



# Zwei-Freiheitsgrade-Regelung linearer Systeme mit Stellgrößen- und Stellratenbegrenzungen

Two-Degree-of-Freedom Control of Linear Systems Subject to Input Amplitude and Rate Constraints

Klaus Kefferpütz, Carlo Ackermann, Jürgen Adamy, TU Darmstadt

**Zusammenfassung** In diesem Artikel wird eine schnelle Führungsregelung für lineare Regelstrecken unter Stellgrößen- und Stellratenbeschränkungen vorgestellt. Dazu wird ein auch für nichtlineare Systeme anwendbarer inversionsbasierter Vorsteuerungsentwurf mit einem weich-strukturvariablen Regler kombiniert. Die Formulierung eines konvexen Optimierungsproblems erlaubt den effizienten Reglerentwurf.

▶▶▶ **Summary** This paper presents a fast tracking control for linear systems subject to input amplitude and rate constraints. To this end, an inversion based feedforward controller, which is also applicable to nonlinear systems, is combined with a soft variable structure controller. The latter can be designed efficiently by solving a convex optimization problem.

**Schlagwörter** Stellgrößenbeschränkungen, Stellratenbeschränkungen, inversionsbasierter Vorsteuerungsentwurf, weich-strukturvariable Regelung, LMI, SOS ▶▶▶ **Keywords** Input amplitude constraints, input rate constraints, inversion based feedforward control, soft variable structure control, LMI, SOS

## 1 Einleitung

Jedes reale System unterliegt Beschränkungen hinsichtlich der Stellgröße. Zum einen ist die Stellgröße selbst beschränkt, zum anderen unterliegt in der Regel auch die Stellrate einer Beschränkung. Um Stabilitätsprobleme zu vermeiden, werden Regelungen oftmals so entworfen, dass die Stellgröße bzw. die Stellrate den verfügbaren Stellbereich nicht überschreitet. Diese Vorgehensweise führt jedoch im Allgemeinen zu langsamen Ausregelvorgängen. Durch Berücksichtigung der Stellbegrenzungen beim Reglerentwurf kann eine bessere Ausnutzung des Stellbereichs und damit eine bessere Reglerperformance erzielt werden.

Besteht die Regelungsaufgabe darin, das System um eine gegebene Ruhelage herum zu stabilisieren, kann auf eine Vielzahl von Methoden zurückgegriffen werden. Hier können beispielsweise lineare Sättigungsregler [4]

verwendet werden. Aufgrund des linearen Regelgesetzes werden Stellgröße und Stellrate jedoch in der Umgebung der Ruhelage schlecht ausgenutzt. Dieser Nachteil kann im Falle von SISO-Systemen durch Einsatz weich-strukturvariabler Regler [15] vermieden werden. Bei strukturvariablen Reglern wird die Reglerverstärkung im Verlauf des Ausregelvorgangs angepasst, wodurch sehr schnelle Ausregelvorgänge möglich werden.

Lautet die Aufgabenstellung, das System von einer Ruhelage in eine andere Ruhelage zu überführen, kann das Zustandsraummodell so modifiziert werden, dass der Regelfehler Teil des Zustandsvektors ist. Die Aufgabe ist dann, den Ursprung des transformierten Systems zu stabilisieren. In diesem Fall sind die stabilisierbaren neuen Ruhelagen jedoch eine Funktion des Anfangszustands. Eine solche Methode wird beispielsweise in [24] vorgestellt. Für Systeme unter ausschließlicher Stellgrö-

ßenbegrenzung wird in [8] ein Verfahren vorgeschlagen, welches den Nachteil der Abhängigkeit von neuen Referenzruhelagen vom Anfangszustand abbildert.

Eine Methode, die ohne diesen Nachteil auskommt und auch für Systeme unter zusätzlichen Stellratenbegrenzungen anwendbar ist, wird in [16] vorgestellt. Alle diese Regelverfahren garantieren, dass die neue Ruhelage erreicht wird, jedoch wird kein Augenmerk auf den Trajektorienverlauf während des Übergangs gelegt. Außerdem können bei diesen Verfahren das Führungs- und Störverhalten nicht getrennt betrachtet werden.

Eine separate Betrachtung des Führungs- und Störverhaltens wird mit Hilfe der Zwei-Freiheitsgrade-Methodik [11] durch Kombination einer Vorsteuerung mit einer Regelung ermöglicht. Zur Vorsteuerung von flachen Systemen wird in [19] eine Methode zur Generation von Trajektorien vorgestellt, bei welcher Beschränkungen vorab berücksichtigt werden können. Der Schwerpunkt liegt hierbei aber nicht auf einer guten Ausnutzung der Beschränkungen und dem Erzielen kurzer Übergangszeiten. Für Systeme, die ausschließlich einer Stellgrößenbeschränkung unterliegen, wird in [10] eine inversionsbasierte Vorsteuerung angegeben, welche sehr schnelle Übergänge zwischen den Arbeitspunkten durch Ausnutzen der Stellgrößenbeschränkungen erlaubt. Dieses Konzept ist auch für nichtlineare und nicht-minimalphasige Systeme anwendbar. Dazu wird der Arbeitspunktwechsel als Zwei-Punkt-Randwertaufgabe in den Koordinaten der Ein-/Ausgangsnormalform betrachtet. Die Randwertaufgabe wird dann mit numerischen Verfahren gelöst.

Der Fokus in diesem Artikel liegt auf einer möglichst guten Ausnutzung des Stellbereichs. Der Vorsteuerungsentwurf nach [10] ist dazu in besonderer Weise geeignet, weshalb dieser in diesem Beitrag auf Systeme mit zusätzlicher Stellratenbegrenzung erweitert wird. Außerdem liegt es nahe, auch eine Regelung zu verwenden, die den Stellbereich gut ausnutzt. Dazu wird eine Erweiterung der weich-strukturvariablen Regelung aus [14] auf MIMO-Systeme und zusätzliche Stellratenbegrenzungen vorgestellt.

Der Artikel ist folgendermaßen strukturiert: Nach der Problembeschreibung in Abschnitt 2 wird in Abschnitt 3 eine Erweiterung der inversionsbasierten Vorsteuerung vorgestellt. Die Erweiterung der weich-strukturvariablen Regelung auf lineare MIMO-Systeme erfolgt dann in Abschnitt 4. Ein Beispiel in Abschnitt 5 zeigt die Leistungsfähigkeit des Verfahrens.

Im Rahmen dieses Artikels wird die Menge der Sum-of-Squares-Polynome (SOS-Polynome) mit  $\Sigma[\mathbf{x}] = \{p(\mathbf{x}) : p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m q_i^2(\mathbf{x})\}$  bezeichnet, wobei  $p(\mathbf{x})$  und  $q_i(\mathbf{x})$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  Polynome in  $\mathbf{x}$  sind. Falls  $p(\mathbf{x}) \in \Sigma[\mathbf{x}]$  gilt, ist  $p(\mathbf{x}) \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Der Grad eines Polynoms  $p(\mathbf{x})$  wird mit  $\partial(p)$  und eine symmetrische positiv definite Matrix wird mit  $\mathbf{P} > 0$  bezeichnet. Des Weiteren wird die Menge der SOS-Matrixpolynome  $\Sigma^r[\mathbf{x}]$  benötigt. Sie bezeichnet die Menge aller symmetrischen

Matrixpolynome  $\mathbf{P}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{r \times r}[\mathbf{x}]$ , die als eine endliche Summe von Matrixpolynom-Produkten  $\mathbf{Q}_i(\mathbf{x})^T \mathbf{Q}_i(\mathbf{x})$  darstellbar ist.

## 2 Problemstellung

In diesem Artikel wird eine Zwei-Freiheitsgrade-Regelung für lineare Systeme

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_s &= \mathbf{A}_s \mathbf{x}_s + \mathbf{B}_s \mathbf{u}_a, \\ \mathbf{y}_s &= \mathbf{C}_s \mathbf{x}_s \end{aligned} \quad (1)$$

mit  $\mathbf{A}_s \in \mathbb{R}^{n_s \times n_s}$ ,  $\mathbf{B}_s \in \mathbb{R}^{n_s \times m}$  und  $\mathbf{C}_s \in \mathbb{R}^{m \times n_s}$  vorgestellt, wobei  $\mathbf{u}_a$  einer simultanen Stellgrößen- und Stellratenbeschränkung unterliegt, es gilt also  $|u_{a,i}| \leq u_{\max,i}$ ,  $|\dot{u}_{a,i}| \leq v_{\max,i}$ . Zur Modellierung dieser Begrenzungen wird die  $m$ -dimensionale Sättigungsfunktion mit  $\text{sat}_{\mathbf{u}_{\max}}(\cdot) = [\text{sat}_{u_{\max,1}}(\cdot), \dots, \text{sat}_{u_{\max,m}}(\cdot)]^T$  und  $\text{sat}_{u_{\max,i}}(u_i) = \text{sgn}(u_i) \min(u_{\max,i}, |u_i|)$  sowie das in Bild 1 dargestellte Aktormodell verwendet. Es wird durch die Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{u}}_a = \text{sat}_{v_{\max}}(-\mathbf{T}\mathbf{u}_a + \mathbf{T}\text{sat}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathbf{u})) , \quad \mathbf{u}_a(0) = \mathbf{u}_{a,0} \quad (2)$$

mit  $\mathbf{T} = \text{diag}(\tau_1, \dots, \tau_m)$  beschrieben. Es lässt sich zeigen, dass sich der ideale Stellgrößen- und Stellratenbegrenzer für  $\tau_i \rightarrow \infty$  ergibt [24].

Die Aufgabe besteht darin, das System von einem Arbeitspunkt in einen anderen Arbeitspunkt zu überführen. Dabei soll der zur Verfügung stehende Stellbereich möglichst gut ausgenutzt werden.

Zu diesem Zweck wird eine Zwei-Freiheitsgrade-Struktur nach [11] verwendet, die in Bild 2 dargestellt ist. Als Vorsteuerung wird der inversionsbasierte Ansatz für Systeme unter ausschließlicher Stellgrößenbegrenzung nach [10] aufgegriffen und auf den Fall einer zusätzlichen Stellratenbegrenzung erweitert. Diese Vorsteuerung wird im folgenden Abschnitt beschrieben. Die Regelung dient dann dazu, abweichende Anfangszustände der Strecke zu berücksichtigen und ist im Falle einer instabilen Regelstrecke unbedingt erforderlich.

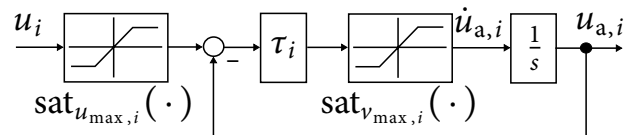


Bild 1 Aktormodell zur Modellierung der Stellgrößen- und Stellratenbeschränkung.

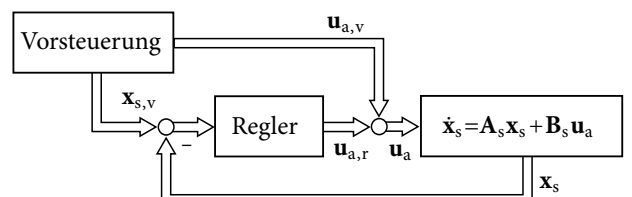


Bild 2 Zwei-Freiheitsgrade-Struktur mit inversionsbasierter Vorsteuerung und Regler zur Stabilisierung.

Dazu müssen die verfügbare Stellgröße und Stellrate zwischen Vorsteuerung und Regelung aufgeteilt werden. Dies geschieht im Folgenden anhand der Parameter  $\kappa_{u,i}$  und  $\kappa_{v,i}$ . Damit lauten die Stellbegrenzungen für die Vorsteuerung

$$|u_{a,v,i}| \leq \kappa_{u,i} u_{\max,i}, \quad |\dot{u}_{a,v,i}| \leq \kappa_{v,i} v_{\max,i} \quad (3)$$

und für die Regelung

$$|u_{a,r,i}| \leq (1 - \kappa_{u,i}) u_{\max,i}, \quad |\dot{u}_{a,r,i}| \leq (1 - \kappa_{v,i}) v_{\max,i}. \quad (4)$$

Die Aufteilung wird dabei so gewählt, dass alle für die Anwendung relevanten Anfangszustände durch die Regelung stabilisiert werden können.

### 3 Inversionsbasierte Vorsteuerung

Die Vorsteuerung wird für das Modell der Strecke

$$\dot{\mathbf{x}}_{s,v} = \mathbf{A}_s \mathbf{x}_{s,v} + \mathbf{B}_s \mathbf{u}_{a,v} \quad (5)$$

entworfen. Die Aufgabe besteht nun in der Bestimmung der Steuerfunktion  $\mathbf{u}_{a,v}$ , die das System von einem Arbeitspunkt  $\mathbf{x}_s(0)$  in den Arbeitspunkt  $\mathbf{x}_s(T)$  in der Zeitspanne  $T$  überführen soll. In [10] wird für diese Aufgabe ein inversionsbasierter Vorsteuerungsentwurf für Systeme mit Stellgrößenbeschränkungen vorgestellt, der im Folgenden erläutert wird.

#### 3.1 Stellgrößenbeschränkungen

Der nun betrachtete Vorsteuerungsentwurf nach [10] ist auch für nichtlineare Systeme anwendbar. Aus diesem Grund wird die Methodik anhand dieses allgemeineren Falles vorgestellt. Das System (1) ist darin als Spezialfall enthalten. Betrachtet wird also ein nichtlineares MIMO-System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_a), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \\ y_i &= h_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (6)$$

mit  $\mathbf{u}_a \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_s}$  und den Begrenzungen für  $\mathbf{u}_a = [u_{a,1}, \dots, u_{a,m}]^T$ :

$$u_{a,i}(t) \in [u_{\min,i}, u_{\max,i}], \quad i = 1, \dots, m. \quad (7)$$

Nun soll eine Steuerfolge  $\mathbf{u}_a^*$  berechnet werden, die das System in einer endlichen Zeit  $T$  zwischen den beiden Arbeitspunkten  $(\mathbf{x}_0^*, \mathbf{u}_{a,0}^*)$  und  $(\mathbf{x}_T^*, \mathbf{u}_{a,T}^*)$  überführt. Dabei wird vorausgesetzt, dass das System in den Arbeitspunkten stationär ist, d. h., es gilt

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0^*, \mathbf{u}_{a,0}^*) = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}_T^*, \mathbf{u}_{a,T}^*) = \mathbf{0}. \quad (8)$$

Für die Ausgänge wiederum gilt

$$y_{k,0}^* = h_k(\mathbf{x}_0^*), \quad y_{k,T}^* = h_k(\mathbf{x}_T^*), \quad k = 1, \dots, m.$$

Die Bestimmung der Steuerfolge kann als Zwei-Punkt-Randwertaufgabe mit den Randbedingungen

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0^*, \quad \mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_T^* \quad (9)$$

formuliert werden. Dazu wird vorausgesetzt, dass der Anfangszustand des Systems  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0^*$  ist. Somit ergeben sich  $n_s$  Differentialgleichungen mit  $2n_s$  Randwertbedingungen für die  $n_s$  Zustände  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_{n_s}]^T$ .

#### 3.2 Ein-/Ausgangsnormalform

Die Ein-/Ausgangsnormalform (E/A-Normalform) eines MIMO-Systems bildet die Basis für den Entwurf der Vorsteuerung. Um sie zu erhalten, wird zunächst der relative Grad definiert. Das System (6) hat den (vektoriellen) relativen Grad  $\mathbf{r} = [r_1, \dots, r_m]^T$ , wenn

$$\frac{\partial}{\partial u_{a,i}} L_f^j h_k(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, r_k - 1 \quad (10)$$

für alle  $i, k \in \{1, \dots, m\}$  gilt und die nichtlineare Entkopplungsmatrix

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u_{a,1}} L_f^{r_1} h_1(\mathbf{x}) & \frac{\partial}{\partial u_{a,2}} L_f^{r_1} h_1(\mathbf{x}) & \dots \\ \frac{\partial}{\partial u_{a,1}} L_f^{r_2} h_2(\mathbf{x}) & \frac{\partial}{\partial u_{a,2}} L_f^{r_2} h_2(\mathbf{x}) & \dots \\ \vdots & \vdots & \\ \frac{\partial}{\partial u_{a,1}} L_f^{r_m} h_m(\mathbf{x}) & \frac{\partial}{\partial u_{a,2}} L_f^{r_m} h_m(\mathbf{x}) & \dots \\ & \frac{\partial}{\partial u_{a,m}} L_f^{r_1} h_1(\mathbf{x}) \\ & \frac{\partial}{\partial u_{a,m}} L_f^{r_2} h_2(\mathbf{x}) \\ & \vdots \\ & \frac{\partial}{\partial u_{a,m}} L_f^{r_m} h_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (11)$$

für alle relevanten Zustände  $\mathbf{x}$  regulär ist [12]<sup>1</sup>. Ist dies der Fall, so gilt

$$\frac{\partial}{\partial u_{a,i}} L_f^{r_k} h_k(\mathbf{x}) \neq 0 \quad (12)$$

für mindestens ein  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Dabei wird durch den Operator  $L_f$  die Lie-Ableitung entlang des Vektorfeldes  $\mathbf{f}$  dargestellt. Ist der relative Grad bestimmt, kann die E/A-Normalform des Systems berechnet werden. Als neue Koordinaten dienen dabei

$$[\mathbf{y}_1^T, \dots, \mathbf{y}_m^T, \boldsymbol{\eta}^T]^T = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) \quad (13)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_k &= [y_k, \dot{y}_k, \dots, y_k^{(r_k-1)}]^T \\ &= [h_k(\mathbf{x}), L_f h_k(\mathbf{x}), \dots, L_f^{r_k-1} h_k(\mathbf{x})]^T, \end{aligned}$$

$k = 1, \dots, m$  und dem ergänzenden Vektor

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\phi}_\eta(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n_s - r_{\text{ges}}}, \quad r_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^m r_i.$$

<sup>1</sup> Bei einigen MIMO-Systemen ist der (vektorielle) relative Grad nicht definiert. Oftmals erlaubt aber eine dynamische Erweiterung die Angabe eines relativen Grades [12].

Damit lautet das System in der nichtlinearen E/A-Normalform mit  $k = 1, \dots, m$

$$y_k^{(r_k)} = \alpha_k(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{u}_a), \quad (14)$$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\beta}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{u}_a). \quad (15)$$

Die Gleichung (14) stellt dabei die E/A-Dynamik mit der Ordnung  $r_{ges}$  dar und Gleichung (15) repräsentiert die interne Dynamik des Systems mit der Ordnung  $n_s - r_{ges}$ . Für den Fall, dass  $r_{ges} = n_s$  gilt, existiert keine interne Dynamik und es handelt sich um ein flaches System mit flachen Ausgängen  $y_k$ .

Schließlich werden auch die Randbedingungen an die E/A-Normalform angepasst:

$$y_k(0) = y_{k,0}^*, \quad y_k(T) = y_{k,T}^*, \quad y_k^{*(i)} \Big|_{t=0,T} = 0, \quad (16)$$

$$\boldsymbol{\eta}(0) = \boldsymbol{\eta}_0^* = \boldsymbol{\phi}_\eta(\mathbf{x}_0^*), \quad \boldsymbol{\eta}(T) = \boldsymbol{\eta}_T^* = \boldsymbol{\phi}_\eta(\mathbf{x}_T^*) \quad (17)$$

mit  $k = 1, \dots, m$  und  $i = 1, \dots, r_k - 1$ .

### 3.3 Systeminversion

Aus Gleichung (14) ist ersichtlich, dass die Eingangsgrößen  $u_{a,k}^*$  direkt auf die höchsten Ableitungen  $y_k^{*(r_k)}$  der Ausgänge wirken. Um Stellgrößenbeschränkungen berücksichtigen zu können, werden nun Funktionen

$$y_k^{*(r_k)} = \hat{\alpha}_k \quad (18)$$

angesetzt. Diese Funktionen werden später so gewählt, dass die Stellgrößenbegrenzungen nicht verletzt werden.

Unter der Voraussetzung, dass die nichtlineare Entkopplungsmatrix  $\mathbf{D}(\mathbf{x})$  für alle relevanten Zustände regulär ist, wird zunächst die Inverse der E/A-Normalform mit  $y_k^{*(r_k)} = \hat{\alpha}_k$  gebildet. Es ergibt sich aus (14)

$$\mathbf{u}_a^* = \boldsymbol{\alpha}^{-1}(\mathbf{y}_1^*, \hat{\alpha}_1, \dots, \mathbf{y}_m^*, \hat{\alpha}_m, \boldsymbol{\eta}^*) \quad (19)$$

mit  $\boldsymbol{\alpha}^{-1} = [\alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_m^{-1}]^T$ . Auf diese Weise lässt sich die Steuertrajektorie  $\mathbf{u}_a^*$  in Abhängigkeit von der Ausgangstrajektorie  $\mathbf{y}^*(t)$ , der internen Dynamik  $\boldsymbol{\eta}^*(t)$  und der Ansatzfunktionen  $\hat{\boldsymbol{\alpha}} = [\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_m]$  ermitteln. Die interne Dynamik kann berechnet werden, indem die Ausgangstrajektorie in (15) eingesetzt wird

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}^* = \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\eta}^*, \mathbf{y}_1^*, \hat{\alpha}_1, \dots, \mathbf{y}_m^*, \hat{\alpha}_m), \quad \boldsymbol{\eta}^*(0) = \boldsymbol{\eta}_0^*, \quad \boldsymbol{\eta}^*(T) = \boldsymbol{\eta}_T^* \quad (20)$$

Ist die interne Dynamik bestimmt, lässt sich mit Gleichung (19) auch die Steuerfolge  $\mathbf{u}_a^*$  berechnen.

Die Lösungen von  $\mathbf{y}^*(t)$ ,  $\boldsymbol{\eta}^*(t)$  sowie  $\mathbf{u}_a^*(t)$  hängen also von der Wahl von  $\hat{\alpha}_k$  ab, auf die im nächsten Abschnitt eingegangen wird. Für  $\hat{\alpha}_k$  werden zusätzliche Randbedingungen aufgestellt, damit die Steuerfolge bei  $t = 0$  und  $t = T$  stetig ist und die Randbedingungen (16) einhält.

### 3.4 Lösung der Randwertaufgabe

Um die Randwertaufgabe mit den  $n_s$  Differentialgleichungen und  $2n_s$  Randbedingungen zu lösen, werden für den Ansatz der  $\hat{\alpha}_k$ -Funktionen  $n_s$  freie Parameter

$$\mathbf{p}_k = (p_{k,1}, \dots, p_{k,q_k}), \quad \sum_{k=1}^m q_k = n_s \quad (21)$$

benötigt, die in insgesamt  $m$  Ansatzfunktionen  $\Psi_k(t, \mathbf{p}_k)$ ,  $t \in [0, T]$  vorgesehen werden. Bei der Wahl der Ansatzfunktionen ist ebenfalls zu berücksichtigen, dass die Steuerfolge bei  $t = 0$  und  $t = T$  stetig ist, d. h., Bedingung (16) erfüllt ist. Die Funktionen

$$\Psi_k(t, \mathbf{p}_k) = \sum_{i=1}^{q_k} p_{k,i} \left[ \left( \frac{t}{T} \right)^{i+1} - \frac{t}{T} \right] \quad (22)$$

erfüllen diese Forderung. Werden diese nun in (19) und (20) eingesetzt, ergibt sich die Stellgrößenfolge

$$\mathbf{u}_\Psi^* = \boldsymbol{\alpha}^{-1}(\mathbf{y}_1^*, \Psi_1(t, \mathbf{p}_1), \dots, \mathbf{y}_m^*, \Psi_m(t, \mathbf{p}_m), \boldsymbol{\eta}^*). \quad (23)$$

Anhand von  $\mathbf{u}_\Psi^*$  kann nun überprüft werden, ob die Stellgrößenbeschränkungen eingehalten werden. Wird eine Beschränkung verletzt, müssen die Ansatzfunktionen  $\hat{\alpha}_k$  wie folgt umgeplant werden

$$\hat{\alpha}_k = \begin{cases} \Psi_k(t, \mathbf{p}_k), & \text{wenn } u_{\Psi_j} \in [u_{\min,j}, u_{\max,j}] \\ \alpha_k(\mathbf{y}_1^*, \dots, \mathbf{y}_m^*, \boldsymbol{\eta}^*, \hat{\mathbf{u}}), & \text{sonst} \end{cases} \quad \forall j = 1, \dots, m, \quad (24)$$

für alle  $k = 1, \dots, m$  mit  $\hat{\mathbf{u}} = [\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_m]^T$  und

$$\hat{u}_j = \begin{cases} u_{\min,j}, & \text{wenn } u_{\Psi_j} < u_{\min,j}, \\ u_{\Phi_j}, & \text{wenn } u_{\Psi_j} \in [u_{\min,j}, u_{\max,j}], \\ u_{\max,j}, & \text{wenn } u_{\Psi_j} > u_{\max,j}. \end{cases} \quad (25)$$

Um die Steuerfolge zu berechnen, muss das Randwertproblem mit den  $\hat{\alpha}_k$ -Funktionen in Abhängigkeit der Parameter  $\mathbf{p}_k$  gelöst werden. Dabei ist die Transitionszeit  $T$  im Hinblick auf die Stellgrößenbegrenzungen so zu wählen, dass eine Lösung gefunden werden kann. Ist sie zu klein gewählt, so ist das Problem aufgrund der Stellgrößenbeschränkung nicht lösbar und  $T$  muss vergrößert werden. Zur Lösung der Randwertaufgabe kann die MATLAB-Funktion `bvp4c` [17] verwendet werden.

### 3.5 Ergänzung um Berücksichtigung der Stellratenbegrenzungen

Betrachtet wird das nichtlineare MIMO-System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_s &= \mathbf{f}_s(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_a), & \mathbf{x}_s(0) &= \mathbf{x}_{s,0}, \\ y_{s,i} &= h_{s,i}(\mathbf{x}_s), & i &= 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (26)$$

Neben der Stellgrößenbegrenzung soll auch die Begrenzung der Stellrate  $\dot{\mathbf{u}}_a = [\dot{u}_{a,1}, \dots, \dot{u}_{a,m}]^T$  berücksichtigt werden. Dabei wird zur Vereinfachung der Schreibweise

$\mathbf{x}_s$  anstelle von  $\mathbf{x}_{s,v}$  und  $\mathbf{u}_a$  anstelle von  $\mathbf{u}_{a,v}$  verwendet. Es gilt also

$$\dot{u}_{a,k}(t) \in [v_{\min,k}, v_{\max,k}], \quad k = 1, \dots, m, \quad (27)$$

$$u_{a,k}(t) \in [u_{\min,k}, u_{\max,k}], \quad k = 1, \dots, m. \quad (28)$$

Angesichts der Ausführungen des vorigen Abschnitts ist es naheliegend, auch der zusätzlichen Stellratenbegrenzung durch Umplanen der Ansatzfunktion zu begegnen. Dazu findet das Aktormodell (2) Verwendung, wodurch eine Begrenzung des Aktoreingangs  $\mathbf{u}$  auf

$$u_k \in [u_{\min,k}, u_{\max,k}], \quad k = 1, \dots, m \quad (29)$$

erforderlich wird. Durch das Umplanen der Ansatzfunktionen wird sichergestellt, dass (27) und (29) erfüllt sind. Ist dies der Fall, wirken sich die Sättigungsfunktionen in (2) nicht aus und die Differentialgleichung des Aktormodells lautet

$$\dot{\mathbf{u}}_a = -\mathbf{T}\mathbf{u}_a + \mathbf{T}\mathbf{u}, \quad \mathbf{u}_a(0) = \mathbf{u}_{a,0}. \quad (30)$$

Zur Durchführung des Vorsteuerentwurfs wird nun der erweiterte Zustandsvektor  $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_s^T, \mathbf{u}_a^T]^T \in \mathbb{R}^n$  mit  $n = n_s + m$  verwendet und das erweiterte System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \\ y_i &= h_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (31)$$

mit

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_s(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_a) \\ -\mathbf{T}\mathbf{u}_a + \mathbf{T}\mathbf{u} \end{bmatrix}, \quad h_i(\mathbf{x}) = h_{s,i}(\mathbf{x}_s) \quad (32)$$

gebildet. Die Erweiterung des Systems muss auch bei den Randbedingungen berücksichtigt werden. Für  $\mathbf{x}_s$  sind diese wiederum durch (9) gegeben. Hinzu kommen jedoch die Bedingungen

$$\mathbf{u}_a(0) = \mathbf{u}_{a,0}^*, \quad \mathbf{u}_a(T) = \mathbf{u}_{a,T}^* \quad (33)$$

für das Aktormodell. Insgesamt ergeben sich also die Randbedingungen

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0^* = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{s,0}^* \\ \mathbf{u}_{a,0}^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_T^* = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{s,T}^* \\ \mathbf{u}_{a,T}^* \end{bmatrix}. \quad (34)$$

### Lösung der Randwertaufgabe

Die Steuerfolge  $\mathbf{u}_\Phi^*$  kann wieder nach der Transformation des Systems in die E/A-Normalform und unter Verwendung der Ansatzfunktionen (22) bestimmt werden. Dabei ist zum einen zu beachten, dass bei Bildung der E/A-Normalform bzw. bei der Berechnung des relativen Grades das erweiterte System (31) mit dem neuen Eingangsvektor  $\mathbf{u}$  anstelle von  $\mathbf{u}_a$  verwendet werden muss. Zum anderen gilt für die Parameter der Ansatzfunktion nun aufgrund des erweiterten Zustandsvektors

$$\mathbf{p}_k = (p_{k,1}, \dots, p_{k,q_k}), \quad \sum_{k=1}^m q_k = n. \quad (35)$$

Mit Hilfe der Beziehung

$$\mathbf{u}_\Psi^* = \boldsymbol{\alpha}^{-1}(\mathbf{y}_1^*, \Psi_1(t, \mathbf{p}_1), \dots, \mathbf{y}_m^*, \Psi_m(t, \mathbf{p}_m), \boldsymbol{\eta}^*) \quad (36)$$

kann die benötigte Stellgröße berechnet werden. Aufgrund der zusätzlichen Stellratenbegrenzung erfolgt nun das Umplanen der Ansatzfunktion gemäß

$$\hat{\alpha}_k = \begin{cases} \Psi_k(t, \mathbf{p}_k), & \text{wenn } \begin{aligned} &u_{\Psi_j} \in [u_{\min,j}, u_{\max,j}], \\ &\wedge \dot{u}_{a,j} \in [v_{\min,j}, v_{\max,j}], \\ &\forall j = 1, \dots, m, \end{aligned} \\ \alpha_k(\mathbf{y}_1^*, \dots, \mathbf{y}_m^*, \boldsymbol{\eta}^*, \hat{\mathbf{u}}), & \text{sonst.} \end{cases} \quad (37)$$

Zur Berechnung von  $\dot{u}_{a,j}$  wird Gleichung (30) verwendet. Unter Verwendung der inversen E/A-Transformation

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s \\ \mathbf{u}_a \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Phi}^{-1}([\mathbf{y}_1^T, \dots, \mathbf{y}_m^T, \boldsymbol{\eta}^T]^T) \quad (38)$$

kann  $\mathbf{u}_a$  und somit zusammen mit  $\mathbf{u}_\Psi^*$  auch  $\hat{\mathbf{u}}_a$  ermittelt und zum Umplanen der Ansatzfunktion herangezogen werden. Dazu muss  $\hat{\mathbf{u}}$  so berechnet werden, dass weder die Stellgrößen- noch die Stellratenbeschränkung verletzt wird. In einem ersten Schritt wird zunächst  $\hat{\mathbf{u}}$  so modifiziert, dass die Stellgrößenbegrenzung eingehalten wird, d. h.,

$$\tilde{u}_j = \begin{cases} u_{\min,j}, & \text{wenn } u_{\Psi_j} < u_{\min,j}, \\ u_{\Psi_j}, & \text{wenn } u_{\Psi_j} \in [u_{\min,j}, u_{\max,j}], \\ u_{\max,j}, & \text{wenn } u_{\Psi_j} > u_{\max,j} \end{cases} \quad (39)$$

mit  $j = 1, \dots, m$ . Anschließend wird die Einhaltung der Stellratenbegrenzung überprüft. Dazu wird abhängig von  $\tilde{\mathbf{u}}$  die modifizierte Steuerfolge  $\hat{\mathbf{u}}$  berechnet gemäß

$$\hat{u}_j = \begin{cases} v_{\min,j}/\tau_j + u_{a,j}, & \text{wenn } \dot{u}_{a,j} < v_{\min,j}, \\ \tilde{u}_j, & \text{wenn } \dot{u}_{a,j} \in [v_{\min,j}, v_{\max,j}], \\ v_{\max,j}/\tau_j + u_{a,j}, & \text{wenn } \dot{u}_{a,j} > v_{\max,j}. \end{cases} \quad (40)$$

Die Stellrate  $\dot{u}_{a,j}$  kann hierbei unmittelbar aus (30) ermittelt werden, da  $\mathbf{u}_a$  mit Hilfe der inversen Transformation  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\Phi}^{-1}([\mathbf{y}_1^T, \dots, \mathbf{y}_m^T, \boldsymbol{\eta}^T]^T)$  berechnet werden kann. Nun kann die Steuerfolge bestimmt werden, indem wiederum das Randwertproblem mit den  $\hat{\alpha}_k$ -Funktionen in Abhängigkeit der Parameter  $\mathbf{p}_k$  gelöst wird.

Dabei ist zu beachten, dass für den Vorsteuerentwurf die Stellbegrenzungen angepasst werden müssen. Es gilt im vorliegenden Fall  $u_{a,k}(t) \in [-\kappa_{v,k}u_{\max,k}, \kappa_{v,k}u_{\max,k}]$  und  $\dot{u}_{a,k}(t) \in [-\kappa_{v,k}v_{\max,k}, \kappa_{v,k}v_{\max,k}]$  mit  $k = \{1, 2, \dots, m\}$ .

*Bemerkung 1.* Wird der Eingang  $\mathbf{u}$  des Aktormodells (2) gemäß (39) auf  $\pm u_{\max,i}$  beschränkt, so wird nach einigen Iterationen der Funktion `bvp4c` auch der Aktorausgang beschränkt sein. Eine deutliche Verbesserung der Konvergenzgeschwindigkeit lässt sich erzielen, wenn vor dem Umplanen gemäß (40) noch der Ausgang  $\mathbf{u}_a$  des Aktormodells bzgl. der Stellgröße beschränkt wird.

*Bemerkung 2.* In [10] werden neben Stellgrößenbegrenzungen auch Begrenzungen der Ausgangsgrößen berücksichtigt. Dies ist natürlich auch bei der vorgestellten Erweiterung möglich und kann in analoger Weise erfolgen. Hierzu sei auf [10] verwiesen.

#### 4 Weich-strukturvariable Regelung

In der Zwei-Freiheitsgrade-Struktur dient die Regelung dazu, den Fehlerzustand  $\mathbf{e}_x = \mathbf{x}_s - \mathbf{x}_{s,v}$  zu stabilisieren, der durch die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_x &= \dot{\mathbf{x}}_s - \dot{\mathbf{x}}_{s,v} \\ &= \mathbf{A}_s \mathbf{x}_s + \mathbf{B}_s (\mathbf{u}_{a,v} + \mathbf{u}_{a,r}) - \dot{\mathbf{x}}_{s,v} \end{aligned}$$

beschrieben wird. Einsetzen von  $\mathbf{x}_s = \mathbf{e}_x + \mathbf{x}_{s,v}$  ergibt

$$\dot{\mathbf{e}}_x = \mathbf{A}_s \mathbf{e}_x + \mathbf{B}_s \mathbf{u}_{a,r} + \underbrace{\mathbf{A}_s \mathbf{x}_{s,v} + \mathbf{B}_s \mathbf{u}_{a,v}}_{\dot{\mathbf{x}}_{s,v}} - \dot{\mathbf{x}}_{s,v} \quad (41)$$

$$= \mathbf{A}_s \mathbf{e}_x + \mathbf{B}_s \mathbf{u}_{a,r}. \quad (42)$$

Folglich ist die Aufgabe der Regelung, die Ruhelage  $\mathbf{e}_x = \mathbf{0}$  des Systems (42) zu stabilisieren.

Für SISO-Systeme mit linearer Dynamik, die ausschließlich einer Stellgrößenbeschränkung  $|u_{a,i}| \leq u_{\max,i}$  unterworfen sind, wird in [1;2] die weich-strukturvariable Regelung mittels impliziten Ljapunov-Funktionen (iWSVR) angegeben. Bei ihr wird durch Variation der Reglerparameter in Abhängigkeit vom Systemzustand die Stellgrößenbegrenzung gut ausgenutzt, was kurze Ausregelzeiten ermöglicht. Eine weitere Verbesserung des Ausregelverhaltens ist durch die zusätzliche Verwendung sättigender Regelgesetze erreichbar [18].

Auch im Falle einer zusätzlichen Stellratenbeschränkung weist eine iWSVR Vorteile auf. Für die oben genannten Versionen wurde in [15] eine sättigende weich-strukturvariable Regelung für Systeme unter Stellgrößen- und Stellratenbegrenzung angegeben. Wie in [14] gezeigt, hat diese klassische Version jedoch den Nachteil, dass für Systeme mit

$$\sum_{i=1}^n \operatorname{Re} \{ \lambda_i(\mathbf{A}) \} > 0,$$

wobei  $\lambda_i(\mathbf{A})$  den  $i$ -ten Eigenwert der Strecke  $\mathbf{A}$  bezeichnet, kein Regler entworfen werden kann. In [14] wird eine modifizierte Selektionsstrategie vorgestellt, die diesen Nachteil vermeidet. Im Rahmen dieses Beitrags wird das Verfahren aus [14] auf MIMO-Systeme und zusätzliche Stellratenbegrenzungen erweitert.

Zunächst wird der erweiterte Zustandsvektor  $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_s^T \ \mathbf{u}_a^T]^T$  eingeführt. Es ergibt sich das Gesamtsystem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \operatorname{sat}_{v_{\max}} (\mathbf{K}_1 \mathbf{x} + \mathbf{T} \operatorname{sat}_{u_{\max}} (\mathbf{u})), \quad (43)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_s & \mathbf{B}_s \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_1 = [\mathbf{0} \ \mathbf{T}] \quad (44)$$

mit  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\mathbf{K}_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und  $n = n_s + m$ .

#### 4.1 Regelungsnormalform für lineare MIMO-Systeme

Für den Entwurf eines weich-strukturvariablen Reglers stellt sich die Regelungsnormalform als vorteilhaft heraus. Im Falle von MIMO-Systemen werden verschiedene Normalformen in [21] vorgestellt. Eine ausführliche Betrachtung findet sich ebenfalls in [20]. Dazu wird vorausgesetzt, dass die Steuerbarkeitsmatrix

$$\mathbf{M}_b = [\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \mathbf{A}^2\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (45)$$

den Rang  $n$  besitzt. Unter Verwendung der Strategie der gleichlangen Ketten [21] ergibt sich zunächst

$$\mathbf{P}_{Gl} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m, \mathbf{A}\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{A}\mathbf{b}_m, \dots, \mathbf{A}^{k_1-1}\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{A}^{k_m-1}\mathbf{b}_m], \quad (46)$$

wobei  $\mathbf{b}_i$  die  $i$ -te Spalte der Eingangsmatrix  $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \dots \ \mathbf{b}_m]$  bezeichnet. Die Matrix  $\mathbf{P}_{Gl}$  muss invertierbar sein. Daher werden nur Spalten  $\mathbf{A}^i \mathbf{b}_i$  hinzugefügt, wenn dadurch der Rang von  $\mathbf{P}_{Gl}$  vergrößert wird und  $\mathbf{A}^{i-1} \mathbf{b}_i$  bereits hinzugefügt wurde. Gilt  $\operatorname{rang}(\mathbf{P}_{Gl}) = n$ , werden keine weiteren Spalten hinzugefügt. Anschließend wird die Inverse  $\mathbf{P}_{Gl}^{-1}$  berechnet, aus welcher die Transformationsmatrix  $\mathbf{\Gamma}$  wie folgt gewonnen werden kann

$$\mathbf{P}_{Gl}^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}}_1^T \\ \hat{\mathbf{p}}_2^T \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{p}}_n^T \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}}_{\rho_1}^T \\ \hat{\mathbf{p}}_{\rho_1}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{p}}_{\rho_1}^T \mathbf{A}^{k_1-1} \\ \hat{\mathbf{p}}_{\rho_2}^T \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{p}}_{\rho_2}^T \mathbf{A}^{k_2-1} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{p}}_{\rho_m}^T \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{p}}_{\rho_m}^T \mathbf{A}^{k_m-1} \end{bmatrix}. \quad (47)$$

Darin entspricht  $\rho_i$  dem Spaltenindex von  $\mathbf{A}^{k_i-1} \mathbf{b}_i$  in (46). Mit der Transformation  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{x}$  ergibt sich die transformierte Darstellung mit der Systemmatrix

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & & 1 & 0 & \dots & & 0 \\ -a_{1,1} & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -a_{1,n} \\ & & & & \ddots & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & & & 1 \\ -a_{m,1} & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -a_{m,n} \end{bmatrix}$$

und der Eingangsmatrix

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 \\ 1 & \tilde{b}_{1,2} & \tilde{b}_{1,3} & \dots & \tilde{b}_{1,m} \\ 0 & 0 & \dots & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 1 & \tilde{b}_{2,3} & \dots & \tilde{b}_{2,m} \\ & & \vdots & & \\ 0 & \dots & & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dabei bezeichnet \* Elemente, die im Allgemeinen von Null verschieden sein können. Beispiele hierfür werden in [23] angegeben. Im Rahmen der nun folgenden Ausführungen werden die Vektoren

$$\mathbf{a}_j = [a_{j,1} \ a_{j,2} \ \dots \ a_{j,n}]^T$$

mit  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$  benötigt. Das Ergebnis der Transformation hängt mit der Anordnung der Spalten  $\mathbf{b}_i$  in  $\mathbf{B}$  zusammen. Da die Nummerierung der Eingänge frei wählbar ist, ist eine spaltenweise Umsortierung der Eingangsmatrix stets möglich, so dass jedes steuerbare System in die obige Darstellung transformiert werden kann.

### 4.2 Implizite strukturvariable Regelung

Die zugrunde liegende Idee einer weich-strukturvariablen Regelung ist die Variation des Reglers im Verlauf des Ausregelvorgangs in Abhängigkeit eines Auswahlparameters  $\nu \in (0, \bar{\nu}]$ . Im MIMO-Fall lautet das Regelgesetz

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}_2(\mathbf{x}) = -\mathbf{K}_2(\nu)\mathbf{x} = - \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{2,1}^T(\nu) \\ \vdots \\ \mathbf{k}_{2,m}^T(\nu) \end{bmatrix} \mathbf{x}. \quad (48)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann  $\bar{\nu} = 1$  festgelegt werden. Jedem Regelkreis  $\hat{\mathbf{A}}(\nu) = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}(\nu)$  wird ein kontraktiv invariantes Gebiet  $\mathcal{G}(\nu)$  zugeordnet, welches mittels der Funktion  $g(\mathbf{x}, \nu)$

$$\mathcal{G}(\nu) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g(\mathbf{x}, \nu) < 0\} \quad (49)$$

definiert wird. Die Gebiete  $\mathcal{G}(\nu)$  werden infinitesimal dicht geschachtelt, d. h.,  $\mathcal{G}(\nu - \epsilon) \subset \mathcal{G}(\nu)$  gilt für ein beliebig kleines  $\epsilon > 0$ . Der dem Gebiet zugeordnete Regler  $\mathbf{K}(\nu)$  wird beim Eintritt der Trajektorie in das Gebiet  $\mathcal{G}(\nu)$  aktiviert, d. h., wenn  $\mathbf{x}(t)$  auf dem Rand des Gebietes  $\partial\mathcal{G}(\nu) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g(\mathbf{x}, \nu) = 0\}$  liegt, weshalb der Auswahlparameter  $\nu$  durch die Gleichung

$$g(\mathbf{x}, \nu) = 0 \quad (50)$$

implizit definiert ist. Ist die Selektionsstrategie (50) hinsichtlich  $\nu$  eindeutig lösbar, ist jedem Zustand  $\mathbf{x} \in \mathcal{G}(1)$  eindeutig ein Regler  $\mathbf{K}(\nu)$  zugeordnet. Des Weiteren ist  $g(\mathbf{x}, \nu)$  so zu wählen, dass der geschlossene Regelkreis stabil ist. Die zuvor genannten Bedingungen sind erfüllt, falls der folgende Satz aus [3] erfüllt ist.

**Satz 1 ([3]).** Die Differentialgleichung  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  mit der Ruhelage  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  besitze für jeden Anfangswert aus einer Umgebung  $\mathcal{U}_1$  des Ursprungs eine stetige und eindeutige Lösung. Es existiere in einer Menge

$$\mathcal{H} = \{(\nu, \mathbf{x}) : 0 < \nu < \bar{\nu}, \mathbf{x} \in \mathcal{U}_0 \setminus \{\mathbf{0}\}\},$$

wobei  $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_1$  ebenfalls eine Umgebung des Ursprungs sei, eine stetige Funktion  $g(\mathbf{x}, \nu)$ , so dass gilt:

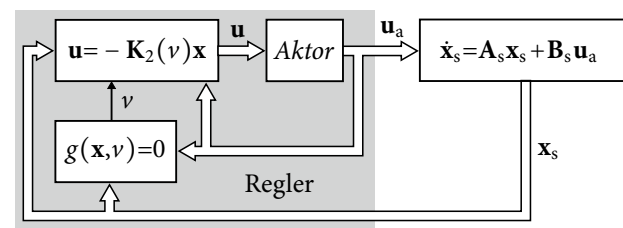
1. Für  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$  resultiert aus  $g(\mathbf{x}, \nu) = 0$  der Grenzübergang  $\nu \rightarrow 0+$ ,
  2.  $\lim_{\nu \rightarrow 0+} g(\mathbf{x}, \nu) > 0$  und  $\lim_{\nu \rightarrow \bar{\nu}-} g(\mathbf{x}, \nu) < 0$  für alle  $\mathbf{x} \in \mathcal{U}_0 \setminus \{\mathbf{0}\}$ ,
  3.  $-\infty < \partial g(\mathbf{x}, \nu) / \partial \nu < 0$  für alle  $(\nu, \mathbf{x}) \in \mathcal{H}$ ,
  4.  $\partial g(\mathbf{x}, \nu) / \partial t < 0$  für alle  $(\nu, \mathbf{x}) \in \mathcal{H}$  mit  $g(\mathbf{x}, \nu) = 0$
- erfüllt, dann ist die Ruhelage  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  asymptotisch stabil. Des Weiteren ist durch die Gleichung  $g(\mathbf{x}, \nu) = 0$  in  $\mathcal{U}_0 \setminus \{\mathbf{0}\}$  eine Funktion  $\nu$  implizit definiert, die in  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  durch  $\nu(\mathbf{0}) = 0$  stetig erweiterbar ist. Diese erweiterte Funktion ist in  $\mathcal{U}_0$  eine Ljapunov-Funktion für das System  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ .

Sind die Bedingungen von Satz 1 erfüllt, ist  $\nu$  eine implizite Ljapunov-Funktion und eindeutig aus (50) bestimmbar. Die Gebiete  $\mathcal{G}(\nu)$  sind in diesem Fall kontraktiv invariant, d. h., eine Trajektorie, die in ein Gebiet einläuft, kann es im weiteren Verlauf nicht verlassen. Ein Strukturbild einer weich-strukturvariablen Regelung zeigt Bild 3. Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass das System in der in Abschnitt 4.1 beschriebenen MIMO-Regelungsnormalform vorliegt. Als Auswahlstrategie wird

$$g(\mathbf{x}, \nu) = \mathbf{x}^T \mathbf{R}(\nu) \mathbf{x} - 1 = 0 \quad (51)$$

mit  $\mathbf{R}(\nu) = \mathbf{D}^{-1}(\nu) \mathbf{R}_1 \mathbf{D}^{-1}(\nu)$  verwendet, wobei  $\mathbf{D}(\nu) = \text{diag}(\nu^{k_1}, \nu^{k_1-1}, \dots, \nu, \nu^{k_2}, \dots, \nu, \dots, \nu^{k_m}, \dots, \nu)$  ist. Außerdem werden das nichtsättigende Gebiet

$$\mathcal{L}_{u_{\max}}(\mathbf{H}(\nu)) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{h}_i^T(\nu) \mathbf{x}| \leq u_{\max, i}, \ i = 1, \dots, m\}, \quad (52)$$



**Bild 3** Strukturbild einer weich-strukturvariablen Regelung mit integriertem Aktormodell zur Sicherstellung der Stellgrößen- und Stellratenbeschränkungen.

in welchem die Zustandsrückführung  $\mathbf{H}(v)$  nicht sättigt, die Menge  $\mathcal{V} = \{v \in \mathbb{N}^m : v_i \in \{1, 2, 3\}\}$  sowie Matrizen

$$\begin{aligned} \Delta(v, \mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_3) = & \\ & \text{diag}\{\delta(v_1-1), \delta(v_2-1), \dots, \delta(v_m-1)\} \mathbf{W}_1 \\ & + \text{diag}\{\delta(v_1-2), \delta(v_2-2), \dots, \delta(v_m-2)\} \mathbf{W}_2 \\ & + \text{diag}\{\delta(v_1-3), \delta(v_2-3), \dots, \delta(v_m-3)\} \mathbf{W}_3 \end{aligned} \quad (53)$$

mit  $\mathbf{W}_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und

$$\delta(j) = \begin{cases} 1, & \text{falls } j = 0, \\ 0, & \text{falls } j \neq 0 \end{cases}$$

benötigt. Nun kann der folgende Satz angegeben werden:

**Satz 2.** Gegeben sei das System (44), das Regelgesetz (48) und die Selektionsstrategie (51). Falls ein Polynom  $\gamma(v)$  mit  $\gamma(v) > 0$  für alle  $v \in [v_{\min}, 1]$ , eine Matrix  $\mathbf{R}_1 \succ 0$  und virtuelle Zustandsrückführungen  $\mathbf{H}_1(v)$ ,  $\mathbf{H}_2(v)$  existieren, so dass

$$\mathbf{N}\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1\mathbf{N} \prec 0, \quad (54a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(v) (\mathbf{A} + \mathbf{B}\Delta(v, \mathbf{H}_1(v), \mathbf{K}_1 + \mathbf{TH}_2(v)), \\ \mathbf{K}_1 + \mathbf{TK}_2(v)) + (\mathbf{A} + \mathbf{B}\Delta(v, \mathbf{H}_1(v), \\ \mathbf{K}_1 + \mathbf{TH}_2(v), \mathbf{K}_1 + \mathbf{TK}_2(v)))^T \mathbf{R}(v) \prec 0, \\ \forall v \in (0, 1], \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \end{aligned} \quad (54b)$$

und  $\mathcal{G}(v) \subseteq \mathcal{L}_{v_{\max}}(\mathbf{H}_1(v)) \cap \mathcal{L}_{u_{\max}}(\mathbf{H}_2(v))$  mit  $\mathbf{N} = \text{diag}(-k_1, \dots, -1, -k_2, \dots, -1, -k_m, \dots, -1)$  gilt, dann stabilisiert der Regler (48) mit der Auswahlstrategie (51) die Ruhelage  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  des Systems (44).

*Beweis.* Der Beweis findet sich in Anhang A.1.  $\square$

*Bemerkung 3.* Aufgrund der Terme  $v^{-k_i}$  im Regelgesetz, können für kleine Werte von  $v$  numerische Probleme auftreten. Deshalb wird ein Minimalwert  $v_{\min} > 0$  festgelegt. Sobald dieser Wert erreicht ist, wird die konstante Zustandsrückführung  $\mathbf{K}_2(v_{\min})$  verwendet.

### 4.3 Konvexer Reglerentwurf

Die Bedingungen aus Satz 2 sind noch nicht für einen effizienten Reglerentwurf anwendbar. Durch eine geschickte Wahl der Reglermatrizen  $\mathbf{H}_1(v)$ ,  $\mathbf{H}_2(v)$  und  $\mathbf{K}_2(v)$  lässt sich die Entwurfsaufgabe aber als konvexes Optimierungsproblem formulieren. Eine solche für den Entwurf günstige Darstellung ergibt sich durch die Wahl

$$\mathbf{h}_{1,i}^T(v) = \hat{\mathbf{a}}'_{1,i}{}^T \mathbf{D}^{-1}(v) - \mathbf{a}'_i{}^T, \quad (55)$$

$$\mathbf{h}_{2,i}^T(v) = \hat{\mathbf{a}}'_{2,i}{}^T \mathbf{D}^{-1}(v) - (\mathbf{a}'_i - \mathbf{k}_{1,i})^T, \quad (56)$$

$$\mathbf{k}_{2,i}^T(v) = \hat{\mathbf{a}}'_{*,i}{}^T \mathbf{D}^{-1}(v) - \tau_i^{-1} (\mathbf{a}'_i - \mathbf{k}_{1,i})^T, \quad (57)$$

mit  $i = \{1, 2, \dots, m\}$ . Die Vektoren  $\mathbf{a}'_i$  werden in rekursiver Weise beginnend mit  $\mathbf{a}'_m$  gewählt:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}'_m &= \mathbf{a}_m, \\ \mathbf{a}'_{m-1} &= \mathbf{a}_{m-1} - \tilde{b}_{m-1,m} \mathbf{a}'_m, \\ &\vdots \\ \mathbf{a}'_i &= \mathbf{a}_i - \sum_{j=i+1}^m \tilde{b}_{i,j} \mathbf{a}'_j. \end{aligned} \quad (58)$$

In analoger Weise ergeben sich die Vektoren  $\hat{\mathbf{a}}'_{k,m}$ :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}}'_{k,m} &= \hat{\mathbf{a}}_{k,m}, \\ \hat{\mathbf{a}}'_{k,m-1} &= \hat{\mathbf{a}}_{k,m-1} - \tilde{b}_{m-1,m} \hat{\mathbf{a}}'_{k,m}, \\ &\vdots \\ \hat{\mathbf{a}}'_{k,i} &= \hat{\mathbf{a}}_{k,i} - \sum_{j=i+1}^m \tilde{b}_{i,j} \hat{\mathbf{a}}'_{k,j} \end{aligned} \quad (59)$$

mit  $k = \{1, 2, *\}$ . Durch die Wahl von  $\mathbf{H}_1(v)$ ,  $\mathbf{H}_2(v)$  und  $\mathbf{K}_2(v)$  entsprechend (55)–(57) wird es möglich, die Bedingungen (54b) unabhängig vom Selektionsparameter  $v$  darzustellen.

Der folgende Satz gibt Entwurfsbedingungen für eine strukturvariable Regelung an, die einen Entwurf mittels konvexer Optimierung erlauben.

**Satz 3.** Gegeben sei das System (44), das Regelgesetz (48) mit der Reglermatrix (57), den Hilfsreglern (55), (56) und die Selektionsstrategie (51). Falls Matrizen  $\mathbf{Q} \succ 0$ ,  $\mathbf{Y}_1$ ,  $\mathbf{Y}_2$  und  $\mathbf{Y}_*$  existieren, so dass

$$\mathbf{Q}\mathbf{N} + \mathbf{N}\mathbf{Q} \prec 0, \quad (60a)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{G})\mathbf{Q} + \mathbf{Q}(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{G})^T - \mathbf{B}\Delta(v, \mathbf{Y}_1, \mathbf{TY}_2, \mathbf{TY}_*) \\ - \Delta(v, \mathbf{Y}_1, \mathbf{TY}_2, \mathbf{TY}_*)^T \mathbf{B}^T \prec 0, \end{aligned} \quad (60b)$$

für alle  $v \in \mathcal{V}$ ,

$$\begin{bmatrix} v_{\max,j}^2 - \gamma(v) s_{1,j}(v) & \tilde{\mathbf{y}}_{1,j}^T - \mathbf{a}'_j{}^T \mathbf{D}^{-1}(v) \mathbf{Q} \\ \tilde{\mathbf{y}}_{1,j} - \mathbf{Q} \mathbf{D}^{-1}(v) \mathbf{a}'_j & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \in \Sigma^{n+1}[v], \quad (60c)$$

$$\begin{bmatrix} u_{\max,j}^2 - \gamma(v) s_{2,j}(v) & \tilde{\mathbf{y}}_{2,j}^T - \tilde{\mathbf{a}}_j{}^T \mathbf{D}^{-1}(v) \mathbf{Q} \\ \tilde{\mathbf{y}}_{2,j} - \mathbf{Q} \mathbf{D}^{-1}(v) \tilde{\mathbf{a}}_j & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \in \Sigma^{n+1}[v], \quad (60d)$$

$$s_{k,j} \in \Sigma[v], \quad \forall k \in \{1, 2\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, m\} \quad (60e)$$

mit  $\tilde{\mathbf{a}}_j = \tau_j^{-1} (\mathbf{a}'_j - \mathbf{k}_{1,j})$ ,

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}'_1{}^T \\ \mathbf{a}'_2{}^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_m{}^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{i,1}^T \\ \mathbf{y}_{i,2}^T \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{i,m}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{a}}'_{i,1}{}^T \mathbf{Q} \\ \hat{\mathbf{a}}'_{i,2}{}^T \mathbf{Q} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{a}}'_{i,m}{}^T \mathbf{Q} \end{bmatrix} \quad (61)$$



und

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}}_{k,m} &= \mathbf{y}_{k,m}, \\ \tilde{\mathbf{y}}_{k,m-1} &= \mathbf{y}_{k,m-1} - \tilde{b}_{m-1,m} \tilde{\mathbf{y}}_{k,m}, \\ &\vdots \\ \tilde{\mathbf{y}}_{k,i} &= \mathbf{y}_{k,i} - \sum_{j=i+1}^m \tilde{b}_{i,j} \tilde{\mathbf{y}}_{k,j} \end{aligned} \quad (62)$$

sowie  $\mathbf{N} = \text{diag}(-k_1, \dots, -1, -k_2, \dots, -1, -k_m, \dots, -1)$  gilt, dann stabilisiert der Regler (48) mit der Auswahlstrategie (51) die Ruhelage  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  des Systems (44).

*Beweis.* Der Beweis findet sich in Anhang A.2.  $\square$

*Bemerkung 4.* In [14] wurde die Bedingung  $\mathcal{G}(v) \subset \mathcal{L}(\mathbf{h}^T(v))$  mit Hilfe eines Satzes aus [26] sichergestellt. Dies ist auch im vorliegenden Fall möglich. Zwecks einer kompakteren Darstellung wird hier die Formulierung als SOS-Bedingung gewählt.

Satz 3 erlaubt es, den Entwurf eines weichstrukturvariablen Reglers auch im MIMO-Fall als konvexes Optimierungsproblem zu formulieren. Dabei ist noch zu gewährleisten, dass das Gebiet möglicher Anfangszustände  $\mathcal{X}_0$  innerhalb der größten Ellipse  $\mathcal{G}(1)$  liegt. Es ist also sicherzustellen, dass  $\mathbf{x}^T \mathbf{R}_1 \mathbf{x} - 1 < 0, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}_0$  gilt. Wird für  $\mathcal{X}_0$  ein Polyeder verwendet, ergibt sich mit Hilfe des Schur-Komplements daraus unmittelbar

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x}_{0,i}^T \\ \mathbf{x}_{0,i} & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \succ 0, \quad i = \{1, 2, \dots, N\}, \quad (63)$$

wobei  $\mathbf{x}_{0,i}$  die  $N$  Eckpunkte des Polyeders sind. Nun ist noch eine konvexe Gütefunktion zu wählen. Hier kann beispielsweise die Abklingrate des mit dem Regler  $\mathbf{K}_2(1)$  geregelten Systems verwendet werden.

**Definition 1 ([6]).** Die Abklingrate eines Systems  $\dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{x}$  ist definiert als das größte  $\delta$ , so dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\delta t} \|\mathbf{x}(t)\| = 0$$

für alle Trajektorien  $\mathbf{x}(t)$  gilt.

Ist für ein bestimmtes  $\delta$  die LMI

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{G})\mathbf{Q} + \mathbf{Q}(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{G})^T - \mathbf{B}\mathbf{T}\mathbf{Y}_* - \mathbf{Y}_*^T \mathbf{T}\mathbf{B}^T \prec -2\delta\mathbf{Q} \quad (64)$$

erfüllt, ist  $\delta$  eine untere Abschätzung der Abklingrate. Ein schnelles Ausregelverhalten ergibt sich aus der Lösung von

**Optimierungsproblem 1:**

Maximiere  $\delta$  so, dass  $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_*, \mathbf{Q} \succ 0$

(60a)–(60e), (63), (64).

Dieses Optimierungsproblem ist mit Hilfe einer Bisektion in  $\delta$  auf einfache Weise lösbar. Im Rahmen dieser

Arbeit wurde das Interface YALMIP [22] zusammen mit dem Solver Sdpt3 [25] verwendet. Beim Entwurf ist zu beachten, dass für die Verwendung in der Zwei-Freiheitsgrade-Struktur die Stellbegrenzungen angepasst werden müssen. Es gilt  $\dot{u}_{a,k}(t) \in [-(1-\kappa_{v,k})v_{\max,k}, (1-\kappa_{v,k})v_{\max,k}]$  und  $u_{a,k}(t) \in [-(1-\kappa_{u,k})u_{\max,k}, (1-\kappa_{u,k})u_{\max,k}]$  mit  $k = 1, \dots, m$ .

## 5 Beispiel

Um die Effektivität des Verfahrens zu demonstrieren, wird das linearisierte Modell eines Airbus A300 [7] als Beispiel verwendet. Es lautet

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_s &= \begin{bmatrix} -0,275 & 2,682 & -0,067 & 0 \\ -0,994 & -0,125 & -0,003 & 0,074 \\ 0,365 & -6,695 & -1,004 & 0 \\ -0,002 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_s \\ &+ \begin{bmatrix} 0,094 & -2,169 \\ 0 & 0,038 \\ 0,611 & 1,190 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}_a, \\ \mathbf{y}_s &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_s, \end{aligned}$$

wobei der Ausschlag des Querruders  $u_{a,1}$  und des Seitenruders  $u_{a,2}$  jeweils einer Stellgrößen- und Stellratenbegrenzung unterliegt. Die Stellgrößenbegrenzungen sind  $|u_{a,1}| \leq 30\pi/180$  rad,  $|u_{a,2}| \leq 25\pi/180$  rad und die Stellraten sind auf  $|\dot{u}_{a,1}| \leq 30\pi/180$  rad s<sup>-1</sup> und  $|\dot{u}_{a,2}| \leq 25\pi/180$  rad s<sup>-1</sup> begrenzt. Des Weiteren ist  $x_{s,1}$  die Schiebewinkelgeschwindigkeit in rad s<sup>-1</sup>,  $x_{s,2}$  der Schiebewinkel in rad,  $x_{s,3}$  die Rollrate in rad s<sup>-1</sup> und  $x_{s,4}$  der Rollwinkel in rad. In Anhang A.3 ist das sich aus der Zustandserweiterung  $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_s^T \mathbf{u}_a^T]^T$  ergebende System in der Regelungsnormalform angegeben.

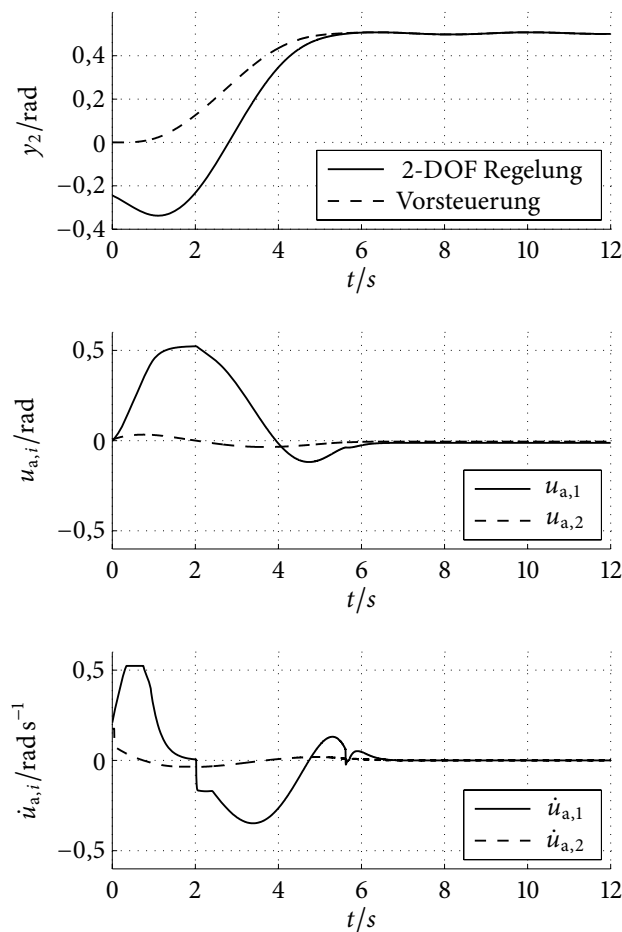
Die Aufteilung des Stellbereichs zwischen inversionsbasierter Vorsteuerung und Regler erfolgt mit  $\kappa_{u,i} = \kappa_{v,i} = 0,6$  mit  $i = 1, 2$ . Demnach stehen 60 Prozent der Stellgröße bzw. Stellrate für die Vorsteuerung zur Verfügung. Zunächst wird das System in die E/A-Normalform transformiert. Mit Hilfe des in Abschnitt 3 beschriebenen Verfahrens wird eine Trajektorie und eine Steuerfunktion für den Arbeitspunktwechsel von  $\mathbf{y}_{s,0} = \mathbf{0}$  nach  $\mathbf{y}_{s,T} = [0 \ 30\pi/180]^T$  berechnet. Beim Vorsteuerungsentwurf wird davon ausgegangen, dass der Anfangszustand  $\mathbf{x}_s(0) = \mathbf{0}$  ist.

Zum Entwurf des strukturvariablen Reglers wird

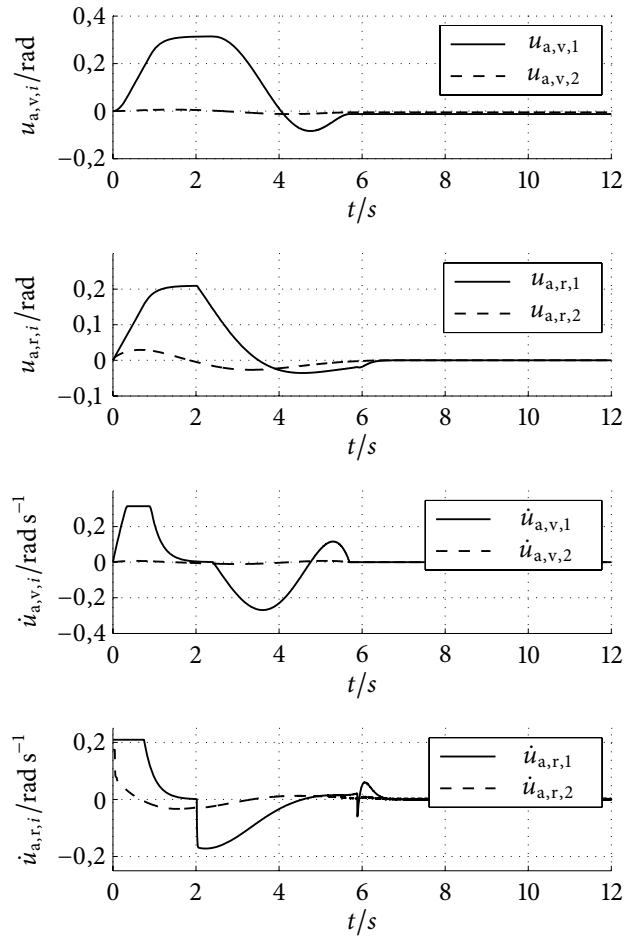
$$\mathcal{X}_0 = \left\{ \mathbf{x}_s : |x_1| \leq \frac{2\pi}{180}, |x_2| \leq \frac{2\pi}{180}, |x_3| \leq \frac{5\pi}{180}, |x_4| \leq \frac{14\pi}{180} \right\}$$

als Gebiet möglicher Anfangszustände angesetzt. Außerdem wird  $v_{\min} = 0,1$  als untere Grenze für den

Auswahlparameter verwendet. Sowohl für das Aktormodell der Vorsteuerung wie auch der Regelung wird von  $\mathbf{u}_{a,0} = \mathbf{0}$  ausgegangen. Diese Wahl ist sinnvoll, da das Aktormodell als Teil der Vorsteuerung bzw. der Regelung erachtet wird und ein Anfangszustand  $\mathbf{u}_{a,0} \neq \mathbf{0}$  über Nebenbedingung (63) in Optimierungsproblem 1 den Reglerentwurf zusätzlich beschränkt. Zur Simulation der Regelung wird der Fall eines vom Anfangszustand der Vorsteuerung unterschiedlichen Anfangszustandes  $\mathbf{x}_s(0) = [-2\pi/180 \ 2\pi/180 \ -5\pi/180 \ -14\pi/180]^T$  der Strecke betrachtet. In Bild 4 ist der resultierende Ausregelvorgang mit den zugehörigen wirksamen Stellgrößen  $u_{a,i}$  und Stellraten  $\dot{u}_{a,i}$  dargestellt. Bild 5 zeigt die von der Vorsteuerung bzw. der Regelung aufgebrauchte Stellgröße bzw. Stellrate. Durch den Einsatz der strukturvariablen Regelung gelingt es, das System in den neuen Arbeitspunkt zu überführen obwohl der Anfangszustand, auf dessen Basis die Vorsteuerung berechnet wurde, vom tatsächlichen Anfangszustand der Strecke deutlich abweicht. Dabei wird der verfügbare Stellbereich von  $u_{a,1}$  sehr gut ausgenutzt.



**Bild 4** Verlauf des Ausregelvorgangs für einen Arbeitspunktwechsel auf  $\mathbf{y}_{s,T} = [0 \ 30\pi/180]^T$  mit Anfangszustand  $\mathbf{x}_s = [-2\pi/180 \ 2\pi/180 \ -5\pi/180 \ -14\pi/180]^T$  der Strecke. Die Vorsteuerung wurde für einen Anfangszustand  $\mathbf{x}_s(0) = \mathbf{0}$  berechnet. Das obere Bild zeigt dabei den geplanten Verlauf von  $y_2$  (gestrichelt) und den tatsächlichen Verlauf. Darunter sind die Stellgrößen- und Stellratenverläufe dargestellt.



**Bild 5** Verlauf der wirksamen Eingangsgrößen  $u_{a,v,i}$  der Vorsteuerung und  $u_{a,r,i}$  der Regelung sowie die zugehörigen Stellraten  $\dot{u}_{a,v,i}$  und  $\dot{u}_{a,r,i}$ . Es wurde für die verfügbare Stellgröße- bzw. Stellrate die Aufteilung  $\kappa_{u,i} = \kappa_{v,i} = 0,6$  mit  $i = 1, 2$  gewählt.

## 6 Zusammenfassung

In diesem Beitrag wird eine Zwei-Freiheitsgrade Regelung für lineare Systeme unter Stellgrößen- und Stellratenbegrenzungen vorgestellt. Dazu wird ein inversionsbasierter Vorsteuerungsentwurf für Systeme unter ausschließlichen Stellgrößenbeschränkungen auf eine zusätzliche Stellratenbegrenzung erweitert. Außerdem wurde eine Erweiterung der weich-strukturvariablen Regelung auf MIMO-Systeme mit zusätzlichen Stellratenbegrenzungen vorgestellt und in der Zwei-Freiheitsgrade Struktur verwendet.

## A Anhang

### A.1 Beweis von Satz 2

*Beweis.* Es ist zu beweisen, dass die Bedingungen aus Satz 2 die Bedingungen von Satz 1 sicherstellen. Zunächst werden die Bedingungen 1–3 aus Satz 1 betrachtet. Um Bedingung 1 zu überprüfen, wird die für quadratische Formen gültige Abschätzung  $\mathbf{x}^T \mathbf{x} \cdot \lambda_{\max}(\mathbf{R}(\mathbf{v})) \geq \mathbf{x}^T \mathbf{R}(\mathbf{v}) \mathbf{x}$  verwendet [5]. Aus der Auswahl-

strategie (51) folgt  $\mathbf{x}^T \mathbf{R}(\nu) \mathbf{x} = 1$ . Für den Grenzwert  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$  ergibt sich dann

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \mathbf{x}^T \mathbf{x} \geq \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{1}{\lambda_{\max}(\mathbf{R}(\nu(\mathbf{x})))} = 0, \quad (65)$$

weshalb  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \lambda_{\max}(\mathbf{R}(\nu(\mathbf{x}))) = \infty$  gilt. Nun wird gezeigt, dass  $\lambda_{\max}(\mathbf{R}(\nu))$  mit  $\mathbf{R}(\nu) = \mathbf{D}^{-1}(\nu) \mathbf{R}_1 \mathbf{D}^{-1}(\nu)$  genau dann gegen Unendlich strebt, wenn  $\nu \rightarrow 0^+$  gilt. Aus  $\mathbf{R}_1 \succ 0$  folgt für alle  $\nu \in (0, 1]$

$$0 < \lambda_{\max}(\mathbf{R}(\nu)) < \infty. \quad (66)$$

Gemäß [5] gilt  $\lambda_{\max}(\mathbf{R}(\nu)) \geq \lambda_{\min}(\mathbf{R}_1) \lambda_{\min}(\mathbf{D}^{-2}(\nu))$ . Da  $\lambda_{\min}(\mathbf{D}^{-2}(\nu)) = \nu^{-2}$  für alle  $\nu \in (0, 1]$  gilt, ergibt sich der Grenzwert

$$\lim_{\nu \rightarrow 0^+} \lambda_{\max}(\mathbf{R}(\nu)) \geq \lambda_{\min}(\mathbf{R}_1) \cdot \lim_{\nu \rightarrow 0^+} \nu^{-2} = \infty. \quad (67)$$

Aus (66) und (67) folgt  $\lambda_{\max}(\mathbf{R}(\nu)) \rightarrow \infty$  genau dann, wenn  $\nu \rightarrow 0^+$ . Daraus folgt wiederum zusammen mit (65), dass für  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$  der Grenzwert  $\nu \rightarrow 0^+$  aus  $\mathbf{x}^T \mathbf{R}(\nu) \mathbf{x} = 1$  resultiert und Bedingung 1 aus Satz 1 ist erfüllt.

Im nächsten Schritt wird Bedingung 2 betrachtet. Für  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  ergibt sich

$$\lim_{\nu \rightarrow 0^+} \mathbf{x}^T \mathbf{D}^{-1}(\nu) \mathbf{R}_1 \mathbf{D}^{-1}(\nu) \mathbf{x} \geq \underbrace{\lambda_{\min}(\mathbf{R}_1)}_{>0} \cdot \underbrace{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}_{>0} \cdot \lim_{\nu \rightarrow 0^+} \nu^{-2} = \infty$$

weshalb für alle  $\mathbf{x} \in \mathcal{G}_1 \setminus \{\mathbf{0}\}$ ,  $\lim_{\nu \rightarrow 0^+} g(\mathbf{x}, \nu) = \infty > 0$  gilt. Der Grenzwert für  $\nu \rightarrow 1^-$  folgt aus der Definition des Gebietes  $\mathcal{G}(\nu)$ :  $\lim_{\nu \rightarrow 1^-} g(\mathbf{x}, \nu) = g(\mathbf{x}, 1) < 0$ . Demnach ist Bedingung 2 für alle  $\mathbf{x} \in \mathcal{G}(1)$  erfüllt.

Um Bedingung 3 zu prüfen, wird die partielle Ableitung von  $g(\mathbf{x}, \nu)$  nach  $\nu$ ,

$$\frac{\partial g(\mathbf{x}, \nu)}{\partial \nu} = \frac{1}{\nu} \mathbf{x}^T \mathbf{D}^{-1}(\nu) (\mathbf{N} \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \mathbf{N}) \mathbf{D}^{-1}(\nu) \mathbf{x}, \quad (68)$$

betrachtet. Diese ist endlich für alle  $(\nu, \mathbf{x}) \in (0, 1] \times \mathcal{G}_1 \setminus \{\mathbf{0}\}$  und negativ falls die Matrix  $\mathbf{N} \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \mathbf{N}$  negativ definit ist. Letzteres wird durch (54a) sichergestellt.

Schließlich ist noch Bedingung 4 zu überprüfen. Dazu wird  $g(\mathbf{x}, \nu)$  nach der Zeit abgeleitet und gefordert, dass diese zeitliche Ableitung negativ ist. Dies führt zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(\mathbf{x}, \nu)}{\partial t} &= \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{R}(\nu) \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{R}(\nu) \dot{\mathbf{x}} \\ &= \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{R}(\nu) + \mathbf{R}(\nu) \mathbf{A}) \mathbf{x} + 2 \mathbf{x}^T \mathbf{R}(\nu) \mathbf{B} \text{sat}_{\nu_{\max}}(\mathbf{K}_1 \mathbf{x} \\ &\quad + \mathbf{T} \text{sat}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathbf{K}_2(\nu) \mathbf{x})) < 0. \end{aligned} \quad (69)$$

Ungleichung (69) ist sicher erfüllt, falls (54b) und  $\mathcal{G}(\nu) \subseteq \mathcal{L}_{\nu_{\max}}(\mathbf{H}_1(\nu)) \cap \mathcal{L}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathbf{H}_2(\nu))$  erfüllt sind. Dies kann durch Herleiten einer oberen Grenze für  $\partial g(\mathbf{x}, \nu) / \partial t$

gezeigt werden. Für eine detaillierte Herleitung wird auf den Beweis von Satz 1 aus [15] verwiesen.  $\square$

## A.2 Beweis von Satz 2

*Beweis.* Aufgrund der Wahl von  $\mathbf{H}_1(\nu)$ ,  $\mathbf{H}_2(\nu)$  und  $\mathbf{K}_2(\nu)$  lassen sich die Terme  $\hat{\mathbf{A}}_{\nu,1}(\nu) = \mathbf{A} + \mathbf{B} \Delta(\nu, \mathbf{H}_1(\nu), \mathbf{K}_1 + \mathbf{T} \mathbf{H}_2(\nu), \mathbf{K}_1 + \mathbf{T} \mathbf{K}_2(\nu))$  in (54b) unabhängig vom Selektionsparameter darstellen, es gilt ähnlich wie im SISO Fall

$$\hat{\mathbf{A}}_{\nu,1}(\nu) = \frac{1}{\nu} \mathbf{D}(\nu) \hat{\mathbf{A}}_{\nu,1} \mathbf{D}^{-1}(\nu)$$

mit

$$\hat{\mathbf{A}}_{\nu,1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & & 1 & 0 & \dots & & 0 \\ & & & & \hat{\mathbf{a}}_{\nu, \nu_1}^T & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ 0 & \dots & 0 & & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & & 0 & \dots & & 1 \\ & & & & \hat{\mathbf{a}}_{\nu, \nu_m}^T & & & \end{bmatrix}$$

mit

$$\hat{\mathbf{a}}_{\nu, \nu_i} = \begin{cases} \hat{\mathbf{a}}_{1,i}, & \text{wenn } \nu_i = 1, \\ \hat{\mathbf{a}}_{2,i}, & \text{wenn } \nu_i = 2, \\ \hat{\mathbf{a}}_{*,i}, & \text{wenn } \nu_i = 3. \end{cases}$$

Nach Einsetzen von  $\mathbf{R}(\nu)$  und Multiplikation mit  $\mathbf{Q} = \mathbf{R}_1^{-1}$  wird aus (54b) Bedingung (60b). Des Weiteren ist die Bedingung  $\mathcal{G}(\nu) \subseteq \mathcal{L}_{\nu_{\max}}(\mathbf{H}_1(\nu)) \cap \mathcal{L}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathbf{H}_2(\nu))$  sicherzustellen, wonach  $|\mathbf{h}_{1,j}^T(\nu) \mathbf{x}| \leq \nu_{\max,j}$  und  $|\mathbf{h}_{2,j}^T(\nu) \mathbf{x}| \leq \mathbf{u}_{\max,j}$  für alle  $\mathbf{x} \in \mathcal{G}(\nu)$  und  $j = \{1, \dots, m\}$  gelten muss. Die maximale Stellgröße bzw. Stellrate innerhalb von  $\mathcal{G}(\nu)$  ergibt sich zu

$$\sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{G}(\nu)} |\mathbf{h}_{k,j}^T(\nu) \mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{h}_{k,j}^T(\nu) \mathbf{R}^{-1}(\nu) \mathbf{h}_{k,j}(\nu)}, \quad k = \{1, 2\}.$$

Demnach müssen die Ungleichungen

$$\nu_{\max,j}^2 - \mathbf{h}_{1,j}^T(\nu) \mathbf{R}^{-1}(\nu) \mathbf{h}_{1,j}(\nu) \geq 0, \quad \forall \nu \in [\nu_{\min}, 1]$$

mit  $j \in \{1, \dots, m\}$  erfüllt sein. Unter Verwendung des Polynoms  $\gamma(\nu)$ , welches die Bedingung  $\gamma(\nu) > 0$  für alle  $\nu \in [\nu_{\min}, 1]$  erfüllt, ergibt sich mit Hilfe der verallgemeinerten S-Prozedur [13]

$$\nu_{\max,j}^2 - \gamma(\nu) s_{1,j}(\nu) - \mathbf{h}_{1,j}^T(\nu) \mathbf{R}^{-1}(\nu) \mathbf{h}_{1,j}(\nu) \geq 0,$$

wobei  $s_{1,j}(\nu) \in \Sigma[\nu]$  ist. Mit Hilfe des Schur-Komplements [6] lässt sich dies auch ausdrücken als

$$\begin{bmatrix} \nu_{\max,j}^2 - \gamma(\nu) s_{1,j}(\nu) & \mathbf{h}_{1,j}^T(\nu) \\ \mathbf{h}_{1,j}(\nu) & \mathbf{R}(\nu) \end{bmatrix} \in \Sigma^{n+1}[\nu]$$

mit  $j \in \{1, \dots, m\}$ . Einsetzen von  $\mathbf{h}_{1,j}^T(v)$  gemäß ihrer Definition und die Kongruenztransformation mit  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{D}(v) \end{bmatrix}$  ergibt

$$\begin{bmatrix} v_{\max,j}^2 - \gamma(v)s_{1,j}(v) & \hat{\mathbf{a}}'_{1,j}{}^T - \mathbf{a}'_j{}^T \mathbf{D}(v) \\ \hat{\mathbf{a}}'_{1,j} - \mathbf{D}(v)\mathbf{a}'_j & \mathbf{R}_1 \end{bmatrix} \in \Sigma^{n+1}[v].$$

Schließlich führt die beidseitige Multiplikation mit  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{Q} \end{bmatrix}$  zusammen mit den Substitutionen (61) zu (60c). Der Beweis von (60d) erfolgt in analoger Weise. Als Polynom  $\gamma(v)$  kann beispielsweise  $\gamma(v) = (v - v_{\min}) \cdot (1 - v)$  verwendet werden.  $\square$

### A.3 Beispielsystem in Regelungsnormalform

An dieser Stelle wird das System aus Abschnitt 5 in der Regelungsnormalform nach [21] angegeben:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,7661 & -0,9729 & 0 & -17,0997 & -2,8235 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,1570 & 0,0127 & 0 & -3,4195 & -0,4310 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T,$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} -0,0949 & 0 & 0 & 2,1638 & 0,0383 & 0 \\ 0,6111 & 0 & 0 & 1,1889 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

### Danksagung

Wir danken den Reviewern für deren Anregungen, die sehr zur Verbesserung des Artikels beigetragen haben. Des Weiteren bedanken wir uns für die Förderung des Forschungsvorhabens durch die Konrad-Adenauer-Stiftung.

### Literatur

- [1] J. Adamy, „Strukturvariable Regelungen mittels impliziter Ljapunov-Funktionen“, *VDI Fortschrittsberichte, Reihe 8, Nr. 271*, (1991).
- [2] J. Adamy, A. Flemming, „Soft Variable Structure Control: A Survey“, *Automatica 40* (2004), Nr. 11, S. 1821–1844.
- [3] J. Adamy, „Implicit Lyapunov Functions and Isochrones of Linear Systems“, *IEEE Transactions on Automatic Control 50* (2005), S. 874–879.
- [4] A. Bateman, Z. Lin, „An Analysis and Design Method for Linear Systems under Nested Saturation“, *Systems and Control Letters 48* (2003), S. 41–52.
- [5] D. S. Bernstein, „Matrix Mathematics: Theory, Facts, and Formulas with Application to Linear System Theory“, *Princeton University Press*, (2005).
- [6] S. Boyd, L. E. Ghoul, E. Feron, V. Balakrishnan, „Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory“, *Philadelphia SIAM* (1994).
- [7] R. Brockhaus, „Flugregelung“, *Springer Verlag, 2. Auflage*, (2001).
- [8] M. Buhl, B. Lohmann, „Lyapunov-Funktion-basiertes Führungsfiler“, *at-Automatisierungstechnik 57* (2009), S. 499–504.

- [9] K. Graichen, V. Hagenmeyer, M. Zeitz, „A new Approach to Inversion-Based Feedforward Control Design for Nonlinear Systems“, *Automatica 41* (2005), S. 2033–2041.
- [10] K. Graichen, M. Zeitz, „Inversionsbasierter Vorsteuerungsentwurf mit Ein- und Ausgangsbeschränkungen“, *at-Automatisierungstechnik 54* (2006), S. 187–199.
- [11] I. M. Horowitz, „Synthesis of Feedback Systems“, *Academic Press, New York*, (1963).
- [12] A. Isidori, „Nonlinear Control Systems“, 3. Auflage, *Springer, London*, (1995).
- [13] Z. W. Jarvis-Wloszek, „Lyapunov based Analysis and Controller Synthesis for Polynomial Systems using Sum-of-Squares Optimization“, *Dissertation, University of Berkeley* (2003).
- [14] B. Jasniewicz, J. Adamy, D. Domont-Yankulova, „Vereinfachte schnelle Regelung von linearen Systemen mit Stellgrößenbeschränkungen“, *at-Automatisierungstechnik 59* (2011) 2, S. 84–93.
- [15] K. Kefferpütz, J. Adamy, „Schnelle Regelung von linearen Systemen mit Stellgrößen- und Stellratenbeschränkungen“, *at-Automatisierungstechnik 58* (2010) 7, S. 361–371.
- [16] K. Kefferpütz, J. Adamy, „A Tracking Controller for Linear Systems subject to Input Amplitude and Rate Constraints“, *Proc. of the American Control Conference*, (2011), S. 3790–3795.
- [17] J. Kierzenka, L. F. Shampine, „A BVP Solver based on Residual Control and the MATLAB PSE“, *ACM TOMS*, 27 (2011), Nr. 3, S. 299–316.
- [18] H. Lens, J. Adamy, „Schnelle Regelung von linearen Systemen mit Stellgrößenbeschränkungen“, *at-Automatisierungstechnik 57* (2009) 2, S. 70–79.
- [19] J. von Löwis, J. Rudolph, „Real-time Trajectory Generation for Flat Systems with Constraints“, *Nonlinear and Adaptive Control, Springer* (2003), *LNCIS 281*, S. 385–394.
- [20] G. Ludyk, „Theoretische Regelungstechnik 2“, *Springer* (1995).
- [21] D. G. Luenberger, „Canonical Forms for Linear Multivariable Systems“, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Juni (1967), S. 290–293.
- [22] J. Löfberg, „YALMIP: A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB“, *Proc. of the CACSD Conference* (2004).
- [23] N. K. Sinha, P. Roozsa, „Some Canonical Forms for Linear Multivariable Systems“, *International Journal of Control* 23 (1976) 6, S. 865–883.
- [24] A. A. Stoorvogel, A. Saberi, „Output Regulation of Linear Plants with Actuators subject to Amplitude and Rate Constraints“, *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 9 (1999), S. 631–657.
- [25] K. C. Toh, M. J. Todd, R. H. Tutuncu, „SDPT3: A Matlab Software Package for Semidefinite Programming“, *Optimization Methods and Software*, 11 (1999), S. 545–581.
- [26] X. Zhang, P. Tsiotras, P. A. Bliman, „Multi-Parameter dependent Lyapunov Functions for the Stability Analysis of Parameter dependent LTI Systems“, *Proc. of the IEEE Symposium on Intelligent Control* (2005), S. 1263–1268.

Manuskripteingang: 15. Mai 2011



**Dipl.-Ing. Klaus Kefferpütz** promoviert am Fachgebiet Regelungstheorie und Robotik der TU Darmstadt im Bereich nichtlineare Regelungen. Hauptarbeitsgebiet: Systeme mit Stellgrößen- und Stellratenbeschränkungen

Adresse: TU Darmstadt, FB Elektro- und Informationstechnik, FG Regelungstheorie und Robotik, Landgraf-Georg-Str. 4, 64283 Darmstadt, E-Mail: kkefferp@rtr.tu-darmstadt.de



**Dipl.-Ing. Carlo Ackermann** promoviert am Institut für Automatisierungstechnik und Mechatronik der TU Darmstadt. Hauptarbeitsgebiet: Regelung der Querdynamik von Kraftfahrzeugen.

Adresse: TU Darmstadt, FB Elektro- und Informationstechnik, FG Regelungstechnik und Prozeßautomatisierung, Landgraf-Georg-Str. 4, 64283 Darmstadt,  
E-Mail: cackermann@iat.tu-darmstadt.de



**Prof. Dr.-Ing. Jürgen Adamy** ist Leiter des Fachgebietes Regelungstheorie und Robotik im Fachbereich Elektro- und Informationstechnik der TU Darmstadt. Hauptarbeitsgebiete: Regelungsverfahren, Computational Intelligence, autonome mobile Roboter.

Adresse: TU Darmstadt, FB Elektro- und Informationstechnik, FG Regelungstheorie und Robotik, Landgraf-Georg-Str. 4, 64283 Darmstadt,  
E-Mail: adamy@rtr.tu-darmstadt.de

Verfügbar unter  
lediglich die vom Gesetz vorgesehenen Nutzungsrechte gemäß UrhG