

Bayes'sche Consensus-Regelung in dezentralen vernetzten Systemen

Bayesian Consensus Control in Decentralized Networked Systems

Volker Willert*, Stefan Gering, Dominik Haumann, Technische Universität Darmstadt

* Korrespondenzautor: wwillert@rtr.tu-darmstadt.de

Zusammenfassung Der Beitrag befasst sich mit vernetzten dynamischen Multi-Agenten-Systemen (MAS), die Konsens über ihre Zustände bei unsicherer Datenübertragung und Sensorrauschen erreichen sollen. Dazu wird eine Analogie zwischen dem klassischen Consensus-Protokoll und dem Gauß'schen Belief Propagation hergestellt. Das Consensus-Problem wird als stochastischer Prozess modelliert, wodurch Unsicherheiten über die Anfangszustände und Übertragungsunsicherheiten explizit bei der Modellierung berücksichtigt werden können. Es werden die Voraussetzungen für dezentrale Inferenz hergeleitet, zwei dezentrale approximative Inferenz-Protokolle entworfen und ein Gauß'sches Consensus-Protokoll realisiert. Weiterhin wird der Zusammenhang zwischen Kommunikationsdichte und Approximationsfehler dargelegt. Schließlich wird gezeigt, dass die Hinzunahme von Messunsicherheiten zu einem de-

zentralen Entwurf eines Kalman-Filters für Consensus-Systeme führt. ▶▶▶ **Summary** This paper deals with networked, dynamical multi-agent systems (MAS) trying to reach consensus about their states subject to uncertain data transfer and noisy measurements. For this, an analogy between the consensus protocol and Gaussian belief propagation is established. Modeling the consensus problem as a stochastic process, uncertainties in the initial states and in the information flow can be considered. The requirements for decentral inference are derived, two decentral approximative inference protocols are developed and a Gaussian consensus protocol is realized. Furthermore, the dependency between communication density and approximation error is presented. Finally, it is shown that taking measurement noise into account leads to a decentral design of a Kalman filter for consensus systems.

Schlagwörter Multi-Agenten-Systeme, verteilte Regelung, verteilte Filter, Bayes'sche Inferenz ▶▶▶ **Keywords** Multi-agent systems, distributed control, distributed filtering, Bayesian inference

1 Einleitung

Seit längerem besteht in der Regelungstheorie und der Robotik das Interesse am Entwurf von dezentralen Regelungen zur Koordination von stationären oder mobilen MAS, die über ein Kommunikationsnetzwerk Informationen untereinander austauschen können. Laut *VDI nachrichten* „kommen Roboter schon bald in Schwärmen“ [1], die dezentral basierend auf lokaler Information über ihr näheres Umfeld ihr Handeln untereinander koordinieren und damit unterschiedlichste Einsatzmöglichkeiten eröffnen. Anwendungen finden sich unter anderem in der Personenrettung, der Baukonstruktion, dem Deich- und Hafenschutz oder bei flexiblen Materialflusskonzepten in der Logistik.

Dezentrale Regelungen. Der Begriff der dezentralen Regelung beinhaltet nach [4; 5] drei einschränkende Annahmen an die Lösung der Koordinationsaufgabe: (i) Es gibt keine zentrale Koordinationsstelle, die jeden der einzelnen Agenten koordiniert, (ii) die Stellgröße eines Agenten ergibt sich aus rein lokaler Information und (iii) die Menge der vom Agenten gemessenen und der zwischen den Agenten kommunizierten Information ist begrenzt. Aus diesen Bedingungen ergeben sich mehrere Vorteile für den Entwurf und für die Eigenschaften eines MAS [5]: (i) Jedes MAS kann in modularer Art und Weise konstruiert und programmiert werden, (ii) der Ausfall einzelner Agenten beeinflusst das Gesamtverhalten nur geringfügig, deshalb ist ein MAS robuster und

damit überlebensfähiger als ein zentrales System, (iii) es ist außerdem skalierbar und flexibel, da problemlos neue Agenten ins System eingliedert und Veränderungen in der Netzwerktopologie berücksichtigt werden können.

Fehlerbehaftete Kommunikation. Jeder Agent entspricht also einem Teilsystem, das lokal Informationen misst, diese an benachbarte Agenten über ein Kommunikationsnetzwerk übermittelt und sein eigenes Verhalten aus lokaler Information, die es von benachbarten Agenten über ein Kommunikationsnetzwerk empfängt, ableitet. Obwohl das Modell eines einzelnen Agenten meist nur wenige Zustandsvariablen aufweist und die individuelle Eigendynamik eines einzelnen Agenten – wenn überhaupt – meist nur vereinfacht modelliert wird, ergeben die lokalen Kopplungen zwischen vielen Agenten eine komplexe Multi-Agenten-Dynamik in einem hochdimensionalen Zustandsraum eines großräumigen (large-scale) Gesamtsystems. Die Komplexität dieses Systems entsteht also durch das Kommunikationsnetzwerk. Viele Systemeigenschaften, wie Stabilität und Konvergenz, lassen sich aus der Kommunikationstopologie und der Kommunikationsfrequenz ableiten [2]. Damit ist klar, dass die Art und die Güte der Kommunikation Auswirkungen auf das Systemverhalten haben und jede Störung aufgrund der Kommunikation die Systemeigenschaften negativ beeinflussen kann:

Wer wann mit wem in welcher Qualität im MAS über das Netzwerk kommuniziert, beeinflusst maßgeblich das Systemverhalten.

Die Informationsübertragung ist oftmals mit Datenrauschen und geringer Informationsdichte verbunden. Besonders gering und verrauscht ist beispielsweise die Datenübertragung unter Wasser durch Schall [6]. Allgemein können sich in einem Kommunikationsnetzwerk – neben dem sensorischen Rauschen – folgende zusätzliche Störungen durch den größtenteils nicht-deterministischen Datentransport ergeben: (i) variable Totzeiten, (ii) Verluste von Datenpaketen und (iii) Quantisierungsfehler [2].

Um diese zufälligen Störungen bei der Modellierung eines MAS mit zu berücksichtigen, ist es sinnvoll, das Systemverhalten als stochastischen Prozess aufzufassen. Quantisierungsfehler werden gut durch additives weißes Rauschen mit gleichverteilter Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion beschrieben [7]. Zur Modellierung von Netzwerkverzögerungen finden Gamma- [8] oder exponentiell-verteilte [9] Verzögerungszeiten ihre Anwendung. Verluste von Datenpaketen können mit zeitvarianten Zufallsgraphen simuliert werden (switching topology) [10].

Bayes'sche Inferenz. Der Bereich des maschinellen Lernens befasst sich eingehend mit der Modellierung von raumzeitlichen Kopplungen von stochastischen Zustandsvariablen in hochdimensionalen Zustandsräumen.

Ein Schwerpunkt liegt dabei auf Bayes'schen Inferenzmethoden, also dem Rückschluss auf stochastische Zustandsvariablen basierend auf verrauschten Messdaten unter Zuhilfenahme von A-priori-Wissen [11]. Dabei können sowohl stationäre als auch zeitlich veränderliche A-priori-Annahmen in der Modellierung berücksichtigt werden. Umgesetzt wird dies im stationären Fall meist mit Bayes'schen Netzen oder Markow-Zufallsfeldern [12; 14], im dynamischen Fall mit dynamischen Bayes'schen Netzen [13; 15]. Der Rückschluss geschieht oftmals über approximative Inferenzmethoden, sogenannte Message-Passing-Algorithmen [16–18], die ebenfalls nur lokale Information verarbeiten und somit prinzipiell dezentral und verteilt berechenbar sind.

Ein prominentes Verfahren ist das sogenannte *Belief Propagation* [12; 20] und seine Erweiterungen [21; 22], das insbesondere bei Bildverarbeitungsanwendungen vielfach zum Einsatz kommt [22–24].

Es stellt sich also die Frage, ob Bayes'sche Inferenzmethoden zur Modellierung von verteilten Regelungen in MAS herangezogen werden können, um sensorische Unsicherheiten und stochastische Kommunikationseffekte zu berücksichtigen.

Um dieser Frage nachzugehen, beschäftigen wir uns in dieser Arbeit mit dem Lösen des *Consensus Problems* mittels dezentral (verteilt) implementierbaren Bayes'schen Inferenzmethoden.

Consensus-Problem. Das Consensus-Problem lässt sich einfach beschreiben: Agenten müssen sich ausgehend von unterschiedlichen Initialwerten durch lokale Interaktionen und dezentrale Berechnungen auf einen gemeinsamen Endwert einigen, d. h. einen Konsens finden. Die Lösung entspricht also einer Synchronisierung aller Zustandsvariablen des Gesamtzustandes bzw. von Teilzuständen eines MAS. So eine Zustandssynchronisierung ist eine fundamentale Problemstellung bei vielen unterschiedlichen Aufgaben, die von MAS gelöst werden sollen – angefangen bei der Modellierung von Schwarmverhalten über Formations- und Rendezvousregelungen für mobile MAS, bis hin zur koordinierten Entscheidungsfindung [28]. Darüber hinaus gibt es eine Vielzahl an weiteren Anwendungsfeldern, wie beispielsweise die Zeitsynchronisierung in dezentralen Systemen, der Nutzdatentransport in der Kommunikationstechnik, die verteilte Sensorfusion in Sensornetzwerken [29] und ganz allgemein die Realisierung von verteilten Optimierungsalgorithmen [25].

Der Ursprung der formalen Beschreibung des Consensus-Problems findet sich in der Statistik. Morris DeGroot hat ein Modell vorgeschlagen [26], das Übereinstimmung zwischen Mitgliedern einer Gruppe über die Wahrscheinlichkeitsverteilung eines Parameters mit unbekanntem Wert erreicht. Jedes Mitglied der Gruppe besitzt eine eigene A-priori-Verteilung über einen bestimmten Wert des Parameters und versucht diese mit

den Vorschlägen der anderen Mitglieder der Gruppe abzugleichen. Das Modell entspricht einer zeitdiskreten Markow-Kette erster Ordnung über einer diskreten Zustandsvariable mit endlich vielen Ausprägungen mit bestimmten einschränkenden Bedingungen an die Übergangsmatrix, damit Konsens erreicht wird. Das bedeutet, die Verteilung konvergiert für $t \rightarrow \infty$ zu einer diskreten Gleichverteilung [27].

Verwandte Arbeiten. Im Bereich der vernetzten dynamischen Systeme wurde das Consensus-Problem sowohl für den zeitkontinuierlichen [31] als auch den zeitdiskreten [32] Fall eingeführt und durch verteilte Regelgesetze, sogenannte Consensus-Protokolle, gelöst. Mittlerweile ist dazu eine umfassende Theorie vorhanden. Über diese können formal Bedingungen an die Netzwerktopologie, die den lokalen Informationsfluss beschreibt, gestellt werden, um garantiert Konsens zu erreichen. Dazu wird vorausgesetzt, dass alle Zustandsvariablen deterministisch und ohne Fehler direkt messbar sind [29]. Erweiterungen, die eine zeitvariante mit Zeitverzögerungen behaftete oder asynchrone Kommunikation erlauben, sind ebenfalls vorhanden [28; 29]. Besitzen die Agenten eine Eigendynamik und sollen eine gemeinsame Trajektorie durchlaufen, dann spricht man nicht mehr von Consensus, sondern von *Synchronisation* durch vernetzte Regelungen [3].

In den letzten Jahren sind einige wenige Arbeiten veröffentlicht worden, die das klassische deterministische zeitdiskrete Consensus-Protokoll auf den stochastischen Zustandsraum erweitern und unterschiedliche Message-Passing-Verfahren zum Erreichen von Konsens vorschlagen. Der sogenannte *Belief Consensus* [33] ist ein Message-Passing-Verfahren, das direkt aus dem diskreten *Average-Consensus-Protokoll* nach [29] abgeleitet wird und Wahrscheinlichkeitswerte von Agenten über die Wahrscheinlichkeit von unterschiedlichen Messungen der gleichen Hypothese angleicht unter der Annahme, dass die Messungen statistisch unabhängig voneinander sind. Das führt zu einer exponentiellen Darstellung des bekannten diskreten Consensus-Protokolls und entspricht lediglich einer aktuellen Umsetzung des gleichen Problems wie in [26] beschrieben. Es werden Wahrscheinlichkeitswerte einer diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilung angeglichen, jedoch keine Verteilung über die Zustände der Agenten, die ihre Zustände untereinander angleichen, geschätzt. Genau das wird mit dem *Consensus-Propagation-Algorithmus* von Moallemi [34] unter der Annahme von Gaußverteilungen realisiert. Allerdings gelingt es nur für d -reguläre Graphen mit $d \geq 2$ über einen zusätzlichen Korrekturschritt einen Zusammenhang zum bekannten Belief Propagation herzustellen und Konsens der Zustandsvariablen zu erreichen. Andere stochastische Modellierungen des Consensus-Problems finden sich bei Gossip-Algorithmen [35], wobei hier der Schwerpunkt auf zufällig ausgeführten Datenübertragungen zwischen den Agenten liegt.

In Abschnitt 2 werden nötige Grundlagen über Graphen und das Consensus-Protokoll angegeben. In Abschnitt 3 wird das Consensus-Protokoll nach [29] auf einen stochastischen Prozess erweitert, Bedingungen für eine dezentrale Inferenz sowie zwei allgemeine dezentrale Consensus-Protokolle hergeleitet und ein Gauß'sches Consensus-Protokoll realisiert. In Abschnitt 4 werden die Resultate aus Abschnitt 3 zu einem dezentralen Kalman-Filter für Consensus-Systeme erweitert. Abschnitt 5 fasst die Ergebnisse zusammen und zeigt Erweiterungen des Ansatzes auf.

2 Dezentraler Consensus

Im Folgenden werden kurz die Notation und einige Eigenschaften von Graphen dargelegt, sowie das zeitdiskrete Consensus-Protokoll mit seinen Eigenschaften beschrieben. Dies dient als Grundlage für die stochastische Erweiterung in Abschnitt 3.

2.1 Kommunikationsgraph

Graphen $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, wie in Bild 1 zu sehen, werden bei einem MAS dazu benutzt, die Kommunikationsstruktur zwischen Agenten formal zu beschreiben. Dabei wird jeder Agent eines MAS bestehend aus N Agenten durch einen *Knoten* $v_n \in \mathcal{V}(\mathcal{G})$ der endlichen Knotenmenge $\mathcal{V}(\mathcal{G}) = \{v_1, \dots, v_N\}$ repräsentiert. Jede *gerichtete Kante* $e_{nm} = (v_n, v_m) \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$ der endlichen Kantenmenge $\mathcal{E}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ stellt ein geordnetes Knotenpaar (v_n, v_m) mit $n \neq m$ dar und verdeutlicht die Möglichkeit zur Kommunikation zwischen den beiden Agenten v_n und v_m . Die Reihenfolge des Knotenpaares gibt die Richtung des Informationsflusses von Agent v_n zu Agent v_m an. Alle Verbindungen im Graphen durch eine gerichtete Kante werden in der $N \times N$ *Adjazenzmatrix* $\mathbf{A}(\mathcal{G}) = [a_{nm}]$ zusammengefasst, wobei $a_{nm} = 1$, falls $(v_m, v_n) \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$, ansonsten $a_{nm} = 0$. Wieviel Information zu einem Agenten v_n gelangt, d.h. wie viele gerichtete Kanten in einen Knoten eingehen, wird über den Eingangsgrad $\delta_{\text{ein}}(v_n) = \sum_{m \neq n} a_{nm}$ beschrieben. Die Menge \mathcal{N}_n^e entspricht der Menge aller Nachbarknoten von denen Knoten v_n Information empfängt. An wie viele Agenten die Information eines bestimmten Agenten verschickt wird, d.h. wie viele gerichtete Kanten aus einem Knoten austreten, zeigt der Ausgangsgrad $\delta_{\text{aus}}(v_n) = \sum_{m \neq n} a_{nm}$

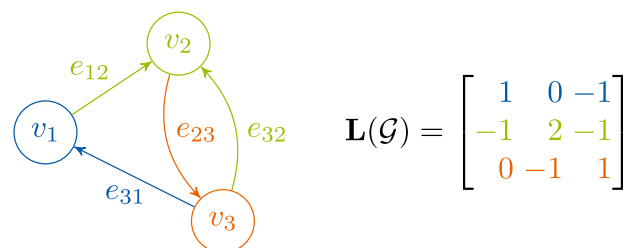


Bild 1 Beispiel eines gerichteten, stark zusammenhängenden Kommunikationsgraphen \mathcal{G} mit dazugehöriger Laplace-Matrix $\mathbf{L}(\mathcal{G})$.

an. Die Menge \mathcal{N}_n^a entspricht der Menge aller Nachbarknoten, zu denen Knoten v_n Information verschickt. Die gesamte Nachbarschaft eines Agenten n wird mit $\mathcal{N}_n = \mathcal{N}_n^a \cup \mathcal{N}_n^e$ bezeichnet. Alle Eingangsgrade werden in der diagonalen $N \times N$ Gradmatrix $\mathbf{D}(\mathcal{G}) = [d_{nm}]$ zusammengefasst, wobei $d_{nm} = \delta_{\text{ein}}(v_n)$, falls $n = m$, ansonsten $d_{nm} = 0$. Ein gerichteter Graph \mathcal{G} heißt *zusammenhängend* von einem Knoten v_i aus, falls es zu jedem Knoten v_j einen gerichteten Weg in \mathcal{G} mit v_i als Startknoten und v_j als Endknoten gibt. Die Anzahl der Kanten entlang eines Weges wird als *Hop Count* $h(v_i, v_j)$ bezeichnet. Dabei kann es mehrere Wege zwischen zwei Knoten mit gleichem oder unterschiedlichem Hop Count geben. Die Vereinigungsmenge aller gerichteten Wege von Knoten v_i aus zu jedem Knoten v_j mit dem jeweils kleinsten Hop Count ergeben einen *gerichteten Spannbaum* (Arboreszenz) mit Wurzelknoten v_i . Der maximale Hop Count innerhalb des Spannbaums heißt *Durchmesser* d . Ein gerichteter Graph \mathcal{G} heißt *stark zusammenhängend*, falls es von *jedem* Knoten v_i aus zu jedem Knoten v_j einen gerichteten Weg in \mathcal{G} mit v_i als Startknoten und v_j als Endknoten gibt. Damit ist gewährleistet, dass jeder Agent seine Information an jeden anderen Agenten des MAS transferieren kann. Bei einem regulären (balancierten) gerichteten Graphen entspricht der Eingangsgrad jedes Knoten dem Ausgangsgrad, $\delta_{\text{ein}}(v_n) = \delta_{\text{aus}}(v_n)$, $\forall v_n \in \mathcal{V}(\mathcal{G})$. Damit kommuniziert jeder Agent zu genau so vielen Agenten, wie Agenten zu ihm. Besitzen alle Knoten den gleichen Eingangs- und Ausgangsgrad k , so bezeichnet man \mathcal{G} als k -regulär. Jeder Graph besitzt einen maximalen Eingangsgrad $\delta_{\text{ein}}^{\max} = \max_n \delta_{\text{ein}}(v_n)$ und einen maximalen Ausgangsgrad $\delta_{\text{aus}}^{\max} = \max_n \delta_{\text{aus}}(v_n)$. Über die Gradmatrix und die Adjazenzmatrix ist die $N \times N$ Laplace-Matrix $\mathbf{L}(\mathcal{G}) = \mathbf{D}(\mathcal{G}) - \mathbf{A}(\mathcal{G})$ des Graphen definiert.

2.2 Zeitdiskretes Consensus-Protokoll

Um die Zustandsgrößen $\mathbf{x}^k = [x_1^k, \dots, x_N^k]^T \in \mathbb{R}^N$ eines MAS im zeitdiskreten Fall mit Zeitindex k und dazugehörigen Zeitschritten $t^k = t^0 + kt$ bei einer Abtastzeit von τ asymptotisch für $t^k \rightarrow \infty$ auf den gleichen Wert $x_1^k = x_2^k = \dots = x_N^k$ konvergieren zu lassen, kann das zeitdiskrete Consensus-Protokoll nach [31] herangezogen werden. Unter der Annahme einer einfachen Integrodynamik

$$x_n^{k+1} = x_n^k + \tau u_n^k, \tag{1}$$

für jeden einzelnen Agenten wird ein Regelgesetz, das sogenannte Consensus-Protokoll, über folgende Stellgröße $u_n^k \in \mathbb{R}$ realisiert:

$$u_n^k = - \sum_{m=1}^N a_{nm} (x_n^k - x_m^k). \tag{2}$$

Damit ergibt sich die lineare Gesamtdynamik des MAS zu

$$\mathbf{x}^{k+1} = (\mathbf{I} - \tau \mathbf{L}) \mathbf{x}^k = \mathbf{P} \mathbf{x}^k, \tag{3}$$

dessen Eigenschaften vollständig über die System-Matrix, die sogenannte *Perron-Matrix* $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \tau \mathbf{L}$ gegeben sind und damit von der Kommunikationsstruktur über die Laplace-Matrix \mathbf{L} sowie von der Abtastzeit τ abhängen. Falls der Kommunikationsgraph einen gerichteten Spannbaum besitzt und die Abtastzeit $0 < \tau < 1/\delta_{\text{ein}}^{\max}$ kleiner als der reziproke Wert des maximalen Eingangsgrades ist, dann erfüllen die Eigenwerte $\lambda_i \in \mathbb{C}$ der Matrix \mathbf{P} die Eigenschaft $1 = \lambda_1 > |\lambda_{i \geq 2}|$, wobei λ_1 dem Spektralradius $\varrho(\mathbf{P})$ entspricht [29]. Damit liegen alle $\lambda_{i \geq 2}$ im Einheitskreis der komplexen Ebene und jede Zustandsgröße x_n^k konvergiert für jeden beliebigen Anfangszustand \mathbf{x}^0 des MAS auf den gewichteten Mittelwert $x_n^{k \rightarrow \infty} = \mathbf{v}^T \mathbf{x}^0$, $\forall n$, wobei \mathbf{v} mit der Eigenschaft $\sum_i v_i = 1$ der Linkseigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ von \mathbf{P} ist [30]. Ist der Graph zusätzlich regulär, dann konvergiert das MAS auf den Mittelwert $x_n^{k \rightarrow \infty} = 1/N \mathbf{1}^T \mathbf{x}^0$, $\forall n$.

3 Dezentraler Bayes'scher Consensus

Beim Entwurf des Consensus-Protokolls (2) wird vorausgesetzt, dass i) alle Zustände exakt messbar sind, ii) die Kommunikation zwischen den Agenten eine störffreie Datenübertragung gewährleistet und iii) für alle Agenten synchron zu jedem Abtastzeitpunkt die Nachbarzustände vorhanden sind. Dies ist in realen Sensornetzwerken normalerweise nicht der Fall. Deswegen wird im Folgenden die Consensus-Dynamik (3) auf einen stochastischen dynamischen Prozess erweitert, um Unsicherheiten in der Datenübertragung und der Zustandsmessung bei der Modellierung zu berücksichtigen. Voraussetzung iii) wird weiterhin angenommen.

3.1 Consensus als stochastischer Prozess

Erweitert man die Consensus-Dynamik (3) auf einen stochastischen Prozess

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{P} \mathbf{x}^k + \mathbf{w}^k, \tag{4}$$

wobei \mathbf{w}^k im allgemeinen Fall einem additiven, zeitvarianten¹ Rauschen beliebiger Art² entspricht, dann wird aus der Dynamik des MAS-Zustandes ein *Markow-Prozess erster Ordnung* [11], der die Dynamik einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion³ (WDF) $p(\mathbf{x}^k)$ über dem MAS-Zustand beschreibt

$$p(\mathbf{x}^{k+1}) = \int p(\mathbf{x}^{k+1} | \mathbf{x}^k) p(\mathbf{x}^k) d\mathbf{x}^k. \tag{5}$$

Dieser Markow-Prozess erster Ordnung ist vollständig durch seine Anfangs-WDF $p(\mathbf{x}^0)$ und die Transitions-WDF $p(\mathbf{x}^{k+1} | \mathbf{x}^k)$ gegeben. Er beschreibt eine rekursive Berechnung der WDF des MAS-Zustandes $p(\mathbf{x}^k)$ zu jedem Zeitschritt k durch *Marginalisierung* der Verbunddichte

¹ Ein zeitvariantes Rauschen unterliegt einem zeitinvarianten Wahrscheinlichkeitsmaß mit zeitvarianten Parametern.

² In Kapitel 3.3 wird der Fall eines mittelwertfreien, zeitinvarianten Gauß'schen Rauschens ausführlich besprochen.

³ Es gilt: $p(\mathbf{x}^k) \geq 0$ und $\int p(\mathbf{x}^k) d\mathbf{x}^k = 1$.

$p(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{x}^k) = p(\mathbf{x}^{k+1} | \mathbf{x}^k) p(\mathbf{x}^k)$. Dies ist nur möglich, da die Verbunddichte $p(\mathbf{x}^{0:K})$ über alle Zeitschritte von $k = 0, \dots, K := 0 : K$ folgendermaßen faktorisiert:

$$p(\mathbf{x}^{0:K}) = p(\mathbf{x}^0) \prod_{k=0}^{K-1} p(\mathbf{x}^{k+1} | \mathbf{x}^k). \quad (6)$$

Exakte Inferenz Wird die WDF $p(\mathbf{x}^{k+1})$ exakt aus der aktuellen WDF $p(\mathbf{x}^k)$ eines zeitdiskreten stochastischen Prozesses zu jedem Zeitschritt k berechnet (vorhergesagt) ohne Approximationen im Transitionsmodell, der Anfangs-WDF oder der Berechnung einzuführen, dann liegt exakte Inferenz vor.

Im Folgenden zeigen wir, dass die WDF $p(\mathbf{x}^k)$ nur dezentral berechenbar ist, wenn zusätzliche Annahmen an die stochastischen Abhängigkeiten zwischen den Zustandsvariablen vorausgesetzt werden und die Inferenz approximativ⁴ ausgeführt wird.

3.2 Dezentralisierung

Wir definieren eine *dezentrale Inferenz* von $p(\mathbf{x}^k)$ in dynamischen Systemen angelehnt an die Beschreibung in [19] wie folgt:

Dezentrale Inferenz Jeder Agent n kann lokal seine WDF $p(x_n^k)$ zu jedem Zeitschritt k unabhängig von anderen $p(x_m^k)$, $\forall m \neq n$, zum gleichen Zeitschritt berechnen. Dies geschieht nur über die Menge aller $p(x_m^{k-1})$ benachbarter Agentenzustände $x_m^{k-1} \in \mathcal{N}_n$ des vergangenen Zeitschritts $k-1$, ohne die globale Verbundwahrscheinlichkeit $p(\mathbf{x}^{k-1})$ zu kennen.

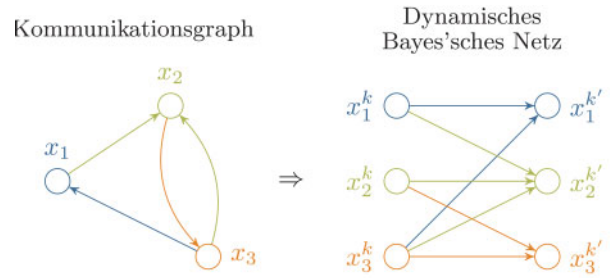
Durch die Erweiterung der Consensus-Dynamik auf den stochastischen Prozess (5) ergeben sich stochastische Abhängigkeiten zwischen zeitlich aufeinanderfolgenden Zustandsvariablen x_n^{k+1} und x_m^k , die aus der Kommunikationsstruktur hervorgehen. Diese können mittels eines Dynamischen Bayes'schen Netzes (DBN) visualisiert werden. Ein DBN ist ein azyklischer, gerichteter Graph, der die Struktur der stochastischen Abhängigkeiten zwischen einzelnen Zustandsgrößen eines Markow-Prozesses entlang der Zeit aufzeigt [15]. Dabei wird definiert, dass die Transitions-WDF folgendermaßen faktorisiert:

$$p(\mathbf{x}^{k+1} | \mathbf{x}^k) = \prod_{n=1}^N p(x_n^{k+1} | \mathbf{x}^k). \quad (7)$$

Die Menge aller eingehenden Kanten e_{mn} in einen Knoten v_n eines DBNs repräsentiert einen Faktor $p(x_n^{k+1} | \mathbf{x}^k)$ der Transitionswahrscheinlichkeit $p(\mathbf{x}^{k+1} | \mathbf{x}^k)$. Die Faktorisierung in Gleichung (7) ist nur erfüllt, wenn angenommen wird, dass das Systemrauschen auf dem Gesamtzustand stochastisch unabhängig zwischen den einzelnen Rauschvariablen w_n^k ist, also folgendermaßen faktorisiert:

$$p(\mathbf{w}^k) := \prod_{n=1}^N p(w_n^k). \quad (8)$$

⁴ Approximative Inferenz liegt vor, wenn keine exakte Inferenz berechenbar ist.



$$p(\mathbf{x}^{k'} | \mathbf{x}^k) = p(x_1^{k'} | x_1^k, x_3^k) p(x_2^{k'} | x_1^k, x_2^k, x_3^k) p(x_3^{k'} | x_2^k, x_3^k)$$

Bild 2 Beispiel eines DBNs mit zugehöriger faktorisierte Transitions-wahrscheinlichkeit $p(\mathbf{x}^{k'} | \mathbf{x}^k)$, wobei $k' = k + 1$.

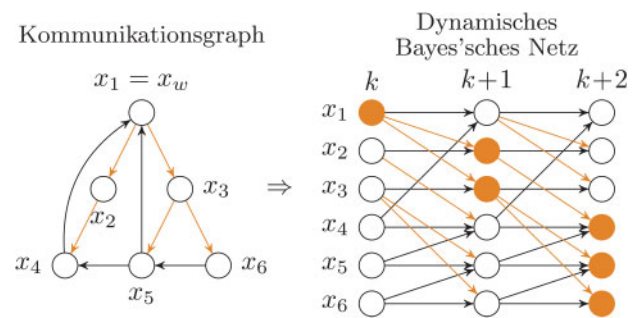


Bild 3 Beispiel eines über den Zeitschritten eines DBNs abgerollten Kommunikationsgraphen mit Spannbaum (orange).

Damit ist Gleichung (8) eine *notwendige Bedingung* zur Erfüllung von Gleichung (7) und dafür, dass der stochastische Consensus-Prozess (4) in ein DBN zerlegt werden kann. Wir beschränken uns ab jetzt auf ein zeitinvariantes Rauschen \mathbf{w} .

Die Kommunikationsstruktur, wie sie z. B. in Bild 1 zu sehen ist, beschreibt Abhängigkeiten zwischen den Zustandsvariablen eines Consensus-Protokolls. Diese Abhängigkeiten können als Struktur eines DBNs übernommen werden, wie in Bild 2 gezeigt.

Visualisiert man das DBN für mehrere Zeitschritte, wird deutlich, dass die Graphstruktur des DBNs dem über der Zeit abgerollten Kommunikationsgraph entspricht, wie in Bild 3 zu sehen ist. Jeder Kommunikationsgraph lässt sich also direkt in ein DBN umschreiben, falls der darunterliegende Prozess die Bedingung (8) erfüllt.

Es ist offensichtlich, dass sobald ein gerichteter Spannbaum im Kommunikationsgraph vorliegt, dies auch für das daraus abgeleitete DBN gilt. Kopiert man die Transition d -mal, dann beinhaltet das DBN den über der Zeit abgerollten Spannbaum des Kommunikationsgraphen (siehe Bild 3). Die Existenz eines Spannbaums ist laut [30] Voraussetzung für eine konvergente Consensus-Dynamik.

Es kann folgender Lehrsatz hergeleitet werden:

Satz 1. *Startet der Consensus-Prozess nach (4) mit stochastisch unabhängigen Anfangszuständen $\mathbf{p}(\mathbf{x}^0) = \prod_{n=1}^N p(x_n^0)$ und liegt ein Spannbaum im Kommunikationsgraph vor, sind bei exakter Inferenz und der Faktorisierung nach (7)*

bereits nach einem Iterationsschritt alle Zustandsvariablen stochastisch voneinander abhängig.

Beweis. Falls die Inferenz nur unter Berücksichtigung der stochastischen Transitionen des Kommunikationsgraphen, die durch den Spannbaum gegeben sind, nach einem Iterationsschritt stochastische Abhängigkeiten aller Variablen ergibt, dann gilt das auch für den gesamten Kommunikationsgraphen.

Entspricht der Kommunikationsgraph einem gerichteten Spannbaum ohne weitere Kanten, dann besitzt die Zustandstransition $p(x_w^{k+1}|x_w^k)$ des Wurzelknotens x_w nur einen zeitlichen Nachbarn, nämlich den eigenen Zustand x_w^k zum aktuellen Zeitpunkt. Alle Zustandstransitionen jedes weiteren Knotens $p(x_i^{k+1}|x_i^k, x_n^k)$ besitzen exakt zwei zeitliche Nachbarn, den eigenen Zustand zum aktuellen Zeitpunkt x_i^k und den Zustand zum aktuellen Zeitpunkt des direkten Nachbarknotens x_n^k im Spannbaum. Beginnt die Inferenz nach Gleichung (5) mit stochastisch unabhängigen Anfangszuständen und der faktorisierten Transition nach (7), dann ergibt sich ein exakter Zustandsübergang

$$p(\mathbf{x}^1) = \int p(x_w^1|x_w^0) \prod_{\forall l \neq w} p(x_l^1|x_l^0, x_n^0) \prod_{l=1}^N p(x_l^0) d\mathbf{x}^0, \quad (9)$$

der folgendermaßen rekursiv⁵ über Teilgruppen C_l^b von Zuständen des Spannbaums berechnet werden kann:

$$p(\{x_m^1 \in C_l^b\}, x_l^1|x_n^0) = \int p(x_l^1|x_l^0, x_n^0) p(x_l^0) \prod_b p(\{x_m^1 \in C_l^b\} | x_l^0) dx_l^0. \quad (10)$$

Hierbei entspricht C_l^b der Menge aller Zustandsgrößen, die einen Teilbaum b im Kommunikationsgraphen aufspannen, dessen Wurzelknoten ein Kind⁶ von x_l ist. Ein Beispiel dieser Mengen ist in Bild 4 veranschaulicht. Alle x_l -Zustandsvariablen sind Kinder von x_n und gehören zu Knoten $\{v_l | h(v_w, v_l) \geq l\}$, die den gleichen Hop Count $h(v_w, v_l)$ zum Wurzelknoten v_w besitzen.

Man beginnt die rekursive Berechnung über alle Hop Counts h der ineinander geschachtelten Integrale aus (10) mit den Blättern des Spannbaumes $x_l^0 \in \mathcal{M}_d$ (für Durchmesser d), wobei $\mathcal{M}_i = \{x_l^0 | h(v_w, v_l) = i\}$. Bei jeder Erniedrigung des Index i und damit Hinzunahme der Zustände $x_l^0 \in \mathcal{M}_i$ ergeben die entstehenden Verbunddichten stets nur bedingt statistisch unabhängige Gruppen $\prod_b p(\{x_m^1 \in C_l^b\} | x_l^0)$, bedingt durch x_l^0 . Der letzte Rekursionsschritt für $i = 1$ marginalisiert den Initialzustand des Wurzelknotens x_w^0 und verbindet die Gruppen aller Teilbäume b , deren Wurzelknoten Kinder des Wurzelknotens des Spannbaumes sind. Damit sind nach der letzten Rekursion alle Zustände nicht nur gruppenweise

⁵ Diese rekursive Vorgehensweise behält die größtmögliche Faktorisierung während der Transition bei.

⁶ Kinder bezeichnen direkte Nachfolge-Knoten eines Knotens in einem gerichteten Graph mit Baumstruktur.

Spannbaum eines Kommunikationsgraphen

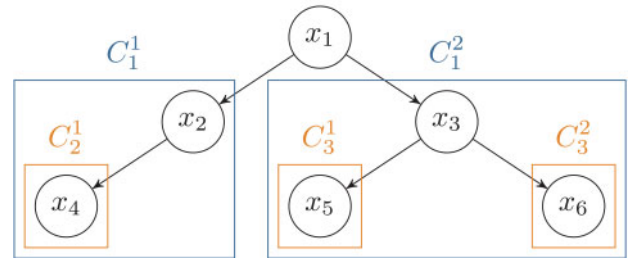


Bild 4 Beispiel der Mengen C_l^b an Teilbäumen des Spannbaums des Kommunikationsgraphen aus Bild 3.

bedingt stochastisch unabhängig, sondern komplett stochastisch abhängig. □

Korollar 1. Eine dezentrale Inferenz ist nur möglich, wenn die Verbunddichte $p(\mathbf{x}^k)$ durch ein Produkt von Marginalisierungen über Gruppen von Nachbarzuständen approximiert wird.

Da Satz 1 gilt, muss jeder Agent nach dem ersten Zeitschritt die komplette Verbunddichte des MAS zur Verfügung haben, wenn er seine Zustands-WDF exakt berechnen möchte. Die Agenten können damit ihre Zustands-WDF niemals exakt dezentral berechnen.

Wir stellen zwei Möglichkeiten dezentraler Inferenz vor, die sich aus zwei bekannten approximativen Inferenzmethoden, dem Boyen-Koller-Algorithmus [16] und dem Factored-Frontier-Algorithmus [17] ableiten lassen.

Beide Algorithmen sind Spezialfälle des Belief Propagation [12] und nehmen an, dass die Verbunddichte $p(\mathbf{x}^k)$ in jedem Zeitschritt durch eine in Gruppen oder komplett faktorisierte WDF approximiert wird:

$$p(\mathbf{x}^k) \approx \tilde{p}(\mathbf{x}^k) = \prod_{n=1}^N p(x_n^k). \quad (11)$$

Gleichung (11) entspricht damit einer weiteren notwendigen Bedingung an eine dezentrale Inferenz.

Der Boyen-Koller-Algorithmus führt in jedem Zeitschritt eine exakte Transition aus und approximiert dann durch Projektion die sich ergebende stochastisch abhängige Verbunddichte auf eine faktorisierende Verbunddichte. Damit ist in jedem Zeitschritt Gleichung (11) erfüllt und die Transition lässt sich durch rekursive Marginalisierung einzelner vergangener Zustände realisieren. Dabei ist die Reihenfolge der Zustandsgrößen, die nacheinander marginalisiert werden, durch die zeitlichen Abhängigkeiten in der Transition (7) gegeben. Dies reduziert zwar den Rechenaufwand der Inferenz, macht sie aber nicht dezentral ausführbar. Durch Einführung einer stärkeren Faktorisierungsannahme in der Transition (7) in Potentiale⁷ ϕ ergibt sich

$$p(\mathbf{x}^{k+1} | \mathbf{x}^k) := \prod_{n=1}^N \prod_{m \in \mathcal{N}_n^c} \phi(x_n^{k+1} | x_m^k), \quad (12)$$

⁷ Potentiale sind nicht-normierte Faktoren einer WDF.

und Gleichung (5) kann unter Berücksichtigung von (11) und (12) in ein Produkt von Verbund-Potentialen über lokale Gruppen von Agenten umgeschrieben werden:

$$p(\mathbf{x}^{k+1}) = \prod_{n=1}^N \int \underbrace{\prod_{m \in \mathcal{N}_n^a} \phi(x_m^{k+1} | x_n^k)}_{\phi(\{x_m^{k+1} \in \mathcal{N}_n^a\})} p(x_n^k) dx_n^k. \quad (13)$$

Hierbei entspricht \mathcal{N}_n^e und \mathcal{N}_n^a den Ein- und Ausgangsgruppen von Nachbarzuständen im DBN. Jeder Agent n kann nun ausgehend von seiner WDF $p(x_n^k)$ über die Transitions-Potentiale $\phi(x_m^{k+1} | x_n^k)$ seiner Nachbarn \mathcal{N}_n^a ein lokales Verbund-Potential des nächsten Zeitschrittes $\phi(\{x_m^{k+1} \in \mathcal{N}_n^a\})$ berechnen. Dieses kann er durch Marginalisierung in Einzelpotentiale $\phi_n(x_m^{k+1})$ für alle $x_m^{k+1} \in \mathcal{N}_n^a$ zerlegen

$$\phi_n(x_m^{k+1}) = \int \phi(\{x_{m'}^{k+1} \in \mathcal{N}_n^a\}) \{dx_{m'}^{k+1}\}_{\forall m' \setminus m} \quad (14)$$

und diese dann an seine Nachbarn verschicken. Damit kann jeder Agent n über das Produkt der Potentiale $\phi_m(x_n^{k+1})$ aller Nachbarn $m \in \mathcal{N}_n^e$ seine neue WDF berechnen:

$$p(x_n^{k+1}) = \prod_{m \in \mathcal{N}_n^e} \phi_m(x_n^{k+1}). \quad (15)$$

Damit ist gezeigt, dass durch Einführung der Modellannahme (12) der Boyen-Koller-Algorithmus dezentralisiert und sich für eine dezentrale Bayes'sche Consensus-Regelung eignet, die in Protokoll 1 beschrieben ist.

Protokoll 1 (Dezentrales Boyen-Koller-Protokoll).

Initialisiere $p(x_n^0)$ für alle Agenten

Jeder Agent n führt rekursiv aus:

for $k = 1$ to K **do**

Verschicke $\phi_n(x_m^k)$ an alle $m \in \mathcal{N}_n^a$ Agenten

Empfange $\phi_m(x_n^k)$ aller $m \in \mathcal{N}_n^e$ Agenten

Berechne $p(x_n^k)$ über (15)

Berechne $\phi(\{x_m^{k+1} \in \mathcal{N}_n^a\})$ über (13)

Berechne $\phi_n(x_m^{k+1}) \forall m \in \mathcal{N}_n^a$ über (14)

end for

Für *diskrete* Zustandsvariablen liefert [16] ein Theorem, das eine obere Schranke für den Fehler angibt, der durch die Approximation (11) in einem Transitionsschritt gemacht wird. Folgende obere Schranke wird angegeben:

$$\text{KL}(p(\mathbf{x}^{k+1}) \| \tilde{p}(\mathbf{x}^{k+1})) \leq \underbrace{\left(1 - \left(\frac{\gamma}{r}\right)^q\right)}_{\alpha} \text{KL}(p(\mathbf{x}^k) \| \tilde{p}(\mathbf{x}^k)). \quad (16)$$

Hierbei entspricht $\text{KL}(p(\mathbf{x}^k) \| \tilde{p}(\mathbf{x}^k)) \geq 0$ der Kullback-Leibler-Divergenz⁸, einem Maß für die Unterschied-

⁸ Die Kullback-Leibler-Divergenz, auch relative Entropie genannt, entspricht: $\text{KL}(p(\mathbf{x}) \| \tilde{p}(\mathbf{x})) = -\int p(\mathbf{x}) \ln(\tilde{p}(\mathbf{x})/p(\mathbf{x})) d\mathbf{x}$, $\text{KL}(p(\mathbf{x}) \| \tilde{p}(\mathbf{x})) \neq \text{KL}(\tilde{p}(\mathbf{x}) \| p(\mathbf{x}))$.

lichkeit zwischen der exakten Verbunddichte $p(\mathbf{x}^k)$ und der faktorisierten Approximation $\tilde{p}(\mathbf{x}^k)$. Es gilt: $\text{KL}(p(\mathbf{x}) \| \tilde{p}(\mathbf{x})) = 0$, falls $p(\mathbf{x}^k) = \tilde{p}(\mathbf{x}^k)$, also die Approximation exakt ist. Gamma $0 \leq \gamma \leq 1$ entspricht der minimalen Mischrate, so wie sie in [16] definiert ist und ist ein Maß für den minimalen Überlappungsgrad zweier WDFs, der bei einem Zustandsübergang entsteht. Gleichung (16) zeigt, dass sich der Fehler, der durch die Approximation (11) entsteht, bei jedem Zeitübergang verringert, da $0 \leq \alpha < 1$. Die Parameter $r-1 = \delta_{\text{ein}}^{\text{max}}$ und $q-1 = \delta_{\text{aus}}^{\text{max}}$ entsprechen dem maximalen Eingangs- und Ausgangsgrad des Kommunikationsgraphen. Da die Struktur des DBNs bei unserer Modellierung die Kommunikationsstruktur beinhaltet, können wir einen Zusammenhang zwischen Kommunikationsstruktur und Approximationsfehler der dezentralen Inferenz herstellen. Es lässt sich folgender Lehrsatz ableiten:

Satz 2. Für diskrete Zustandsvariablen⁹ ist der Schätzfehler, der sich durch eine dezentrale Inferenz mittels des dezentralen Boyen-Koller-Protokolls 1 ergibt, stets durch die obere Schranke (16) begrenzt. Je mehr Information innerhalb eines Zeitschrittes zwischen den Agenten eines MAS ausgetauscht wird, desto größer ist der Approximationsfehler im Vergleich zu einer exakten Inferenz. Die Fehlerreduktion α ist über das Minimum aller minimalen Mischraten γ und die Anzahl der Agenten $N \geq 2$ folgendermaßen begrenzt: $1 - (\gamma/2)^2 \leq \alpha \leq 1 - (\gamma/N)^N$.

Beweis. Der Ausdruck $(\gamma/r)^q$ ist eine monoton fallende Funktion in q und r . Der minimal mögliche Informationsaustausch, der noch zu einer konvergenten Consensus-Dynamik führt, ist durch eine Linientopologie des Kommunikationsgraphen gegeben, wobei gilt: $\delta_{\text{ein}}^{\text{max}} = \delta_{\text{aus}}^{\text{max}} = 1$. Das entspricht einem DBN mit $r = q = 2$. Der maximal mögliche Informationsaustausch findet in einem vollvernetzten Graphen statt, wobei gilt: $\delta_{\text{ein}}^{\text{max}} = \delta_{\text{aus}}^{\text{max}} = N-1$. Das entspricht einem DBN mit $r = q = N$. Deswegen verbleibt die Fehlerreduktion in folgendem Bereich: $1 - (\gamma/2)^2 \leq \alpha \leq 1 - (\gamma/N)^N$. \square

Eine weitere Möglichkeit, ohne die Faktorierungsannahme (12) eine dezentrale Inferenz zu realisieren, bietet der *Factored-Frontier-Algorithmus* [17]. Hier wird die Transition nur approximativ ausgeführt, so dass keine Projektion auf eine faktorisierte Verbundwahrscheinlichkeit nötig ist. Die approximative Transition lautet

$$p(\mathbf{x}^{k+1}) \approx \prod_{n=1}^N \int \underbrace{p(x_n^{k+1} | \mathbf{x}^k) \prod_{m \in \mathcal{N}_n^e} p(x_m^k)}_{p(\mathbf{x}_n^{k+1})} dx_m^k. \quad (17)$$

⁹ Alle Ergebnisse dieses Artikels gelten auch für diskrete Zustandsvariablen \mathbf{x} . Dazu müssen in den Formeln lediglich Integrale durch Summen ersetzt werden.

Gleichung (17) ist direkt für eine dezentrale Inferenz nutzbar und liefert Protokoll 2:

Protokoll 2 (Dezentrales Factored-Frontier-Protokoll).

Initialisiere $p(x_n^0)$ für alle Agenten

Jeder Agent n führt rekursiv aus:

for $k = 1$ to K **do**

Verschicke $p(x_n^k)$ an alle $m \in \mathcal{N}_n^a$ Agenten

Empfange $p(x_m^k)$ aller $m \in \mathcal{N}_n^e$ Agenten

Berechne $p(x_n^{k+1})$ über (17)

end for

Der Vorteil von Protokoll 2 gegenüber Protokoll 1 ist, dass die Annahme der stärkeren Faktorisierung in Gleichung (12) im Vergleich zu Gleichung (7) nicht getroffen werden muss. Der Nachteil liegt in der ungenaueren Inferenz von Gleichung (17) gegenüber Gleichung (13). Setzt man in Gleichung (17) zusätzlich die Annahme (12) voraus, dann ergibt sich eine noch stärker faktorisierte dezentrale Inferenz:

$$p(\mathbf{x}^{k+1}) \approx \prod_{n=1}^N \underbrace{\prod_{m \in \mathcal{N}_n^e} \int \phi(x_n^{k+1} | x_m^k) p(x_m^k) dx_m^k}_{p(x_n^{k+1})}. \quad (18)$$

Diese Inferenz (18) kann in Protokoll 2 anstatt (17) verwendet werden. Der Vorteil dabei ist, dass ein Agent n nicht alle $p(x_m^k)$ empfangen haben muss, um mit der Berechnung von (18) zu beginnen. Sobald ein Nachbar seine WDF geschickt hat, kann sein Beitrag zum eigenen Zustandsübergang berechnet werden. Innerhalb eines Zeitschrittes müssen die Informationen also nicht mehr synchron verschickt werden. In Tabelle 1 sind nochmal alle notwendigen Bedingungen für eine dezentrale Inferenz und die Umsetzung mit beiden Protokollen zusammengefasst und gegenübergestellt.

Die Wahl des Wahrscheinlichkeitsmaßes des Kommunikationsrauschens bestimmt maßgeblich den Kommunikationsaufwand, da nun vollständige WDFs anstatt der reinen Zustandsgrößen kommuniziert werden müssen. Deswegen betrachten wir im Weiteren gaußverteilte Störungen, da diese vollständig durch Erwartungswert und Varianz beschrieben sind und somit die Kommunikationsmenge pro Agent im Vergleich zum deterministischen Consensus-Protokoll lediglich verdoppelt wird.

Tabelle 1 Zusammenfassung der notwendigen Bedingungen für das dezentrale Boyen-Koller-Protokoll (dBK) und das dezentrale Factored-Frontier-Protokoll (dFF).

Notwendige Bedingungen	dBK	dFF
$p(\mathbf{w}^k) := \prod_{n=1}^N p(w_n^k)$	✓	✓
$p(\mathbf{x}^k) := \tilde{p}(\mathbf{x}^k) = \prod_{n=1}^N p(x_n^k)$	✓	✓
$p(\mathbf{x}^{k+1} \mathbf{x}^k) := \prod_{n=1}^N \prod_{m \in \mathcal{N}_n^e} \phi(x_n^{k+1} x_m^k)$	✓	

3.3 Gauß'sches Consensus-Protokoll

Nun können Protokoll 1 und 2 für unterschiedliche WDF Annahmen umgesetzt werden. Wir beschränken uns hier auf den einfachsten Fall und realisieren dezentrale lineare Gauß'sche Consensus-Protokolle. Für Protokoll 2 nehmen wir für jeden Agenten eine gaußverteilte Agenten-WDF $g(x_n^k | \mu_n^k, (\sigma^2)_n^k)$ mit zeitveränderlichem Erwartungswert μ_n^k und zeitveränderlicher Varianz $(\sigma^2)_n^k$ an. Der Gauß'sche Consensus-Prozess ist vollständig über eine gaußverteilte Initial-WDF (19a) und eine gaußverteilte Transitions-WDF (19b) gegeben:

$$p(x_n^0) = g(x_n^0 | \mu_n^0, (\sigma^2)_n^0), \quad (19a)$$

$$p(x_n^{k+1} | \mathbf{x}^k) = g \left(x_n^{k+1} \mid \sum_{m \in \mathcal{N}_n^e} p_{nm} x_m^k, \rho_n^2 \right). \quad (19b)$$

Hierbei entspricht p_{nm} dem nm -ten Element der Perron-Matrix und ρ_n^2 einer zeitinvarianten Varianz, welche die Unsicherheit modelliert, die bei der Übertragung der Information aus der Nachbarschaft vorhanden ist. Setzt man Gleichung (19b) in die Transition (17) ein, dann ergibt sich folgender dezentraler Zustandsübergang:

$$\begin{aligned} g(x_n^{k+1} | \mu_n^{k+1}, (\sigma^2)_n^{k+1}) &\approx \\ &\int g \left(x_n^{k+1} \mid \sum_{m \in \mathcal{N}_n^e} p_{nm} x_m^k, \rho_n^2 \right) \prod_{m \in \mathcal{N}_n^e} g(x_m^k | \mu_m^k, (\sigma^2)_m^k) dx_m^k \\ &= g \left(x_n^{k+1} \mid \sum_{m \in \mathcal{N}_n^e} p_{nm} \mu_m^k, \rho_n^2 + \sum_{m \in \mathcal{N}_n^e} p_{nm}^2 (\sigma^2)_m^k \right). \end{aligned} \quad (20)$$

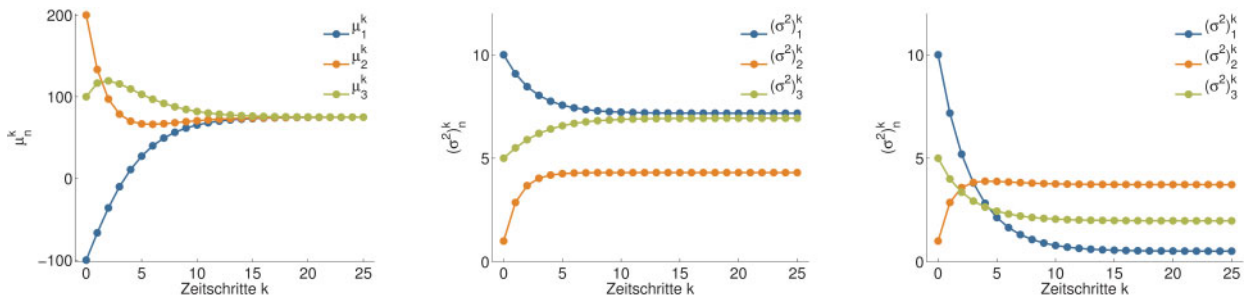
Man sieht, dass sich für die Erwartungswerte genau die gleiche Rekursionsformel $\boldsymbol{\mu}^{k+1} = \mathbf{P}\boldsymbol{\mu}^k$, wie für die Zustände beim deterministischen Consensus-Protokoll (3) ergeben. Hierbei entspricht $\boldsymbol{\mu}^k = [\dots, \mu_n^k, \dots]^T$ für $n = 1, \dots, N$. Die Abtastzeit muss die Bedingung $0 < \tau < 1/\delta_{\text{ein}}^{\max}$ erfüllen. Für Graphen mit gerichtetem Spannbaum konvergieren die Erwartungswerte damit alle auf den gewichteten Mittelwert der anfänglichen Erwartungswerte $\mu_n^{k \rightarrow \infty} = \mathbf{v}^T \boldsymbol{\mu}^0, \forall n$, wobei \mathbf{v} , mit der Eigenschaft $\sum_i v_i = 1$, der Linkseigenvektor von \mathbf{P} ist. Ist der Graph zusätzlich regulär, dann konvergieren die Erwartungswerte auf den mittleren Erwartungswert der initialen Erwartungswerte $\mu_n^{k \rightarrow \infty} = \frac{1}{N} \mathbf{1}^T \boldsymbol{\mu}^0, \forall n$.

Um zu beweisen, dass die Dynamik der Varianzen asymptotisch stabil ist, benötigen wir folgendes Lemma:

Lemma 1. Das Schur Produkt¹⁰ zweier primitiver Perron-Matrizen $\mathbf{P} \circ \mathbf{P} = \mathbf{Q}$ besitzt einen Spektralradius kleiner eins $\rho(\mathbf{Q}) < 1$.

Beweis. Eine Perron-Matrix \mathbf{P} ist primitiv, wenn der dazugehörige Graph \mathcal{G} stark zusammenhängend ist und die Abtastzeit $0 < \tau < 1/\delta_{\text{ein}}^{\max}$ erfüllt [29]. Damit besitzt \mathbf{P}

¹⁰ Das Schur Produkt bzw. Hadamard Produkt \circ bezeichnet die elementweise Multiplikation zweier Matrizen.



a) Verlauf der Erwartungswerte b) Verlauf der Varianzen für homogene Kommunikationsunsicherheit c) Verlauf der Varianzen für heterogene Kommunikationsunsicherheit

Bild 5 Verlauf der Erwartungswerte und Varianzen für den Kommunikationsgraph aus Bild 1.

nur einen einfachen Eigenwert $\lambda_1 = 1$ und alle weiteren Eigenwerte erfüllen die Bedingung $1 = \lambda_1 > |\lambda_{i \geq 2}|$, wobei λ_1 dem Spektralradius $\varrho(\mathbf{P})$ entspricht. Des Weiteren erfüllen alle Elemente einer primitiven Perron-Matrix die Eigenschaft $0 \leq p_{ij} < 1$ mit dem Maximalwert $0 < p_{\max} < 1$. Falls die Perron-Matrix über die Transformationsmatrix $\mathbf{T} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N)$ diagonalisierbar ist, wobei \mathbf{w}_n die linksseitigen Eigenvektoren von \mathbf{P} sind, ergibt sich folgende Abschätzung:¹¹

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{T}^{-1} \text{diag}(1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \mathbf{T} \geq p_{\max} \mathbf{P} \\ &= \mathbf{T}^{-1} \text{diag}(p_{\max}, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_N) \mathbf{T} \geq \mathbf{P} \circ \mathbf{P} = \mathbf{Q}. \end{aligned}$$

Damit ist der größte Eigenwert von $p_{\max} \mathbf{P}$ stets kleiner als eins $p_{\max} < 1$, und für den Spektralradius gilt $0 \leq \varrho(p_{\max} \mathbf{P}) < \varrho(\mathbf{P}) = 1$. Nach dem Satz von Perron-Frobenius gilt, dass der Spektralradius von nicht-negativen Matrizen eine monoton steigende Funktion ist, also $0 \leq \varrho(\mathbf{Q}) \leq \varrho(p_{\max} \mathbf{P}) < 1$, falls $\mathbf{Q} \leq p_{\max} \mathbf{P}$. Diese Bedingung ist für primitive \mathbf{P} per Konstruktion erfüllt, deswegen gilt: $\varrho(\mathbf{Q}) < 1$. \square

Mit Lemma 1 lässt sich nun für die Rekursionsformel der Varianzen folgender Satz angeben:

Satz 3. Die rekursiven Folgen aller Varianzen $\boldsymbol{\sigma}^k = [\dots, (\sigma^2)_n^k, \dots]^T$ für $n = 1, \dots, N$ ergeben ein diskretes affines dynamisches System $\boldsymbol{\sigma}^{k+1} = \mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma}^k + \boldsymbol{\rho}$. Dieses System konvergiert für stark zusammenhängende Graphen stets zum Fixpunkt $\boldsymbol{\sigma}^{k \rightarrow \infty} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \boldsymbol{\rho}$, da nach Lemma 1 der Spektralradius $\varrho(\mathbf{Q}) < 1$ immer kleiner eins ist und damit das System stets asymptotisch stabil ist.

Hierbei entspricht $\boldsymbol{\rho}$ dem Vektor aller Kommunikationsunsicherheiten $\boldsymbol{\rho} = [\dots, \rho_n^2, \dots]^T$ für $n = 1, \dots, N$ und \mathbf{I} der $N \times N$ Einheitsmatrix.

Im Gegensatz zu den Erwartungswerten hängt der Endwert der Varianzen nicht von der Initialisierung ab, sondern nur von der Kommunikationsstruktur \mathbf{L} und der Abtastzeit τ , die in \mathbf{P} und damit \mathbf{Q} vertreten sind, sowie von den Übertragungsunsicherheiten $\boldsymbol{\rho}$. Die einzel-

nen Varianzen $(\sigma^2)_n^k$ geben an, wie sicher sich ein Agent zum Zeitpunkt k über seinen erwarteten Consensus-Wert μ_n^k sein kann.

Mit Satz 3 ergibt sich ein konvergentes dezentrales Gauß'sches Consensus-Protokoll, das in Protokoll 3 zusammengefasst ist.

Protokoll 3 (Gauß'sches Consensus-Protokoll).

Initialisiere $\mu_n^0, (\sigma^2)_n^0$ und ρ_n^2 für alle Agenten

Jeder Agent n führt rekursiv aus:

for $k = 1$ to K **do**

- Verschicke μ_n^k und $(\sigma^2)_n^k$ an alle $m \in \mathcal{N}_n^a$ Agenten
- Empfange μ_m^k und $(\sigma^2)_m^k$ aller $m \in \mathcal{N}_n^e$ Agenten
- Berechne

$$\begin{aligned} \mu_n^{k+1} &= \sum_{m \in \mathcal{N}_n^e} p_{nm} \mu_m^k \\ (\sigma^2)_n^{k+1} &= \rho_n^2 + \sum_{m \in \mathcal{N}_n^e} p_{nm}^2 (\sigma^2)_m^k \end{aligned}$$

end for

In Bild 5 ist ein Beispiel für den Verlauf des Gauß'schen Consensus-Protokolls zu sehen, wenn eine Kommunikation zwischen den Agenten nach Kommunikationsgraph aus Bild 1 angenommen wird. Für eine Initialisierung der Erwartungswerte mit $\boldsymbol{\mu}^0 = [-100, 100, 200]^T$ ergibt sich der Verlauf 5a der einzelnen Erwartungswerte μ_n^k . Nach $k = 25$ Zeitschritten stimmen die Erwartungswerte aller Agenten überein. Die Bilder 5a und a zeigen den Verlauf der Varianzen $(\sigma^2)_n^k$ für die gleiche Initialisierung $\boldsymbol{\sigma}^0 = [10, 1, 5]^T$ aber unterschiedliche Kommunikationsunsicherheiten $\boldsymbol{\rho} = [2, 2, 2]^T$ (homogen) und $\boldsymbol{\rho} = [0, 1, 2, 0, 5]^T$ (heterogen).

Jeder Agent kann sich also nicht nur dezentral den gewichteten Mittelwert der Anfangswerte ausrechnen, sondern kann zusätzlich abschätzen, wie sicher er sich diesem Wert sein kann unter Berücksichtigung der lokalen Übertragungsunsicherheit und der lokalen Kommunikationsstruktur. Wenn die Übertragungsunsicherheit für jeden Agenten gleich angenommen wird, wie in Beispiel 5b, dann ist sich ein Agent umso sicherer über seinen Schätzwert, je mehr er diesen Wert zu anderen

¹¹ Falls \mathbf{P} nicht diagonalisierbar ist, kann \mathbf{P} in die Jordansche Normalform transformiert werden, für die die Abschätzung ebenfalls gilt.

Agenten kommuniziert. Im Beispiel ist das Agent 2, da er den höchsten Ausgangsgrad besitzt. Agenten, die gleichen Ausgangsgrad besitzen, sind sich umso sicherer, je mehr Information sie aus ihrer Nachbarschaft erhalten, also wer den größeren Eingangsgrad besitzt. Dabei wiegt der Eingangsgrad schwächer als der Ausgangsgrad. Sind die Kommunikationsunsicherheiten unterschiedlich zwischen den Agenten, dann wirkt sich das auch auf die Varianz der Schätzung des Agenten aus. Obwohl Agent 1 am wenigsten kommuniziert, ist er sich in Beispiel 5c am sichersten, da seine Kommunikationsunsicherheit mit $\rho_1^2 = 0,1$ im Vergleich zu $\rho_2^2 = 2$ und $\rho_3^2 = 0,5$ nun am niedrigsten ist.

4 Dezentrales Bayes'sches Consensus-Protokoll

4.1 Berücksichtigung von Sensorrauschen

Soll neben den Übertragungsunsicherheiten \mathbf{w}^k zusätzlich das Sensorrauschen \mathbf{v}^k des Messprozesses berücksichtigt werden, dann muss der Consensus-Prozess (4) um eine Messgleichung erweitert werden:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{P}\mathbf{x}^k + \mathbf{w}^k, \quad (21a)$$

$$\mathbf{y}^k = \mathbf{x}^k + \mathbf{v}^k. \quad (21b)$$

Wir gehen vereinfachend davon aus, dass die Messgröße \mathbf{y}^k direkt dem verrauschten MAS-Zustand \mathbf{x}^k entspricht und das Systemrauschen \mathbf{w} sowie das Sensorrauschen \mathbf{v} zeitinvariant bleiben. Über einen rekursiven Bayes'schen Filter [11] kann zu jedem Zeitpunkt die A-posteriori-WDF $p(\mathbf{x}^k | \mathbf{y}^{1:k})$ – also die Verteilungsdichte der MAS-Zustände \mathbf{x}^k , gegeben alle bisher getätigten Messungen $\mathbf{y}^{1:k}$ – geschätzt werden:

$$p(\mathbf{x}^{k+1} | \mathbf{y}^{1:k}) = \int p(\mathbf{x}^{k+1} | \mathbf{x}^k) p(\mathbf{x}^k | \mathbf{y}^{1:k}) d\mathbf{x}^k, \quad (22a)$$

$$p(\mathbf{x}^{k+1} | \mathbf{y}^{1:k+1}) = c^k p(\mathbf{y}^{k+1} | \mathbf{x}^{k+1}) p(\mathbf{x}^{k+1} | \mathbf{y}^{1:k}). \quad (22b)$$

Hierbei entspricht (22a) einem Prädiktionsschritt und (22b) einem Korrekturschritt, der über die Bayes-Formel mit der Normierungskonstanten $c^k = 1/p(\mathbf{y}^{k+1} | \mathbf{y}^{1:k})$ erfolgt [11]. Wird angenommen, dass jeder Agent die Messung seines Zustandes lokal selbst durchführt und alle Messungen statistisch unabhängig voneinander sind, dann faktorisiert die Messverteilung zu jedem Zeitschritt k vollständig:

$$p(\mathbf{y}^k | \mathbf{x}^k) := \prod_{n=1}^N p(y_n^k | x_n^k). \quad (23)$$

Gleichung (23) ist die *notwendige Bedingung* dafür, dass der Korrekturschritt (22b) dezentral über die Agenten verteilt erfolgen kann. Für den Prädiktionsschritt (22a) muss für eine dezentrale Berechnung gelten:

$$p(\mathbf{x}^{k+1} | \mathbf{y}^{1:k}) := \prod_{n=1}^N p(x_n^{k+1} | \mathbf{y}^{1:k}). \quad (24)$$

Dies ist genau die gleiche Bedingung wie (11) nur für die A-posteriori-WDF $p(\mathbf{x}^k | \mathbf{y}^{1:k})$ anstatt der Zustands-WDF $p(\mathbf{x}^k)$. Das bedeutet, falls (23) gilt und (24) angenommen wird, dann kann das Bayes'sche Filter (22a), (22b) dezentral in einem MAS umgesetzt werden. Der Prädiktionsschritt entspricht dann einem der vorgeschlagenen dezentralen Transitionen (13)–(15), (17) oder (18) und kann mit den entsprechenden Protokollen 1 oder 2 umgesetzt werden. Jeder Agent kann damit dezentral zu jedem Zeitschritt eine Schätzung der A-posteriori-WDF $p(x_n^k | \mathbf{y}^{1:k})$ berechnen, die angibt, wie wahrscheinlich sein momentaner Zustand x_n^k ist, unter der Bedingung aller im MAS bisher getätigten Messungen $\mathbf{y}^{1:k}$.

Da die Messungen verrauscht sind, kann kein exakter Konsens zwischen den Zuständen des MAS mehr erreicht werden. Die Zustände bewegen sich im zeitlichen Mittel nur noch in einem Konvergenzband $|x_n^k - x_m^k| < \epsilon$ für $k \rightarrow \infty$.

4.2 Dezentrales Kalman-Consensus-Filter

Unter der Annahme, dass $p(y_n^k | x_n^k)$ und $p(x_n^k | \mathbf{y}^{1:k})$ für alle $n = 1, \dots, N$ gaußverteilt sind, können nun dezentrale Kalman-Consensus-Filter entworfen werden. Verwendet man Gleichung (20) als Prädiktionsschritt, dann kann man aus Protokoll 3 und dem klassischen Kalman-Korrekturschritt [11] direkt ein dezentrales Protokoll 4 für ein Kalman-Consensus-Filter angeben.

Protokoll 4 (Dezentrales Kalman-Consensus-Filter).

Initialisiere $\mu_n^0, (\sigma^2)_n^0$ und ρ_n^2 für alle Agenten

Jeder Agent n führt rekursiv aus:

for $k = 1$ to K **do**

Dezentraler Prädiktionsschritt:

Verschiebe μ_n^k und $(\sigma^2)_n^k$ an alle $m \in \mathcal{N}_n^a$ Agenten

Empfange μ_m^k und $(\sigma^2)_m^k$ aller $m \in \mathcal{N}_n^e$ Agenten

Berechne

$$\hat{\mu}_n^{k+1} = \sum_{m \in \mathcal{N}_n^e} p_{nm} \mu_m^k$$

$$(\hat{\sigma}^2)_n^{k+1} = \rho_n^2 + \sum_{m \in \mathcal{N}_n^e} p_{nm}^2 (\sigma^2)_m^k$$

Lokaler Korrekturschritt:

$$K_n^k = (\hat{\sigma}^2)_n^k (v_n^2 + (\hat{\sigma}^2)_n^k)^{-1}$$

$$\mu_n^k = \hat{\mu}_n^k + K_n^k (y_n^k - \hat{\mu}_n^k)$$

$$(\sigma^2)_n^k = (1 - K_n^k) (\hat{\sigma}^2)_n^k$$

end for

Im Unterschied zu bestehenden dezentralen Kalman-Consensus-Filter-Realisierungen [36; 37] unterscheidet sich der vorgeschlagene Entwurf in zwei Punkten. Beim Kalman-Consensus-Filter von Olfati-Saber et al. [36] wird das deterministische Consensus-Protokoll benutzt, um N unabhängige Kalman-Filter zu synchronisieren, welche in jedem Zeitschritt N -mal unabhängig den Zustand des gleichen Ereignisses messen und

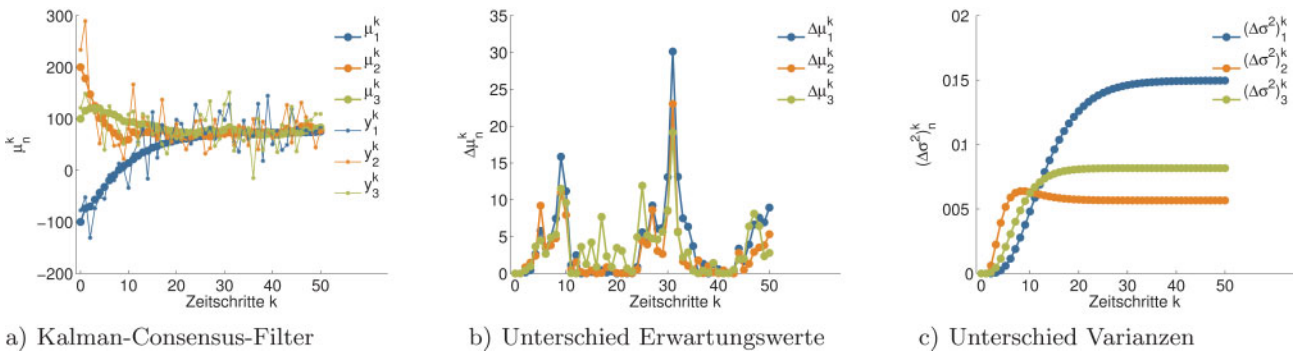


Bild 6 Vergleich eines zentralen Kalman-Consensus-Filters mit dem dezentralen Kalman-Consensus-Filter nach Protokoll 4 für den Kommunikationsgraph aus Bild 1.

schätzen. Die Tatsache, dass diese Zustände dem identischen Ereignis entsprechen wird im Prädiktionsschritt nicht berücksichtigt. Wir schätzen N unterschiedliche Ereignisse mit unterschiedlichen Zuständen, die sich synchronisieren. Die Abhängigkeiten aufgrund des Informationsaustausches, der zur Synchronisierung notwendig ist, wird bei uns im Prädiktionsschritt berücksichtigt. Das Kalman-Consensus-Filter von Haumann et al. [37] berücksichtigt ebenfalls diese Abhängigkeiten, allerdings nicht im Prädiktionsschritt, sondern im Korrekturschritt. Damit entsprechen die Messungen Linearkombinationen von Relativzuständen und es müssen Messungen approximativ prädiziert werden, um eine dezentrale Implementierung zu erreichen. Welcher Filter, wann besser geeignet ist, hängt stark von der Anwendung, der Übertragungsbandbreite und dem Verhältnis zwischen Sensorrauschen und Kommunikationsunsicherheit ab. Auf eine detaillierte Diskussion wird hier verzichtet.

Bild 6 zeigt ein Beispiel des Kalman-Consensus-Filters nach Protokoll 4 für eine Kommunikation zwischen den Agenten mit dem Kommunikationsgraph aus Bild 1. Die Varianz des Sensorrauschens beträgt $v_n^2 = 30$ für alle $n = 1, 2, 3$ Agenten. Ansonsten werden die gleichen Bedingungen, wie in Beispiel 5c vorausgesetzt: $\mu^0 = [-100, 100, 200]^T$, $\sigma^0 = [10, 1, 5]^T$ und $\rho = [0, 1, 2, 0, 5]^T$. Bild 6a zeigt den Verlauf der ungefilterten Messungen $y_n^{1:k}$ im Vergleich zu den geschätzten Zuständen $\mu_n^{1:k}$ für alle $n = 1, 2, 3$ Agenten. Man sieht, dass das dezentrale Filter seine Aufgabe erfüllt, obwohl die Verbundwahrscheinlichkeit durch eine vollständige Faktorisierung approximiert wird. Bild 6a und b zeigen den Unterschied zu einem zentralen Kalman-Consensus-Filter in Erwartungswert $\Delta\mu_n^k = |\mu_n^k - \tilde{\mu}_n^k|^2$ und Varianz $(\Delta\sigma^2)_n^k = |(\sigma^2)_n^k - (\tilde{\sigma}^2)_n^k|^2$, wobei $\tilde{\mu}_n^k$ und $(\tilde{\sigma}^2)_n^k$ den dezentral geschätzten Momenten entsprechen.

5 Zusammenfassung und Ausblick

Dieser Artikel zeigt, wie man die deterministische Consensus-Dynamik auf einen stochastischen Prozess erweitern kann. Es werden Bedingungen angegeben, die

erfüllt sein müssen, damit eine dezentrale Berechnung möglich ist. Es wird bewiesen, dass eine dezentrale Inferenz niemals eine exakte Inferenz sein kann. Außerdem wird der Zusammenhang zwischen Kommunikationsstruktur und Approximationsgrad der dezentralen Inferenz dargelegt. Es werden drei Möglichkeiten approximativer Inferenz zur Realisierung dezentraler Consensus-Protokolle angegeben, die für jegliche Art von WDF gelten. Für den Spezialfall gaußverteilter Kommunikationsunsicherheiten wird eine Möglichkeit eines dezentralen Gauß'schen Consensus-Protokolls entworfen und simuliert. Es wird gezeigt unter welchen Bedingungen sowohl Mittelwerte, als auch Varianzen beweisbar konvergieren. Daraus lässt sich direkt die Erweiterung zu einem dezentralen Kalman-Consensus-Filter angeben, der neben den Kommunikationsunsicherheiten auch Sensorrauschen berücksichtigt. Tabelle 2 fasst die wichtigsten Ergebnisse dieses Artikels nochmal kompakt im tabellarischen Überblick zusammen.

Das Fazit lautet: Die klassische Consensus-Regelung kann mittels Bayes'scher Inferenzverfahren konsistent auf die Berücksichtigung von Kommunikationsunsicherheit

Tabelle 2 Zusammenfassender Vergleich zwischen klassischem und Gauß'schem Consensus Protokoll.

Protokolle	klassischer Consensus	Gauß'scher Consensus
Dezentralität	alle x_n^0 lokal vorhanden	– alle μ_n^0 und $(\sigma^2)_n^0$ lokal vorhanden – $g(w)$ und $g(x^k)$ faktorisieren vollständig
Dynamik	$x^{k+1} = Px^k$	$\mu^{k+1} = P\mu^k$ $\sigma^{k+1} = Q\sigma^k + \rho$
Konvergenz	\mathcal{G} besitzt gerichteten Spannbaum	\mathcal{G} stark zusammenhängend
Endwerte	$x_n^{k \rightarrow \infty} = v^T x^0$	$\mu_n^{k \rightarrow \infty} = v^T \mu^0$ $\sigma^{k \rightarrow \infty} = (I - Q)^{-1} \rho$

ten und Sensorrauschen erweitert werden. Neben dem Consensus-Endwert kann jeder Agent nur durch lokalen Informationsaustausch mit wenigen Agenten im Netzwerk Unsicherheiten für seine individuelle Schätzung ermitteln, die den kompletten Informationsfluss im Netzwerk aller Agenten, alle Übertragungsunsicherheiten und alle Sensorunsicherheiten beinhalten.

Mit den vorliegenden Grundlagen können nun jede Menge weitere Details untersucht werden. Naheliegender sind Erweiterungen, die schon für deterministische Consensus-Protokolle untersucht worden sind. Dazu gehören zeitvariante und zeitasynchrone Consensus-Protokolle. Im stochastischen Fall sind damit zeitvariante Kommunikationstopologien, zeitvariante Übertragungsunsicherheiten und zeitvariantes Sensorrauschen zu untersuchen. Dabei könnte der Einfluss von zeitasynchroner Kommunikation über zeitvariante Übertragungsunsicherheiten modelliert werden, indem die Unsicherheiten der Kommunikation von Zeitverzögerungen abhängig gemacht werden. Des Weiteren könnten Consensus-Protokolle für andere als gaußverteilte WDFs entworfen werden. Beispielsweise für abgetastete Verteilungen, wie sie unter anderem beim *Unscented Kalman Filter* oder dem *Partikel-Filter* zum Einsatz kommen [38]. Bezüglich approximativer Inferenzverfahren, sind Erweiterungen des *Belief Propagation* auf das *Generalized Belief Propagation* denkbar. Beweistechnisch steht noch eine Erweiterung des Satzes 2 auf kontinuierliche Zustände aus. Schließlich ist die stochastische Erweiterung des klassischen Consensus-Protokolls auch für Erweiterungen des Consensus-Problems auf das N-Consensus-Problem [39] oder ereignisbasierte Kommunikationsansätze [40] anwendbar, welche die Unsicherheit der Kommunikation bei der Reduzierung des Kommunikationsaufwandes mit einbeziehen könnten.

Danksagung

Wir bedanken uns bei Moritz Schneider und Arne Wahrburg für die kritische Durchsicht der Beweise. Diese Forschung wurde durch die Deutsche Telekom Stiftung, die Studienstiftung des deutschen Volkes und die Deutsche Forschungsgemeinschaft im Rahmen des GRK 1362 gefördert.

Literatur

- [1] O. Klemptert „Roboter kommen schon bald in Schwärmen“, *VDI nachrichten*, 20: 13, 2012.
- [2] L. Bakule, and M. Papik „Decentralized Control and Communication“, *Annual Reviews in Control*, 36(1): 1–10, 2012.
- [3] J. Lunze „Synchronisierbarkeit autonomer Agenten durch vernetzte Regelungen“, *Automatisierungstechnik*, 59(9): 531–538, 2011.
- [4] K. D. Listmann „Synchronization of Networked Linear Systems – an LMI Approach“, *Fortschritts-Berichte VDI*, 8(1220): 1–2, 2013.
- [5] A. G. O. Mutambara, „Decentralized Estimation and Control for Multisensor Systems“, *CRC Press*, 1998.
- [6] D. J. Stilwell, and B. E. Bishop, „Platoons of Underwater Vehicles: Communication Feedback, and Decentralized Control“, *IEEE Control Systems*, 20(6): 45–52, 2001.
- [7] B. Widrow, „Analysis of Amplitude-Quantized Sampled-Data Systems“, *Electrical Engineering*, 80(60): 450, 1961.
- [8] S. Bohacek, „A Stochastic Model of TCP and Fair Video Transmission“, *IEEE INFOCOM*, 2003.
- [9] S. Savari, and E. Telatar, „The Behavior of Certain Stochastic Processes Arising in Window Protocols“, *IEEE GLOBECOM*, 1999.
- [10] M. Porfiri, and D. J. Stilwell, „Consensus Seeking Over Random Weighted Directed Graphs“, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(9): 1767–1773, 2007.
- [11] M. Bishop „Pattern Recognition and Machine Learning“, *Springer Verlag*, 2006.
- [12] J. Pearl, „Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems: Networks of Plausible Inference“, *Morgan Kaufmann*, 1988.
- [13] M. Brand, „Coupled Hidden Markov Models for Complex Action Recognition“, *Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 1997.
- [14] M. Jordan, „Graphical Models“, *Statistical Science: Special Issue on Bayesian Statistics*, 19(1): 140–155, 2004.
- [15] K. Murphy, „Dynamic Bayesian Networks: Representation, Inference and Learning“, *PhD Thesis, UC Berkeley, Computer Science Division*, 2002.
- [16] X. Boyen, and D. Koller, „Tractable Inference for Complex Stochastic Processes“, *Proceedings of 14th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*: 33–42, 1998.
- [17] K. Murphy, and Y. Weiss, „The Factored Frontier Algorithm for Approximate Inference in DBNs“, *Proceedings of 17th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*, 2001.
- [18] J. Winn, and C. M. Bishop, „Variational Message Passing“, *Journal of Machine Learning Research* 6: 661–694, 2005.
- [19] S. Funiak, C. Guestrin, M. Paskin, and R. Sukthankar, „Distributed Inference in Dynamical Systems“, *Advances in Neural Information Processing Systems*: 433–440, 2006.
- [20] Y. Weiss, and W. T. Freeman, „Correctness of Belief Propagation in Gaussian Graphical Models of Arbitrary Topology“, *Neural Computation*, 13(10): 2173–2200, 2001.
- [21] Y. S. Yedidia, W. T. Freeman, and Y. Weiss, „Constructing Free Energy Approximations and Generalized Belief Propagation Algorithms“, *Mitsubishi Electric Research Laboratories, Technical Report 2004–040*, 2004.
- [22] K. Petersen, J. Fehr, and H. Burkhardt, „Fast Generalized Belief Propagation for MAP Estimation on 2D and 3D Grid-like Markov Random Fields“, *DAGM 2008, LNCS 5096*: 41–50, 2008.
- [23] V. Willert, and J. Eggert, „A Stochastic Dynamical System for Optical Flow Estimation“, *IEEE Proceedings of the 12th International Conference on Computer Vision, 4th International Workshop on Dynamical Vision*: 711–718, 2009.
- [24] V. Willert, and J. Eggert, „Belief Propagation in Spatiotemporal Graph Topologies for the Analysis of Image Sequences“, *Proceedings of the International Conference on Computer Vision Theory and Applications*, 2: 117–124, 2010.
- [25] M. Bürger, G. Notarstefano, and F. Allgöwer „Distributed Robust Optimization via Cutting-Plane Consensus“, *Proceedings of the 51st IEEE Conference on Decision and Control*: 7457–7463, 2012.
- [26] M. H. DeGroot, „Reaching a consensus“, *Journal of the American Statistical Association*, 69(345): 118–121, 1974.
- [27] S. Boyd, P. Diaconis, and L. Xiao, „Fastest Mixing Markov Chain on a Graph“, *Society for Industrial and Applied Mathematics Review*, 46(4): 667–689, 2004.
- [28] W. Ren, R. W. Beard, and E. M. Atkins, „A Survey of Consensus Problems in Multi-Agent Coordination“, *Proceedings of the American Control Conference: 1859–1864*, 2005.
- [29] R. Olfati-Saber, R. Fax, and R. M. Murray, „Consensus and Cooperation in Networked Multi-Agent Systems“, *Proceedings of the IEEE*, 95(1): 215–233, 2007.

- [30] W. Ren, R. W. Beard, and E. M. Atkins, „Information Consensus in Multivehicle Cooperative Control“, *IEEE Control Systems Magazine*, 27(2): 71–82, 2007.
- [31] R. Olfati-Saber, R. Saber, and R. M. Murray, „Consensus Protocols for Networks of Dynamic Agents“, *Proceedings of the American Control Conference*: 951–956, 2003.
- [32] A. Jadbabaie, J. Lin, and A. S. Morse, „Coordination of Groups of Mobile Autonomous Agents Using Nearest Neighbor Rules“, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(6): 988–1001, 2003.
- [33] R. Olfati-Saber, E. Franco, E. Frazzoli, and J. S. Shamma, „Belief Consensus and Distributed Hypothesis Testing in Sensor Networks“, *Workshop on Network Embedded Sensing and Control*, 2005.
- [34] C. C. Moallemi, „Consensus Propagation“, *IEEE Transactions on Information Theory*, 52(11): 4753–4766, 2006.
- [35] S. Boyd, A. Ghosh, B. Prabhakar, and D. Shah, „Gossip Algorithms: Design, Analysis and Applications“, *Proceedings IEEE INFOCOM*, 3: 1653–1664, 2005.
- [36] R. Olfati-Saber, „Kalman-Consensus Filter: Optimality, stability, and performance“, *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control*: 7036–7042, 2009.
- [37] D. Haumann, V. Willert, and A. Wahrburg, „Kalman Filtering in Mobile Consensus Networks“, *Proceedings of the IEEE Multi-Conference on Systems and Control*: 944–950, 2012.
- [38] B. Ristic, S. Arumlampalam, N. Gordon „Beyond the Kalman Filter“, *Artech House Radar Library*, 2004.
- [39] S. Gering, V. Willert „Solving the N-Consensus Problem: Combining Clustering and Synchronization“, *Proceedings of the IFAC Workshop on Estimation and Control of Networked Systems*, 3(1): 216–221, 2012.
- [40] D. Ozan, J. Lunze „Event-Based Synchronization of Multi-Agent Systems“, *Proceedings of the 4th Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems*, 2012.



Dr.-Ing. Volker Willert ist Gruppenleiter der Forschergruppe *Maschinelles Sehen und Mobile Robotik* des Fachgebietes Regelungstheorie und Robotik unter der Leitung von Prof. Dr.-Ing. J. Adamy am Institut für Automatisierungstechnik und Mechatronik im Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik der Technischen Universität Darmstadt. Hauptarbeitsgebiete: Probabilistische Inferenzmethoden in der Regelungstechnik, Bildverarbeitung für mobile Systeme, mobile Multi-Agenten-Systeme.

Adresse: Technische Universität Darmstadt, Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik, Fachgebiet Regelungstheorie und Robotik, D-64283 Darmstadt,
E-Mail: vwillert@rtr.tu-darmstadt.de



Dipl.-Ing. Stefan Gering ist Doktorand am Fachgebiet Regelungstheorie und Robotik am Institut für Automatisierungstechnik und Mechatronik im Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik der Technischen Universität Darmstadt. Hauptarbeitsgebiete: Rekurrente Fuzzy-Systeme in der Regelungstechnik, mobile Multi-Agenten-Systeme.

Adresse: Technische Universität Darmstadt, Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik, Fachgebiet Regelungstheorie und Robotik, D-64283 Darmstadt,
E-Mail: sgering@rtr.tu-darmstadt.de



Dipl.-Inf. Dominik Haumann ist Doktorand am Fachgebiet Regelungstheorie und Robotik am Institut für Automatisierungstechnik und Mechatronik im Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik der Technischen Universität Darmstadt. Hauptarbeitsgebiete: Verteilte Zustandsschätzung, Exploration, mobile Multi-Agenten-Systeme.

Adresse: Technische Universität Darmstadt, Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik, Fachgebiet Regelungstheorie und Robotik, D-64283 Darmstadt,
E-Mail: dhaumann@rtr.tu-darmstadt.de

Manuskripteingang: 1. Mai 2013

Verfügbar unter
lediglich die vom Gesetz vorgesehenen Nutzungsrechte gemäß UrhG