Methoden

Saman Khodaverdian*

Vollständige und teilweise Ein-/Ausgangsentkopplung: Ein Transformationsansatz

Full and partial input-output decoupling: a transformation approach

DOI 10.1515/auto-2016-0032
Eingang 18. Februar 2016; angenommen 31. Oktober 2016

Zusammenfassung: Der vorliegende Beitrag befasst sich mit der Ein-/Ausgangsentkopplung quadratischer und überaktuierter, linearer Systeme mittels statischer Zustandsrückführung. Hierfür wird eine spezielle Transformation genutzt, mit deren Hilfe sich die Koppeleffekte des Systems einfach veranschaulichen lassen. Neben einem unkomplizierten Zugang zur vollständigen und teilweisen Entkopplung kann hierdurch ein direkter Zusammenhang zwischen den Reglerparametern und den resultierenden Übertragungsfunktionen hergestellt werden. Im Falle überaktuierte Systeme, d.h. Systeme mit mehr Ein- als Ausgangsgrößen, ermöglicht die verwendete Transformation eine geschickte Veranschaulichung der zusätzlichen Freiheitsgrade und dadurch eine gezielte Manipulation der Systemdynamik über die zusätzlichen Aktoren.

Schlüsselwörter: Entkopplungsregelung, überaktuierte Systeme, vollständige Entkopplung, teilweise Entkopplung, statische Zustandsrückführung.

Abstract: This paper deals with the input-output decoupling of square and overactuated, linear systems by static state feedback. A transformation is proposed which visualizes the coupling effects of the system. This enables a simple access to full and partial decoupling and highlights the connection between the controller parameters and the generated transfer functions. In case of overactuated systems, i.e. systems having more inputs than outputs, the transformation leads to an appropriate illustration of the degrees of freedom such that the additional actuators can be used to shape the dynamics in a specific way.

Keywords: Decoupling control, overactuated systems, full decoupling, partial decoupling, static state feedback.

***Korrespondenzautor: Saman Khodaverdian,** Technische Universität Darmstadt, Institut für Automatisierungstechnik und Mechatronik, Fachgebiet Regelungsmethoden und Robotik, Landgraf-Georg-Str. 4, D-64283 Darmstadt,
E-Mail: saman.khodaverdian@rmr.tu-darmstadt.de

1 Einleitung

Seit über 50 Jahren stellt die Entkopplung linearer zeitinvarianter Systeme ein intensiv studiertes und zum Teil noch ungelöstes Problem in der Regelungstechnik dar. Das Regelungsziel der *Ein-/Ausgangsentkopplung* meint hierbei den Entwurf einer Zustandsrückführung, so dass im geschlossenen Regelkreis jede Ausgangsgröße durch genau eine ihr zugeordnete Eingangsgröße angesteuert wird. Eine allgemeine Formalisierung des Entkopplungsproblems wurde 1964 von B. S. Morgan unternommen [22]. Seitdem wurden in der Literatur zahlreiche Beiträge dokumentiert, wobei die meisten Lösungsansätze lediglich für bestimmte Systemklassen anwendbar sind oder nur eine Teillösung präsentieren. Die Artikel [25] und [26] bieten eine gute Übersicht zur Thematik.

Erste notwendige und hinreichende Bedingungen für die Ein-/Ausgangsentkopplung *quadratischer Systeme* (Systeme mit gleicher Anzahl von Ein- und Ausgängen) wurden 1967 von P. L. Falb und W. A. Wolovich präsentiert [7]. Demnach sind quadratische Systeme genau dann entkoppelbar, wenn die sogenannte *Entkopplungsmatrix* $\boldsymbol{D}^*$ vollen Zeilenrang aufweist. Für Systeme mit mehr Ein- als Ausgangsgrößen, auch *überaktuierte Systeme* genannt, ist diese Bedingung jedoch nur hinreichend [4]. Bislang existieren keine allgemeingültigen notwendigen und hinreichenden Kriterien für die Entkoppelbarkeit überaktuierter Systeme [11].

Eine Schwierigkeit bei der Entkopplung besteht darin, die Stabilität des Systems sicherzustellen. Es lässt sich zeigen, dass die Entkopplung eine Kompensation der *invarianten Nullstellen* bedingt [7, 17, 29]. Dementsprechend lassen sich nicht-minimalphasige Systeme (Systeme, die invariante Nullstellen mit nicht-negativem Realteil aufweisen) durch eine statische Zustandsrückführung im Allgemeinen nicht stabil entkoppeln. In diesem Fall kann die vollständige und stabile Entkopplung nur noch durch eine dynamische Rückführung realisiert werden [2, 6, 16, 21, 23]. Dynamische Regler können auch eingesetzt werden, um nicht-entkoppelbare Systeme vollständig zu entkoppeln [16].

Eine Alternative zum Einsatz dynamischer Regler besteht darin vom Ziel der vollständigen Entkopplung abzuweichen und stattdessen eine *teilweise Entkopplung* anzustreben. Im Gegensatz zur vollständigen Entkopplung stellt die teilweise Entkopplung eine weniger restriktive Anforderung dar, die im Allgemeinen durch eine statische Rückführung und unter Gewährleistung der Stabilität des Regelkreises erfüllbar ist. In der Literatur spricht man auch von der Dreiecks- [1, 5, 24] oder Blockentkopplung [14, 15, 30], wobei gemeint ist, dass die Übertragungsmatrix des geregelten Systems eine entsprechende Struktur aufweist. Als Spezialfall hiervon wurde in [17, 18] ein parametrisches Verfahren präsentiert, bei dem Kopplungen in lediglich einer Zeile der Übertragungsmatrix entstehen.

Der vorliegenden Beitrag stellt einen Transformationsansatz zur vollständigen und teilweisen Entkopplung für quadratische und überaktuierte Systeme vor. Ziel dieser Arbeit ist es nicht neue Kriterien für die Entkopplung herzuleiten, sondern vielmehr eine einfache Analyse- und Entwurfsmethodik vorzustellen. Transformationsansätze zur Entkopplung werden auch in [9] und [27] präsentiert, wobei in [9] lediglich vollständig entkoppelbare, quadratische Systeme thematisiert werden. In [27] wird eine Dreiecksentkopplung für nicht-entkoppelbare Systeme betrachtet, allerdings erfordert die hierfür notwendige Koordinatentransformation einen Algorithmus bestehend aus mehreren Transformationsschritten und Fallunterscheidungen, was letztlich zu einem aufwendigen Entwurf führt.[1] Außerdem werden überaktuierte Systeme durch eine Vorfilterung in quadratische umgewandelt („squaring down"), wodurch die zusätzlichen Freiheitsgrade unberücksichtigt bleiben.

Im Gegensatz hierzu stellt die vorliegende Arbeit eine einfache Zustandsraumtransformation vor, die das System in eine für die Entkopplung geeignete Form – die sogenannte *ausgangsdifferenzierende Form* – überführt. Basierend hierauf lassen sich die Koppeleffekte des Systems einfach interpretieren. Neben der vollständigen Entkopplung wird gezeigt, wie die teilweise Entkopplung (mit möglichst wenigen Koppelelementen) im Falle nicht- und nicht-stabil entkoppelbarer Systeme erreicht wird. Anders als beim parametrischen Ansatz [17, 18], ist der vorliegende Entwurf unmittelbar an den Systemmatrizen der Strecke angelehnt. Dies erlaubt einen systemtheoretischen Zugang und bietet einen direkten Zusammenhang zwischen den Parametern des Reglers und den einzelnen Übertragungsfunktionen der Ein-/Ausgangskanäle des geregelten Systems. Dadurch lassen sich Entwurfsfreiheitsgrade anschaulich interpretieren und die Übertragungsfunktionen der einzelnen Kanäle in allgemeinerer Form darstellen.

Des Weiteren werden zusätzliche Freiheitsgrade durch eine Überaktuierung berücksichtigt. Solche Systeme sind meist in sicherheitskritischen Anwendungen, wie in der Luft- und Raumfahrt, anzutreffen. Eine Möglichkeit zur Nutzung dieser Freiheitsgrade besteht darin, die für die Entkopplung erforderliche Stellenergie zu minimieren [13, 29]. Hierbei werden die Übertragungsfunktionen des entkoppelten Systems, wie im quadratischen Fall, als reine Verzögerungsglieder angesetzt. In diesem Beitrag wird jedoch gezeigt, dass allgemeinere Übertragungsfunktionen realisierbar sind, bei denen neben dem Nennerpolynom auch ein nicht-konstantes Zählerpolynom vorgebbar ist. Ein mögliches Anwendungsfeld hierfür ist das Synchronisierungsproblem von Multi-Agenten-Systemen, bei denen mit Hilfe der Entkopplung die Übertragungsfunktionen unterschiedlicher Agenten gezielt manipuliert werden müssen [12].

Der Rest des Beitrags gliedert sich wie folgt: In Abschnitt 2 werden einige Grundlagen eingeführt. Abschnitt 3 stellt die Transformation und den Reglerentwurf für eine vollständige Entkopplung vor. In Abschnitt 4 wird die teilweise Entkopplung sowohl für nicht-stabil entkoppelbare als auch nicht-entkoppelbare Systeme vorgestellt. Die Effizienz des Verfahrens wird in Abschnitt 5 an zwei Beispielen demonstriert, gefolgt von einer Zusammenfassung in Abschnitt 6.

2 Grundlagen

2.1 Notation

Die Einheitsmatrix der Dimension n wird als $\boldsymbol{I}_n$ geschrieben und die Nullmatrix als $\mathbf{0}$, wobei ihre Dimensionierung aus dem Kontext hervorgeht. $\boldsymbol{e}_i$ bezeichnet den

1 Zur Vereinfachung des Entwurfs wurde ein Protokoll für das Computeralgebra-System Maple geschrieben, das für die Koordinatentransformation genutzt werden kann [10].

Einheitsvektor passender Länge, bei dem der i-te Eintrag 1 ist und alle anderen Einträge 0 sind. Die Transponierte einer Matrix $\boldsymbol{M}$ wird durch $\boldsymbol{M}^\top$ dargestellt. Eine Blockdiagonalmatrix mit den Diagonalelementen $\boldsymbol{M}_1, \dots, \boldsymbol{M}_p$ wird abkürzend als $\operatorname{diag}\left(\boldsymbol{M}_1, \dots, \boldsymbol{M}_p\right)$ geschrieben. $\operatorname{rang}(\boldsymbol{M})$ und $\det(\boldsymbol{M})$ bezeichnen den Rang und die Determinante von $\boldsymbol{M}$. Seien $\boldsymbol{X}$ und $\boldsymbol{Y}$ quadratische Matrizen und $\det(\boldsymbol{Y}) \neq 0$, dann gilt [31]

$$\det\begin{bmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{U} \\ \boldsymbol{V} & \boldsymbol{Y} \end{bmatrix} = \det(\boldsymbol{Y}) \cdot \det(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{U}\boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{V}). \tag{1}$$

Des Weiteren ist $\operatorname{adj}(\boldsymbol{Y})$ die zu $\boldsymbol{Y}$ gehörige adjungierte Matrix, für die $\operatorname{adj}(\boldsymbol{Y}) \cdot \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y} \cdot \operatorname{adj}(\boldsymbol{Y}) = \det(\boldsymbol{Y})$ gilt [31]. Bezeichne $\boldsymbol{Y}_{-ij}$ die Matrix die sich durch streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte von $\boldsymbol{Y}$ ergibt, so berechnet sich das Element in der j-ten Zeile und i-ten Spalte von $\operatorname{adj}(\boldsymbol{Y})$ zu $(-1)^{i+j} \cdot \det(\boldsymbol{Y}_{-ij})$.

Für ein System $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$ bezeichnet δ_k den relativen Grad bezüglich des k-ten Ausgangs y_k. Dieser beschreibt wie oft y_k nach der Zeit abgeleitet werden muss, bis der Eingangsvektor $\boldsymbol{u}$ auftaucht [8]. Es gilt $\delta_k = \min_{\nu}\{\nu \geq 1 : \boldsymbol{c}_k^\top \boldsymbol{A}^{\nu-1}\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{0}\}$, wobei $\boldsymbol{c}_k^\top$ die k-te Zeile von $\boldsymbol{C}$ ist. Der relative Grad des gesamten Systems wird durch $\delta = \sum_{k=1}^{p} \delta_k$ beschrieben.

2.2 Problemstellung

Gegeben sei das vollständig steuer- und beobachtbare, lineare zeitinvariante System

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}, \tag{2a}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \tag{2b}$$

mit Zustands-, Eingangs- und Ausgangsvektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ und $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^p$. Die System-, Eingangs- und Ausgangsmatrizen $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ werden als konstant und bekannt vorausgesetzt und es gelte $\operatorname{rang}(\boldsymbol{B}) = m \geq p = \operatorname{rang}(\boldsymbol{C})$. Das Ziel besteht darin, eine statische Zustandsrückführung

$$\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{F}\boldsymbol{w} \tag{3}$$

mit Reglermatrix $\boldsymbol{K} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und Vorfiltermatrix $\boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^{m\times p}$ zu entwerfen, so dass der geschlossene Regelkreis

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}\boldsymbol{w}, \tag{4a}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \tag{4b}$$

stabil und vollständig bzw. teilweise ein-/ausgangsentkoppelt ist. Das bedeutet, die Übertragungsmatrix $\boldsymbol{G}_{yw}(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}$ soll im Falle einer vollständigen Entkopplung die Struktur

$$\boldsymbol{G}_{yw}(s) = \operatorname{diag}\left(g_{11}(s), \dots, g_{pp}(s)\right) \tag{5}$$

aufweisen bzw. im Falle einer teilweisen Entkopplung

$$\boldsymbol{G}_{yw}(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ g_{l1}(s) & \cdots & g_{ll}(s) & \cdots & g_{lp}(s) \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & g_{pp}(s) \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Es ist allgemein bekannt, dass eine vollständige Entkopplung im quadratischen Fall ($m = p$) genau dann möglich ist, wenn die Entkopplungsmatrix

$$\boldsymbol{D}^\star = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1^\top \boldsymbol{A}^{\delta_1 - 1}\boldsymbol{B} \\ \vdots \\ \boldsymbol{c}_p^\top \boldsymbol{A}^{\delta_p - 1}\boldsymbol{B} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p\times m} \tag{7}$$

vollen Zeilenrang aufweist [7].

3 Vollständige Entkopplung

Im Folgenden wird die betrachtete Strecke (2) durch eine spezielle Zustandstransformation in eine für die Entkopplung vorteilhafte Darstellung überführt. Basierend hierauf wird dann der Entwurf des Reglers für eine vollständige Ein-/Ausgangsentkopplung diskutiert. Hierbei wird zunächst von einem quadratischen System ausgegangen ($m = p$), mit einer anschließenden Diskussion zum überaktuierten Fall ($m > p$).

In Abschnitt 3 werden nur vollständig entkoppelbare Systeme mit $\operatorname{rang}\left(\boldsymbol{D}^\star\right) = p$ betrachtet.

3.1 Transformation in ausgangsdifferenzierende Form

Zunächst wird die Matrix

$$\boldsymbol{T}_\delta = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1^\top \\ \vdots \\ \boldsymbol{c}_1^\top \boldsymbol{A}^{\delta_1 - 1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{c}_p^\top \\ \vdots \\ \boldsymbol{c}_p^\top \boldsymbol{A}^{\delta_p - 1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\delta\times n} \tag{8}$$

definiert, wobei $\operatorname{rang}\left(\boldsymbol{T}_\delta\right) = \delta$ gilt (vgl. z. B. [7]).

Lemma 1. *Angenommen $m = p$ und $\operatorname{rang}(\boldsymbol{D}^\star) = p$, dann existieren $n-\delta$ Vektoren $\boldsymbol{\eta}_{\delta+1}^\top, \dots, \boldsymbol{\eta}_n^\top$, so dass $\boldsymbol{\eta}_{\delta+1}^\top \boldsymbol{B} = \dots = \boldsymbol{\eta}_n^\top \boldsymbol{B} = \mathbf{0}$ und*

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{T}_\delta \\ \boldsymbol{\eta}_{\delta+1}^\top \\ \vdots \\ \boldsymbol{\eta}_n^\top \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \tag{9}$$

eine quadratisch reguläre Matrix ist.

Beweis. Wegen $\operatorname{rang}(\boldsymbol{B}) = m = p$ existieren zwei Matrizen $\boldsymbol{B}_{im} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ und $\boldsymbol{B}_{ker} \in \mathbb{R}^{(n-p)\times n}$ mit linear unabhängigen Zeilenvektoren, so dass $\operatorname{rang}(\boldsymbol{B}_{im}\boldsymbol{B}) = p$ und $\boldsymbol{B}_{ker}\boldsymbol{B} = \mathbf{0}$ gilt. Demnach stellt $\boldsymbol{B}_{im}$ eine Basis des Zeilenraums und $\boldsymbol{B}_{ker}$ eine Basis des Linksnullraums von $\boldsymbol{B}$ dar. Aufgrund von $\operatorname{rang}(\boldsymbol{D}^\star) = p$ lautet eine mögliche Basis des Zeilenraums

$$\boldsymbol{B}_{im} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1^\top \boldsymbol{A}^{\delta_1-1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{c}_p^\top \boldsymbol{A}^{\delta_p-1} \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Des Weiteren folgt aus der Definition der relativen Grade, dass die $\delta - p$ linear unabhängigen Vektoren $\boldsymbol{c}_1^\top, \dots, \boldsymbol{c}_1^\top \boldsymbol{A}^{\delta_1-2}, \dots, \boldsymbol{c}_p^\top, \dots, \boldsymbol{c}_p^\top \boldsymbol{A}^{\delta_p-2}$ im Linksnullraum von $\boldsymbol{B}$ liegen. Entsprechend müssen noch $n-\delta$ linear unabhängige Vektoren $\boldsymbol{\eta}_{\delta+1}^\top, \dots, \boldsymbol{\eta}_n^\top$ existieren, so dass eine Basis des Linksnullraums von $\boldsymbol{B}$ durch

$$\boldsymbol{B}_{ker} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1^\top \\ \vdots \\ \boldsymbol{c}_1^\top \boldsymbol{A}^{\delta_1-2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{c}_p^\top \\ \vdots \\ \boldsymbol{c}_p^\top \boldsymbol{A}^{\delta_p-2} \\ \boldsymbol{\eta}_{\delta+1}^\top \\ \vdots \\ \boldsymbol{\eta}_n^\top \end{bmatrix} \tag{11}$$

gegeben ist. Fasst man $\boldsymbol{B}_{im}$ und $\boldsymbol{B}_{ker}$ zur quadratisch regulären Matrix $\overline{\boldsymbol{T}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_{im}^\top & \boldsymbol{B}_{ker}^\top \end{bmatrix}^\top$ zusammen, ergibt sich $\boldsymbol{T}$ durch eine Umsortierung der Zeilen von $\overline{\boldsymbol{T}}$ und ist dementsprechend auch quadratisch regulär. □

Unter Zuhilfenahme von (9) kann nun die Transformation $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{T}\boldsymbol{x}$ angewendet werden, wodurch sich das transformierte System

$$\dot{\boldsymbol{x}}' = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{B}'\boldsymbol{u}, \tag{12a}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}'\boldsymbol{x}', \tag{12b}$$

mit $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}^{-1}$, $\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{T}\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{C}\boldsymbol{T}^{-1}$, ergibt. Es gilt $\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_\delta^\top & \boldsymbol{\eta}_{\delta+1}^\top \boldsymbol{x} & \cdots & \boldsymbol{\eta}_n^\top \boldsymbol{x} \end{bmatrix}^\top$ mit

$$\boldsymbol{y}_\delta^\top = \begin{bmatrix} y_1 & \dot{y}_1 & \cdots & y_1^{(\delta_1-1)} & \cdots & y_p & \cdots & y_p^{(\delta_p-1)} \end{bmatrix} \tag{13}$$

und $y_k^{(i)} = \mathrm{d}^i y_k / \mathrm{d}t^i$. Der neue Zustand weist also eine „ausgangsdifferenzierende" Form auf. Dementsprechend erhält man $\boldsymbol{C}' = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_\delta & \mathbf{0} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{C}_\delta = \operatorname{diag}\left(\boldsymbol{c}_{\delta,11}^\top, \dots, \boldsymbol{c}_{\delta,pp}^\top\right)$ und $\boldsymbol{c}_{\delta,kk}^\top = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times\delta_k}$. Führt man die Substitution $\boldsymbol{d}_k^{\star\top} = \boldsymbol{c}_k^\top \boldsymbol{A}^{\delta_k-1}\boldsymbol{B}$ ein, lautet die transformierte Eingangsmatrix

$$\boldsymbol{B}' = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \cdots & \boldsymbol{d}_1^\star & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \boldsymbol{d}_p^\star & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix}^\top. \tag{14}$$

Für die transformierte Systemmatrix $\boldsymbol{A}'$ ergibt sich – wiederum aus $\boldsymbol{x}'$ bzw. $\boldsymbol{y}_\delta$ ersichtlich –

$$\boldsymbol{A}' = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_\delta & \boldsymbol{A}_\gamma \\ \boldsymbol{A}_\varphi & \boldsymbol{A}_\eta \end{bmatrix}, \tag{15a}$$

wobei die Teilmatrizen $\boldsymbol{A}_\delta \in \mathbb{R}^{\delta\times\delta}$, $\boldsymbol{A}_\gamma \in \mathbb{R}^{\delta\times(n-\delta)}$, $\boldsymbol{A}_\varphi \in \mathbb{R}^{(n-\delta)\times\delta}$ und $\boldsymbol{A}_\eta \in \mathbb{R}^{(n-\delta)\times(n-\delta)}$ die folgenden Strukturen aufweisen:

$$\boldsymbol{A}_\delta = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{\delta,11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{\delta,1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{\delta,p1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{\delta,pp} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_\gamma = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{\gamma,1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_{\gamma,p} \end{bmatrix}, \tag{15b}$$

$$\boldsymbol{A}_\varphi = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{\varphi 1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{\varphi,p} \end{bmatrix}, \tag{15c}$$

mit

$$\boldsymbol{A}_{\delta,kk} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \star & \star & \cdots & \star \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}_{\delta,\underset{l\neq k}{lk}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \star \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}_{\gamma,k} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \star \end{bmatrix}. \tag{15d}$$

Die Dimensionen der Matrizen in (15d) lauten $\boldsymbol{A}_{\delta,kk} \in \mathbb{R}^{\delta_k\times\delta_k}$, $\boldsymbol{A}_{\delta,\underset{l\neq k}{lk}} \in \mathbb{R}^{\delta_l\times\delta_k}$, $\boldsymbol{A}_{\gamma,k} \in \mathbb{R}^{\delta_k\times(n-\delta)}$ und das Symbol $\star$ bezeichnet Elemente die nicht notwendigerweise 0 sind.

3.2 Reglerentwurf für vollständige Entkopplung

Diejenigen Zeilen von $\boldsymbol{B}'$ die ungleich des Nullvektors sind, beschreiben gerade die Zeilen der Entkopplungsmatrix $\boldsymbol{D}^\star$. Somit gilt $\boldsymbol{B}'(\boldsymbol{D}^\star)^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_\delta^\top & \mathbf{0} \end{bmatrix}^\top$, mit $\boldsymbol{B}_\delta = \operatorname{diag}\left(\boldsymbol{b}_{\delta,11}, \dots, \boldsymbol{b}_{\delta,pp}\right)$ und $\boldsymbol{b}_{\delta,kk} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top \in$

$\mathbb{R}^{\delta_k \times 1}$. Aus diesem Grund können die Elemente in der jeweils letzten Zeile der Matrizen in (15d) mit Hilfe des Regelgesetzes $\boldsymbol{u} = -(\boldsymbol{D}^\star)^{-1}\widetilde{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{F}'\boldsymbol{w}$, und durch geeignete Wahl von $\widetilde{\boldsymbol{K}}$, beliebig festlegt werden. Wird das Vorfilter dementsprechend zu $\boldsymbol{F}' = (\boldsymbol{D}^\star)^{-1}\widetilde{\boldsymbol{F}}$ angesetzt, folgt für den geschlossenen Regelkreis

$$\boldsymbol{A}'_{cl} = \boldsymbol{A}' - \boldsymbol{B}'(\boldsymbol{D}^\star)^{-1}\widetilde{\boldsymbol{K}} = \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{A}}_\delta & \widetilde{\boldsymbol{A}}_\gamma \\ \boldsymbol{A}_\varphi & \boldsymbol{A}_\eta \end{bmatrix}, \tag{16a}$$

$$\boldsymbol{B}'_{cl} = \boldsymbol{B}'(\boldsymbol{D}^\star)^{-1}\widetilde{\boldsymbol{F}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_\delta \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{F}}. \tag{16b}$$

Es sollte beachtet werden, dass die Matrizen $\boldsymbol{A}_\varphi$ und $\boldsymbol{A}_\eta$ nicht verändert werden können. Allerdings ist man frei in der Wahl der Elemente der letzten Zeile der Matrizen $\widetilde{\boldsymbol{A}}_\delta$ und $\widetilde{\boldsymbol{A}}_\gamma$. Demnach ist es möglich $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ so zu bestimmen, dass $\widetilde{\boldsymbol{A}}_{\delta,\substack{lk \\ l\neq k}} = \boldsymbol{0}$ und $\widetilde{\boldsymbol{A}}_{\gamma,k} = \boldsymbol{0}$ für alle $k, l \in \{1, \dots, p\}$ gilt. In diesem Fall erhält man

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}_\delta = \operatorname{diag}\left(\widetilde{\boldsymbol{A}}_{\delta,11}, \dots, \widetilde{\boldsymbol{A}}_{\delta,pp}\right) \text{ und } \widetilde{\boldsymbol{A}}_\gamma = \boldsymbol{0}. \tag{17}$$

Wird zusätzlich $\widetilde{\boldsymbol{F}} = \operatorname{diag}\left(b_{11}, \dots, b_{pp}\right)$ gewählt, ergibt sich der vollständig entkoppelte Regelkreis

$$\boldsymbol{A}'_{cl} = \left[\begin{array}{ccc|c} \widetilde{\boldsymbol{A}}_{\delta,11} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \cdots & \widetilde{\boldsymbol{A}}_{\delta,pp} & \boldsymbol{0} \\ \hline \boldsymbol{A}_{\varphi,1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{\varphi,p} & \boldsymbol{A}_\eta \end{array}\right],$$

$$\boldsymbol{B}'_{cl} = \left[\begin{array}{ccc} \widetilde{\boldsymbol{b}}_{\delta,11} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \cdots & \widetilde{\boldsymbol{b}}_{\delta,pp} \\ \hline \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \end{array}\right],$$

$$\boldsymbol{C}' = \left[\begin{array}{ccc|c} \boldsymbol{c}^\top_{\delta,11} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{c}^\top_{\delta,pp} & \boldsymbol{0} \end{array}\right]$$

mit $\widetilde{\boldsymbol{b}}_{\delta,kk} = b_{kk} \cdot \boldsymbol{b}_{\delta,kk}$. Die Dynamik des k-ten Teilsystems wird hierbei durch $(\widetilde{\boldsymbol{A}}_{\delta,kk}, \widetilde{\boldsymbol{b}}_{\delta,kk}, \boldsymbol{c}^\top_{\delta,kk})$ festgelegt. Die zugehörige Übertragungsfunktion lautet

$$g_{kk}(s) = \frac{b_{kk}}{a_{kk,0} + a_{kk,1} \cdot s + \ldots + s^{\delta_k}}, \tag{18}$$

was sich aufgrund der vorliegenden Steuerungsnormalform des Paares $(\widetilde{\boldsymbol{A}}_{\delta,kk}, \boldsymbol{b}_{\delta,kk})$ leicht nachvollziehen lässt. Die Koeffizienten $a_{kk,l}$ im Nennerpolynom von $g_{kk}(s)$ sind die frei wählbaren Elemente der letzten Zeile von $\widetilde{\boldsymbol{A}}_{\delta,kk}$. Hierüber lässt sich ein beliebiges Nennerpolynom der Ordnung δ_k vorgeben. Über b_{kk} kann außerdem noch der konstante Zähler der Übertragungsfunktion festgelegt werden, bspw. für stationäre Genauigkeit zu $b_{kk} = a_{kk,0}$. Zusammenfassend erhält man:

Satz 1. *Gegeben sei das System* (2) *mit* $m = p$ *und* $\operatorname{rang}\left(\boldsymbol{D}^\star\right) = p$. *Dann liefern die folgenden Schritte eine vollständige Ein-/Ausgangsentkopplung:*

1. *Überführe das System mit Hilfe der Matrix* (9) *und der Transformation* $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{T}\boldsymbol{x}$ *in die Form* (12)–(15).
2. *Setze für das transformierte System das Regelgesetz* $\boldsymbol{u} = -(\boldsymbol{D}^\star)^{-1}\widetilde{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{x}' + (\boldsymbol{D}^\star)^{-1}\widetilde{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{w}$ *an.*
3. *Bestimme* $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ *so, dass* (17) *gilt.*
4. *Setze* $\widetilde{\boldsymbol{F}} = \operatorname{diag}\left(b_{11}, \dots, b_{pp}\right)$ *an.*

Die Diagonalelemente der Übertragungsmatrix ergeben sich dann zu (18), *wobei die Koeffizienten des Nennerpolynoms durch die Elemente der letzten Zeile von* $\widetilde{\boldsymbol{A}}_{\delta,kk}$ *beliebig festgelegt werden können.*

Es sei angemerkt, dass für $\widetilde{\boldsymbol{A}}_\gamma = \boldsymbol{0}$ die durch $\boldsymbol{A}_\eta$ bedingten Eigenbewegungen unbeobachtbar gemacht werden, weshalb man hier auch von der internen Dynamik des Systems spricht. Außerdem lässt sich überprüfen, dass die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}_\eta$ gerade die invarianten Nullstellen des Systems sind. Damit erhält man das bekannte Resultat, dass eine vollständige Entkopplung mit einer Kompensation der invarianten Nullstellen einhergeht [7, 17] und deshalb im Falle nicht-minimalphasiger Systeme zu einem instabilen Regelkreis führt.

3.3 Nicht-verkoppelnde Nullstellen

Eine Ausnahme bilden die sogenannten *non-interconnecting zeros* oder *nicht-verkoppelnden Nullstellen* [15]. Die Kompensation dieser Nullstellen ist nicht notwendig und eine vollständige Entkopplung lässt sich auch dann noch realisieren, wenn sie unkompensiert bleiben.

Das Vorhandensein einer nicht-verkoppelnden Nullstelle lässt sich anhand der transformierten Systemmatrix (15) unmittelbar erkennen. Zur Verdeutlichung wird zunächst $n - \delta = 1$ angenommen, d. h., das System weist genau eine invariante Nullstelle $\boldsymbol{A}_\eta = \eta$ auf, und es wird nochmal die geregelte Systemmatrix $\boldsymbol{A}'_{cl}$ betrachtet.

Nach Satz 1 muss für die Entkopplung $\widetilde{\boldsymbol{A}}_\gamma = \boldsymbol{0}$ gelten. Auf diese Weise werden die in der Systemmatrix vorhandenen, internen Kopplungen eliminiert. Für $\widetilde{\boldsymbol{A}}_{\gamma,l} \neq \boldsymbol{0}$ ergibt sich nämlich eine indirekte Kopplung über $\boldsymbol{A}_{\varphi,k} \to \boldsymbol{A}_\eta \to \widetilde{\boldsymbol{A}}_{\gamma,l}, k \neq l$. Gilt jedoch $\boldsymbol{A}_{\varphi,l} \neq \boldsymbol{0}$ für genau ein l, während gleichzeitig $\boldsymbol{A}_{\varphi,k} = \boldsymbol{0}, \forall k \neq l$, dann handelt es sich bei $\boldsymbol{A}_\eta = \eta$ um eine nicht-verkoppelnde Nullstelle. In diesem

Fall ist es nicht notwendig $\widetilde{\boldsymbol{A}}_{\gamma,l} = \mathbf{0}$ zu setzen. Es muss lediglich $\widetilde{\boldsymbol{A}}_{\gamma,k} = \mathbf{0}, \forall k \neq l$, gelten. Dies folgt aus der Tatsache, dass ausschließlich das l-te Teilsystem über $\boldsymbol{A}_{\varphi,l}$ einen Einfluss auf die „η-Dynamik" hat und somit für $\widetilde{\boldsymbol{A}}_{\gamma,l} \neq \mathbf{0}$ keine Kopplungen entstehen. Ist jedoch $\boldsymbol{A}_{\varphi,k} \neq \mathbf{0}$ für mehrere k, dann muss $\widetilde{\boldsymbol{A}}_{\gamma,k}$ für alle k zu $\mathbf{0}$ gesetzt werden, um die internen Kopplungen zu eliminieren.

Obigem Gedanken folgend kann die geregelte Systemmatrix bei Vorhandensein einer nicht-verkoppelnden Nullstelle die folgende Struktur aufweisen

$$\boldsymbol{A}'_{cl} = \left[\begin{array}{ccccc|c} \widetilde{\boldsymbol{A}}_{\delta,11} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \widetilde{\boldsymbol{A}}_{\delta,ll} & \cdots & \mathbf{0} & \widetilde{\boldsymbol{A}}_{\gamma,l} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \widetilde{\boldsymbol{A}}_{\delta,pp} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \cdots & \boldsymbol{A}_{\varphi,l} & \cdots & \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_{\eta} \end{array}\right]. \tag{19}$$

Die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}'_{cl}$ ergeben sich dementsprechend aus den Eigenwerten von $\widetilde{\boldsymbol{A}}_{\delta,kk}$, $k \neq l$, und

$$\overline{\boldsymbol{A}}_{ll} = \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{A}}_{\delta,ll} & \widetilde{\boldsymbol{A}}_{\gamma,l} \\ \boldsymbol{A}_{\varphi,l} & \boldsymbol{A}_{\eta} \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Das bedeutet, die Entkopplung kann ohne Kompensation der invarianten Nullstelle erfolgen, da $\boldsymbol{A}_{\eta} = \eta$, wegen $\widetilde{\boldsymbol{A}}_{\gamma,l} \neq \mathbf{0}$, kein Eigenwert von $\boldsymbol{A}'_{cl}$ ist. Durch geeignete Wahl der Elemente in $\widetilde{\boldsymbol{A}}^{\delta}_{ll}$ und $\widetilde{\boldsymbol{A}}^{\gamma}_{l}$ können die Eigenwerte der Matrix (20), und somit auch die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}'_{cl}$, beliebig festgelegt werden. Dies folgt aus der Steuerbarkeit des Systems und der Tatsache, dass in $\boldsymbol{B}'_{cl}$ die letzten $n-\delta$ Zeilen $\mathbf{0}$ sind.

Anmerkung 1. Aus selbigem Grund können die Matrizen $\boldsymbol{A}^{\varphi}_{k}$ nicht für alle k gleichzeitig $\mathbf{0}$ sein.

Die Eingangs-, Ausgangs- und Systemmatrix des l-ten Teilsystems lauten $\begin{bmatrix}\widetilde{\boldsymbol{b}}^{\top}_{\delta,ll} & 0\end{bmatrix}^{\top}$, $\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}^{\top}_{\delta,ll} & 0\end{bmatrix}$ und $\overline{\boldsymbol{A}}_{ll}$. Das Nennerpolynom der Übertragungsfunktion $g_{ll}(s)$ wird also durch das charakteristische Polynom von (20) festgelegt. Aufgrund der speziellen Struktur der Matrizen ergibt sich, unter Berücksichtigung der adjungierten von $(s\boldsymbol{I} - \overline{\boldsymbol{A}}_{ll})$,

$$g_{ll}(s) = \frac{b_{ll} \cdot (s-\eta)}{\det\left(s\boldsymbol{I} - \overline{\boldsymbol{A}}_{ll}\right)}. \tag{21}$$

Man erkennt, dass die invariante Nullstelle η im Zählerpolynom von $g_{ll}(s)$ auftaucht.

Dieses Ergebnis lässt sich auf den Fall mehrerer invarianter Nullstellen $(n-\delta > 1)$ erweitern. Hierzu wird die Matrix $\boldsymbol{J}_{\eta}$ betrachtet, die $\boldsymbol{A}_{\eta}$ in ihre Jordannormalform $\widehat{\boldsymbol{A}}_{\eta} = \boldsymbol{J}_{\eta}\boldsymbol{A}_{\eta}\boldsymbol{J}_{\eta}^{-1}$ überführt. Wird für (12) die Transformation $\boldsymbol{x}'' = \widehat{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x}'$ mit $\widehat{\boldsymbol{T}} = \operatorname{diag}\left(\boldsymbol{I}_{\delta}, \boldsymbol{J}_{\eta}\right)$ durchgeführt, ergibt sich

$$\widehat{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}'\widehat{\boldsymbol{T}}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{\delta} & \widehat{\boldsymbol{A}}_{\gamma} \\ \widehat{\boldsymbol{A}}_{\varphi} & \widehat{\boldsymbol{A}}_{\eta} \end{bmatrix}, \tag{22}$$

wobei $\widehat{\boldsymbol{A}}_{\varphi} = \boldsymbol{J}_{\eta}\boldsymbol{A}_{\varphi}$ und $\widehat{\boldsymbol{A}}_{\gamma} = \boldsymbol{A}_{\gamma}\boldsymbol{J}_{\eta}^{-1}$ gilt. Die Eingangs- und Ausgangsmatrizen $\boldsymbol{B}'$ und $\boldsymbol{C}'$ verändern sich hierdurch nicht. Angenommen alle invarianten Nullstellen kommen einfach vor, dann ist $\widehat{\boldsymbol{A}}_{\eta}$ eine Diagonalmatrix mit den invarianten Nullstellen η_i als Diagonalelemente, d. h. $\widehat{\boldsymbol{A}}_{\eta} = \operatorname{diag}\left(\eta_1, \ldots, \eta_{n-\delta}\right)$. Ob es sich bei η_i um eine nicht-verkoppelnde Nullstelle handelt, lässt sich an der $\boldsymbol{i}$-ten Zeile von $\widehat{\boldsymbol{A}}_{\varphi}$ ablesen und ihre Wirkung auf das jeweilige Teilsystem über die i-te Spalte von $\widehat{\boldsymbol{A}}_{\gamma}$ beeinflussen.

Satz 2. *Die invariante Nullstelle η_i ist eine nicht-verkoppelnde Nullstelle, wenn genau ein $l \in \{1, \ldots, p\}$ existiert, so dass $\boldsymbol{e}_i^{\top}\widehat{\boldsymbol{A}}_{\varphi,l} \neq \mathbf{0}$ und $\boldsymbol{e}_i^{\top}\widehat{\boldsymbol{A}}_{\varphi,k} = \mathbf{0}, \forall k \neq l$.*

Im Falle mehrfacher Nullstellen kann diese Überlegung auf die eventuell vorkommenden Jordanblöcke in $\widehat{\boldsymbol{A}}_{\eta}$ problemlos erweitert werden. Hierauf wird in Abschnitt 4.1 im Detail eingegangen.

3.4 Überaktuierte Systeme

Hat das System mehr Stell- als Ausgangsgrößen, muss die Transformationsmatrix (9) angepasst werden. In diesem Fall gilt $\operatorname{rang}(\boldsymbol{B}) = m > p$, d. h., zusätzlich zu den p Vektoren (10) existieren noch $m-p$ Vektoren $\boldsymbol{t}^{\top}_{\delta+1}, \ldots, \boldsymbol{t}^{\top}_{\delta+m-p}$, die zusammen eine Basis für den Zeilenraum von $\boldsymbol{B}$ bilden. Entsprechend verkleinert sich der Linksnullraum von $\boldsymbol{B}$ auf $n-m$, so dass neben den $\delta - p$ Vektoren $\boldsymbol{c}_1^{\top}, \ldots, \boldsymbol{c}_1^{\top}\boldsymbol{A}^{\delta_1-2}, \ldots, \boldsymbol{c}_p^{\top}, \ldots, \boldsymbol{c}_p^{\top}\boldsymbol{A}^{\delta_p-2}$ nur noch $n-\delta-m+p$ Vektoren $\boldsymbol{\eta}^{\top}_{\delta+m-p+1}, \ldots, \boldsymbol{\eta}^{\top}_{n}$ existieren, die zusammen eine Basis für den Linksnullraum darstellen. Wird die Transformation $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{T}\boldsymbol{x}$ mit der modifizierten Matrix

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{T}_{\delta} \\ \boldsymbol{t}^{\top}_{\delta+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{t}^{\top}_{\delta+m-p} \\ \boldsymbol{\eta}^{\top}_{\delta+m-p+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\eta}^{\top}_{n} \end{bmatrix} \tag{23}$$

durchgeführt, weist das transformierte System die selbe Struktur wie in (12)–(15) auf. Lediglich die transformierte Eingangsmatrix (14) verändert sich zu

$$\boldsymbol{B}' = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}^\star \\ \overline{\boldsymbol{B}} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \tag{24}$$

mit

$$\boldsymbol{B}^\star = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{d}_1^\star & \cdots & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{d}_p^\star \end{bmatrix}^\top, \tag{25a}$$

$$\overline{\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{t}_{\delta+1} & \cdots & \boldsymbol{t}_{\delta+m-p} \end{bmatrix}^\top \boldsymbol{B}. \tag{25b}$$

Fasst man die von $\boldsymbol{0}$ verschiedenen Zeilen von $\boldsymbol{B}'$ zusammen, erhält man die quadratisch reguläre Matrix

$$\overline{\boldsymbol{D}}^\star = \begin{bmatrix} \boldsymbol{d}_1^{\star\top} \\ \vdots \\ \boldsymbol{d}_p^{\star\top} \\ \overline{\boldsymbol{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}^\star \\ \overline{\boldsymbol{B}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times m}. \tag{26}$$

$\overline{\boldsymbol{D}}^\star$ kann als *erweiterte Entkopplungsmatrix* aufgefasst werden. Es sei beachtet, dass wegen der Zeilenregularität von $\boldsymbol{D}^\star$ und der regulären Transformation auch die Matrix $\overline{\boldsymbol{D}}^\star$ regulär und somit invertierbar ist. Dementsprechend ist folgende Eingangstransformation möglich: $\boldsymbol{B}'(\overline{\boldsymbol{D}}^\star)^{-1} = \operatorname{diag}\left(\boldsymbol{B}_\delta, \boldsymbol{B}_\eta\right)$ mit

$$\boldsymbol{B}_\eta = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_{m-p} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Verwendet man nun das Regelgesetz

$$\boldsymbol{u} = -\overline{\boldsymbol{D}}^\star \overline{\boldsymbol{K}} \boldsymbol{x}' + \overline{\boldsymbol{D}}^\star \overline{\boldsymbol{F}} \boldsymbol{w}, \quad \text{mit} \tag{28a}$$

$$\overline{\boldsymbol{K}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_\delta & \boldsymbol{K}_\gamma \\ \boldsymbol{K}_\varphi & \boldsymbol{K}_\eta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad \overline{\boldsymbol{F}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_\delta \\ \boldsymbol{F}_\eta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times p}, \tag{28b}$$

dann lautet der geschlossene Regelkreis

$$\boldsymbol{A}'_{cl} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_\delta - \boldsymbol{B}_\delta \boldsymbol{K}_\delta & \boldsymbol{A}_\gamma - \boldsymbol{B}_\delta \boldsymbol{K}_\gamma \\ \boldsymbol{A}_\varphi - \boldsymbol{B}_\eta \boldsymbol{K}_\varphi & \boldsymbol{A}_\eta - \boldsymbol{B}_\eta \boldsymbol{K}_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{A}}_\delta & \widetilde{\boldsymbol{A}}_\gamma \\ \widetilde{\boldsymbol{A}}_\varphi & \widetilde{\boldsymbol{A}}_\eta \end{bmatrix}, \tag{29a}$$

$$\boldsymbol{B}'_{cl} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_\delta & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_\delta \\ \boldsymbol{F}_\eta \end{bmatrix}. \tag{29b}$$

Im Gegensatz zum quadratischen Regelkreis (16) hat man im überaktuierten Regelkreis (29) die Möglichkeit die Matrizen $\boldsymbol{A}_\varphi$ und $\boldsymbol{A}_\eta$ zu beeinflussen.

Es sei beachtet, dass in der Literatur anstelle der erweiterten Entkopplungsmatrix $\overline{\boldsymbol{D}}^\star$ meist die Pseudoinverse der gewöhnlichen Entkopplungsmatrix $\boldsymbol{D}^\star$ im Regelgesetz (28) verwendet wird. Die Pseudoinverse kann dann bspw. so ermittelt werden, dass die Stellenergie minimiert oder die Robustheit des Systems gegen Parameterunsicherheiten optimiert wird [13, 29]. In [29] wird basierend auf einer Erweiterung des Entwurfs nach Falb und Wolovich [7] erkannt, dass die Freiheitsgrade eine Beeinflussung der internen Dynamik ermöglichen. Dadurch lassen sich einige der unbeobachtbaren Eigenwerte verändern. Allerdings wird keine unmittelbare Systematik erkannt. Der vorliegende Ansatz hingegen erlaubt einen transparenteren Einblick. Wird $\widetilde{\boldsymbol{A}}_\gamma$ für die Entkopplung zu $\boldsymbol{0}$ gesetzt, ergibt sich wie im quadratischen Fall eine unbeobachtbare, interne Dynamik, die durch $\widetilde{\boldsymbol{A}}_\eta$ repräsentiert wird. Im Gegensatz zum quadratischen Fall besteht bei einer Überaktuierung jedoch die Möglichkeit, die interne Dynamik über $\boldsymbol{B}_\eta$ und $\boldsymbol{K}_\eta$ zu beeinflussen. Falls $(\boldsymbol{A}_\eta, \boldsymbol{B}_\eta)$ vollständig steuerbar ist, können die Eigenwerte der internen Dynamik sogar beliebig gesetzt werden. Man erhält folgendes Resultat:

Satz 3. *Die invarianten Nullstellen entsprechen den nichtsteuerbaren Eigenwerte von* $(\boldsymbol{A}_\eta, \boldsymbol{B}_\eta)$.

Anmerkung 2. In [20, Abschnitt 9.2] wird gezeigt, dass Entkopplungsnullstellen in überaktuierten Systemen nicht notwendigerweise invariante Nullstellen sind. Die steuerbaren Eigenwerte von $(\boldsymbol{A}_\eta, \boldsymbol{B}_\eta)$ beschreiben diejenigen Entkopplungsnullstellen, die keine invarianten Nullstellen darstellen. Für weitere Einzelheiten zu den verschiedenen Nullstellendefinitionen wird auf [20] und [28, Kapitel 4] verwiesen.

Die Darstellung (29) verdeutlicht noch ein weiteres interessantes Resultat. Da $\boldsymbol{B}_\eta$ wie in (27) gegeben ist, können die ersten $m-p$ Zeilen von $\widetilde{\boldsymbol{A}}_\varphi$ und $\widetilde{\boldsymbol{A}}_\eta$ beliebig parametriert werden. Dadurch ist es möglich einen Teil der „η-Dynamik" an die entkoppelten, beobachtbaren Teilsysteme anzugliedern. Durch eine geeignete Parametrierung der veränderbaren Elemente in $\widetilde{\boldsymbol{A}}_\delta$, $\widetilde{\boldsymbol{A}}_\gamma$ und $\widetilde{\boldsymbol{A}}_\eta$ lässt sich die Dynamik der entkoppelten Teilsysteme gezielt erweitern. So können die zusätzlichen $m-p$ Aktoren bspw. genutzt werden, um die Nennerordnung der entkoppelten Übertragungsfunktion $g_{kk}(s)$ durch eine Verlängerung der zugehörigen Integriererkette von δ_k (vgl. (18)) auf δ_k+m-p zu erhöhen. Darüber hinaus kann das Vorfilter so parametriert werden, dass sich ein beliebiges Zählerpolynom der Ordnung $m-p$ ergibt.

Im Allgemeinen können die $m-p$ zusätzlichen Aktoren den einzelnen, entkoppelten Teilsystemen durch eine geeignete Parametrierung beliebig zugeordnet werden. Für die k-te Übertragungsfunktion gilt somit, dass die Nenner- und Zählerordnung um τ_k erhöht werden kann, solange die Bedingung $\sum_{k=1}^{p} \tau_k \leq m-p$ eingehalten wird.

Das genaue Vorgehen hierzu wird in Abschnitt 5.1 an einem Beispiel demonstriert.

4 Teilweise Entkopplung

In den vorangegangenen Abschnitten wurde gezeigt, dass die vollständige Entkopplung i. d. R. eine Kompensation der invarianten Nullstellen erfordert. Eine stabile Entkopplung ist somit nur für minimalphasige Systeme möglich oder für Systeme, deren „instabile“, invariante Nullstellen nicht-verkoppelnd sind. Für rang $(\boldsymbol{D}^\star) < p$ ist eine vollständige Entkopplung, zumindest im quadratischen Fall, überhaupt nicht möglich.

In diesen Fällen muss auf eine dynamische Rückführung zurückgegriffen werden. Alternativ hat man die Möglichkeit einer teilweisen Entkopplung, falls keine dynamische Regelung gewünscht ist. Nachfolgend wird gezeigt, wie sich eine teilweise und stabile Entkopplung mittels statischer Zustandsrückführung erreichen lässt und welche Freiheitsgrade dadurch entstehen.

Für die nachfolgenden Ausführungen werden wieder quadratische Systeme angenommen ($m = p$), da sich die genannten Schwierigkeiten der vollständigen Entkopplung für überaktuierte Systeme im Allgemeinen nicht ergeben.

Anmerkung 3. Überaktuierte Systeme weisen nur selten invariante Nullstellen auf, so dass Minimalphasigkeit meist sichergestellt ist. Auch rang $(\boldsymbol{D}^\star) = p$ ist tendenziell eher erfüllt, wenn mehr Stellgrößen vorhanden sind. Dementsprechend sind überaktuierte Systeme im Allgemeinen vollständig und stabil entkoppelbar [3].

4.1 Nicht-stabil entkoppelbare Systeme

In diesem Abschnitt werden Systeme mit rang $(\boldsymbol{D}^\star) = p$ betrachtet, die jedoch nicht-stabil entkoppelbar sind.

Ähnlich wie beim parametrischen Entwurfsverfahren in [17] besteht das Ziel darin, Kopplungen lediglich in einer Zeile der Übertragungsmatrix zuzulassen, während alle anderen Ein-/Ausgangskanäle vollständig entkoppelt sind (vgl. (6)) und der geschlossenen Regelkreis stabil ist. Im Folgenden bezeichnet $\kappa \le n - \delta$ die Anzahl der invarianten Nullstellen mit nicht-negativem Realteil, die keine nicht-verkoppelnden Nullstellen sind. Für $\kappa > 0$ ist eine vollständige stabile Entkopplung demnach nicht möglich. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird des Weiteren angenommen, dass die ersten κ Diagonalelemente der Matrix $\widehat{\boldsymbol{A}}_\eta$ gerade die verkoppelnden, „instabilen“ Nullstellen sind. Somit kann $\widehat{\boldsymbol{A}}_\eta = \operatorname{diag}\left(\widehat{\boldsymbol{A}}_\eta^\kappa, \widehat{\boldsymbol{A}}_\eta^r\right)$ geschrieben werden, wobei in $\widehat{\boldsymbol{A}}_\eta^\kappa \in \mathbb{R}^{\kappa\times\kappa}$ die verkoppelnden, „instabilen“ und in $\widehat{\boldsymbol{A}}_\eta^r \in \mathbb{R}^{(n-\delta-\kappa)\times(n-\delta-\kappa)}$ die restlichen „stabilen“ und/oder nicht-verkoppelnden Nullstellen vorkommen. Entsprechend werden die Matrizen $\widetilde{\boldsymbol{A}}_\gamma$ und $\widehat{\boldsymbol{A}}_\varphi$ zu $\widetilde{\boldsymbol{A}}_\gamma = \begin{bmatrix}\widetilde{\boldsymbol{A}}_\gamma^\kappa & \widetilde{\boldsymbol{A}}_\gamma^r\end{bmatrix}$ und $\widehat{\boldsymbol{A}}_\varphi^\top = \begin{bmatrix}\widehat{\boldsymbol{A}}_\varphi^{\kappa\top} & \widehat{\boldsymbol{A}}_\varphi^{r\top}\end{bmatrix}$ partitioniert.

Ist man daran interessiert Kopplungen lediglich in einer Zeile l der Übertragungsmatrix zuzulassen und die restlichen Zeilen vollständig zu entkoppeln, müssen – in Anlehnung an Abschnitt 3.2 – die Matrizen $\widetilde{\boldsymbol{A}}_{\delta,kj}$, $j \ne k$, und $\widetilde{\boldsymbol{A}}_{\gamma,k}^\kappa$ für alle $k \ne l$ zu $\mathbf{0}$ gesetzt werden. Die Matrizen $\widetilde{\boldsymbol{A}}_{\gamma,k}^r$, $k \ne l$, dürfen Elemente verschieden von 0 haben, abhängig davon ob in $\widehat{\boldsymbol{A}}_\eta^r$ nicht-verkoppelnde Nullstellen auftauchen oder nicht. Im Folgenden wird der Einfachheit halber angenommen, dass in $\widehat{\boldsymbol{A}}_\eta^r$ keine nicht-verkoppelnden (und somit nur „stabile“) Nullstellen enthalten sind. Die teilweise entkoppelte Systemmatrix hat dann folgende Struktur

$$\boldsymbol{A}_{cl}' = \left[\begin{array}{ccccc|cc} \widetilde{\boldsymbol{A}}_{\delta,11} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{A}}_{\delta,l1} & \cdots & \widetilde{\boldsymbol{A}}_{\delta,ll} & \cdots & \widetilde{\boldsymbol{A}}_{\delta,lp} & \widetilde{\boldsymbol{A}}_{\gamma,l}^\kappa & \widetilde{\boldsymbol{A}}_{\gamma,l}^r \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \widetilde{\boldsymbol{A}}_{\delta,pp} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \widehat{\boldsymbol{A}}_{\varphi,1}^\kappa & \cdots & \widehat{\boldsymbol{A}}_{\varphi,l}^\kappa & \cdots & \widehat{\boldsymbol{A}}_{\varphi,p}^\kappa & \widehat{\boldsymbol{A}}_\eta^\kappa & \mathbf{0} \\ \widehat{\boldsymbol{A}}_{\varphi,1}^r & \cdots & \widehat{\boldsymbol{A}}_{\varphi,l}^r & \cdots & \widehat{\boldsymbol{A}}_{\varphi,p}^r & \mathbf{0} & \widehat{\boldsymbol{A}}_\eta^r \end{array}\right]. \tag{30}$$

Kopplungen entstehen in Zeile l, wenn zumindest eine der Matrizen $\widetilde{\boldsymbol{A}}_{\delta,lj}$, $j \ne l$, oder $\widetilde{\boldsymbol{A}}_{\gamma,l} = \begin{bmatrix}\widetilde{\boldsymbol{A}}_{\gamma,l}^\kappa & \widetilde{\boldsymbol{A}}_{\gamma,l}^r\end{bmatrix}$ ungleich $\mathbf{0}$ ist. In diesem Fall weist die Systemmatrix $\boldsymbol{A}_{cl}'$, unabhängig von der Eingangsmatrix $\boldsymbol{B}_{cl}'$, eine indirekte Kopplung auf, die sich über $\widetilde{\boldsymbol{A}}_{\delta,lj}$ bzw. $\widehat{\boldsymbol{A}}_{\varphi,j} \to \widehat{\boldsymbol{A}}_\eta \to \widetilde{\boldsymbol{A}}_{\gamma,l}$, $j \ne l$, an der Ausgangsgröße y_l bemerkbar macht. Neben der indirekten Kopplung über die Teilmatrizen von $\boldsymbol{A}_{cl}'$ ist auch eine direkte Kopplung über das Vorfilter denkbar, so dass

$$\widetilde{\boldsymbol{F}} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ b_{l1} & \cdots & b_{ll} & \cdots & b_{lp} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & b_{pp} \end{bmatrix} \tag{31}$$

angesetzt werden kann. Die Koeffizienten b_{lj}, $j \ne l$, liefern zusätzliche Freiheitsgrade zur Beeinflussung der Übertragungsfunktionen $g_{lj}(s)$, $j \ne l$, worauf später eingegangen wird.

Es stellt sich nun die Frage, welche Zeilen für die teilweise Entkopplung geeignet sind und wie die Übertragungsfunktionen $g_{lj}(s)$ aussehen. Hierzu wird zunächst angenommen, dass die verkoppelnden, „instabilen" Nullstellen einfach vorkommen, d. h. $\widehat{A}^\kappa_\eta$ ist eine Diagonalmatrix. Außerdem wird $\widetilde{A}^r_{\gamma,l} = \mathbf{0}$ gesetzt. Dadurch kommen die Eigenwerte von $\widehat{A}^r_\eta$ im geschlossenen Regelkreis vor, was jedoch unproblematisch ist, da $\widehat{A}^r_\eta$ keine nichtverkoppelnden und somit nur „stabile" Nullstellen bzw. Eigenwerte aufweist.

Zur Ermittlung einer geeigneten Kopplungszeile werden die Eigenwerte von A'_{cl} betrachtet, die sich offensichtlich aus den Eigenwerten der Matrizen $\widetilde{A}^\delta_{kk}$, $k \neq l$, und

$$\begin{bmatrix} \widetilde{A}_{\delta,ll} & \widetilde{A}^\kappa_{\gamma,l} & \mathbf{0} \\ \widehat{A}^\kappa_{\varphi,l} & \widehat{A}^\kappa_\eta & \mathbf{0} \\ \widehat{A}^r_{\varphi,l} & \mathbf{0} & \widehat{A}^r_\eta \end{bmatrix} \tag{32}$$

zusammensetzen. Eine Kopplung in Zeile l wird als sinnvoll erachtet, wenn es möglich ist die Eigenwerte von (32) bzw.

$$\begin{bmatrix} \widetilde{A}_{\delta,ll} & \widetilde{A}^\kappa_{\gamma,l} \\ \widehat{A}^\kappa_{\varphi,l} & \widehat{A}^\kappa_\eta \end{bmatrix} \tag{33}$$

über die freien Parameter in $\widetilde{A}_{\delta,ll}$ und $\widetilde{A}^\kappa_{\gamma,l}$ zu stabilisieren. Dies ist jedoch nur dann möglich, wenn die Zeilenvektoren von $\widehat{A}^\kappa_{\varphi,l}$ jeweils nicht identisch $\mathbf{0}$ sind. Ist der i-te Zeilenvektor von $\widehat{A}^\kappa_{\varphi,l}$ identisch $\mathbf{0}$, taucht die „instabile" Nullstelle η_i im geregelten System auf, was sich an der Diagonalstruktur von $\widehat{A}^\kappa_\eta$ leicht erkennen lässt. Definiert man

$$\widehat{A}^\kappa_{\varphi,l} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}^\top_{1,l} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varphi}^\top_{\kappa,l} \end{bmatrix}, \tag{34}$$

dann besteht eine notwendige Bedingung für die Wahl einer sinnvollen Kopplungszeile darin, dass für alle $i \in \{1, \ldots, \kappa\}$ gilt: $\boldsymbol{\varphi}^\top_{i,l} \neq \mathbf{0}$. Diese Bedingung ist für $\eta_i \neq 0$ sogar hinreichend. D. h., es genügt, dass mindestens ein Element des Vektors $\boldsymbol{\varphi}^\top_{i,l} = \begin{bmatrix} \varphi_{i,l,0} & \cdots & \varphi_{i,l,\delta_l-1} \end{bmatrix}$ von 0 verschieden ist, wie nachfolgend gezeigt wird.

Satz 4. *Betrachtet werden die verkoppelnden, „instabilen" Nullstellen $\eta_1, \ldots, \eta_\kappa$, mit $\widehat{A}_\eta = \operatorname{diag}(\eta_1, \ldots, \eta_\kappa)$ und einer maximal einfachen Nullstelle in Null. Eine stabile und teilweise Entkopplung gemäß (6) lässt sich genau dann erreichen, wenn eine Kopplungszeile l gewählt wird für die $\widehat{A}^\kappa_{\varphi,l}$ keine Nullzeile enthält, d. h. $\boldsymbol{\varphi}^\top_{i,l} \neq \mathbf{0}\ \forall i \in \{1, \ldots, \kappa\}$. Existiert eine Nullstelle $\eta_i = 0$, muss $\varphi_{i,l,0} \neq 0$ gelten.*

Beweis. Zunächst sollte beachtet werden, dass die Matrizen $\widetilde{A}_{\delta,ll}$ und $\widetilde{A}^\kappa_{\gamma,l}$ folgende Struktur aufweisen

$$\widetilde{A}_{\delta,ll} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_{ll,0} & -a_{ll,1} & \cdots & -a_{ll,\delta_l-1} \end{bmatrix}, \tag{35a}$$

$$\widetilde{A}^\kappa_{\gamma,l} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ -\gamma_{l,1} & \cdots & -\gamma_{l,\kappa} \end{bmatrix}, \tag{35b}$$

wobei die Parameter $a_{ll,k}$ und $\gamma_{l,k}$ durch die Regelung frei wählbar sind. Die Notwendigkeit der Bedingung $\boldsymbol{\varphi}^\top_{i,l} \neq \mathbf{0}$ ist offensichtlich, da andernfalls η_i als Eigenwert im Regelkreis auftaucht. Dass diese Bedingung auch hinreichend für die Stabilisierbarkeit der Matrix (33) ist, lässt sich wie folgt zeigen: Das charakteristische Polynom von (33) berechnet sich aus

$$\overline{P}_{ll}(s) = \det \begin{bmatrix} s\boldsymbol{I} - \widetilde{A}_{\delta,ll} & -\widetilde{A}^\kappa_{\gamma,l} \\ -\widehat{A}^\kappa_{\varphi,l} & s\boldsymbol{I} - \widehat{A}^\kappa_\eta \end{bmatrix}. \tag{36}$$

Der Einfachheit halber wird der Index l bzw. ll im Folgenden weggelassen. Mit Hilfe der Identität (1) folgt

$$\begin{aligned} \overline{P}(s) &= \det\left(s\boldsymbol{I} - \widehat{A}^\kappa_\eta\right) \cdot \ldots \\ &\ldots \cdot \det\left(\left(s\boldsymbol{I} - \widetilde{A}_\delta\right) - \widetilde{A}^\kappa_\gamma \left(s\boldsymbol{I} - \widehat{A}^\kappa_\eta\right)^{-1} \widehat{A}^\kappa_\varphi\right). \end{aligned} \tag{37}$$

Wegen $\widehat{A}^\kappa_\eta = \operatorname{diag}(\eta_1, \ldots, \eta_\kappa)$ gilt außerdem $\det(s\boldsymbol{I} - \widehat{A}^\kappa_\eta) = \prod_{i=1}^\kappa (s - \eta_i)$ und $(s\boldsymbol{I} - \widehat{A}^\kappa_\eta)^{-1} = \operatorname{diag}\left((s-\eta_1)^{-1}, \ldots, (s-\eta_\kappa)^{-1}\right)$. Unter Berücksichtigung von (34) und (35b) führt dies zu

$$-\widetilde{A}^\kappa_\gamma \left(s\boldsymbol{I} - \widehat{A}^\kappa_\eta\right)^{-1} \widehat{A}^\kappa_\varphi = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ \Phi_0(s) & \cdots & \Phi_{\delta-1}(s) \end{bmatrix} \tag{38}$$

mit $\Phi_k(s) = \sum_{i=1}^\kappa \frac{\gamma_i \cdot \varphi_{i,k}}{s - \eta_i}$. Demnach erhält man für die Matrix innerhalb des zweiten det-Operators von (37)

$$\begin{bmatrix} s & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \\ a_0 + \Phi_0(s) & a_1 + \Phi_1(s) & \cdots & s + a_{\delta-1} + \Phi_{\delta-1}(s) \end{bmatrix}. \tag{39}$$

Aufgrund ihrer speziellen Form lässt sich die Determinante dieser Matrix unmittelbar berechnen und lautet

$$s^\delta + \left(a_{\delta-1} + \Phi_{\delta-1}(s)\right) \cdot s^{\delta-1} + \ldots + \left(a_0 + \Phi_0(s)\right). \tag{40}$$

Wird (40) noch mit $\prod_{i=1}^{\kappa}(s-\eta_i)$ multipliziert, folgt schließlich

$$\overline{P}(s) = s^{\delta}\prod_{i=1}^{\kappa}(s-\eta_i) + \Big(a_{\delta-1}\prod_{i=1}^{\kappa}(s-\eta_i) + \ldots \tag{41}$$
$$\ldots + \widetilde{\Phi}_{\delta-1}(s)\Big)s^{\delta-1} + \ldots + \Big(a_0\prod_{i=1}^{\kappa}(s-\eta_i) + \widetilde{\Phi}_0(s)\Big)$$

mit $\widetilde{\Phi}_k(s) = \sum_{i=1}^{\kappa}\Big(\gamma_i \cdot \varphi_{i,k}\prod_{j=1,j\neq i}^{\kappa}(s-\eta_j)\Big)$. Durch die frei vorgebbaren Parameter a_k und γ_k kann ein beliebiges Wunschpolynom

$$\overline{P}(s) = s^{\delta+\kappa} + \overline{a}_{\delta+\kappa-1}s^{\delta+\kappa-1} + \ldots + \overline{a}_0 \tag{42}$$

eingestellt werden, vorausgesetzt für jedes $i \in \{1,\ldots,\kappa\}$ existiert mindestens ein $\varphi_{i,k} \neq 0$. Dies folgt aus der Tatsache, dass die Variable a_k in $\overline{a}_k,\ldots,\overline{a}_{k+\kappa}$ vorkommt und das Produkt $\gamma_i \cdot \varphi_{i,k}$ in $\overline{a}_k,\ldots,\overline{a}_{k+\kappa-1}$, $k \in \{0,\ldots,\delta-1\}$. Gilt $\varphi_{i,k} \neq 0$ für mindestens ein k, kann über die Variable γ_i einer der Parameter $\overline{a}_0,\ldots,\overline{a}_{\delta+\kappa-2}$ festgelegt werden (der Parameter $\overline{a}_{\delta+\kappa-1}$ kann nur durch $a_{\delta-1}$ festgelegt werden). Dies gilt für jedes $i \in \{1,\ldots,\kappa\}$, so dass dadurch genau κ verschiedene Parameter beliebig vorgegeben werden können. Die restlichen δ Parameter in (42) lassen sich über die δ Variablen a_k festlegen. Dies ist unproblematisch, da sich der Einfluss der Variablen a_k und γ_i auf die jeweiligen Parameter überlappt.

Eine Ausnahme ist gegeben, falls ein $\eta_i = 0$ existiert. Der Parameter $\overline{a}_0$ berechnet sich nämlich zu

$$\overline{a}_0 = a_0\prod_{i=1}^{\kappa}(-\eta_i) + \sum_{i=1}^{\kappa}\Big(\gamma_i \cdot \varphi_{i,0}\prod_{j=1,j\neq i}^{\kappa}(-\eta_j)\Big). \tag{43}$$

Für den Fall $\eta_i = 0$ muss $\varphi_{i,0} \neq 0$ gelten, damit $\overline{a}_0$ über die Variable γ_i beliebig festgelegt werden kann. Andernfalls ist $\overline{a}_0 = 0$ und der geschlossene Regelkreis weist einen Eigenwert in Null auf. □

Bei einer mehrfachen Nullstelle in Null[2] ergibt (43) stets $\overline{a}_0 = 0$. Dieser Fall ist jedoch nur dann relevant, wenn die zugehörigen Nullstellenrichtungen linear unabhängig sind. Andernfalls enthält $\widehat{\boldsymbol{A}}_{\eta}^{\kappa}$ Jordanblöcke und ist keine Diagonalmatrix, wie in Satz 4 gefordert.

Korollar 1. Sei η_i eine mehrfache („instabile") Nullstelle, so dass $\widehat{\boldsymbol{A}}_{\eta}^{\kappa}$ einen Jordanblock der Größe μ enthält und seien $\boldsymbol{\varphi}_{i,l}^{\top},\ldots,\boldsymbol{\varphi}_{i+\mu,l}^{\top}$ die zugehörigen Zeilenvektoren aus der Matrix $\widehat{\boldsymbol{A}}_{\varphi,l}^{\kappa}$. Dann muss $\boldsymbol{\varphi}_{i+\mu,l}^{\top} \neq \boldsymbol{0}$ gelten, damit die Koeffizienten des Wunschpolynoms (42) beliebig festgelegt werden können. Für den Fall $\eta_i = 0$, muss $\varphi_{i+\mu,l,0} \neq 0$ gelten.

2 Dies ist ein eher theoretischer Fall und spielt aus praktischen Gesichtspunkten eine untergeordnete Rolle.

Der Beweis zu Korollar 1 erfolgt analog zum Beweis von Satz 4. Einzig die Inverse $(s\boldsymbol{I} - \widehat{\boldsymbol{A}}_{\eta}^{\kappa})^{-1}$ ändert sich und dadurch die Elemente $\Phi_k(s)$ in (38). Um Weitläufigkeit zu vermeiden wird der Beweis nicht ausgeführt.

Es stellt sich noch die Frage, welche Gestalt die Übertragungsfunktionen $g_{lj}(s)$ annehmen. Hierzu wird nochmal die Matrix (30) betrachtet, wobei der unbeobachtbare Teil bzw. der letzte Zeilen- und Spaltenblock für die weiteren Ausführungen nicht relevant ist und weggelassen wird. Zur besseren Veranschaulichung werden die Elemente der Matrix (30) umsortiert (was sich durch eine Transformation stets erreichen lässt), so dass sich

$$\overline{\boldsymbol{A}}_{cl}' = \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{A}}_{\delta,11} & \cdots & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \overline{\boldsymbol{A}}_{l1} & \cdots & \overline{\boldsymbol{A}}_{ll} & \cdots & \overline{\boldsymbol{A}}_{lp} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \cdots & \widetilde{\boldsymbol{A}}_{\delta,pp} \end{bmatrix} \tag{44}$$

mit $\overline{\boldsymbol{A}}_{lj}^{\top} = \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{A}}_{\delta,lj}^{\top} & \widehat{\boldsymbol{A}}_{\varphi,j}^{\kappa\top} \end{bmatrix}$ und

$$\overline{\boldsymbol{A}}_{ll} = \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{A}}_{\delta,ll} & \widehat{\boldsymbol{A}}_{\gamma,l}^{\kappa} \\ \widehat{\boldsymbol{A}}_{\varphi,l}^{\kappa} & \widehat{\boldsymbol{A}}_{\eta}^{\kappa} \end{bmatrix} \tag{45}$$

ergibt. Entsprechend gilt für die Ein- und Ausgangsmatrix des umsortierten Systems, unter Berücksichtigung der Filtermatrix (31),

$$\overline{\boldsymbol{B}}_{cl}' = \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{b}}_{\delta,11} & \cdots & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \overline{\boldsymbol{b}}_{l1} & \cdots & \overline{\boldsymbol{b}}_{ll} & \cdots & \overline{\boldsymbol{b}}_{lp} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \cdots & \widetilde{\boldsymbol{b}}_{\delta,pp} \end{bmatrix}, \tag{46a}$$

$$\overline{\boldsymbol{C}}' = \operatorname{diag}\left(\boldsymbol{c}_{\delta,11}^{\top},\ldots,\overline{\boldsymbol{c}}_{ll}^{\top},\ldots,\boldsymbol{c}_{\delta,pp}^{\top}\right), \tag{46b}$$

mit $\overline{\boldsymbol{b}}_{lj}^{\top} = \begin{bmatrix} b_{lj}\cdot\boldsymbol{b}_{\delta,ll}^{\top} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$ und $\overline{\boldsymbol{c}}_{ll}^{\top} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_{\delta,ll}^{\top} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$. Die Übertragungsfunktionen $g_{lj}(s)$ berechnen sich schließlich zu

$$\begin{bmatrix} g_{l1}(s) & \cdots & g_{lp}(s) \end{bmatrix} = \overline{\boldsymbol{c}}_{ll}^{\top}(s\boldsymbol{I} - \overline{\boldsymbol{A}}_{cl}')^{-1}\overline{\boldsymbol{B}}_{cl}'. \tag{47}$$

Die hier auftauchende Inverse lautet

$$\begin{bmatrix} (s\boldsymbol{I} - \widetilde{\boldsymbol{A}}_{\delta,11})^{-1} & \cdots & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{\Gamma}_{l1}(s) & \cdots & (s\boldsymbol{I} - \overline{\boldsymbol{A}}_{ll})^{-1} & \cdots & \boldsymbol{\Gamma}_{lp}(s) \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \cdots & (s\boldsymbol{I} - \widetilde{\boldsymbol{A}}_{\delta,pp})^{-1} \end{bmatrix},$$

mit $\boldsymbol{\Gamma}_{lj}(s) = (s\boldsymbol{I} - \overline{\boldsymbol{A}}_{ll})^{-1}\overline{\boldsymbol{A}}_{lj}(s\boldsymbol{I} - \widetilde{\boldsymbol{A}}_{\delta,jj})^{-1}$, $j \neq l$. Somit ergibt sich

$$g_{lj}(s) = \begin{cases} \overline{\boldsymbol{c}}_{ll}^{\top}\left((s\boldsymbol{I} - \overline{\boldsymbol{A}}_{ll})^{-1}\overline{\boldsymbol{b}}_{lj} + \boldsymbol{\Gamma}_{lj}(s)\widetilde{\boldsymbol{b}}_{\delta,jj}\right), & j \neq l, \\ \overline{\boldsymbol{c}}_{ll}^{\top}(s\boldsymbol{I} - \overline{\boldsymbol{A}}_{ll})^{-1}\overline{\boldsymbol{b}}_{ll}, & j = l. \end{cases} \tag{48}$$

Das Nennerpolynom von $g_{ll}(s)$ entspricht also dem Wunschpolynom $\overline{P}_{ll}(s)$ aus (42) und kann unter der in Satz 4 bzw. Korollar 1 genannten Bedingung beliebig vorgegeben werden. Das Zählerpolynom von $g_{ll}(s)$ lässt sich mit Hilfe der adjungierten Matrix adj $\left(s\boldsymbol{I} - \overline{\boldsymbol{A}}_{ll}\right)$ und unter Berücksichtigung von

$$(s\boldsymbol{I} - \overline{\boldsymbol{A}}_{ll})^{-1} = \frac{1}{\overline{P}_{ll}(s)} \cdot \operatorname{adj}\left(s\boldsymbol{I} - \overline{\boldsymbol{A}}_{ll}\right) \tag{49}$$

ermitteln. Der Vektor $\overline{\boldsymbol{c}}_{ll}^{\top}$ bzw. $\overline{\boldsymbol{b}}_{ll}$ besitzt genau ein nicht-null Element an der ersten bzw. δ_l-ten Stelle, so dass lediglich das Element in der ersten Zeile und δ_l-ten Spalte von adj $\left(s\boldsymbol{I} - \overline{\boldsymbol{A}}_{ll}\right)$ in die Berechnung eingeht. Aufgrund der speziellen Struktur von $(s\boldsymbol{I} - \overline{\boldsymbol{A}}_{ll})$ folgt sofort $\prod_{i=1}^{\kappa}(s - \eta_i)$. Somit erhält man letztendlich

$$g_{ll}(s) = \frac{b_{ll} \cdot \prod_{i=1}^{\kappa}(s - \eta_i)}{\overline{P}_{ll}(s)}. \tag{50}$$

Auf ähnliche Weise können die restlichen Übertragungsfunktionen in Zeile l berechnet werden. Aus (48) und $\boldsymbol{\Gamma}_{lj}(s)$ ist ersichtlich, dass das Nennerpolynom von $g_{lj}(s)$, $j \neq l$, durch $\overline{P}_{ll}(s) \cdot P_{jj}(s)$ gegeben ist, mit $P_{jj}(s) = \det(s\boldsymbol{I} - \widetilde{\boldsymbol{A}}_{\delta,jj})$. Das zugehörige Zählerpolynom lässt sich auch hier aufgrund der speziellen Matrixstrukturen relativ einfach bestimmen. Aus Platzgründen wird hierauf nicht weiter eingegangen. Es kann jedoch gezeigt werden, dass das Zählerpolynom die Ordnung $\delta_j + \kappa$ aufweist und über die δ_j Freiheitsgrade in der Matrix $\overline{\boldsymbol{A}}_{lj}$ bzw. $\widetilde{\boldsymbol{A}}_{\delta,lj}$ beeinflussbar ist. Zusammen mit dem frei wählbaren Filterparameter b_{lj} ergeben sich dadurch $\delta_j + 1$ Freiheitsgrade im Zählerpolynom von $g_{lj}(s)$, $j \neq l$. Für den Fall, dass nicht-verkoppelnde Nullstellen bezüglich eines Ausgangs y_j, $j \neq l$, existieren, ergeben sich sogar noch zusätzliche Freiheitsgrade in $\widetilde{\boldsymbol{A}}_{\gamma}^{r}$. Dies wurde bisher außer Acht gelassen, wird jedoch in Abschnitt 5.2 an einem Beispiel demonstriert.

Anmerkung 4. Beim parametrischen Entwurfsverfahren [18] wird lediglich ein Freiheitsgrad in den Zählerpolynomen von $g_{lj}(s)$, $j \neq l$, aufgezeigt. Der hier vorgestellte Entwurf ermöglicht demgegenüber die Generierung allgemeinerer Übertragungsfunktionen.

4.2 Nicht-entkoppelbare Systeme

Eine teilweise Entkopplung kann auch für nicht-entkoppelbare Systeme erreicht werden, d. h. für Systeme mit rang $\left(\boldsymbol{D}^{\star}\right) < p$. In diesem Fall wirken mehrere Eingangsgrößen auf mindestens eine Ausgangsgröße, weil keine Vorfilterung existiert, die zu einer eingangsseitigen Entkopplung führt. Die bisherigen Ergebnisse lassen sich jedoch problemlos auf diesen Fall übertragen.

Für rang $\left(\boldsymbol{D}^{\star}\right) < p$ existiert die in (9) gegebene Transformationsmatrix nicht, da keine $n - \delta$ linear unabhängigen Vektoren $\boldsymbol{\eta}_{\delta+1}^{\top}, \ldots, \boldsymbol{\eta}_{n}^{\top}$ gefunden werden können, die im Linksnullraum von $\boldsymbol{B}$ liegen und zu einer quadratisch regulären Matrix $\boldsymbol{T}$ führen. Das Problem lässt sich umgehen, indem die genannten Vektoren anders gewählt werden, so dass $\boldsymbol{T}$ regulär ist. Im Folgenden wird jedoch eine Lösung vorgestellt, die es erlaubt die Methoden der vorangegangenen Abschnitte ohne Weiteres auf die nicht-entkoppelbaren Systeme anzuwenden.

4.2.1 rang $(\boldsymbol{D}^{\star}) = p - 1$

Zunächst wird angenommen, dass rang $\left(\boldsymbol{D}^{\star}\right) = p - 1$ gilt. Dann existiert ein Vektor $\boldsymbol{v}$ mit $\boldsymbol{D}^{\star}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$. Die Idee besteht darin, einen künstlichen Ausgang $y_{\nu} = \boldsymbol{c}_{\nu}^{\top}\boldsymbol{x}$ zu finden, wofür $\boldsymbol{d}_{\nu}^{\star\top}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{c}_{\nu}^{\top}\boldsymbol{A}^{\delta_{\nu}-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{v} \neq 0$ gilt. Wie sich ein passender Vektor $\boldsymbol{c}_{\nu}^{\top}$ finden lässt, wird weiter unten gezeigt. Ersetzt man eine geeignete Zeile l in $\boldsymbol{D}^{\star}$ durch $\boldsymbol{d}_{\nu}^{\star\top}$, weist die resultierende Matrix $\boldsymbol{D}_{l}^{\star}$ vollen Rang auf. Werden also in der Transformationsmatrix (9) die Vektoren $\boldsymbol{c}_{l}^{\top}, \ldots, \boldsymbol{c}_{l}^{\top}\boldsymbol{A}^{\delta_l-1}$ durch $\boldsymbol{c}_{\nu}^{\top}, \ldots, \boldsymbol{c}_{\nu}^{\top}\boldsymbol{A}^{\delta_{\nu}-1}$ ersetzt, erhält man die selbe Struktur wie zuvor für die transformierten Systemmatrizen (wobei δ_l durch δ_{ν} ersetzt ist). Lediglich die l-te Zeile der Ausgangsmatrix ändert sich. Zur Vereinfachung der Notation wird angenommen, dass die Elemente der transformierten Systemmatrizen so umsortiert sind, dass sich die Darstellung (44)–(46) ergibt. In dieser Form lautet die Ausgangsmatrix

$$\overline{\boldsymbol{C}}' = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_{\delta,11}^{\top} & \cdots & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \overline{\boldsymbol{c}}_{l1}^{\top} & \cdots & \overline{\boldsymbol{c}}_{ll}^{\top} & \cdots & \overline{\boldsymbol{c}}_{lp}^{\top} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{c}_{\delta,pp}^{\top} \end{bmatrix}. \tag{51}$$

Für die Teilmatrizen $([\overline{\boldsymbol{A}}_{l1} \ \cdots \ \overline{\boldsymbol{A}}_{lp}], [\overline{\boldsymbol{b}}_{l1} \ \cdots \ \overline{\boldsymbol{b}}_{lp}], \overline{\boldsymbol{c}}_{ll}^{\top})$ können die Techniken zur vollständigen und teilweisen Entkopplung entsprechend der Abschnitte 3.2, 3.3 und 4.1 genutzt werden. Allerdings wirkt der k-te Eingang zusätzlich auf den l-ten Ausgang, wenn $\overline{\boldsymbol{c}}_{lk}^{\top} \neq \boldsymbol{0}$ gilt. Für $\overline{\boldsymbol{c}}_{lk}^{\top} = \boldsymbol{0}$

kann jedoch der Einfluss des k-ten Eingangs auch in $\overline{\boldsymbol{A}}_{lk}$ und $\overline{\boldsymbol{b}}_{lk}$ eliminiert werden, so dass sich $g_{kl}(s) = 0$ ergibt. Dadurch hat man eine einfache und anschauliche Möglichkeit die Übertragungsfunktionen der Kopplungszeile gezielt zu beeinflussen.

Anmerkung 5. Als Kopplungszeile l kommt jede Zeile, für die die Ersatzmatrix $\boldsymbol{D}_l^\star$ vollen Rang aufweist, in Frage. Allerdings muss zusätzlich gelten, dass $\widehat{\boldsymbol{A}}_{\varphi,l}^{\kappa}$ keine Nullzeile enthält. Andernfalls ist das Paar $(\overline{\boldsymbol{A}}_{ll}, \overline{\boldsymbol{b}}_{ll})$ nicht stabilisierbar.

Es sei noch angemerkt, dass die l-te Zeile von $\overline{\boldsymbol{C}}'$ keine besondere Struktur aufweist. Auch der Vektor $\overline{\boldsymbol{c}}_{ll}^\top$ kann beliebig belegt sein und muss nicht wie in Abschnitt 4.1 gegeben sein. Die Möglichkeit $\overline{\boldsymbol{c}}_{ll}^\top = \boldsymbol{0}$ ist jedoch ausgeschlossen, da die l-te Zeile der Übertragungsmatrix sonst eine Linearkombination der restlichen Zeilen und das System somit degeneriert ist. Des Weiteren gilt für mindestens eines der Elemente $\overline{\boldsymbol{c}}_{lk}^\top \neq \boldsymbol{0}, k \neq l$, da das System andernfalls vollständig entkoppelbar wäre.

Abschließend wird noch auf die Wahl eines passenden Ersatzvektors $\boldsymbol{c}_\nu^\top$ eingegangen. Es lässt sich stets ein Vektor $\boldsymbol{c}_\nu^\top$ ermitteln, für den $\boldsymbol{c}_\nu^\top \boldsymbol{B}\boldsymbol{\nu} \neq 0$ gilt. In diesem Fall ist $\delta_\nu = 1$. Allerdings kann man auch einen Vektor $\boldsymbol{c}_\nu^\top$ suchen für den $\delta_\nu > 1$ gilt. Hierbei werden zunächst alle Vektoren $\boldsymbol{c}_\nu^\top$ betrachtet die im Linksnullraum von $\boldsymbol{B}$ liegen. Erfüllt einer dieser Vektoren $\boldsymbol{c}_\nu^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\nu} \neq 0$, hat man ein $\boldsymbol{c}_\nu^\top$ mit $\delta_\nu = 2$ gefunden. Existieren jedoch Vektoren für die auch noch $\boldsymbol{c}_\nu^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$ und $\boldsymbol{c}_\nu^\top \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}\boldsymbol{\nu} \neq 0$ gilt, hat man ein $\boldsymbol{c}_\nu^\top$ mit $\delta_\nu = 3$ gefunden usw. Prinzipiell ist es unwesentlich wie groß δ_ν ist. Allerdings vergrößert sich die Dimension von $\widetilde{\boldsymbol{A}}_{\delta,ll}$ innerhalb der Matrix $\overline{\boldsymbol{A}}_{ll}$, wodurch sich die anschließende Analyse erleichtert.

4.2.2 rang $(\boldsymbol{D}^\star) = p - r$

Obiges Resultat lässt sich auf rang $(\boldsymbol{D}^\star) = p - r$ verallgemeinern. In diesem Fall existieren r Vektoren $\boldsymbol{\nu}_1, \ldots, \boldsymbol{\nu}_r$ mit $\boldsymbol{D}^\star \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu}_1 & \cdots & \boldsymbol{\nu}_r \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$. Entsprechend können r Ersatzvektoren $\boldsymbol{c}_{\nu_1}^\top, \ldots, \boldsymbol{c}_{\nu_r}^\top$ gefunden werden, wodurch letztlich Verkopplungen in r Ausgängen entstehen.

Anmerkung 6. Der Fall $r > 1$ ist ein theoretischer und kommt in technischen Systemen i. d. R. nicht vor [19].

5 Beispiele

5.1 Vollständig entkoppelbares System

Gegeben sei das System

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}^\top = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mit den relativen Graden $\delta_1 = 1$ und $\delta_2 = 2$. Das System ist wegen rang $(\boldsymbol{D}^\star) = 2 = p$ entkoppelbar. Gemäß Lemma 1 wird die Transformationsmatrix

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1^\top \\ \boldsymbol{c}_2^\top \\ \boldsymbol{c}_2^\top \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{\eta}_4^\top \\ \boldsymbol{\eta}_5^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{52}$$

definiert. Das transformierte und geregelte System (16) lautet dann, mit noch festzulegenden Regler- und Filterparametern,

$$\boldsymbol{A}_{cl}' = \left[\begin{array}{c:cc|cc} -a_{11,0} & -a_{12,0} & -a_{12,1} & -\gamma_{11} & -\gamma_{12} \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a_{21,0} & -a_{22,0} & -a_{22,1} & -\gamma_{21} & -\gamma_{22} \\ \hline 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -10 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right], \tag{53a}$$

$$\boldsymbol{B}_{cl}' = \left[\begin{array}{cc} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right], \quad \boldsymbol{C}' = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \tag{53b}$$

Hierbei wurden die Vektoren $\boldsymbol{\eta}_4^\top$ und $\boldsymbol{\eta}_5^\top$ in (52) so gewählt, dass $\widehat{\boldsymbol{A}}_\eta$ eine Diagonalform annimmt. Aus der transformierten Darstellung erkennt man, dass zwei invariante Nullstellen $\eta_1 = 3$ und $\eta_2 = -2$ existieren und das System somit nicht-minimalphasig ist. Jedoch ist $\eta_1 = 3$ eine nicht-verkoppelnde Nullstelle, wegen $\widehat{\boldsymbol{A}}_{\varphi,1} = 1 \neq 0$ und $\widehat{\boldsymbol{A}}_{\varphi,2} = \boldsymbol{0}$. Das bedeutet, für eine vollständige Entkopplung muss γ_{11} nicht notwendigerweise Null sein. Es genügt, wenn die Reglerparameter $a_{12,0}, a_{12,1}, a_{21,0}, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_{22}$ und Filterparameter b_{12}, b_{21} zu Null gesetzt werden. In diesem Fall ergibt sich der vollständig entkoppelte Regelkreis

$\boldsymbol{G}_{yw}(s) = \operatorname{diag}\left(g_{11}(s), g_{22}(s)\right)$, mit

$$g_{11}(s) = \frac{b_{11} \cdot (s-3)}{(s+a_{11,0}) \cdot (s-3) + \gamma_{11}}, \tag{54a}$$

$$g_{22}(s) = \frac{b_{22}}{s^2 + a_{22,1} \cdot s + a_{22,0}}. \tag{54b}$$

Über die freien Parameter $a_{11,0}$ und γ_{11} können die beiden Polstellen von $g_{11}(s)$ beliebig gesetzt werden. Offensichtlich taucht $\eta_1 = 3$ im Zählerpolynom von $g_{11}(s)$ auf und wird für $\gamma_{11} = 0$ durch eine Polstelle kompensiert.

Als Erweiterung wird nun angenommen, dass das System überaktuiert ist und eine dritte Stellgröße mit

$$\boldsymbol{B}^\top = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \tag{55}$$

aufweist. Es sei beachtet, dass $\boldsymbol{\eta}_4^\top \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ und $\boldsymbol{\eta}_5^\top \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Gemäß den Ausführungen von Abschnitt 3.4 folgt

$$\boldsymbol{TB}(\overline{\boldsymbol{D}}^\star)^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \text{ mit } \overline{\boldsymbol{D}}^\star = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}^\star \\ \boldsymbol{\eta}_4^\top \boldsymbol{B} \end{bmatrix}. \tag{56}$$

Die Überaktuierung ermöglicht eine Beeinflussung der internen Dynamik. Insbesondere kann die vierte Zeile von $\boldsymbol{A}'_{cl}$ über die dritte Stellgröße beliebig parametriert werden. Dadurch lässt sich bspw. die Zählernullstelle in $g_{11}(s)$ verändern, wodurch sich ein Freiheitsgrad im Zähler ergibt. Alternativ kann $\gamma_{11} = 0$ gesetzt und der dadurch unbeobachtbar gemachte Eigenwert über die dritte Stellgröße stabilisiert werden. Eine andere Möglichkeit besteht darin, die dritte und vierte Zeile von $\boldsymbol{A}'_{cl}$ so zu manipulieren, dass bezüglich des zweiten Ausgangs eine erweiterte Übertragungsfunktion entsteht. Wird das Vorfilter entsprechend gewählt, erhält man

$$\boldsymbol{A}'_{cl} = \left[\begin{array}{c:ccc:c} -a_{11,0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -a'_{22,0} & -a'_{22,1} & -a'_{22,2} & 0 \\ \hdashline 1 & -10 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right], \tag{57a}$$

$$\boldsymbol{B}'_{cl} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22}^\delta \\ 0 & b_{22}^\eta \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} b_{11} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b_{22}^\delta \\ \hline 0 & b_{22}^\eta \\ 0 & 0 \end{array}\right] \tag{57b}$$

und schließlich

$$g_{11}(s) = \frac{b_{11}}{s + a_{11,0}}, \tag{58a}$$

$$g_{22}(s) = \frac{b_{22}^\delta \cdot (s + a_{22,2}) + b_{22}^\eta}{s^3 + a'_{22,2} \cdot s^2 + a'_{22,1} \cdot s + a'_{22,0}}. \tag{58b}$$

Man erkennt, dass sich eine allgemeinere Übertragungsfunktion $g_{22}(s)$ einstellt. Neben den frei wählbaren Nennerkoeffizienten kann auch das Zählerpolynom über die Filterparameter b_{22}^δ und b_{22}^η beliebig festlegt werden. Für $b_{22}^\delta = 0$ erhält man bspw. ein reines Verzögerungsglied dritter Ordnung.

Alternativ zur obigen Lösung kann die Übertragungsfunktion bezüglich des ersten Ausgangs verallgemeinert werden, indem die erste und vierte Zeile von $\boldsymbol{A}'_{cl}$ und das Vorfilter geeignet parametriert werden. Aufgrund der Strukturen der transformierten Systemmatrizen lassen sich die Möglichkeiten einfach verdeutlichen.

5.2 Nicht-entkoppelbares System

Gegeben sei das (mit veränderten Werten aus [19] entnommene) System

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mit $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 1$ und

$$\boldsymbol{D}^\star = \boldsymbol{CB} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{60}$$

Wegen $\operatorname{rang}\left(\boldsymbol{D}^\star\right) = 2 < 3 = p$ ist eine vollständige Entkopplung nicht möglich. Es lässt sich jedoch eine teilweise Entkopplung mit Kopplungen in einer Zeile erreichen, da $r = p - \operatorname{rang}\left(\boldsymbol{D}^\star\right) = 1$ gilt. Weiterhin ist ersichtlich, dass sich die zweite und dritte Zeile der Übertragungsmatrix als Kopplungszeile anbieten, da die zweite und dritte Zeile von $\boldsymbol{D}^\star$ linear abhängig sind.

Möglichkeit 1: Kopplung in Zeile 3

Als Kopplungszeile wird $l = 3$ gewählt und gemäß Abschnitt 4.2 der Ersatzvektor $\boldsymbol{c}_\nu^\top = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ eingeführt. Die mit dem Ersatzvektor gebildete, reguläre Entkopplungsmatrix lautet

$$\boldsymbol{D}_3^\star = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1^\top \\ \boldsymbol{c}_2^\top \\ \boldsymbol{c}_\nu^\top \boldsymbol{A}^2 \end{bmatrix} \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{61}$$

und die Transformationsmatrix

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1^\top \\ \boldsymbol{c}_2^\top \\ \boldsymbol{c}_\nu^\top \\ \boldsymbol{c}_\nu^\top \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{c}_\nu^\top \boldsymbol{A}^2 \\ \boldsymbol{\eta}_5^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{62}$$

Das transformierte und geregelte System, bei dem die Regelung bereits so ausgelegt ist, dass die ersten beiden Ausgänge vollständig entkoppelt sind, lautet (mit der Eingangsfilterung $(\boldsymbol{D}_3^\star)^{-1}\widetilde{\boldsymbol{F}}$)

$$\boldsymbol{A}'_{cl} = \left[\begin{array}{c:c:cccc|c} -a_{11,0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & -a_{22,0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a_{31,0} & -a_{32,0} & -a_{33,0} & -a_{33,1} & -a_{33,2} & -\gamma_3 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

$$\boldsymbol{B}'_{cl} = \left[\begin{array}{ccc} b_{11} & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & b_{22} & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

$$\boldsymbol{C}' = \left[\begin{array}{c:c:ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Hierbei gilt für die ersten beiden Ausgänge $y_1(s) = g_{11}(s) \cdot w_1(s)$ und $y_2(s) = g_{22}(s) \cdot w_2(s)$, mit

$$g_{11}(s) = \frac{b_{11}}{s + a_{11,0}}, \qquad g_{22}(s) = \frac{b_{22}}{s + a_{22,0}}. \tag{64}$$

Wegen der Beziehung $y_3 = x'_2 - x'_3 = y_2 - x'_3$ tauchen wie erwartet Kopplungen in der dritten Zeile der Übertragungsmatrix auf. Über die frei vorgebbaren Parameter in der vierten Zeile von $\boldsymbol{A}'_{cl}$ und $\boldsymbol{B}'_{cl}$ lassen sich die Übertragungsfunktionen $g_{3j}(s)$, $j \neq 3$, jedoch noch beeinflussen.

Zunächst fällt auf, dass $\eta = 1$ eine verkoppelnde und „instabile“, invariante Nullstelle ist. Damit der Regelkreis keine instabilen Eigenwerte enthält, darf η nicht durch einen Eigenwert kompensiert werden und muss einem Ausgang zugeordnet werden. Wegen $\widehat{\boldsymbol{A}}_{\varphi,3} = \widehat{\boldsymbol{A}}^\kappa_{\varphi,3} \neq \boldsymbol{0}$ ist die dritte Zeile als Verkopplungszeile sinnvoll (vgl. Anmerkung 5). Das zugehörige charakteristische Polynom dieses Teilsystems lautet

$$\overline{P}_{33}(s) = (s^3 + a_{33,2} \cdot s^2 + a_{33,1} \cdot s + a_{33,0}) \cdot (s-1) - \gamma_3, \tag{65}$$

dessen Nullstellen mit Hilfe von $a_{33,0}$, $a_{33,1}$, $a_{33,2}$ und γ_3 beliebig vorgegeben werden können.

Da $y_3(s) = y_2(s) - x'_3(s) = g_{22}(s) \cdot w_2(s) - x'_3(s)$ gilt, kann der Einfluss von w_2 auf y_3 nicht entfernt werden. Der Einfluss von w_1 lässt sich jedoch eliminieren, indem $a_{31,0} = b_{31} = 0$ gewählt wird. Eine indirekte Kopplung über den Zustand x'_5 findet wegen $\widehat{\boldsymbol{A}}_{\varphi,1} = 0$ auch nicht statt. Es sollte jedoch beachtet werden, dass, aufgrund von $\gamma_3 \neq 0$, der Eingang w_2 über $\widehat{\boldsymbol{A}}_{\varphi,2} = 1 \neq 0$ einen zusätzlichen Einfluss auf y_3 hat. Das Übertragungsverhalten von w_2 auf den Zustand x'_3 ergibt sich zu

$$g_{x'_3 w_2}(s) = \frac{b_{32} \cdot (s-1)}{\overline{P}_{33}(s)} - \frac{b_{22} \cdot (\gamma_3 + a_{32,0} \cdot (s-1))}{(s + a_{22,0}) \cdot \overline{P}_{33}(s)}.$$

Die Übertragungsfunktion zwischen w_2 und y_3 lautet schließlich $g_{32}(s) = g_{22}(s) - g_{x'_3 w_2}(s)$. Die Variablen $a_{32,0}$ und b_{32} sind hierbei noch frei wählbar und können zur Beeinflussung des Zählerpolynoms genutzt werden. Zusammenfassend folgt für die Übertragungsmatrix des geregelten Systems

$$\boldsymbol{G}_{yw}(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & 0 & 0 \\ 0 & g_{22}(s) & 0 \\ 0 & g_{32}(s) & g_{33}(s) \end{bmatrix} \tag{66}$$

mit

$$g_{33}(s) = -g_{x'_3 w_3}(s) = \frac{-b_{33} \cdot (s-1)}{\overline{P}_{33}(s)}. \tag{67}$$

Es sollte beachtet werden, dass – im Gegensatz zum parametrischen Verfahren [18] – zur Beeinflussung des Zählerpolynoms von $g_{32}(s)$ zwei Parameter vorhanden sind. Dies deckt sich mit der in Abschnitt 4.1 genannten Anzahl von $\delta_2 + 1 = 2$ Freiheitsgraden.

Möglichkeit 2: Kopplung in Zeile 2

Alternativ kann auch $l = 2$ als Kopplungszeile gewählt werden. Das transformierte und geregelte System, bei dem der erste und dritte Ausgang vollständig entkoppelt sind, lautet (mit der Eingangsfilterung $(\boldsymbol{D}_2^{\star})^{-1}\widetilde{\boldsymbol{F}}$)

$$\boldsymbol{A}'_{cl} = \left[\begin{array}{c|ccc|c|c} -a_{11,0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a_{21,0} & -a_{22,0} & -a_{22,1} & -a_{22,2} & -a_{23,0} & -\gamma_2 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{33,0} & -\gamma_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right],$$

$$\boldsymbol{B}'_{cl} = \left[\begin{array}{ccc} b_{11} & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ \hdashline 0 & 0 & b_{33} \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

$$\boldsymbol{C}' = \left[\begin{array}{c|ccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Hierbei wird der Parameter γ_3 bewusst offen gelassen. Offenbar ist $\widehat{\boldsymbol{A}}_{\varphi,2} = \boldsymbol{0}$, weshalb fälschlicherweise angenommen werden könnte, dass $l = 2$ als Verkopplungszeile nicht sinnvoll ist (s. Anmerkung 5). Allerdings zeigt das transformierte System, dass die invariante Nullstelle $\eta = 1$ eine nicht-verkoppelnde Nullstelle für y_3 ist. Aus diesem Grund kann das System mit $\gamma_3 \neq 0$ stabilisiert und eine vollständige Entkopplung für y_3 trotzdem noch erreicht werden. Für den ersten und dritten Ausgang gilt $y_1(s) = g_{11}(s) \cdot w_1(s)$ und $y_3(s) = g_{33}(s) \cdot w_3(s)$, mit

$$g_{11}(s) = \frac{b_{11}}{s + a_{11,0}}, \quad g_{33}(s) = \frac{b_{33} \cdot (s-1)}{(s + a_{33,0}) \cdot (s-1) + \gamma_3}.$$

Der zweite Ausgang wird wegen $y_2 = x'_2 + x'_5 = x'_2 + y_3$ auch von w_3 beeinflusst. Der Einfluss von w_1 lässt sich jedoch durch $a_{21,0} = b_{21} = 0$ eliminieren. Da die Wirkung von w_3 auf y_2 garantiert vorhanden ist, ist es nicht notwendig $a_{23,0}$, γ_2 und b_{23} zu Null zu setzen. Über diese Parameter kann noch Einfluss auf das Zählerpolynom von $g_{23}(s)$ genommen werden. Der Einfachheit halber wird jedoch $a_{23,0} = \gamma_2 = b_{23} = 0$ gewählt. Die Übertragungsmatrix lautet dann

$$\boldsymbol{G}_{yw}(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & 0 & 0 \\ 0 & g_{22}(s) & g_{23}(s) \\ 0 & 0 & g_{33}(s) \end{bmatrix} \tag{69}$$

mit $g_{23}(s) = g_{33}(s)$ und

$$g_{22}(s) = \frac{b_{22}}{s^3 + a_{22,2} \cdot s^2 + a_{22,1} \cdot s + a_{22,0}}. \tag{70}$$

Interessanterweise sind zur Beeinflussung des Zählerpolynoms von $g_{23}(s)$ drei, also eins mehr als $\delta_3 + 1 = 2$, Variablen vorhanden. Das liegt darin begründet, dass η zwar eine nicht-verkoppelnde Nullstelle ist, jedoch nicht für die Verkopplungszeile $l = 2$. Wie in Abschnitt 4.1 erwähnt, ist deshalb über $\gamma_l = \gamma_2$ eine zusätzliche Beeinflussung des Zählerpolynoms von $g_{23}(s)$ möglich.

6 Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Beitrag wurde ein Transformationsansatz zur vollständigen und teilweisen Entkopplung linearer Systeme präsentiert. Mit Hilfe einer speziellen Transformation werden die Koppeleffekte zwischen einzelnen Ein- und Ausgangsgrößen einfach veranschaulicht. Insbesondere für überaktuierte Systeme werden die Einflüsse der zusätzlichen Aktoren und die sich dadurch ergebenden Möglichkeiten hervorgehoben. Dies erlaubt wiederum eine gezielte Manipulation der internen Dynamik und/oder der generierbaren Übertragungsfunktionen. Darüber hinaus wurde gezeigt, welche Freiheitsgrade im Falle einer teilweisen Entkopplung existieren und wie sie auf die einzelnen Übertragungsfunktionen des geschlossenen Regelkreises wirken.

Zusätzlich zur Anwendung des Verfahrens auf ein reales System, besteht ein interessanter Ansatz für eine zukünftige Arbeit darin, überaktuierte Systeme mit Hilfe des vorgestellten Transformationsansatzes auf notwendige und hinreichende Entkopplungskriterien zu untersuchen. Einen ersten Ansatz hierfür liefert die in Abschnitt 4.2 beschriebene Vorgehensweise, die für überaktuierte Systeme genauer analysiert werden soll.

Danksagung: Diese Arbeit wurde durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) im Rahmen des GRK 1362 gefördert.

Literatur

1. C. Commault and J. M. Dion. Transfer matrix approach to the triangular block decoupling problem. *Automatica*, 19(5):533–542, 1983.
2. M. Cremer. A precompensator of minimal order for decoupling a linear multi-variable system. *International Journal of Control*, 14(6):1089–1103, 1971.
3. E. J. Davison and S. H. Wang. Properties and Calculation of Transmission Zeros of Linear Multivariable Systems. *Automatica*, 10(6):643–658, 1974.

4. J. Descusse, J. F. Lafay, and M. Malabre. Solution to Morgan's problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(8):732–739, 1988.
5. J. Descusse and R. Lizarzaburu. Triangular decoupling and pole placement in linear multivariable systems: a direct algebraic approach. *International Journal of Control*, 30(1):139–152, 1979.
6. J. M. Dion and C. Commault. On linear dynamic state feedback decoupling. In *Proceedings of the 24th IEEE Conference on Decision and Control*, 1985.
7. P. L. Falb and W. Wolovich. Decoupling in the design and synthesis of multivariable control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-12(6):651–659, 1967.
8. O. Föllinger. *Regelungstechnik: Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*. VDE Verlag, 2013.
9. E. G. Gilbert. The decoupling of multivariable systems by state feedback. *SIAM Journal on Control*, 7(1):50–63, 1969.
10. H. F. Grip and A. Saberi. Structural decomposition of linear multivariable systems using symbolic computations. *International Journal of Control*, 83(7):1414–1426, 2010.
11. A. N. Herrera H. and J. F. Lafay. New results about Morgan's problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(12):1834–1838, 1993.
12. S. Khodaverdian and J. Adamy. Distributed dynamic decoupling-based output synchronization for networks of linear heterogeneous MIMO agents. In *Proceedings of the 54th IEEE Conference on Decision and Control*, 2015.
13. S. Kolavennu, S. Palanki, and J. C. Cockburn. Nonlinear control of nonsquare multivariable systems. *Chemical Engineering Science*, 56(6):2103–2110, 2001.
14. T. G. Koussiouris. A frequency domain approach to the block decoupling problem – I. The solvability of the block decoupling problem by state feedback and a constant non-singular input transformation. *International Journal of Control*, 29(6):991–1010, 1979.
15. T. G. Koussiouris. A frequency domain approach to the block decoupling problem – II. Pole assignment while block decoupling a minimal system by state feedback and a constant non-singular input transformation and the observability of the block decoupled system. *International Journal of Control*, 32(3):443–464, 1980.
16. B. Lohmann. Vollständige Entkopplung durch dynamische Zustandsrückführung. *at – Automatisierungstechnik*, 39(9):459–464, 1991.
17. B. Lohmann. Vollständige und teilweise Führungsentkopplung dynamischer Systeme durch konstante Zustandsrückführung, Teil 1. *at – Automatisierungstechnik*, 39(9):329–334, 1991.
18. B. Lohmann. Vollständige und teilweise Führungsentkopplung dynamischer Systeme durch konstante Zustandsrückführung, Teil 2. *at – Automatisierungstechnik*, 39(9):376–378, 1991.
19. B. Lohmann. *Vollständige und teilweise Führungsentkopplung im Zustandsraum*. VDI-Fortschrittberichte, Reihe 8, Nr. 244, Diss., 1991.
20. A. G. J. MacFarlane and N. Karcanias. Poles and zeros of linear multivariable systems: a survey of the algebraic, geometric and complex-variable theory. *International Journal of Control*, 24(1):33–74, 1976.
21. M. Moness and M. H. Amin. Minimal-order precompensators for decoupling linear multivariable systems (A, B, C, E). *International Journal of Control*, 47(6):1925–1936, 1988.
22. B. S. Morgan. The synthesis of linear multivariable systems by state-variable feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 9(4):405–411, 1964.
23. A. S. Morse and W. M. Wonham. Decoupling and pole assignment by dynamic compensation. *SIAM Journal on Control*, 8(3):317–337, 1970.
24. A. S. Morse and W. M. Wonham. Triangular decoupling of linear multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 15(4):447–449, 1970.
25. A. S. Morse and W. M. Wonham. Status of noninteracting control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-16(6):568–581, 1971.
26. P. N. Paraskevopoulos and F. N. Koumboulis. A new approach to the decoupling problem of linear time-invariant systems. *Journal of the Franklin Institute*, 329(2):347–369, 1992.
27. P. Sannuti and A. Saberi. Special coordinate basis for multivariable linear systems – finite and infinite zero structure, squaring down and decoupling. *International Journal of Control*, 45(5):1655–1704, 1987.
28. S. Skogestad and I. Postlethwaite. *Multivariable Feedback Control: Analysis & Design*. Wiley, 2005.
29. A. Wahrburg und J. Adamy. Entkopplungsregelungen für lineare überaktuierte Systeme. *at – Automatisierungstechnik*, 61(1):28–38, 2013.
30. T. W. C. Williams and P. J. Antsaklis. A unified approach to the decoupling of linear multivariable systems. *International Journal of Control*, 44(1):181–201, 1986.
31. R. Zurmühl und S. Falk. *Matrizen und ihre Anwendungen, Teil 1: Grundlagen*. Springer-Verlag, 1984.

Autoreninformationen

Saman Khodaverdian, M.Sc.
Technische Universität Darmstadt, Institut für Automatisierungstechnik und Mechatronik, Fachgebiet Regelungsmethoden und Robotik, Landgraf-Georg-Str. 4, D-64283 Darmstadt,
Tel: +49-(0)6151-16-25037
saman.khodaverdian@rmr.tu-darmstadt.de

Saman Khodaverdian ist wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Regelungsmethoden und Robotik im Institut für Automatisierungstechnik und Mechatronik der Technischen Universität Darmstadt. Hauptarbeitsgebiete: Multi-Agenten-Systeme, verteilte und kooperative Regelung, robuste Regelung.