Analytische Berechnung der laplacetransformierten Transitionsmatrix

Analytic Form of the Laplace-Transformed Transition Matrix

Jürgen Adamy und Roland Kempf

In diesem Beitrag wird in analytischer Form die Laplacetransformierte der Transitionsmatrix, d.h. $(sI - A)^{-1}$ angegeben, wenn die Matrix A in Form einer Begleitmatrix vorliegt. Ausgehend von diesem Fall lässt sich die Laplacetransformierte der Transitionsmatrix für jede nicht derogatorische Matrix A angeben. Zum Beispiel besitzen alle steuerbaren bzw. beobachtbaren SISO-Systeme nicht derogatorische Systemmatrizen.

This note presents the analytic solution of the Laplace transformed transition matrix, i. e. $(sI - A)^{-1}$, in the case of the matrix A being given as a companion matrix. Starting from this case, we can compute the Laplace transformed transition matrix of a general non-derogatory matrix A. E. g., controllable and observable SISO-systems have non-derogatory system matrices.

Schlagwörter: Transitionsmatrix, Begleitmatrix, Inverse Matrix

Keywords: Transition matrix, companion matrix, inverse matrix

Für die Berechnung der Zeitlösung linearer Systeme $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$ wird oftmals die Transitionsmatrix $e^{\mathbf{A}t}$ verwendet. Für ihre Berechnung gibt es eine Reihe von Verfahren [1]. Da für die Laplacetransformierte

$$\mathcal{L}\left\{e^{\mathbf{A}t}\right\} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$$

gilt, ist es sehr nützlich, wenn man $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ analytisch angeben kann. Dies ist beispielsweise über die Leverrier-Sourian-Faddeeva-Frame-Formeln [2; 3] möglich. Eine weitere Methode führt über den folgenden Satz:

Satz 1 *Für eine Begleitmatrix*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \tag{1}$$

ist

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{N(s)}\mathbf{C} \tag{2}$$

mit $N(s) = \sum_{i=0}^{n} a_i s^i$, $a_n = 1$ *und den Elementen*

$$c_{k,l} = \begin{cases} +\sum\limits_{i=l}^{n} a_i s^{i+k-l-1} & \text{für } k \leq l\,, \\ -\sum\limits_{i=0}^{l-1} a_i s^{i+k-l-1} & \text{für } k > l\,, \end{cases} \tag{3}$$

der $n \times n$*-Matrix* $\mathbf{C}$.

Beweis Die Elemente von $\mathbf{A}$ in Gl. (1) lassen sich schreiben als $a_{l,m} = \delta_{l+1,m} - a_{m-1}\delta_{l,n}$ mit dem Kronecker-Delta

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j\,, \\ 0 & \text{für } i \neq j\,. \end{cases}$$

Setze nun $\mathbf{B} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})$. Dann sind

$$b_{l,m} = s\delta_{l,m} - \delta_{l+1,m} + a_{m-1}\delta_{l,n}\,.$$

Die Matrix $\mathbf{C}$ sei durch Gl. (3) festgelegt.

Anstelle der Behauptung $\mathbf{B}^{-1} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{C}/N(s)$ aus Gl. (2) wird im Folgenden die dazu äquivalente Behauptung $\mathbf{C}\mathbf{B} = N(s) \cdot \mathbf{I}$ bewiesen.

Die Elemente $(\mathbf{CB})_{k,m}$ der Matrix $\mathbf{CB}$ sind

$$(\mathbf{CB})_{k,m} = \sum_{l=1}^{n} c_{k,l} b_{l,m} = \sum_{l=1}^{n} \left(c_{k,l} s \delta_{l,m} - c_{k,l} \delta_{l+1,m} + c_{k,l} a_{m-1} \delta_{l,n} \right).$$

Die einzelnen Terme in obiger Summe sind aufgrund der δ-Terme nur dann von null verschieden, wenn $l = m$, $l = m-1$ bzw. $l = n$. Damit ist die Summe über l einfach zu bestimmen und es ergibt sich: $(\mathbf{CB})_{k,m} = s c_{k,m} - c_{k,m-1} + a_{m-1} c_{k,n}$. Mit der Definition der Matrix $\mathbf{C}$ aus Gl. (3) folgt

$$c_{k,n} = \sum_{i=n}^{n} a_i s^{i+k-n-1} = a_n s^{k-1} = s^{k-1}$$

und somit ist

$$(\mathbf{CB})_{k,m} = s c_{k,m} - c_{k,m-1} + a_{m-1} s^{k-1}. \tag{4}$$

Im Folgenden wird die Definition der Matrixeinträge $\mathbf{C}$ aus Gl. (3) verwendet und in Gl. (4) eingesetzt. Dabei sind drei Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: $k = m$ (Hauptdiagonale von $\mathbf{CB}$)

$$\begin{aligned}(\mathbf{CB})_{k,k} &= s c_{k,k} - c_{k,k-1} + a_{k-1} s^{k-1} \\ &= s \sum_{i=k}^{n} a_i s^{i-1} + \sum_{i=0}^{k-2} a_i s^i + a_{k-1} s^{k-1} \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i s^i = N(s).\end{aligned}$$

2. Fall: $k > m$ (linke, untere Dreieckshälfte von $\mathbf{CB}$)

$$\begin{aligned}(\mathbf{CB})_{k,m} &= s \left(-\sum_{i=0}^{m-1} a_i s^{i+k-m-1} \right) \\ &\quad - \left(-\sum_{i=0}^{m-2} a_i s^{i+k-m} \right) + a_{m-1} s^{k-1} \\ &= -a_{m-1} s^{k-1} + a_{m-1} s^{k-1} = 0.\end{aligned}$$

3. Fall: $k < m$ (rechte, obere Dreieckshälfte von $\mathbf{CB}$)

$$\begin{aligned}(\mathbf{CB})_{k,m} &= s \left(\sum_{i=m}^{n} a_i s^{i+k-m-1} \right) \\ &\quad - \left(\sum_{i=m-1}^{n} a_i s^{i+k-m} \right) + a_{m-1} s^{k-1} \\ &= -a_{m-1} s^{k-1} + a_{m-1} s^{k-1} = 0.\end{aligned}$$

Aus den drei Fällen folgt $\mathbf{CB} = N(s) \cdot \mathbf{I}$. □

Obiger Satz lässt sich ganz allgemein auf Matrizen $\mathbf{A}$ anwenden, die sich durch Koordinatentransformation in die Form einer Begleitmatrix bringen lassen[1]. Diese Transformation ist dann und nur dann möglich, wenn die Matrizen $\mathbf{A}$ nicht derogatorisch sind, das heißt, dass sie zu jedem – eventuell mehrfachen – Eigenwert genau einen Eigenvektor besitzen [4]. Das Vorgehen wird im Folgenden anhand der Systemmatrix eines steuerbaren Systems $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}u$ illustriert. Eine solche Matrix $\mathbf{A}$ ist immer nicht derogatorisch.

Jedes steuerbare System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}u$ kann in Regelungsnormalform (RNF) transformiert werden. Die Systemmatrix $\mathbf{A}_{RNF}$ hat nach einer solchen Transformation $\mathbf{A}_{RNF} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}$ die Form einer Begleitmatrix aus Gl. (1) [3]. Aus Satz 1 folgt $(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{RNF})^{-1} = \mathbf{C}/N(s)$ und für die ursprüngliche Matrix $\mathbf{A}$ nach der Rücktransformation:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{N(s)} \mathbf{TCT}^{-1}.$$

Beobachtbare Systeme können analog behandelt werden: Nach der entsprechenden Transformation des Systems in Beobachtungsnormalform (BNF) hat die transformierte Systemmatrix $\mathbf{A}_{BNF} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}$ die Form der transponierten Begleitmatrix aus Gl. (1). Dann gilt $(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{BNF})^{-1} = \mathbf{C}^T / N(s)$ und

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{N(s)} \mathbf{TC}^T\mathbf{T}^{-1}$$

für die ursprüngliche Matrix $\mathbf{A}$.

Literatur

[1] C. Moler, C. van Loan, „Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix, Twenty-Five Years later", *SIAM Review* 45(1):3–49, 2003.

[2] T. Kailath, Linear Systems, Prentice Hall, Upper Saddle River, 1980.

[3] J. Lunze, „Regelungstechnik 1", *Springer, Berlin, 2004.*

[4] J. Stoer, R. Bulirsch, Introduction to numerical analysis, Springer, New York, 2002.

Manuskripteingang: 7. November 2006.

Prof. Dr.-Ing. Jürgen Adamy ist Leiter des Fachgebietes Regelungstheorie und Robotik im Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik der Technischen Universität Darmstadt. Hauptarbeitsgebiete: Regelungsverfahren, Computational Intelligence, Bionik und mobile Robotik.

Adresse: Technische Universität Darmstadt, Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik, Fachgebiet Regelungstheorie und Robotik, 64283 Darmstadt, Fax: +49-(0)6151-16-2507,
E-Mail: adamy@rtr.tu-darmstadt.de

Dr. rer. nat. Roland Kempf, MA habilitiert sich am Fachgebiet Regelungstheorie und Robotik im Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik der Technischen Universität Darmstadt. Hauptarbeitsgebiete: Fuzzy-Systeme, nichtlineare Regelungen.

Adresse: Technische Universität Darmstadt, Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik, Fachgebiet Regelungstheorie und Robotik, 64283 Darmstadt, Fax: +49-(0)6151-16-2507,
E-Mail: rkempf@rtr.tu-darmstadt.de

[1] Prinzipiell lässt sich jede Matrix in die – blockdiagonale – Frobeniusnormalform bringen, deren Einzelblöcke Begleitmatrizen sind, und blockweise mit Satz 1 behandeln.