathcal{V} (—) und den Linien $|h(\mathbf{x})| = u_{\max}$ (··) und $|r(\mathbf{x})| = u_{\max}$ (---).

der der Regler $h(\mathbf{x})$ und $r(\mathbf{x})$ zu drei, die Grade der Hilfspolynome zu acht gewählt.² Die virtuelle Stellgrößenbeschränkung liegt bei $\mu u_{\max} = 20$.

Aus der Optimierung erhält man einen Regler mit $\gamma = 2,71$. Die Verläufe der Zustandsgrößen und der Stellgröße für die Anfangsauslenkungen $\mathbf{x}(0) = [1 \ 0]^T$ und $\mathbf{x}(0) = [0 \ 1]^T$ sind in Bild 1 gezeigt. Die Stellgröße verbleibt für beide Anfangszustände längere Zeit in der Sättigung, was zu einer schnellen Ausregelung

² Die Wahl der Grade der Polynome ist im Allgemeinen keine einfache Aufgabe. Eine Möglichkeit ist, mit möglichst kleinen Graden zu beginnen und diese dann sukzessive zu erhöhen, bis sich die gewünschten Ergebnisse einstellen.

führt. In Bild 2 ist die Zustandsebene mit dem Gebiet \mathcal{X}_0 möglicher Anfangsbedingungen und dem Einzugsgebiet \mathcal{V} dargestellt. Ebenfalls eingezeichnet sind die Linien $r(\mathbf{x}) = \pm 1$ und $h(\mathbf{x}) = \pm 1$. Diese Linien trennen die Bereiche der Zustandsebene, in denen die Regler Stellgrößen erzeugen, die kleiner als u_{\max} sind, von denjenigen, in denen die Sättigung wirksam wird. Da der Regler h ungesättigt sein soll, dürfen die Linien $h(\mathbf{x}) = \pm 1$ das Gebiet \mathcal{V} nicht schneiden. Im Gegensatz dazu sind in \mathcal{V} Werte $|r(\mathbf{x})| \geq 1$ erlaubt.

Des Weiteren wird ein Regler nach Satz 5 entworfen. Die Grade der Nennerpolynome der Regler sind zwei, alle weiteren Polynomgrade und die virtuelle Stellgrößen-

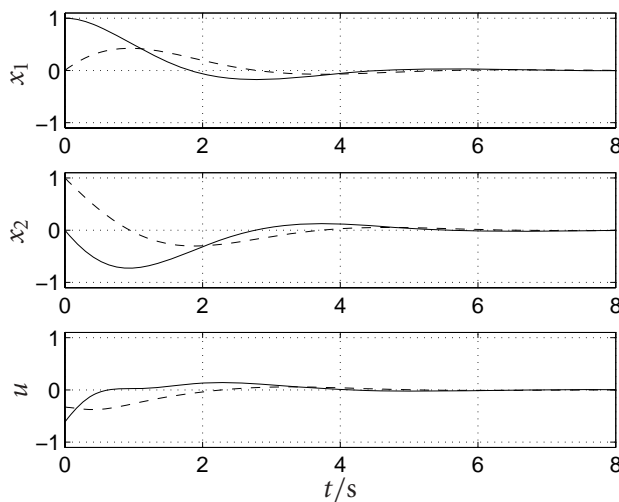


Bild 5 Verlauf der Zustände und der Stellgröße für einen nichtsättigenden Regler. Man beachte die veränderte Zeitskala im Vergleich zu Bild 1 und 3. Die Anfangszustände sind $\mathbf{x}(0) = [1 \ 0]^T$ (—) und $\mathbf{x}(0) = [0 \ 1]^T$ (---).

beschränkung sind wie oben gewählt. Die Optimierung erreicht hier ein maximales γ von 2,72.

In Bild 3 sind die Verläufe von Zuständen und Stellgröße zu sehen, die Zustandsebene mit den relevanten Größen zeigt Bild 4. Die Ausregelergebnisse sind ungefähr mit denen des Reglers nach Satz 4 vergleichbar. Ein minimaler Vorteil des gebrochen rationalen Reglers ist erkennbar.

In Bild 5 ist zum Vergleich der Verlauf von Zustandsgrößen und Stellgröße des nichtsättigenden polynomialen – ähnlich dem in [9] vorgestellten – Reglers gezeigt. Der nichtsättigende Regler wurde hier entworfen, indem in Satz 4 die virtuelle Stellgrößenbeschränkung auf $\mu u_{\max} = u_{\max}$ gesetzt wurde. Dann können die Nebenbedingungen (17c) und (17e) – also die Bedingungen für den Hilfsregler $h(\mathbf{x})$ – entfallen. Das resultierende SOS-Optimierungsproblem wurde mit der in Abschnitt 4 vorgestellten Methode gelöst. Man erhält $\gamma = 1,15$. Es ist zu erkennen, dass die sättigenden Regler die Anfangsauslenkung wesentlich schneller ausregeln als der nichtsättigende Regler.

6 Zusammenfassung

In diesem Artikel wurde ein neues Entwurfsverfahren zur Regelung polynomialer Systeme in zwei Varianten vorgestellt, das auf SOS-Optimierung basiert. Im Gegensatz zu vorherigen Arbeiten auf diesem Gebiet ermöglicht der Ansatz den Entwurf sättigender Regler, was zu einer besseren Ausnutzung des zur Verfügung stehenden Stellgrößenbereichs führt. Des Weiteren wurde ein neuer Ansatz zur Lösung der entstehenden multilinearen SOS-Optimierungsprobleme vorgestellt, der auf einem Lösungsverfahren für bilineare Matrixungleichungen basiert. Für ein Beispielsystem wurden die Ergebnisse beider Varianten des Verfahrens gezeigt und mit einer nicht-sättigenden Regelung verglichen. Die sättigenden Regler erlauben durch eine bessere Ausnutzung der Stellgröße

eine schnellere Ausregelung von Anfangsauslenkungen als die nichtsättigende Variante.

Danksagung

Wir bedanken uns für die Förderung des Forschungsvorhabens durch die Deutsche Telekom Stiftung und das Cusanuswerk.

Literatur

- [1] ADAMY, J.: *Nichtlineare Regelungen*. Springer, 2009.
- [2] BOYD, S.; GHAOUI, L.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V.: *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM, Philadelphia, 1994.
- [3] BÄUML, M.; DEUTSCHER, J.: Stabilisierung nichtlinearer Systeme mit Zustandsbeschränkung mittels SOS-Programmierung. In: *Methoden und Anwendungen der Regelungstechnik, Erlangen-Münchener Workshops 2007 und 2008*, Shaker Verlag, 2009, S. 47–60.
- [4] BÄUML, M.; DEUTSCHER, J.: Stabilization of Nonlinear Systems with Input Saturation using SOS-Programmierung. In: *Proc. of the 6th MATHMOD*, Wien, 2009.
- [5] EBENBAUER, C.; RAFF, T.; ALLGÖWER, F.: Passivity-based Feedback Design for Polynomial Control Systems. In: *at – Automatisierungstechnik* 8 (2005), S. 356–366.
- [6] GUSSNER, T.; ADAMY, J.: Controller Design for Polynomial Systems with Input Constraints. In: *Proc. of the IEEE Conf. on Decision and Control and Chinese Control Conf.*, Shanghai, 2009.
- [7] HU, T.; LIN, Z.: *Control Systems with Actuator Saturation*. Birkhäuser, 2001.
- [8] ICHIHARA, H.: State feedback synthesis for polynomial systems with input saturation using convex optimization. In: *Proc. of the American Control Conference*, New York, 2007.
- [9] JARVIS-WLOSZEK, Z.; FEELEY, R.; TAN, W.; SUN, K.; PACKARD, A.: Some Control Applications of Sum of Squares Programming. In: *Proc. of the IEEE Conf. on Decision and Control*, Maui, Hawaii, 2003.
- [10] LENS, H.: Fast Robust Stabilization by Saturating Output Feedback for Uncertain Systems. In: *Proc. of the IEEE Conf. on Decision and Control and Chinese Control Conf.*, Shanghai, 2009.
- [11] LÖFBERG, J.: A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB. In: *Proc. of the CASCD Conference*, Taipei, 2004.
- [12] OSTERTAG, E.: An Improved Path-Following Method for Mixed H_2/H_∞ Controller Design. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 53 (2008), S. 1967–1971.
- [13] PAPACHRISTODOULOU, A.; PRAJNA, S.: A Tutorial on Sum of Squares Techniques for System Analysis. In: *Proc. of the American Control Conference*, Portland, Oregon, 2005.
- [14] PARRILO, P.: *Structured Semidefinite Programs and Semialgebraic Geometry Methods in Robustness and Optimization*, Cal. Inst. of Techn., Pasadena, Diss., 2000.
- [15] POWERS, V.; WÖRMANN, T.: An algorithm for sums of squares of real polynomials. In: *Journal of Pure and Applied Linear Algebra* 127 (1998), S. 99–104.
- [16] PRAJNA, S.; PAPACHRISTODOULOU, A.; PARRILO, P.: Introducing SOSTOOLS: A general purpose sum of squares programming solver. In: *Proc. of the IEEE Conf. on Decision and Control*, Las Vegas, 2002.
- [17] PRAJNA, S.; PAPACHRISTODOULOU, A.; WU, F.: Nonlinear Control Synthesis by Sum of Squares Optimization: A Lyapunov-based Approach. In: *Proc. of the 5th Asian Control Conference*, Melbourne, 2004.
- [18] SAFONOV, M.; GOH, K.; LY, J.: Control System Synthesis via Bilinear Matrix Inequalities. In: *Proc. of the American Control Conference*, Baltimore, 1994.
- [19] SLOTINE, J.; LI, W.: *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, 1991.

- [20] TAN, W.: *Nonlinear Control Analysis and Synthesis using Sum-of-Squares Programming*, University of California, Berkeley, Diss., 2006.
- [21] TOH, K.; TODD, M.; TUTUNCU, R.: SDPT3 – a Matlab software package for semidefinite programming. In: *Optimization Methods and Software* 11 (1999), S. 545–581.

Manuskripteingang: 17. September 2009



Dipl. Ing. Thomas Gußner promoviert am Fachgebiet Regelungstheorie und Robotik der TU Darmstadt im Bereich nichtlineare Regelungen. Hauptarbeitsgebiete: Systeme mit Stellgrößenbeschränkungen, polynomiale Systeme.

Adresse: TU Darmstadt, FB Elektro- und Informationstechnik, FG Regelungstheorie und Robotik, Landgraf-Georg-Str. 4, 64283 Darmstadt, E-Mail: tgussner@rtr.tu-darmstadt.de



Dr.-Ing. Hendrik Lens ist wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Regelungstheorie und Robotik der TU Darmstadt im Bereich nichtlineare Regelungen. Hauptarbeitsgebiete: Ausgangsrückführungen, Systeme mit Stellgrößenbeschränkungen.

Adresse: TU Darmstadt, FB Elektro- und Informationstechnik, FG Regelungstheorie und Robotik, Landgraf-Georg-Str. 4, 64283 Darmstadt, E-Mail: hlens@rtr.tu-darmstadt.de



Prof. Dr.-Ing. Jürgen Adamy ist Leiter des Fachgebietes Regelungstheorie und Robotik im Fachbereich Elektro- und Informationstechnik der TU Darmstadt. Hauptarbeitsgebiete: Regelungsverfahren, Computational Intelligence, autonome mobile Roboter.

Adresse: TU Darmstadt, FB Elektro- und Informationstechnik, FG Regelungstheorie und Robotik, Landgraf-Georg-Str. 4, 64283 Darmstadt, E-Mail: adamy@rtr.tu-darmstadt.de

Verfügbar unter
lediglich die vom Gesetz vorgesehenen Nutzungsrechte gemäß UrhG



Das komplette Lehrbuch zur Automatisierungstechnik



Jan Lunze

Automatisierungstechnik

Methoden für die Überwachung und Steuerung kontinuierlicher und ereignisdiskreter Systeme

2., überarbeitete Auflage 2008 | 646 Seiten | 410 Abbildungen | gebunden
90 Anwendungsbeispiele und 86 Übungsaufgaben | € 44,80 | ISBN 978-3-486-58061-7

Dieses Buch betritt Neuland: kontinuierliche und ereignisdiskrete Systeme werden gleichberechtigt behandelt!

Mit diesem Lehrbuch bekommt der Lernende durch Analogiebildung und In-Bezug-Stellung ein ganz zwangloses, übergreifendes Verständnis des bislang stets in getrennten Lehrbüchern unabhängig behandelten Lernwissens. Faszinierenderweise findet man so nicht nur einen leichteren und eleganteren Zugang zu den ereignisdiskreten Systemen, auch der vorangestellte, klassisch-kontinuierliche Teil erhält – bei aller notwendigen stofflichen Beschränkung – einen ganz eigenen Charakter, der dem besseren Verständnis des Lehrstoffes dient.

Bestellen Sie in Ihrer Fachbuchhandlung oder direkt bei uns:
Tel: 089/45051-248, Fax: 089/45051-333, verkauf@oldenbourg.de