Grundlegung einer widerspruchsfreien Nichtstandard-Mathematik

Von den erblich-endlichen Mengen zu den hyperrationalen Zahlen

Peter Zahn

Abstract: In §1 we introduce hereditarily finite sets by the rules $\Rightarrow \emptyset$ and $a, b \Rightarrow a\{b\}$ (i.e. from the premises a, b derive $a\{b\}$). The relation '$\subseteq$' between those sets can be introduced by the rules

$$\begin{array}{rcll} & \Rightarrow & \emptyset \subseteq c & \\ b \in c & \Rightarrow & b \in c\{d\} & \text{(where } b \in c \;:\eqqcolon\; \emptyset\{b\} \subseteq c\text{)} \\ b = d & \Rightarrow & b \in c\{d\} & \text{(where } b = d \;:\eqqcolon\; b \subseteq d, d \subseteq b\text{)} \\ a \subseteq c, b \in c & \Rightarrow & a\{b\} \subseteq c & \text{(if } a \not\equiv \emptyset\text{).} \end{array}$$

We can write $\{a, b\}$ for $\emptyset\{a\}\{b\}$, e.g. The hereditarily finite sets satisfy the axioms of ZFC without the axiom of infinity. In §2 we transcribe those axioms into Skolem form. In §1 we partly argue informally. To justify those argumentations, in §3 we investigate an obviously consistent rule system in which the theory of hereditarily finite sets is deducible. However, that rule system is not a formal one. It containes a rule with infinitely many premises. In §4 we sketch well-known facts of elementary proof theory that lead to the following result of Jacques Herbrand [3]: If $\Sigma, \forall x\, Fx$ is an inconsistent (finite) list of formulas in Skolem form, then there exists a tuple $s_1, \ldots, s_k$ ($k \geq 0$) of terms such that $\Sigma, Fs_1, \ldots, Fs_k$ is inconsistent. (Those formulas and terms are supposed to belong to a pertinent formal language.)

The main part of this paper is §5, containing a consistency proof of a modification, zfc*, of ZFC. In this proof we make use of the mentioned result of Herbrand and the fact that the hereditarily finite sets satisfy ZFC without the axiom of infinity. This proof will also be discussed with regard to the second incompleteness theorem of Gödel. In §6 we draw some general conclusions from zfc* concerning extensions of the natural numbers.

In §7 we introduce extensions of the usual set $\mathbb{Q}$ of rational numbers and give some introductory examples of Nonstandard Analysis.

§8 (Appendix) containes an interpretion of the rule system investigated in §3 by means of dialogue games.

Note: Wilhelm Ackermann [1] has proved that Zermelo-Fraenkel set theory in which the axiom of infinity is replaced by its negation is equiconsistent to Peano's first order arithmetic. The latter theory has been proved to be consistent by Gerhard Gentzen [2].

§1. Ein Modell von ZFC ohne Unendlichkeitsaxiom

Ausgehend von der leeren Menge $\emptyset$ konstruieren wir schrittweise 'erblich-endliche' Mengen $\{a_1, \ldots, a_n\}$ aus ihren Elementen a_i, falls diese schon konstruiert sind. (Genauer gesagt konstruieren wir Schreibfiguren zur Darstellung derartiger '$\mathcal{E}$-Mengen'.) Dabei fassen wir $\{a_1, \ldots, a_n\}$ als Abkürzung für $\emptyset\{a_1\}\{a_2\}\ldots\{a_n\}$ auf. Die Konstruktionsregeln lauten

$$\begin{array}{rcll} & \Rightarrow & \emptyset & \text{(Beginn mit } \emptyset\text{)} \\ a,, b & \Rightarrow & a\{b\} & \text{(Übergang von } a \text{ und } b \text{ zu } a\{b\}\text{).} \end{array}$$

a und b fungieren hier als Eigenvariable, d.h. als Variable für jeweils schon konstruierte Figuren. Auch im Folgenden diene der Regelpfeil '$\Rightarrow$' zur Mitteilung der Erlaubnis, die Konklusion des betreffenden Regeleinzelfalles herzuleiten, nachdem dessen Prämissen hergeleitet worden sind. Zur Trennung mehrerer Prämissen verwenden wir doppelte Kommata ',,' (da einfache Kommata in Prämissen und Konklusionen mancher in §3 - §5 angeführten Regeln vorkommen).

$\mathcal{E}$ sei die Klasse der so konstruierbaren Schreibfiguren, die wir $\mathcal{E}$-Konstante oder (bez. $(=)$ abstrahierend) $\mathcal{E}$-Mengen nennen. Wir konstruieren nun eine Sprache über $\mathcal{E}$-Mengen: $\mathcal{E}$-Terme seien diejenigen Schreibfiguren, die nach den Regeln zur Konstruktion von $\mathcal{E}$-Konstanten zuzüglich der Erlaubnis, mit Variablen (z.B. $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$) zu beginnen, konstruierbar sind. $\mathcal{E}$-Konstante sind also geschlossene $\mathcal{E}$-Terme (d.h. solche, in denen keine Variablen vorkommen). - $\mathcal{E}$-Formeln seien die atomaren Formeln $\alpha \subseteq \beta$ mit $\mathcal{E}$-Termen α, β, sowie mit F, G stets auch $\neg F$, $(F \wedge G)$ und $\forall x\, F$. Weitere $\mathcal{E}$-Terme und $\mathcal{E}$-Formeln soll es nicht geben. - Geschlossene Formeln (d.h. solche, in denen keine Variablen *frei* vorkommen) einer Sprache nennen wir deren Aussagen.

Zur Mitteilung dieser Figuren verwenden wir Metavariable, und zwar
für Variable: $u, v, w, x, y, z, x_1 \ldots;$
für $\mathcal{E}$-Konstante: $a, b, c, d, a_1, \ldots;$
für $\mathcal{E}$-Terme: $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \ldots, c(x), \ldots;$
für $\mathcal{E}$-Aussagen: $A, B, \ldots$; für Formeln: F, G.

Die in einer Formel durch verschiedene Metavariable mitgeteilten Variablen seien stets voneinander verschieden. Abkürzungen (mit '$:\rightleftharpoons$' als Definitionszeichen):

$$\begin{array}{rcl} \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} & :\rightleftharpoons & \emptyset\{\alpha_1\}\ldots\{\alpha_n\} \\ \alpha \in \beta & :\rightleftharpoons & \{\alpha\} \subseteq \beta \\ \alpha \subseteq \beta \subseteq \gamma & :\rightleftharpoons & \alpha \subseteq \beta \ \wedge \ \beta \subseteq \gamma \\ \alpha = \beta & :\rightleftharpoons & \alpha \subseteq \beta \subseteq \alpha \\ (F \vee G) & :\rightleftharpoons & \neg(\neg F \wedge \neg G) \\ (F \to G) & :\rightleftharpoons & \neg(F \wedge \neg G) \\ (F \to G \to H) & :\rightleftharpoons & (F \to G) \wedge (F \wedge G \to H) \ \text{ etc.} \\ \exists x\, F & :\rightleftharpoons & \neg\forall x\, \neg F. \end{array}$$

Diese Abkürzungen mögen auch für später eingeführte Terme bzw. Formeln gelten.

'$\equiv$' bezeichne die gestaltliche (buchstäbliche) Gleichheit von Schreibfiguren. Für spezielle Negate schreiben wir kurz $\alpha \not\subseteq \beta, \alpha \notin \beta, \alpha \neq \beta$ bzw. $\alpha \not\equiv \beta$. Ferner verwenden wir geläufige Konventionen zur Klammerersparnis.

Eine Aussage der Form $a \subseteq b$ bedeute, dass sie nach den folgenden Regeln $(\subseteq)1$ - $(\subseteq)4$ herleitbar ist; d.h. wir stellen die 'Behauptungsregel' auf: Behaupte $a \subseteq b$ nur dann, wenn diese Aussage nach den folgenden Regeln herleitbar ist:

$$\begin{array}{lrcl}
(\subseteq)1 & & \Rightarrow & \emptyset \subseteq c \\
(\subseteq)2 & b \in c & \Rightarrow & b \in c\{d\} \\
(\subseteq)3 & b = d & \Rightarrow & b \in c\{d\} \\
(\subseteq)4 & a \subseteq c,, \; b \in c & \Rightarrow & a\{b\} \subseteq c \quad (\text{für } a \not\equiv \emptyset).
\end{array}$$

Für komplexe Aussagen stellen wir vorläufig folgende 'Behauptungsregeln' auf:
Behaupte $A \wedge B$ nur dann, wenn man A behaupten darf und B behaupten darf (d.h. wenn diese Behauptungen nach den hier angegebenen Regeln nicht verboten sind).
Behaupte $\forall x\, Ax$ nur dann, wenn man Ac für beliebige $\mathcal{E}$-Mengen c behaupten darf.
Behaupte $\neg\, A$ nur dann, wenn es (nach den hier angegebenen Regeln) verboten ist, A zu behaupten.

In §3 werden wir diese Regeln durch präzisere Regeln eines sog. Halbformalismus ersetzen. Die Ausführungen in §3 gehörenen also systematisch an den Anfang unserer Untersuchungen.

Die angegebenen Behauptungsregeln sind umkehrbar (da wir keine weiteren aufstellen). Das heißt: Ist eine atomare Aussage $a \subseteq b$ nach den Regeln $(\subseteq)1 - (\subseteq)4$ herleitbar, dann darf man sie behaupten. Darf man A sowie B behaupten, so auch $A \wedge B$. Darf man Ac für beliebige $\mathcal{E}$-Mengen c behaupten, so auch $\forall x\, Ax$. Ist es verboten, A zu behaupten, so darf man $\neg\, A$ behaupten. Da man jeweils entscheiden kann, ob $a \subseteq b$ nach den Regeln $(\subseteq)1 - (\subseteq)4$ herleitbar ist, sind Aussagen dieser Form stabil (d.h. man darf von $\neg\neg\, a \subseteq b$ auf $a \subseteq b$ schließen). Daher sind bekanntlich alle $\mathcal{E}$-Aussagen stabil, sodass man im Bereich dieser Aussagen die klassische Logik anwenden darf.

Wir wollen zeigen, dass die $\mathcal{E}$-Mengen die Axiome ZFC von Zermelo und Fraenkel außer dem Unendlichkeitsaxiom erfüllen.

1.1. Lemma: $a\{b\} \not\subseteq \emptyset$, insbesondere $b \notin \emptyset$, also

$$c \subseteq \emptyset \;\leftrightarrow\; c = \emptyset \;\leftrightarrow\; c \equiv \emptyset.$$

Beweis: $b \in \emptyset$ kommt nicht als Konklusion der Regeln $(\subseteq)1$ - $(\subseteq)4$ vor. Daher ist $a\{b\} \subseteq \emptyset$ auch nicht nach $(\subseteq)4$ herleitbar. $\square$

1.2. Lemma: $b \in c\{d\} \;\leftrightarrow\; b \in c \;\vee\; b = d.$

Beweis: $b \in c\{d\}$ kann nach $(\subseteq)2$ oder $(\subseteq)3$ (und auch nur nach diesen Regeln) aus der Prämisse $b \in c$ oder aus $b = d$ gefolgert werden. $\square$

1.3. Lemma: $\quad a\{b\} \subseteq c \leftrightarrow a \subseteq c \wedge b \in c.$

Beweis: Für $a \equiv \emptyset$ ist 1.3 wegen $(\subseteq)1$ äquivalent mit $b \in c \leftrightarrow b \in c$. Nun sei $a \not\equiv \emptyset$. Dann steht zur Herleitung von $a\{b\} \subseteq c$ nur $(\subseteq)4$ mit den Prämissen $a \subseteq c$ und $b \in c$ zur Verfügung. $\square$

1.4. Lemma: $\quad a \subseteq c \rightarrow a \subseteq c\{d\},$

Der Beweis ergibt sich durch Induktion über (die Konstruktion von) a aus $\emptyset \subseteq c\{d\}$ und Folgendem:

$$\begin{aligned} a\{b\} \subseteq c \;&\rightarrow\; a \subseteq c \wedge b \in c && \text{(nach 1.3)} \\ &\rightarrow\; a \subseteq c\{d\} \wedge b \in c\{d\} && \text{(Induktionsannahne und } (\subseteq)2) \\ &\rightarrow\; a\{b\} \subseteq c\{d\} && ((\subseteq)4).\ \square \end{aligned}$$

1.5. Korollar: $\mathcal{E}$-Terme $c(x)$ sind *invariant* bezüglich $(=)$:

$$a = b \rightarrow c(a) = c(b).$$

Der Beweis gelingt durch Induktion über die Konstruktion der $\mathcal{E}$-Terme. Denn nach 1.4, $(\subseteq)3$ und $(\subseteq)4$ gilt:

$$a \subseteq c \wedge b = d \rightarrow a \subseteq c\{d\} \wedge b \in c\{d\} \rightarrow a\{b\} \subseteq c\{d\}, \quad \text{also}$$
$$a = c \wedge b = d \rightarrow a\{b\} = c\{d\}. \quad \square$$

1.6. Lemma: $\quad a \subseteq b \subseteq c \rightarrow a \subseteq c.$

Beweis durch Induktion über a: Für $a \equiv \emptyset$ gilt $a \subseteq c$ nach $(\subseteq)1$. Von nun an sei $a \not\equiv \emptyset$. Im Falle $b \equiv \emptyset$ gilt $a \not\subseteq b$ nach 1.1, also $(a \subseteq b \subseteq c \rightarrow a \subseteq c)$. Für $b \not\equiv \emptyset$ und $c \equiv \emptyset$ gilt $b \not\subseteq c$ nach 1.1, also $(a \subseteq b \subseteq c \rightarrow a \subseteq c)$. Nun setzen wir $a \equiv a_1\{a_2\}$, $b \equiv b_1\{b_2\}$, $c \equiv c_1\{c_2\}$, und machen folgende Induktionsannahmen:

(a) $\quad a_1 \subseteq b \subseteq c \rightarrow a_1 \subseteq c.$

(b1) $\quad \{a_2\} \subseteq b_1 \subseteq c \rightarrow \{a_2\} \subseteq c.$

(b2) $\quad a_2 = b_2 = c_2 \rightarrow a_2 = c_2.$

(c) $\quad \{a_2\} \subseteq \{b_2\} \subseteq c_1 \rightarrow \{a_2\} \subseteq c_1.$

(Beachte, dass die Tripel (a_1, b, c), $(\{a_2\}, b_1, c)$, (a_2, b_2, c_2), (c_2, b_2, a_2), $(\{a_2\}, \{b_2\}, c_1)$ kürzer als (a, b, c) sind.)

Ferner machen wir die Annahme $a \subseteq b \subseteq c$, und haben zu zeigen: $a \subseteq c$.

Nach 1.3 erhalten wir: $a_1 \subseteq b$, $a_2 \in b$ sowie $b_1 \subseteq c$ und $b_2 \in c$.

Wegen $a_1 \subseteq b \subseteq c$ folgt $a_1 \subseteq c$ nach (a).

Nach 1.2 folgt ferner $a_2 \in b_1$ oder $a_2 = b_2$, sowie $b_2 \in c_1$ oder $b_2 = c_2$.

Im Falle $a_2 \in b_1 \subseteq c$ erhalten wir $a_2 \in c$ nach (b1).

Nun sei $a_2 = b_2 \in c_1$. Nach $(\subseteq)3$ erhalten wir $a_2 \in \{b_2\} \subseteq c_1$, also $a_2 \in c_1$ nach (c), also $a_2 \in c$ nach $(\subseteq)2$.

Im übrigen Falle $a_2 = b_2 = c_2$ ist $a_2 = c_2$ nach (b2), also wieder $a_2 \in c$ nach $(\subseteq)3$. Jedenfalls haben wir $a_1 \subseteq c$ (s.o.) und $a_2 \in c$, also $a \subseteq c$ nach $(\subseteq)4$. $\Box$

1.7. Lemma: $\forall x\,(x \in a \;\to\; x \in b) \;\leftrightarrow\; a \subseteq b$,
also auch $\forall x\,(x \in a \;\leftrightarrow\; x \in b) \;\leftrightarrow\; a = b$.

Beweis: $(\leftarrow)$ folgt aus 1.6. Wir beweisen $(\to)$ durch Induktion über a:
Für $a \equiv \emptyset$ gilt $a \subseteq b$ nach $(\subseteq)1$. Nun sei $a :\equiv a_1\{a_2\}$. Ind.ann.: 1.7 gelte für a_i statt für a $(i = 1, 2)$. Vorausgesetzt sei ferner $\forall x\,(x \in a \;\to\; x \in b)$. Nach $(\subseteq)2$ erhalten wir $\forall x\,(x \in a_1 \;\to\; x \in a \;\to\; x \in b)$, also $a_1 \subseteq b$ nach Ind.ann. Ferner gilt $a_2 = a_2$ nach Ind.ann., also $a_2 \in a$ nach $(\subseteq)3$, also $a_2 \in b$, also insgesamt $a \subseteq b$ nach $(\subseteq)4$. $\Box$

1.8. Satz: Für alle $\mathcal{E}$-Formeln $\mathcal{C}x$, in denen nur die Variable x frei vorkommt, und alle a, b gilt:

$$a = b \;\to\; (\mathcal{C}a \;\leftrightarrow\; \mathcal{C}b).$$

Beweis: Aus 1.5 und 1.6 erhält man: $a = b \;\to\; \big(c(a) \subseteq d(a) \;\leftrightarrow\; c(b) \subseteq d(b)\big)$. Daraus folgt 1.8 durch Induktion über den Aufbau von $\mathcal{C}x$. $\Box$

1.9. Lemma: $a \subseteq \{b\} \;\leftrightarrow\; a = \emptyset \;\vee\; a = \{b\}$.

Beweis:

$$\begin{array}{rcl} a \subseteq \{b\} & \to & a = \emptyset \;\vee\; \exists x\,(x \in a \;\wedge\; x = b) \\ & \to & a = \emptyset \;\vee\; b \in a \\ & \to & a = \emptyset \;\vee\; \{b\} \subseteq a; \quad \text{also} \\ a \subseteq \{b\} & \leftrightarrow & a = \emptyset \;\vee\; a = \{b\} \quad \text{(s. } (\subseteq)1). \;\Box \end{array}$$

Definitionen, rekursiv:

$$\begin{array}{rcl} a \cup \emptyset & :\equiv & a \\ a \cup b\{c\} & :\equiv & (a \cup b)\{c\} \\ \bigcup_{y \in \emptyset} c(y) & :\equiv & \emptyset \\ \bigcup_{y \in a\{b\}} c(y) & :\equiv & \bigcup_{y \in a} c(y) \cup c(b) \\ \mathcal{V}a & :\equiv & \bigcup_{y \in a} y \\ a \cap \emptyset & :\equiv & \emptyset \\ a \cap b\{c\} & :\equiv & \begin{cases} (a \cap b)\{c\}, & \text{falls } c \in a \\ a \cap b, & \text{falls } c \notin a \end{cases} \\ \mathcal{P}\emptyset & :\equiv & \{\emptyset\} \\ \mathcal{P}(a\{b\}) & :\equiv & \bigcup_{y \in \mathcal{P}a} \{y, y\{b\}\} \end{array}$$

Hinweis: Hiernach sind z.B. Terme der Formen $a \cup z, \bigcup_{y \in z} c(y), \mathcal{P}z$ noch nicht definiert.

1.10. Satz: $\forall x\,(x \in a \cup b \;\leftrightarrow\; x \in a \;\vee\; x \in b)$.

Beweis durch Induktion über b: Für $b \equiv \emptyset$ gilt:

$$x \in a \cup \emptyset \;\leftrightarrow\; x \in a \;\leftrightarrow\; x \in a \;\vee\; x \in \emptyset \quad (\text{da } x \notin \emptyset).$$

Aus 1.10 als Ind.ann. folgt ferner:

$$\begin{array}{rcccl} x \in a \cup b\{c\} & \leftrightarrow & x \in (a \cup b)\{c\} & \leftrightarrow & x \in a \cup b \;\vee\; x = c \\ & \leftrightarrow & x \in a \;\vee\; x \in b \;\vee\; x = c & \leftrightarrow & x \in a \;\vee\; x \in b\{c\}. \quad \square \end{array}$$

1.11. Satz: $\forall x\,(x \in \bigcup_{y \in a} c(y) \;\leftrightarrow\; \exists y \in a\;\, x \in c(y))$,
speziell: $\forall x\,(x \in \mathcal{V}a \;\leftrightarrow\; \exists y\,(x \in y \in a))$.

Beweis durch Induktion über a: $x \in \bigcup_{y \in \emptyset} c(y) \;\leftrightarrow\; x \in \emptyset \;\leftrightarrow\; \exists y \in \emptyset\;\, x \in c(y)$.

$$\begin{array}{rcl} x \in \bigcup_{y \in a\{b\}} c(y) & \leftrightarrow & x \in \bigcup_{y \in a} c(y) \cup c(b) \\ & \leftrightarrow & x \in \bigcup_{y \in a} c(y) \;\vee\; x \in c(b) \\ & \leftrightarrow & \exists y \in a\;\, x \in c(y) \;\vee\; x \in c(b) \quad (\text{nach Ind.ann.}) \\ & \leftrightarrow & \exists y \in a\;\, x \in c(y) \;\vee\; \exists y = b\;\, x \in c(y) \\ & \leftrightarrow & \exists y \in a\{b\}\;\, x \in c(y). \quad \square \end{array}$$

1.12. Satz: $\forall x\,(x \in a \cap b \;\leftrightarrow\; x \in a \;\wedge\; x \in b)$.

Beweis durch Induktion über b: $x \in a \cap \emptyset \;\leftrightarrow\; x \in \emptyset \;\leftrightarrow\; x \in a \;\wedge\; x \in \emptyset$.
Für $c \in a$ (also $a\{c\} = a$) folgt aus der Ind.ann.:

$$\begin{array}{rcl} x \in a \cap b\{c\} & \leftrightarrow & x \in (a \cap b)\{c\} \;\leftrightarrow\; x \in a \cap b \;\vee\; x = c \\ & \leftrightarrow & (x \in a \;\wedge\; x \in b) \;\vee\; x = c \\ & \leftrightarrow & x \in a\{c\} \;\wedge\; x \in b\{c\} \\ & \leftrightarrow & x \in a \;\wedge\; x \in b\{c\} \quad (\text{wegen } a\{c\} = a). \end{array}$$

Nun sei $c \notin a$. Dann gilt nach Ind.ann.:

$$\begin{array}{rcl} x \in a \cap b\{c\} & \leftrightarrow & x \in a \cap b \;\leftrightarrow\; x \in a \;\wedge\; x \in b \\ & \rightarrow & x \in a \;\wedge\; x \in b\{c\} \\ & \rightarrow & x \in a \;\wedge\; (x \in b \;\vee\; x = c) \\ & \rightarrow & (x \in a \;\wedge\; x \in b) \;\vee\; (x \in a \;\wedge\; x = c) \\ & \rightarrow & (x \in a \;\wedge\; x \in b) \;\vee\; c \in a \\ & \rightarrow & x \in a \;\wedge\; x \in b \qquad (\text{da } c \notin a) \quad \square \end{array}$$

1.13. Satz: $\forall x\,(x \in \mathcal{P}a \;\leftrightarrow\; x \subseteq a)$.

Beweis durch Induktion über a: Für $a \equiv \emptyset$ gilt: $x \in \mathcal{P}\emptyset \leftrightarrow x \in \{\emptyset\} \leftrightarrow x \subseteq \emptyset$ (da $\emptyset \subseteq x$). Ferner folgt aus der Ind.ann.:

$$\begin{array}{rcll}
x \in \mathcal{P}(a\{b\}) & \leftrightarrow & x \in \bigcup_{y \in \mathcal{P}a} \{y, y\{b\}\} & \\
& \leftrightarrow & \exists y \in \mathcal{P}a \;\; x \in \{y, y\{b\}\} & (1.11) \\
& \leftrightarrow & \exists y \subseteq a \;\; (x = y \;\vee\; x = y\{b\}) & (\text{Ind.ann.}) \\
& \rightarrow & x \subseteq a \;\vee\; x \subseteq a\{b\} & (1.2,\ 1.7) \\
& \rightarrow & x \subseteq a\{b\} & (1.4) \\
& \rightarrow & x = x \cap a\{b\} & \\
& \rightarrow & x = x \cap a \;\vee\; x = (x \cap a)\{b\} & (\text{Def. } \cap) \\
& \rightarrow & \exists y \subseteq a \;\; (x = y \;\;\vee\;\; x = y\{b\}) & (y \text{ `für' } a \cap x). \quad \square
\end{array}$$

Zusammenfassung (auch ohne die Funktionssymbole $\mathcal{V}, \mathcal{P}$): Für alle x, a, b gilt:

$$\begin{array}{rcll}
& & x \notin \emptyset & \\
x \in \{a, b\} & \leftrightarrow & x = a \;\vee\; x = b & \\
x \in \mathcal{V}a & \leftrightarrow & \exists y\, (x \in y \in a), & \text{also} \quad \forall u\, \exists v\, \forall x\, (x \in v \leftrightarrow \exists y\, (x \in y \in u)) \\
x \in \mathcal{P}a & \leftrightarrow & x \subseteq a, & \text{also} \quad \forall u\, \exists v\, \forall x\, (x \in v \leftrightarrow x \subseteq u).
\end{array}$$

(Die beiden zuletzt rechts angeführten Aussagen lassen sich auch ohne Heranziehen der rekursiven Definitionen von $\mathcal{V}$ und $\mathcal{P}$ beweisen.) Unser 'Modell' erfüllt somit die ZF-Axiome der leeren Menge, der Paarmenge, der Vereinigungsmenge und der Potenzmenge sowie 1.7 und 1.8 als Gleichheitsaxiome. Nun zeigen wir, dass unser Modell auch folgende Ersetzungsaxiome erfüllt.

1.14. Satz: $\mathcal{C}uv$ sei eine $\mathcal{E}$-Formel, die eine (evtl. partielle) Abbildung aus $\mathcal{E}$ in sich beschreibt, d.h. für die gilt:

$$\forall u, v, w\, (\mathcal{C}uv \;\wedge\; \mathcal{C}uw \;\rightarrow\; v = w).$$

Dann gilt für beliebige a: $\quad \exists y\, \forall v\, (v \in y \;\leftrightarrow\; \exists u \in a \;\; \mathcal{C}uv)$.

Beweis durch Induktion über den Aufbau von a: Zunächst gilt $\forall v\, (\exists u \in \emptyset \;\; \mathcal{C}uv \;\leftrightarrow\; v \in \emptyset)$. Nun machen wir die Ind.ann.: $\forall v\, (\exists u \in a \;\; \mathcal{C}uv \;\leftrightarrow\; v \in c)$. Im Falle $\exists v\; \mathcal{C}bv$ dürfen wir ferner $\mathcal{C}bd$ annehmen. Dann gilt für alle v

$$\begin{array}{rcl}
\exists u \in a\{b\} \;\; \mathcal{C}uv & \leftrightarrow & \exists u\, (u \in a \;\wedge\; \mathcal{C}uv) \;\vee\; \exists u\, (u = b \;\wedge\; \mathcal{C}uv) \\
& \leftrightarrow & \exists u \in a \;\; \mathcal{C}uv \;\vee\; \mathcal{C}bv \\
& \leftrightarrow & v \in c \;\;\vee\;\; v = d \quad (\text{wegen } \mathcal{C}bd) \\
& \leftrightarrow & v \in c\{d\}.
\end{array}$$

Im anderen Falle $\neg\exists v\; \mathcal{C}bv$ gilt für alle v

$$\begin{array}{rcl}
\exists u \in a\{b\} \;\; \mathcal{C}uv & \leftrightarrow & \exists u \in a \;\; \mathcal{C}uv \;\vee\; \mathcal{C}bv \\
& \leftrightarrow & \exists u \in a \;\; \mathcal{C}uv \\
& \leftrightarrow & v \in c. \quad \square
\end{array}$$

Für logische Untersuchungen ist es zweckdienlich, 1.14 wie folgt als das **Ersetzungsaxiomenschema** zu notieren, wobei Guv für Formeln steht, in denen außer u und v noch weitere Variable '…' frei vorkommen dürfen:

$$\forall \ldots (\forall u, v, w\, (Guv \;\wedge\; Guw \;\to\; v = w) \;\to \\ \to\; \forall x\, \exists y\, \forall v\, (v \in y \;\leftrightarrow\; \exists u \in x.\, Guv)).$$

Für Formeln Guv der Gestalt $Gu \wedge u = v$ erhält man insbesondere das **Aussonderungsaxiomenschema**:

$$\forall \ldots \forall x\, \exists y\, \forall v\, (v \in y \;\leftrightarrow\; v \in x \;\wedge\; Gv).$$

Das **Auswahlaxiom** ist für endliche Mengen bekanntlich erfüllt. Für $\mathcal{E}$-Mengen erhalten wir dies einfach so: $c \neq \emptyset$ sei eine $\mathcal{E}$-Menge nichtleerer, einander elementefremder Mengen. c hat die Gestalt $\{c_1\{d_1\}, \ldots, c_k\{d_k\}\}$ mit $c_i\{d_i\} \cap c_j\{d_j\} = \emptyset$ für $1 \leq i < j \leq k$. Dann hat die Menge $\{d_1, \ldots, d_k\}$ mit jedem Element $c_i\{d_i\}$ von c genau ein Element gemein.

Um das nächste Axiom beweisen zu können, definieren wir zunächst rekursiv die 'Tiefe' Ta beliebiger $\mathcal{E}$-Konstanten a: $T\emptyset :\Leftarrow 0$; $T(a\{b\}) :\Leftarrow \max\{Ta, Tb+1\}$. Dann erhält man $a \subseteq b \to Ta \leq Tb$ durch Induktion über die Regeln $(\subseteq)1-(\subseteq)4$. (Wir setzen hier voraus, die natürlichen Zahlen und ihre Anordnung seien bereits bekannt. Vgl. [6], S.150ff.)

Das **Fundierungsaxiom** lautet: $\forall y\, (y \neq \emptyset \to \exists x \in y\;\; y \cap x = \emptyset)$.
Beweisskizze: Würde a_1 dieses Axiom nicht erfüllen, so gäbe es eine unendliche 'Vorgängerfolge' $a_1 \ni a_2 \ni a_3 \ni \ldots$ von $\mathcal{E}$-Konstanten; für sie wäre $Ta_1 > Ta_2 > Ta_3 > \ldots$, was aber unmöglich ist. □

§2. Mengentheoretische Axiome in Skolemscher Normalform

Um den angestrebten Widerspruchsfreiheitsbeweis von ZFC zu ermöglichen, formen wir die bisher formulierten mengentheoretischen 'Axiome' um. Dazu legen wir eine lexikographische Anordnung ($\preceq$) aller $\mathcal{E}$-Konstanten zugrunde, und reden diesbezüglich von *frühesten* $\mathcal{E}$-Konstanten. Die erwähnte Umformung kann man nach folgender allgemeinen Methode durchführen: Man führe zunächst jedes 'Axiom' in eine pränexe Normalform über, etwa $\exists y_0 \forall x_1 \exists y_1 \forall x_2 \exists y_2 A(y_0, x_1, y_1, x_2, y_2)$, wobei $A(y_0, x_1, y_1, x_2, y_2)$ quantorenfrei ist. Daraufhin führe man neue Terme $f_0, f_1(x_1),\ f_2(x_1, x_2)$ folgender Art ein:
f_0 kennzeichnet das früheste y_0 mit $\forall x_1\, \exists y_1\, \forall x_2\, \exists y_2\, A(y_0, x_1, y_1, x_2, y_2)$;
$f_1(x_1)$ kennzeichnet das früheste y_1 mit $\forall x_2\, \exists y_2\, A(f_0, x_1, y_1, x_2, y_2)$;
$f_2(x_1, x_2)$ kennzeichnet das früheste y_2 mit $A(f_0, x_1, f_1(x_1), x_2, y_2)$.
(Die Existenz solcher frühesten Konstanten ist i.Allg. nur indirekt beweisbar.) Das ursprüngliche Axiom werde dann ersetzt durch $\forall x_1, x_2\, A(f_0, x_1, f_1(x_1), x_2,\ f_2(x_1, x_2))$.
Aus dieser Aussage in 'Skolemform' ('Skolemscher Normalform', d.h. ohne Einsquantoren) folgt das ursprüngliche Axiom sogar rein logisch, also ohne Bezugnahme auf die Bedeutung der Terme $f_0, f_1(x_1), f_2(x_1.x_2)$.

Die erwähnten Terme $f_0, f_1(x_1), f_2(x_1, x_2)$ sind gemäß folgender Skizze zu verstehen: Für $\mathcal{E}$-Formeln Fy, für die $\exists y\, Fy$ gilt - d.h. für alle Werte der darin frei vorkommenden Variablen gilt - sei

$$^{y}Fy \;:\rightleftharpoons\; Fy \;\wedge\; \forall z\,(Fz \to y \preceq z),$$

wobei $y \preceq z$ zu lesen ist als "In der erwähnten lexikographischen Anordnung steht y vor z oder fällt mit z zusammen". (Dabei möge z nicht in $\mathcal{F}y$ vorkommen.) Im Falle $\exists y\, Fy$ gilt (klassisch) die Existenz und Eindeutigkeit:

$$\exists y\, {}^{y}Fy \;\wedge\; \forall y, z\,({}^{y}Fy \wedge {}^{z}Fz \to y \equiv z)$$

Wegen des Vorkommens der Zeichen '$\preceq$' und '$\equiv$' nehmen wir hier also eine *Erweiterung* der oben eingeführten Sprache über $\mathcal{E}$-Mengen zu Hilfe.

Nun können wir den μ-Term $\mu y\, Fy$ (gelesen: "das früheste y mit Fy") wie folgt einführen: Mit der Abkürzung $q :\rightleftharpoons \mu y\, Fy$ setzen wir $Pq :\rightleftharpoons \exists y\,({}^{y}Fy \wedge Py)$ für atomare $\mathcal{E}$-Formeln Py. Für beliebige $\mathcal{E}$-Formeln Ay erhalten wir dann bekanntlich (unter Variablenbedingungen)

$$\begin{aligned} Aq \;\leftrightarrow\; \exists y\,({}^{y}Fy \wedge Ay) \;\leftrightarrow\; \forall y({}^{y}Fy \to Ay), \quad \text{also} \\ \forall y\, Ay \;\to\; Aq \;\to\; \exists y\, Ay. \end{aligned}$$

Dies gilt auch für - noch einzuführende - Formeln Aq, in denen mehrere μ-Terme evtl. ineinandergeschachtelt vorkommen (cf. [7], [8], 3.10).

Anmerkung: Die Formel ${}^{y}Fy$ ist allerdings nicht invariant bezüglich der Mengengleichheit $(=)$; denn für verschiedene Darstellungen b, c derselben $\mathcal{E}$-Menge kann nicht sowohl ${}^{b}Fb$ als auch ${}^{c}Fc$ gelten. Dennoch ist z.B. $\exists y\,({}^{y}Fy \wedge Ay)$ invariant bez. $(=)$, wenn Fy und Ay dies sind.

Mit Hilfe von μ-Termen $\mu y\, Fx_1 \dots x_n y$ mit $n > 0$, für die $\forall x_1, \dots, x_n\, \exists y F x_1 \dots x_n y$ gilt und in denen keine kürzeren μ-Terme vorkommen, können wir n-stellige Funktionen durch Symbole der Form $f :\rightleftharpoons \lambda x_1, \dots, x_n\, \mu y\, Fx_1 \dots x_n y$ darstellen. Die Axiome von ZFC in Skolem-Form lassen sich nochmals derart umformen, dass in ihnen Terme der Form $f(x_1, \dots, x_n)$ an Stelle von μ-Termen $\mu y\, Fx_1 \dots x_n y$ vorkommen.

ZFC$_\circ$ sei das so formulierte System dieser Axiome ohne das Unendlichkeitsaxiom.

§3. Ein halbformales Regelsystem für die Lehre von erblich-endlichen Mengen

Die in §1 etwas informell durchgeführten Untersuchungen wollen wir nun auf eine strengere Grundlage stellen. Zu diesem Zweck werden wir einen Halbformalismus $\mathcal{H}$ aufstellen, in dem alle in §1 erhaltenen Resultate herleitbar sind. Zunächst führen wir Terme und Formeln ein, mit denen $\mathcal{H}$ operiert:

$\mathcal{L}$-Terme seien: $\emptyset$, die bisherigen Variablen, mit σ, τ auch $\sigma\{\tau\}$ und mit $\tau_1, \dots, \tau_n$ auch $f(\tau_1, \dots, \tau_n)$ für jedes Funktionssymbol $f \equiv \lambda \underline{x}\, \mu y\, F(\underline{x}, y)$ mit $\underline{x} \equiv x_1, \dots, x_n$ und einer

$\mathcal{L}$-Formel $F(\underline{x}, y)$ (s.u.), in der weder Funktionssymbole noch das Symbol $\preceq$ stehen und für die $\forall \underline{x}\, \exists y\, {}^y F(\underline{x}, y)$ nach den Regeln des unten angegebenen Systems $\mathcal{H}$ herleitbar ist. Weitere $\mathcal{L}$-Terme soll es nicht geben. $\mathcal{L}$-Konstante seien geschlossene $\mathcal{L}$-Terme.

Das Klammernpaar $\{,\}$ zählen wir nicht zu den Funktionssymbolen. $\mathcal{E}$-Terme sind also 'funktionssymbol-frei'. Die in §1 eingeführten $\mathcal{E}$-Konstanten sind $\mathcal{L}$-Konstante.

Zum Aufbau von Formeln werden wir die zweistelligen Prädikatoren '$\subseteq$' und '$\preceq$' (für die lexikographische Anordnung von $\mathcal{E}$-Konstanten) sowie den einstelligen Prädikator N verwenden. N soll auf diejenigen Elemente von $\mathcal{E}$ 'zutreffen', welche auf noch anzugebende Weise die natürlichen Zahlen darstellen.

Als atomare $\mathcal{L}$-Formeln bezeichnen wir $\sigma \subseteq \tau$, $\sigma \preceq \tau$ und $\mathrm{N}\tau$ mit $\mathcal{L}$-Termen σ, τ. Aus ihnen werden die übrigen $\mathcal{L}$-Formeln wie üblich mittels $\wedge, \neg, \forall$ aufgebaut. Auch für $\mathcal{L}$-Formeln F, G seien $F \vee G, F \to G$ und $\exists x\, F$ wie auf S. 2 für $\mathcal{E}$-Formeln definiert. $\mathcal{L}$-Aussagen seien geschlossene $\mathcal{L}$-Formeln. In §3 sagen wir jedoch einfach "Formel" statt "$\mathcal{L}$-Formel" und "Aussage" statt "$\mathcal{L}$-Aussage". (Letztlich interessieren wir uns jedoch nur für ($\preceq$)-freie Aussagen. Ist die Formel $F(\underline{x}, y)$ $\preceq$-frei, so ist dies auch der Term $\mu y\, F(\underline{x}, y)$.)

Als Metavariable verwenden wir nun: a, b, c, d für $\mathcal{E}$-Konstante; p, q für $\mathcal{L}$-Konstante; A, B, C, D für Aussagen; P (wie "prim") für atomare Aussagen; Ax für Formeln, in denen höchstens die Variable x frei vorkommt; und $\Gamma, \Delta, \Lambda, \Pi$ für Listen $C_1. \cdots .C_n$ von Aussagen C_i mit $n \geq 0$ (also auch für die 'leere Liste'). (Zur Trennung der Glieder C_i dieser Listen verwenden wir den Punkt statt des Kommas.) Wie wir sehen werden, können diese Listen für $n \geq 2$ als $C_1 \vee \ldots \vee C_n$ gelesen werden.

Der Halbformalismus $\mathcal{H}$ habe folgende (teils weiter unten angeführte) Schlussregeln (vgl. ($\subseteq$)1 - ($\subseteq$ 4) in §1):

$$
\begin{array}{rcll}
 & \Rightarrow & \emptyset \subseteq c & \\
\Gamma.\, b \in c.\, b \subseteq d\,,,\ \Gamma.\, b \in c.\, d \subseteq b & \Rightarrow & \Gamma.\, b \in c\{d\} & \\
\Gamma.\, a \subseteq c\,,,\ \Gamma.\, b \in c & \Rightarrow & \Gamma.\, a\{b\} \subseteq c & (\text{falls } a \not\equiv \emptyset) \\
 & \Rightarrow & b \notin \emptyset & \\
\Gamma.\, b \notin c\,,,\ \Gamma.\, b \not\subseteq d.\, d \not\subseteq b & \Rightarrow & \Gamma.\, b \notin c\{d\} & \\
\Gamma.\, a \not\subseteq c.\, b \notin c & \Rightarrow & \Gamma.\, a\{b\} \not\subseteq c & (\text{falls } a \not\equiv \emptyset) \\
\Gamma & \Rightarrow & \Delta & (\text{falls } \Gamma \subseteq \Delta, \text{ s.u.}) \\
\Gamma.\, A & \Rightarrow & \Gamma.\, \neg\neg\, A & \\
\Gamma.\, A\,,,\ \Gamma.\, B & \Rightarrow & \Gamma.\, (A \wedge B) & \\
\Gamma.\, \neg\, A.\, \neg\, B & \Rightarrow & \Gamma.\, \neg\, (A \wedge B) & \\
\text{für alle } c\text{: } \Gamma.\, Ac & \Rightarrow & \Gamma.\, \forall x\, Ax & (\text{s.u.}) \\
\Gamma.\, \neg\, Ac & \Rightarrow & \Gamma.\, \neg\, \forall x\, Ax &
\end{array}
$$

Dabei bedeute $\Gamma \subseteq \Delta$, dass jedes Glied von Γ ein Glied von Δ ist. Jede Instanz (Einzelfall) der vorletzten Regel habe unendlich viele Prämissen, nämlich (bei gegebener Liste $\Gamma.\, Ax$) für jede $\mathcal{E}$-Konstante c die Aussagenliste $\Gamma.\, Ac$. Da man nicht alle diese Listen herleiten kann, erlaube jede Instanz dieser Regel, ihre Konklusion $\Gamma.\, \forall x\, Ax$ herzuleiten, nachdem man ein effektives Verfahren beschrieben hat, das für jedes eingegebene c eine spezielle Herleitung von $\Gamma.\,Ac$ anzugeben vorschreibt (vgl. §7). Diese Regel heiße daher halbformal (vgl. [6], p. 66 - 69).

Instanzen von Schlussregeln nennen wir kurz **Schlüsse**.

Die in den Zeilen 3 bzw. 6 angeführte Bedingung "falls $a \not\equiv \emptyset$" hat zur Folge, dass die Liste $\Gamma.\,a\{b\} \subseteq c$ bzw. $\Gamma.\,a\{b\} \not\subseteq c$ in keinem anderen Schluss von $\mathcal{H}$ als Konklusion vorkommt. - Weitere Regeln von $\mathcal{H}$ seien:

$$\begin{array}{rcll} & \Rightarrow & \mathrm{N}\emptyset & \\ \Gamma.\,\mathrm{N}a & \Rightarrow & \Gamma.\,\mathrm{N}a\{a\} & \\ & \Rightarrow & \neg\,\mathrm{N}a\{b\} & \text{(falls } a \not\equiv b\text{)} \\ \Gamma.\,\neg\,\mathrm{N}a & \Rightarrow & \Gamma.\,\neg\,\mathrm{N}a\{a\} & \\ & \Rightarrow & \neg\,\mathrm{N}p & \text{(falls } p \notin \mathcal{E}\text{).} \end{array}$$

Erläuterung: Setzt man $a^+ :\equiv a\{a\}$, so kann man mit leerer (d.h. fehlender) Liste Γ nacheinander folgende Aussagen herleiten: $\mathrm{N}\emptyset$, $\mathrm{N}\emptyset^+$, $\mathrm{N}\emptyset^{++}$, $\mathrm{N}\emptyset^{+++}, \ldots$. D.h. N 'trifft zu' auf folgende Darstellungen natürlicher Zahlen: $\emptyset, \emptyset^+, \emptyset^{++}, \emptyset^{+++}, \ldots$. Wir nennen diese Darstellungen auch **Nummern**.

Außerdem möge $\mathcal{H}$ noch folgende Schlüsse enthalten:

$$\begin{array}{lll} \Rightarrow\ a \preceq b, & \text{falls} & a \preceq b \text{ bewiesen worden ist,} \\ \Rightarrow\ a \not\preceq b, & \text{falls} & a \preceq b \text{ widerlegt worden ist,} \end{array}$$

und zwar auf eine gegebene Weise derart, dass das Symbol '$\preceq$' eine lexikographische Anordnung aller $\mathcal{E}$-Konstanten darstellt.

Im Folgenden schreiben wir $F(\underline{x}, y)$ für $\preceq$-freie $\mathcal{L}$-Formeln, für die $\forall \underline{x}\,\exists y\,{}^y F(\underline{x}, y)$ in $\mathcal{H}$ herleitbar ist. Wie in §2 sei wieder

$${}^y F(\underline{x}, y) \;:\equiv\; F(\underline{x}, y) \;\wedge\; \forall z\,(F(\underline{x}, z) \;\rightarrow\; y \preceq z)$$

gesetzt. Demgemäß sei $\mu y\, F(\underline{x}, y)$ zu lesen als "die früheste $\mathcal{E}$-Konstante y mit $F(\underline{x}, y)$", wobei sich "die früheste" auf die lexikographische Anordnung ($\preceq$) bezieht. Dennoch kommt das Symbol '$\preceq$' nicht (expizit) in $\mu y\, F(\underline{x}, y)$ vor. Alle $\mathcal{L}$-Terme sind also $\preceq$-frei.

Für Funktionssymbole $f :\equiv \lambda \underline{x}\, \mu y\, F(\underline{x}, y)$ mit $\mathcal{L}$-Formeln $F(\underline{x}, y)$ der soeben beschriebenen Art (sie dürfen auch 0-stellig sein, d.h. $\underline{x}$ darf fehlen) und atomare $\mathcal{L}$-Formeln $P(y)$, die nicht mit N beginnen, wählen wir als Regeln von $\mathcal{H}$:

$$\begin{array}{rcl} \Gamma.\,\exists y\,({}^y F(\underline{c}, y) \;\wedge\; P(y)) & \Rightarrow & \Gamma.\,P(f(\underline{c})) \\ \Gamma.\,\forall y\,\neg\,({}^y F(\underline{c}, y) \;\wedge\; P(y)) & \Rightarrow & \Gamma.\,\neg\,P(f(\underline{c})). \end{array}$$

Kommen in $P(f(\underline{c}))$ weitere Funktionssymbole vor, so können diese Regeln auf mehrere Weisen angewandt werden. Um Fragen, die sich daraus ergeben, zu erübrigen, schränken wir diese Regeln auf den Fall ein, dass in $P(f(\underline{c}))$ kein weiteres Funktionssymbol rechts von f steht. (Dies gelte für $\cup(a,b)$ statt $a \cup b$ und $\cap(a,b)$ statt $a \cap b$.) Bekanntlich sind jedoch die angegebenen Regeln auch ohne diese Einschränkung zulässig (s. 3.10).

Weitere Regeln mögen nicht zu $\mathcal{H}$ gehören.

$\vdash_{\mathcal{H}} \Gamma$ bedeute, dass Γ in $\mathcal{H}$ herleitbar ist. Eine Schlussregel heiße in $\mathcal{H}$ **zulässig**, wenn für jede ihrer Instanzen gilt: Sind alle ihre Prämissen in $\mathcal{H}$ herleitbar, so ist dies auch ihre Konklusion. Die Worte 'herleitbar' und 'zulässig' beziehen sich hier in §3 auf $\mathcal{H}$.

Die leere Liste ist nicht herleitbar, und Aussagen der Form $b \in \emptyset$ kommen nur in den Instanzen $b \in \emptyset \Rightarrow b \in \emptyset$ und $\Gamma \Rightarrow b \in \emptyset$ mit leerem Γ der Regel ($\Gamma \Rightarrow \Delta$ für $\Gamma \subseteq \Delta$) von $\mathcal{H}$ als Konklusion vor, sind also nicht herleitbar. Daher ist $\mathcal{H}$ konsistent. Nach dem noch anzuführenden Schnittsatz ist insbesondere die Regel

$$\Gamma.\, A\,,,\ \ \Delta.\neg A \Rightarrow \Gamma.\,\Delta$$

zulässig, und zwar auch für leere Listen Γ, Δ. Daher sind für keine Aussage A sowohl A als auch $\neg A$ herleitbar, d.h. $\mathcal{H}$ ist 'widerspruchsfrei'.

In §1 haben wir mehrere Funktionen rekursiv definiert, und zwar mit Hilfe von Gleichungssystemen, die sich darstellen lassen in der Form

$$\begin{aligned} h(\underline{a},\emptyset) &\ :\risingdotseq\ f(\underline{a}) \\ h(\underline{a},b\{c\}) &\ :\risingdotseq\ g(\underline{a},b,c,h(\underline{a},b)), \end{aligned}$$

wobei f und g bereits definierte Funktionen sind. Der Term $h(\underline{x},y)$ mit Variablen $\underline{x},y$ wird dadurch jedoch nicht definiert. In der Definitionen von $h(\underline{a},b\{c\})$ interessiert uns der Fall $b \equiv c$ besonders. Weitere Beispiele rekursiver Definitionen:

$$\begin{aligned} a+\emptyset &\ :\risingdotseq\ a \\ a+b\{c\} &\ :\risingdotseq\ (a+b)^+ \\ a\cdot\emptyset &\ :\risingdotseq\ \emptyset \\ a\cdot b\{c\} &\ :\risingdotseq\ a\cdot b+a \\ \mathcal{V}\emptyset &\ :\risingdotseq\ \emptyset \\ \mathcal{V}(b\{c\}) &\ :\risingdotseq\ \mathcal{V}b\cup c. \end{aligned}$$

Für Nummern a,b haben $a+b$ und $a\cdot b$ die übliche Bedeutung. Für Nummern $a_1,\ldots,a_n$ können wir auch $\max\{a_1,\ldots,a_n\}$ statt $\mathcal{V}\{a_1,\ldots,a_n\}$ schreiben.

Jede der hier betrachteten Gleichungen hat die Form $s :\risingdotseq r$. Sie sei eine Abkürzung für die beiden Regeln

$$\begin{aligned} \Gamma.\exists y\,({}^y(y=r)\wedge P(y)) &\quad\Rightarrow\quad \Gamma.P(s) \\ \Gamma.\forall y\,\neg\,({}^y(y=r)\wedge P(y)) &\quad\Rightarrow\quad \Gamma.\neg\,P(s). \end{aligned}$$

In ihnen stehe $P(y)$ wieder für atomare $\mathcal{L}$-Formeln, die nicht mit dem Symbol N beginnen, und in denen rechts der Variablen y kein Funktionssymbol steht. Ist eine solche Formel ist invariant bez. $(=)$, d.h. gilt für sie $\vdash_{\mathcal{H}} \forall y,z\ (y=z\wedge P(y)\to P(z))$, dann gilt auch

$\vdash_{\mathcal{H}} P(r) \leftrightarrow \exists y\,({}^y(y = r) \wedge P(y))$. Somit sind für sie, falls $s :\risingdotseq r$ gesetzt worden ist, folgende einfacheren Regeln in $\mathcal{H}$ zulässig:

$$\begin{aligned} \Gamma.P(r) &\;\Rightarrow\; \Gamma.P(s) \\ \Gamma.\neg\, P(r) &\;\Rightarrow\; \Gamma.\neg\, P(s). \end{aligned}$$

In der Definition von $a\cap b\{c\}$ werden noch die beiden Fälle $c\in a$ und $c\notin a$ unterschieden. An die Stelle der zuletzt angeführten mögen daher die folgenden Regeln treten:

$$\begin{aligned} c\in a\,,,\ \Gamma.P((a\cap b)\{c\}) &\;\Rightarrow\; \Gamma.P(a\cap b\{c\}) \\ c\notin a\,,,\ \Gamma.P(a\cap b) &\;\Rightarrow\; \Gamma.P(a\cap b\{c\}) \\ c\in a\,,,\ \Gamma.\neg\, P((a\cap b)\{c\}) &\;\Rightarrow\; \Gamma.\neg\, P(a\cap b\{c\}) \\ c\notin a\,,,\ \Gamma.\neg\, P(a\cap b) &\;\Rightarrow\; \Gamma.\neg\, P(a\cap b\{c\}). \end{aligned}$$

3.1 Satz: Für alle Aussagen A, in denen keine Quantoren vorkommen und Funktionssymbole höchstens in atomaren Teilaussagen der Form $\mathrm{N}p$ stehen, gilt $\vdash_{\mathcal{H}} A$ oder $\vdash_{\mathcal{H}} \neg\, A$ (mit “oder” im effektiven Sinne).

Beweis: Wir verwenden folgende rekursive **Definition** der ‘Länge’ # von $\mathcal{E}$-Konstanten und von atomaren Aussagen, in denen keine Funktionssymbole vorkommen:

$$\begin{aligned} &\#\emptyset :\risingdotseq 1; \quad \#a\{b\} :\risingdotseq \#a + \#b + 1; \\ &\#(a \preceq b) :\risingdotseq \#(a \subseteq b) :\risingdotseq \#a + \#b\,; \;\; \#Nc :\risingdotseq \#c. \end{aligned}$$

Bekanntlich gilt $\vdash_{\mathcal{H}} a \preceq b$ oder $\vdash_{\mathcal{H}} a \not\preceq b$. Wir beweisen nun 3.1 für die übrigen atomaren Aussagen der gen. Art durch eine Induktion über deren Länge: Zulässig sind die Regeln:

$$\begin{array}{rcll} & \Rightarrow & \emptyset \subseteq c & \\ & \Rightarrow & a\{b\} \not\subseteq \emptyset & \\ \{b\} \subseteq c & \Rightarrow & \{b\} \subseteq c\{d\} & \\ b \subseteq d\,,,\ d \subseteq b & \Rightarrow & \{b\} \subseteq c\{d\} & \\ \{b\} \not\subseteq c\,,,\ b \not\subseteq d & \Rightarrow & \{b\} \not\subseteq c\{d\} & \\ \{b\} \not\subseteq c\,,,\ d \not\subseteq b & \Rightarrow & \{b\} \not\subseteq c\{d\} & \\ a \subseteq c\,,,\ \{b\} \subseteq c & \Rightarrow & a\{b\} \subseteq c & (\text{falls } a \not\equiv \emptyset) \\ a \not\subseteq c & \Rightarrow & a\{b\} \not\subseteq c & (\text{falls } a \not\equiv \emptyset) \\ \{b\} \not\subseteq c & \Rightarrow & a\{b\} \not\subseteq c & \\ & \Rightarrow & \mathrm{N}\emptyset & \\ \mathrm{N}a & \Rightarrow & \mathrm{N}a\{a\} & \\ & \Rightarrow & \neg\,\mathrm{N}a\{b\} & (\text{falls } a \not\equiv b) \\ \neg\,\mathrm{N}a & \Rightarrow & \neg\,\mathrm{N}a\{a\} & \\ & \Rightarrow & \neg\,\mathrm{N}p & (\text{für } p \notin \mathcal{E}). \end{array}$$

Aus der Induktionsannahme (Ind.ann.), für alle atomaren Aussagen Q mit $\#Q < \#P$ gelte $\vdash_{\mathcal{H}} Q$ oder $\vdash_{\mathcal{H}} \neg\, Q$, folgt (nach den angegebenen Regeln) $\vdash_{\mathcal{H}} P$ oder $\vdash_{\mathcal{H}} \neg\, P$.

Damit ist 3.1 für atomare Aussagen der gen. Art bewiesen. Daraus ergibt sich 3.1 auch für quantorenfreie komplexe Aussagen der gen. Art wegen der Zulässigkeit folgender

Regeln durch Induktion nach der Anzahl der Vorkommnisse von Junktoren in A:

$$\begin{array}{rcl} A & \Rightarrow & \neg\neg A \\ \neg A & \Rightarrow & \neg A \\ A\,,,\ B & \Rightarrow & A \wedge B \\ \neg A & \Rightarrow & \neg(A \wedge B) \\ \neg B & \Rightarrow & \neg(A \wedge B). \end{array}$$

3.2 Lemma: Für alle Aussagen A gilt $\vdash_{\mathcal{H}} A.\neg A$.

Beweis: Für atomare Aussagen A der in 3.1 genannten Art folgt 3.2 aus 3.1 nach der Regel: $\Gamma \Rightarrow \Delta$ (falls $\Gamma \subseteq \Delta$). Ferner sind folgende Regeln zulässig (wobei wir durch den linken '$\Rightarrow$' der zweiten bzw. dritten Zeile zwei bzw. unendlich viele Regeln zusammenfassen):

$$A.\neg A \ \Rightarrow\ \neg A.\neg\neg A$$
$$A.\neg A\,,,\ B.\neg B \ \Rightarrow\ A.\neg(A \wedge B)\,,,\ B.\neg(A \wedge B) \ \Rightarrow\ (A \wedge B).\neg(A \wedge B)$$
$$\text{Für alle } c\text{: } Ac.\neg Ac \ \Rightarrow\ \text{Für alle } c\text{: } Ac.\neg\forall x\, Ax \ \Rightarrow\ \forall x\, Ax.\neg\forall x\, Ax$$
$$\exists y\,({}^{y}F(\underline{c},y) \wedge P(y)).\forall y\,\neg({}^{y}F(\underline{c},y) \wedge P(y)) \ \Rightarrow\ P(f(\underline{c})).\neg P(f(\underline{c}));$$

dabei sei $f :\equiv \lambda\underline{x}\,\mu y\, F(\underline{x},y)$ mit einer Formel $F(\underline{x},y)$ ohne Funktionssymbole, und $P(y)$ stehe für atomare Formeln, die nicht mit N beginnen und in denen kein Funktionssymbol rechts von y steht.

Somit ergibt sich 3.2 durch Induktion über den wie folgt definierten Rang $\mathrm{Rg}\,A$ von Aussagen A: $\mathrm{Rg}\,P :\equiv 1$ für atomare Aussagen P, in denen keine Funktionssymbole vorkommen oder an deren Anfang N steht,

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Rg}\,\neg A & :\equiv & \mathrm{Rg}\,A + 1 \\ \mathrm{Rg}\,(A \wedge B) & :\equiv & \mathrm{Rg}\,A + \mathrm{Rg}\,B + 1 \\ \mathrm{Rg}\,\forall x\, Ax & :\equiv & \mathrm{Rg}\,A\emptyset + 1 \\ \mathrm{Rg}\,P(f(\underline{c})) & :\equiv & \mathrm{Rg}\,\exists y\,({}^{y}F(\underline{c},y) \wedge P(y)) + 1 \quad (\text{für } f \text{ und } P(y) \text{ wie oben}). \ \square \end{array}$$

3.3 Lemma: Zulässig sind folgende Regeln (z.T. 'Umkehrungen' von Regeln von $\mathcal{H}$):

(a) $\Gamma.\neg\neg A \Rightarrow \Gamma.A$

(b) $\Gamma.(A \wedge B) \Rightarrow \Gamma.A\,,,\ \Gamma.B$ (2 Regeln)

(c) $\Gamma.\neg(A \wedge B) \Rightarrow \Gamma.\neg A.\neg B$

(d) $\Gamma.\forall x\, Ax \Rightarrow \Gamma.Ac$

(e) $\Gamma.b \in c\{d\} \Rightarrow \Gamma.b \in c.b = d$

(f) $\Gamma.a\{b\} \subseteq c \Rightarrow \Gamma.a \subseteq c\,,,\ \Gamma.b \in c$

(g) $\Gamma.b \in \emptyset \Rightarrow \Gamma$

(h) $\Gamma.\mathrm{N}a\{a\} \Rightarrow \Gamma.\mathrm{N}a$

(i) $\Gamma.\mathrm{N}a\{b\} \Rightarrow \Gamma$ (falls $a \not\equiv b$)

(j) $\Gamma.A.B \Leftrightarrow \Gamma.(A \vee B)$

(k) $\Gamma.Ac \Rightarrow \Gamma.\exists x\, Ax$

(l) $\Gamma.\neg A\,,,\ \Gamma.\neg B \ \Leftrightarrow\ \Gamma.\neg(A\vee B)$ (3 Regeln)
(m) für alle c: $\Gamma.\neg Ac \ \Leftrightarrow\ \Gamma.\neg\exists x\, Ax$
(n) $\Gamma.\, P(f(\underline{c})) \ \Rightarrow\ \Gamma.\ \exists y\,({}^{y}F(\underline{c},y)\wedge P(y))$, falls $P(y)$ atomar ist und in $P(y)$ kein Funktionssymbol rechts von y steht.

Anmerkungen: (1) Nach dem folgenden Lemma 3.4 sind auch entsprechende Regeln für Negate der in (e), (f), (h) hinter dem linken Γ angeführten Aussagen zulässig.
(2) Wegen der Zulässigkeit von (c), (a) ist auch die Regel $A\to B \ \Rightarrow\ \neg A.\, B$ und somit nach dem schon erwähnten Schnittsatz der **modus ponens** $A\,,,\ A\to B \ \Rightarrow\ B$ zulässig.

Definition: $\Delta - A$ entstehe aus Δ durch Fortlassen aller Glieder von Δ, die $\equiv A$ sind.

Um die Beweise von (a) – (f), (h) und (n) zusammenzufassen, beweisen wir:

3.4 Lemma: A habe nicht die Gestalt $\neg\forall x\, Bx$. Für jeden Schluss von $\mathcal{H}$ der Gestalt

$$\Gamma.\,\Lambda_i\ (i\in I) \ \Rightarrow\ \Gamma.\, A$$

(mit einer oder mehreren Prämissen $\Gamma.\,\Lambda_i$), der nicht die Form $\Gamma'\Rightarrow\Delta$ mit $\Gamma'\subseteq\Delta$ hat, sind folgende umgekehrten Schlüsse zulässig:

$$\Gamma.\, A \ \Rightarrow\ \Gamma.\,\Lambda_i \quad (\text{für } i\in I).$$

Beweis: $\Gamma.\,\Lambda_i\ (i\in I) \ \Rightarrow\ \Gamma.\, A$ sei ein Schluss von $\mathcal{H}$. Da auch $(\Gamma - A).\,\Lambda_i \ \Rightarrow\ \Gamma.\,\Lambda_i$ ein Schluss von $\mathcal{H}$ ist, genügt es zu zeigen, dass

$$\Gamma. A \ \Rightarrow\ (\Gamma - A).\,\Lambda_i \quad (\text{für } i\in I)$$

zulässig ist. Wir tun dies durch Prämisseninduktion, indem wir zeigen, dass für jeden Schluss $\Delta_j\ (j\in J)\Rightarrow\Delta$ von $\mathcal{H}$ (mit keiner, einer oder mehreren Prämissen Δ_j) und alle $i\in I$ folgender Induktionsschritt zulässig ist:

$$(\Delta_j - A).\,\Lambda_i\ (j\in J) \Rightarrow (\Delta - A).\,\Lambda_i.$$

Zu $\Delta_1\Rightarrow\Delta$ mit $\Delta_1\subseteq\Delta$: Wegen $(\Delta_1 - A).\,\Lambda_i\subseteq(\Delta - A).\,\Lambda_i$ ist auch $(\Delta_1 - A).\,\Lambda_i\Rightarrow(\Delta - A).\,\Lambda_i$ ein Schluss von $\mathcal{H}$.

Zu Schlüssen von $\mathcal{H}$ der Gestalt $\Delta.\,\Pi_j\ (j\in J)\Rightarrow\Delta.\, B$ (die nicht die Form $\Gamma\Rightarrow\Delta$ mit $\Gamma\subseteq\Delta$ haben): Für $B\not\equiv A$ sind wegen $((\Delta.\,\Pi_j)-A).\,\Lambda_i\subseteq(\Delta - A).\,\Lambda_i.\,\Pi_j$ folgende Schlüsse zulässig:

$$((\Delta.\,\Pi_j)\text{–}A).\,\Lambda_i\ (j\in J) \ \Rightarrow\ (\Delta\text{–}A).\,\Lambda_i.\,\Pi_j\ (j\in J) \ \Rightarrow\ (\Delta\text{–}A).\,\Lambda_i.\, B \ \Rightarrow\ ((\Delta.\, B)\text{–}A).\,\Lambda_i.$$

Für $B\equiv A$ und $i\in I$ ist auch $I=J$ und $\Pi_i\equiv\Lambda_i$ (da nach Voraussetzung A nicht die Gestalt $\neg\forall x\, Ax$ hat), sodass folgende Schlüsse zulässig sind:

$$((\Delta.\,\Pi_j)-A).\,\Lambda_i\ (j\in I) \ \Rightarrow\ ((\Delta.\,\Lambda_i)-A).\,\Lambda_i \ \Rightarrow\ (\Delta - A).\,\Lambda_i \ \Rightarrow\ ((\Delta.\, A)-A).\,\Lambda_i.\ \Box$$

Beweis von (g): Für $\Delta :\!\!= \Gamma.\, b\!\in\!\emptyset$ gilt $\Delta - b\!\in\!\emptyset \subseteq \Gamma$, sodass $\Delta - b\!\in\!\emptyset \Rightarrow \Gamma$ zulässig ist. Es genügt also, die Zulässigkeit von $\Delta \Rightarrow \Delta - b \in \emptyset$ zu zeigen. Dies folgt durch Prämisseninduktion daraus, dass für jeden Schluss $\Pi_i\ \ (i \in I) \Rightarrow \Pi$ von $\mathcal{H}$ der Induktionsschritt $\Pi_i - b \in\emptyset\ \ (i \in I) \Rightarrow \Pi - b\in\emptyset$ zulässig ist. - Beweis von (i): analog. $\square$

Beweise zu (j) - (m): Folgende Regeln sind zulässig:

Zu (j): $\Gamma.\, A.\, B \ _{(a)}\!\!\Leftrightarrow \Gamma.\, \neg\neg\, A.\, \neg\neg\, B \ _{(c)}\!\!\Leftrightarrow \Gamma.\, \neg\, (\neg\, A \wedge \neg\, B) \ \Leftrightarrow\ \Gamma.\, (A \vee B)$.

Zu (k): $\Gamma.\, Ac \ \Rightarrow\ \Gamma.\, \neg\neg\, Ac \ \Rightarrow\ \Gamma.\, \neg\, \forall x\, \neg\, Ax \ \Rightarrow\ \Gamma.\, \exists x\, Ax$.

Zu (l): $\Gamma.\, \neg\, A\, ,,\ \Gamma.\, \neg\, B \ \Leftrightarrow\ \Gamma.\, (\neg\, A \wedge \neg\, B) \ \Leftrightarrow\ \Gamma.\, \neg\neg\, (\neg\, A \wedge \neg\, B) \ \Leftrightarrow\ \Gamma.\, \neg\, (A \vee B)$.

Zu (m): Für alle c: $\Gamma.\, \neg\, Ac \ \Leftrightarrow\ \Gamma.\, \forall x\, \neg\, Ax \ \Leftrightarrow\ \Gamma.\, \neg\neg\, \forall x\, \neg\, Ax \ \Leftrightarrow\ \Gamma.\, \neg\, \exists x\, Ax$. $\square$

3.5 Schnittsatz: Zulässig ist die 'Schnittregel'

$$\Gamma.\, C\, ,,\ \Delta \ \Rightarrow\ \Gamma.\, (\Delta - \neg\, C).$$

Beweis: In ihm werden wir folgende Definition verwenden:
B heiße **einfacher als** C, wenn (1) oder (2) gilt (zu '#' und 'Rg' s.o.):
(1) $\mathrm{Rg}\, B = \mathrm{Rg}\, C = 1$ und $\#B < \#C$.
(2) In $\mathrm{Rg}\, B < \mathrm{Rg}\, C$.

Zur Induktion über den Formelaufbau verwenden wir die Induktionsannahme:

IA: Für alle B, die einfacher als C sind, ist $\Gamma'.\, B\, ,,\ \Delta' \ \Rightarrow\ \Gamma'.\, (\Delta' - \neg\, B)$ für alle $\Gamma'.\, \Delta'$ zulässig.

Falls C ein Negat ist, $C \equiv \neg\, A$, sind - wegen $\Delta \subseteq (\Delta - \neg\neg\, A).\, \neg\neg\, A$ und $(\Gamma.\, \neg\, A) - \neg\, A \subseteq \Gamma$ - folgende Regeln zulässig:

$$\begin{array}{rll} \Gamma.\, \neg\, A\, ,,\ \Delta & \Rightarrow & (\Delta - \neg\neg\, A).\, \neg\neg\, A\, ,,\ \Gamma.\, \neg\, A \\ & \Rightarrow_{(a)} & (\Delta - \neg\neg\, A).\, A\, ,,\ \Gamma.\, \neg\, A \\ & \Rightarrow_{IA} & (\Delta - \neg\neg\, A).\, ((\Gamma.\, \neg\, A) - \neg\, A) \\ & \Rightarrow & \Gamma.\, (\Delta - \neg\neg\, A). \end{array}$$

Von nun an machen wir folgende beiden Voraussetzungen:
V1: C sei kein Negat.
V2: $\vdash_{\mathcal{H}} \Gamma.\, C$.

Wir haben zu zeigen, dass $\Delta \Rightarrow \Gamma.\, (\Delta - \neg\, C)$ für beliebige Δ zulässig ist. Dazu zeigen wir, dass für jeden Schluss $\Delta_i\ (i \in I) \Rightarrow \Delta$ von $\mathcal{H}$ auch der 'Induktionsschritt' $\Gamma.\, (\Delta_i - \neg\, C)\ (i \in I) \ \Rightarrow\ \Gamma.\, (\Delta - \neg\, C)$ zulässig ist.

Für jeden Schluss der Gestalt $\Delta_1 \Rightarrow \Delta$ mit $\Delta_1 \subseteq \Delta$ ist auch $\Delta_1 - \neg\, C \subseteq \Delta - \neg\, C$, sodass der Induktionsschritt $\Gamma.\, (\Delta_1 - \neg\, C) \ \Rightarrow\ \Gamma.\, (\Delta - \neg\, C)$ ein Schluss von $\mathcal{H}$ ist.

Für Schlüsse von $\mathcal{H}$ der Gestalt $\bullet\ \Delta.\, \Lambda_i\ (i \in I) \ \Rightarrow\ \Delta.\, D$ lautet der Induktionsschritt $\Gamma.\, ((\Delta.\, \Lambda_i) - \neg\, \mathcal{C})\ (i \in I) \Rightarrow \Gamma.\, ((\Delta.\, D) - \neg\, C)$. Wegen $(\Delta.\, \Lambda_i) - \neg\, C \subseteq (\Delta - \neg\, C).\, \Lambda_i$ ist der

Schluss $\Gamma.((\Delta.\Lambda_i)-\neg C) \;\Rightarrow\; \Gamma.(\Delta-\neg C).\Lambda_i$ zulässig. Daher genügt es, die Zulässigkeit von $\Gamma.(\Delta-\neg C).\Lambda_i\ (i \in I) \;\Rightarrow\; \Gamma.((\Delta.D)-\neg C)$ zu zeigen.

Für $D \not\equiv \neg C$ folgt dies aus der Zulässigkeit der Schlüsse

$$\Gamma.(\Delta-\neg C).\Lambda_i\ (i \in I) \;\Rightarrow\; \Gamma.(\Delta-\neg C).D \;\Rightarrow\; \Gamma.((\Delta.D)-\neg C).$$

Somit brauchen wir die Zulässigkeit des Induktionsschrittes nur noch für $D \equiv \neg C$ zu beweisen. Wegen $\Delta-\neg C \subseteq (\Delta.\neg C)-\neg C$ ist $\Gamma.(\Delta-\neg C) \Rightarrow \Gamma.((\Delta.\neg C)-\neg C)$ zulässig. Daher brauchen wir nur noch zu zeigen, dass folgender Schluss zulässig ist:

$$\Gamma.(\Delta-\neg C).\Lambda_i\ (i \in I) \;\Rightarrow\; \Gamma.(\Delta-\neg C).$$

Zu • $\Delta.A \Rightarrow \Delta.\neg\neg A$. Den Fall $C \equiv \neg A$ haben wir schon behandelt.

Zu • $\Delta.\neg A.\neg B \Rightarrow \Delta.\neg(A \wedge B)$ mit $C \equiv A \wedge B$: Nach V2 gilt $\vdash_{\mathcal{H}} \Gamma.(A \wedge B)$, also nach (b) auch $\vdash_{\mathcal{H}} \Gamma.B$ und $\vdash_{\mathcal{H}} \Gamma.A$; also sind zulässig:

$$\Gamma.(\Delta-\neg C).\neg A.\neg B \;\Rightarrow_{IA}\; \Gamma.(\Delta-\neg C).\neg A \;\Rightarrow_{IA}\; \Gamma.(\Delta-\neg C).$$

Zu • $\Delta.\neg Ac \Rightarrow \Delta.\neg\forall x\, Ax$ mit $C \equiv \forall x\, Ax$: Wegen $\vdash_{\mathcal{H}} \Gamma.\forall x\, Ax$ gilt nach (d) auch $\vdash_{\mathcal{H}} \Gamma.Ac$. Zulässig ist also der Induktionsschritt: $\Gamma.(\Delta-\neg C).\neg Ac \Rightarrow_{IA} \Gamma.(\Delta-\neg C)$.

Zu • $\Delta.b \notin c\,,,\ \Delta.b \neq d \Rightarrow \Delta.b \notin c\{d\}$ mit $C \equiv b \in c\{d\}$: Wegen $\vdash_{\mathcal{H}} \Gamma.b \in c\{d\}$ gilt nach (e) $\vdash_{\mathcal{H}} \Gamma.b \in c.b = d$. Ferner gilt z.B. $((\Delta-\neg C).b \notin c)-b \notin c \subseteq \Delta-\neg C$. Zulässig sind also:

$$\begin{array}{ll}
 & \Gamma.(\Delta-\neg C).b \notin c\,,,\ \Gamma.(\Delta-\neg C).b \neq d \\
\Rightarrow_{IA} & \Gamma.b = d.(\Delta-\neg C)\,,,\ \Gamma.(\Delta-\neg C).b \neq d \qquad (\text{da } \vdash \Gamma.b = d.b \in c) \\
\Rightarrow_{(b),(c)} & \Gamma.(\Delta-\neg C).b \subseteq d\,,,\ \Gamma.(\Delta-\neg C).d \subseteq b\,,,\ \Gamma.(\Delta-\neg C).d \not\subseteq b.b \not\subseteq d \\
\Rightarrow_{IA} & \Gamma.(\Delta-\neg C).d \not\subseteq b\,,,\ \Gamma.(\Delta-\neg C).d \subseteq b \\
\Rightarrow_{IA} & \Gamma.(\Delta-\neg C).
\end{array}$$

Zu • $\Delta.a \not\subseteq c.b \notin c \Rightarrow \Delta.a\{b\} \not\subseteq c$ mit $C \equiv a\{b\} \subseteq c$ und $a \not\equiv \emptyset$: Wegen $\vdash_{\mathcal{H}} \Gamma.a\{b\} \subseteq c$ gilt nach (f) auch $\vdash_{\mathcal{H}} \Gamma.b \in c$ und $\vdash_{\mathcal{H}} \Gamma.a \subseteq c$. Daher sind nach IA zulässig:

$$\Gamma.(\Delta-\neg C).a \not\subseteq c.b \notin c \;\Rightarrow\; \Gamma.(\Delta-\neg C).a \not\subseteq c \;\Rightarrow\; \Gamma.(\Delta-\neg C).$$

Zu • $\Rightarrow b \notin \emptyset$ mit $C \equiv b \in \emptyset$: Hierbei ist Δ leer. Nach V1 gilt $\vdash_{\mathcal{H}} \Gamma.b \in \emptyset$, also nach (g) $\vdash_{\mathcal{H}} \Gamma$, d.i. $\vdash_{\mathcal{H}} \Gamma.(\Delta-\neg C)$.

Zu • $\Rightarrow \neg\mathrm{N}a\{b\}$ mit $a \not\equiv b$; $\quad \Rightarrow \neg\mathrm{N}p$ mit $p \notin \mathcal{E}$; $\quad \Rightarrow a \not\preceq b$, falls $a \preceq b$ widerlegt: Analog.

Zu • $\Delta.\neg\mathrm{N}a \Rightarrow \Delta.\neg\mathrm{N}a\{a\}$ mit $C \equiv \mathrm{N}a\{a\}$: Wegen $\vdash_{\mathcal{H}} \Gamma.\mathrm{N}a\{a\}$ gilt nach (h) auch $\vdash_{\mathcal{H}} \Gamma.\mathrm{N}a$. Zulässig ist nach IA also $\Gamma.(\Delta-\neg C).\neg\mathrm{N}a \Rightarrow \Gamma.(\Delta-\neg C)$.

Zu • $\Delta.\ \forall y\,\neg({}^{y}F(\underline{c},y) \wedge P(y)) \Rightarrow \Delta.\neg P(f(\underline{c}))$ mit $C \equiv P(f(\underline{c}))$, $P(y)$ wie in (n). Wegen $\vdash_{\mathcal{H}} \Gamma.P(f(\underline{c}))$ gilt nach (n) auch $\vdash_{\mathcal{H}} \Gamma.\ \exists y\,({}^{y}F(\underline{c},y) \wedge P(y))$. Zulässig ist nach IA also

$\Gamma.\,(\Delta - \neg C).\,\forall y \neg ({}^{y}F(\underline{c}, y) \wedge P(y)) \;\; \Rightarrow \;\; \Gamma.\,(\Delta - \neg C)$. (Im Falle $f(\underline{c}) \equiv a \cap b\{c\}$ sind dabei die Fälle $c{\in}a$ und $c{\notin}a$ zu unterscheiden.) $\Box$

Wir setzen nun $\Sigma' :\!\!\equiv \neg C_1. \cdots .\neg C_n$ für $\Sigma \equiv C_1, \ldots, C_n$ (mit Kommata, die als "und" zu lesen sind) und schreiben $\Sigma \vdash A$ statt $\Sigma'.\,A$. Zulässig sind u.a. folgende Regeln. Nach ihnen ist $\Sigma \vdash A$ genau dann herleitbar, wenn aus den Gliedern von Σ (als 'Annahmen') A herleitbar ist, und zwar nach entsprechenden 'Regeln des natürlichen Schließens' (RnS, vgl. G. Gentzen) (vgl. 4.4).

$$
\begin{array}{rcll}
 & \Rightarrow & A \vdash A & \\
 & \Rightarrow & \vdash \emptyset \subseteq c & \\
\Sigma \vdash A & \Rightarrow & \mathrm{T} \vdash A & \text{(falls } \Sigma \subseteq \mathrm{T}) \\
\Sigma \vdash b \in \emptyset & \Rightarrow & \Sigma \vdash A & \\
\Sigma \vdash b \in c \vee b = d & \Leftrightarrow & \Sigma \vdash b \in c\{d\} & \\
\Sigma \vdash a \subseteq c \,,, \; \Sigma \vdash b \in c & \Leftrightarrow & \Sigma \vdash a\{b\} \subseteq c & \\
\Sigma \vdash A \,,, \; \Sigma \vdash B & \Leftrightarrow & \Sigma \vdash A \wedge B & \\
\text{für alle } c\text{: } \Sigma \vdash Ac & \Leftrightarrow & \Sigma \vdash \forall x\, Ax & \\
\Sigma \vdash A & \Rightarrow & \Sigma \vdash A \vee B & \\
\Sigma \vdash B & \Rightarrow & \Sigma \vdash A \vee B & \\
\Sigma \vdash A \vee B \,,, \; \Sigma, A \vdash D \,,, \; \Sigma, B \vdash D & \Rightarrow & \Sigma \vdash D & \\
\Sigma \vdash Ac & \Rightarrow & \Sigma \vdash \exists x\, Ax & \\
\Sigma \vdash \exists x\, Ax \,,, \; \text{für alle } c\text{: } \Sigma, Ac \vdash D & \Rightarrow & \Sigma \vdash D & \\
\Sigma, A \vdash B & \Rightarrow & \Sigma \vdash A \to B & \\
\Sigma \vdash A \,,, \; \Sigma \vdash A \to B & \Rightarrow & \Sigma \vdash B & \\
\Sigma, A \vdash \bot & \Rightarrow & \Sigma \vdash \neg A & \text{(für } \bot :\!\!\equiv \emptyset \in \emptyset) \\
\Sigma \vdash A \,,, \; \Sigma \vdash \neg A & \Rightarrow & \Sigma \vdash \bot & \\
\Sigma \vdash \neg\neg A & \Rightarrow & \Sigma \vdash A. &
\end{array}
$$

Die Zulässigkeit dieser Regeln erhält man leicht nach den Regeln von $\mathcal{H}$ und 3.2 - 3.5. Z.B. die Zulässigkeit der 'Beseitigungsregel' für '$\exists$' ergibt sich so: Sind $\Sigma'.\,\exists x\, Ax$ und $\Sigma'.\neg Ac, D$ für alle c herleitbar, so nach 3.3(m) auch $\Sigma'.\neg\exists x\, Ax, D$, also nach dem Schnittsatz auch $\Sigma'.\,D$. Die Zulässigkeit der Beseitigungsregel für '$\vee$' erhält man analog. $\Box$

Somit sind auch alle Schlussregeln, die wir in §1 angewandt haben, in $\mathcal{H}$ zulässig. Dies kann man im Einzelnen nachprüfen. Daher erhalten wir:

3.6: Alle einzelnen Ergebnisse aus §1 sind in $\mathcal{H}$ herleitbar.

Zur Vereinfachung der Beweise der Herleitbarkeit einiger Ergebnisse von §1 in $\mathcal{H}$ kann man auch folgende Lemmata verwenden:

3.7 Für Aussagen A der in 3.1 gen. Art gilt: Ist $A \Rightarrow B$ zulässig, so gilt $\vdash_{\mathcal{H}} A \to B$.
3.8.1 Ist $\Gamma.\,A \Rightarrow \Gamma.\,B$ für alle Γ zulässig, dann gilt $\vdash_{\mathcal{H}} A \to B$.
3.8.2 Ist $\Gamma.\,A_1.\,A_2 \Rightarrow \Gamma.\,B$ für alle Γ zulässig, dann gilt $\vdash_{\mathcal{H}} A_1 \vee A_2 \to B$.
3.8.3 Ist $\Gamma.\,A_1 \,,, \; \Gamma.\,A_2 \Rightarrow \Gamma.\,B$ für alle Γ zulässig, dann gilt $\vdash_{\mathcal{H}} A_1 \wedge A_2 \to B$.

Beweise: Zu 3.7: Ist $A \Rightarrow B$ zulässig, so sind dies auch $A \Rightarrow A \to B$ und $\neg A \Rightarrow A \to B$, und nach 3.1 gilt $\vdash_{\mathcal{H}} A$ oder $\vdash_{\mathcal{H}} \neg A$. - Zu 3.8: Man setze 1. $\Gamma \equiv \neg A$, 2. $\Gamma \equiv \neg A_i$ $(i = 1, 2)$, und 3. $\Gamma \equiv \neg A_1 . \neg A_2$ und wende 3.2, 3.3 und $\mathcal{H}$ an. □

Ein **Funktionssymbol** $f :\risingdotseq \lambda \underline{x}\, \mu y\, F(\underline{x}, y)$ stellt nur im Falle $\vdash_{\mathcal{H}} \forall \underline{x}\, \exists y\, {}^y F(\underline{x}, y)$ eine totale Funktion dar. Daher zeigen wir:

3.9 Satz: Für alle Formeln $B(\underline{x}, y)$ gilt $\vdash_{\mathcal{H}} \forall \underline{x}\, (\exists y\, B(\underline{x}, y) \to \exists y\, {}^y B(\underline{x}, y))$.
Zulässig ist also die Regel: $\Gamma . \forall \underline{x}\, \exists y\, B(\underline{x}, y) \;\Rightarrow\; \Gamma . \forall \underline{x}\, \exists y\, {}^y B(\underline{x}, y)$.

Beweis: Jede $\mathcal{E}$-Konstante ist aus höchstens den drei Buchstaben $\emptyset, \{, \}$ aufgebaut. Die aus ihnen gebildeten Worte lassen sich wie folgt **lexikographisch anordnen**: Zuerst kommen die Worte aus nur einem Buchstaben, dann aus zwei Buchstaben, dann aus drei Buchstaben, usw., und zwar bei gleicher Buchstabenzahl wie Worte in einem gewöhnlichen Lexikon angeordnet. Die Einschränkung $(\preceq)$ dieser Ordnung auf die $\mathcal{E}$-Konstanten ist isomorph zur üblichen Ordung $(\leq)$ von $\mathbb{N}$, erlaubt also Anwendungen der Ordnungsinduktion. Somit erhalten wir $\vdash_{\mathcal{H}} \forall y\, [\forall z\, (z \prec y \to Az) \to Ay] \to \forall y\, Ay$. Durch Einsetzen von $\neg By$ für Ay und Anwendung der klassischen Logik folgt daraus bekanntlich $\vdash_{\mathcal{H}} \exists y\, By \to \exists y\, (By \wedge \forall z\, (Bz \to y \preceq z))$, und noch allgemeiner 3.9. □

Für atomare $\mathcal{L}$-Formeln $P(y)$, die nicht mit N beginnen, und Funktionssymbole $f :\risingdotseq \lambda \underline{x}\, \mu y\, F(\underline{x}, y)$, für die $\vdash_{\mathcal{H}} \forall \underline{x}\, \exists y\, F(\underline{x}, y)$ gilt, hatten wir folgende Regeln aufgestellt:

$$\begin{aligned} \Gamma .\, \exists y\, ({}^y F(\underline{c}, y) \;\wedge\; P(y)) \quad &\Rightarrow \quad \Gamma .\, P(f(\underline{c})) \\ \Gamma .\, \forall y \neg\, ({}^y F(\underline{c}, y) \;\wedge\; P(y)) \quad &\Rightarrow \quad \Gamma .\, \neg P(f(\underline{c})). \end{aligned}$$

Dabei ist noch vorausgesetzt, dass f das in $P(f(\underline{c}))$ am weitesten rechts stehende Funktionssymbol ist. Nach 3.8.1 gilt also $\vdash_{\mathcal{H}} \exists y\, ({}^y F(\underline{c}, y) \wedge P(y)) \to P(f(c))$ und $\vdash_{\mathcal{H}} \forall y \neg\, ({}^y F(\underline{c}, y) \;\wedge\; P(y)) \to \neg P(f(\underline{c}))$, also insgesamt

$$\vdash_{\mathcal{H}} P(f(c)) \leftrightarrow \exists y\, ({}^y F(\underline{c}, y) \wedge P(y)).$$

Ist aber $t(y)$ ein $\mathcal{L}$-Term $t(y)$, in dem mindestens ein Funktionssymbol steht, dann gilt auch $\vdash_{\mathcal{H}} Nt(f(\underline{c})) \leftrightarrow \exists y\, ({}^y F(\underline{c}, y) \wedge Nt(y))$ (da beide Seiten 'falsch' sind). Demgemäß definieren wir:

Definition: Eine Formel (ein Term) heiße **stabil**, falls sie $(\preceq)$-frei ist und in ihr (ihm) keine Teilformeln der Gestalt $\mathrm{N}\alpha(y)$ mit einem offenen (d.h. nicht geschlossenen) $\mathcal{E}$-Term $\alpha(y)$ steht. (Die $(\preceq)$-Freiheit haben wir in diese Definition aufgenommen, damit alle stabilen Formeln invariant bez. $(=)$ werden. $\mathcal{L}$-Terme sind ohnhin $(\preceq)$-frei.)

3.10 Satz: Für alle stabilen Formeln $A(y)$ und alle $\mathcal{L}$-Konstantentupel $\underline{p}$ passender Stellenzahl bzw. alle $\mathcal{L}$-Konstanten q (da diese aus $\mathcal{E}$-Konstanten mit Hilfe von Funktionssymbolen aufgebaut sind) gilt:

$$\vdash_{\mathcal{H}} \forall y\, ({}^y F(\underline{p}, y) \to A(y)) \leftrightarrow A(f(\underline{p})) \leftrightarrow \exists y\, ({}^y F(\underline{p}, y) \wedge A(y)),$$

$$\text{also} \qquad \vdash_{\mathcal{H}} \forall y\, A(y) \to A(q) \to \exists y\, A(y).$$

Beweis (nach [7] 170-175): Wie wir gesehen haben gilt

$$\vdash_{\mathcal{H}} P(f(\underline{c})) \leftrightarrow \exists y\, ({}^{y}F(\underline{c}, y) \wedge P(y))$$

für alle stabilen atomaren $\mathcal{L}$-Formeln $P(y)$ unter der Voraussetzung, dass f das in $P(f(\underline{c}))$ am weitesten rechts stehende Funktionssymbol ist. Nun zeigen wir, dass diese Voraussetzung- auch für N-freie $P(y)$ - entbehrlich ist. In $\mathcal{H}$ herleitbar sind

$$\begin{array}{rcl}
P(g(\underline{d}), f(\underline{c})) & \leftrightarrow & \exists y\, ({}^{y}F(\underline{c}, y) \wedge P(g(\underline{d}), y)) \\
& \leftrightarrow & \exists y\, ({}^{y}F(\underline{c}, y) \wedge \exists z\, ({}^{z}G(\underline{d}, z) \wedge P(z, y))) \\
& \leftrightarrow & \exists y, z\, ({}^{z}G(\underline{d}, z) \wedge {}^{y}F(\underline{c}, y) \wedge P(z, y)) \\
& \leftrightarrow & \exists z\, ({}^{z}G(\underline{d}, z) \wedge \exists y\, ({}^{y}F(\underline{c}, y) \wedge P(z, y))) \\
& \leftrightarrow & \exists z\, ({}^{z}G(\underline{d}, z) \wedge P(z, f(\underline{c}))).
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
P(f(\underline{c}), f(\underline{c})) & \leftrightarrow & \exists y\, ({}^{y}F(\underline{c}, y) \wedge P(f(\underline{c}), y) \\
& \leftrightarrow & \exists y\, ({}^{y}F(\underline{c}, y) \wedge \exists z\, ({}^{z}F(\underline{c}, z) \wedge P(z, y)) \\
& \leftrightarrow & \exists y, z\, ({}^{y}F(\underline{c}, y) \wedge {}^{z}F(\underline{c}, z) \wedge P(z, y)) \\
& \leftrightarrow & \exists y, z\, ({}^{y}F(\underline{c}, y) \wedge y \equiv z \wedge P(z, y)) \\
& \leftrightarrow & \exists y\, ({}^{y}F(\underline{c}, y) \wedge y \equiv y \wedge P(y, y)) \\
& \leftrightarrow & \exists y\, ({}^{y}F(\underline{c}, y) \wedge P(y, y)).
\end{array}$$

Wir setzen nun voraus, dass $A(y) \wedge B(y)$ bzw. $\neg A(y)$ bzw. $\forall x\, A(x, y)$ mit $x \not\equiv y$ stabil ist. Dann sind dies auch $A(y)$ und $B(y)$ bzw. $A(x, y)$. Ferner machen wir die Ind.ann., in $\mathcal{H}$ seien herleitbar:

$$\begin{array}{rcl}
A(f(\underline{c})) & \leftrightarrow & \exists y\, ({}^{y}F(\underline{c}, y) \wedge A(y)) \\
B(f(\underline{c})) & \leftrightarrow & \exists y\, ({}^{y}F(\underline{c}, y) \wedge B(y)).
\end{array}$$

Dann sind in $\mathcal{H}$ auch folgende Aussagen herleitbar:

$$\begin{array}{rcl}
A(f(\underline{c})) \wedge B(f(\underline{c})) & \leftrightarrow & \exists y\, ({}^{y}F(\underline{c}, y) \wedge A(y)) \wedge \exists z\, ({}^{z}F(\underline{c}, z) \wedge B(z)) \\
& \leftrightarrow & \exists y, z\, ({}^{y}F(\underline{c}, y) \wedge^{z} F(\underline{c}, z) \wedge A(y) \wedge B(z)) \\
& \leftrightarrow & \exists y, z\, ({}^{y}F(\underline{c}, y) \wedge y \equiv z \wedge A(y) \wedge B(z)) \\
& \leftrightarrow & \exists y\, ({}^{y}F(\underline{c}, y) \wedge A(y) \wedge B(y)),
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\neg A(f(\underline{c})) & \leftrightarrow & \forall y \neg ({}^{y}F(\underline{c}, y) \wedge A(y)) \\
& \leftrightarrow & \forall y\, ({}^{y}F(\underline{c}, y) \to \neg A(y)) \\
& \to & \exists z\, ({}^{z}F(\underline{c}, z) \wedge \neg A(z)) \ \ (\text{da } \vdash_{\mathcal{H}} \exists z\, {}^{z}F(\underline{c}, z)) \\
& \to & \exists z \forall y\, ({}^{y}F(\underline{c}, y) \to y \equiv z \to \neg A(y)) \\
& \to & \text{Zeile 2},
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
{}^{u}F(\underline{c}, u) \to [\forall x\, A(x, f(\underline{c})) & \leftrightarrow & \forall x \exists y\, ({}^{y}F(\underline{c}, y) \wedge A(x, y)) \\
& \to & \forall x \exists y\, (y \equiv u \wedge A(x, y)) \\
& \to & {}^{u}F(\underline{c}, u) \wedge \forall x\, A(x, u)) \\
& \to & \exists y\, ({}^{y}F(\underline{c}, y) \wedge \forall x\, A(x, y)) \\
& \to & \exists y \forall x\, ({}^{y}F(\underline{c}, y) \wedge A(x, y)) \\
& \to & \text{Zeile 1 rechts}].
\end{array}$$

Für alle stabilen Formeln $A(y)$ folgt daher aus dem Gezeigten durch Induktion über deren Aufbau die Herleitbarkeit von

$$\begin{array}{rrcll} & A(f(\underline{c})) & \leftrightarrow & \exists y\,({}^y F(\underline{c},y) \wedge A(y)) & \\ \text{sowie von} & A(f(\underline{c})) & \leftrightarrow & \neg\neg A(f(\underline{c})) & \\ & & \leftrightarrow & \forall y\,({}^y F(\underline{c},y) \to \neg\neg A(y)) & \text{(s.o.)}, \\ \text{also von} & A(f(\underline{c})) & \leftrightarrow & \forall y\,({}^y F(\underline{c},y) \to A(y)). & \end{array}$$

Die bisherige 'Voraussetzung', dass $\underline{c}$ keine Funktionssymbole enthält, können wir fallenlassen; denn weil in $g(y,\underline{p})$ weniger Funktionssymbole vorkommen als in $g(f(\underline{c}),\underline{p})$, sind nach zugehöriger Induktionsannahme in $\mathcal{H}$ herleitbar:

$$\begin{array}{rcl} A(g(f(\underline{c}),\underline{p})) & \leftrightarrow & \exists y\,({}^y F(\underline{c},y) \wedge A(g(y,\underline{p})) \\ & \leftrightarrow & \exists y\,({}^y F(\underline{c},y) \wedge \exists z\,({}^z G(y,\underline{p},z) \wedge A(z)) \\ & \leftrightarrow & \exists z\,(\exists y\,({}^y F(\underline{c},y) \wedge {}^z G(y,\underline{p},z)) \wedge A(z)) \\ & \leftrightarrow & \exists z\,({}^z G(f(\underline{c}),\underline{p},z) \wedge A(z)).\ \square \end{array}$$

3.11 Korollar: Für stabile Formeln $A(\underline{x},y)$ und $f(\underline{x}) :\rightleftharpoons \mu u\,(\exists y\, A(x,y) \to A(x,u))$ gilt

$$\vdash_{\mathcal{H}} \forall \underline{x}\,(\exists y A(\underline{x},y) \to A(\underline{x},f(\underline{x}))).$$

Beispiel: durch zweimalige Anwendung von 3.11 erhält man für passende f,g:
$\vdash_{\mathcal{H}} \forall x_1\,\exists y_1\,\forall x_2\,\exists y_2\,A(x_1,y_1,x_2,y_2) \to \forall x_1,x_2\,A(x_1,f(x_1),g(x_1,x_2))$.

§4. Bekannte logische Hilfsmittel

Zugrundegelegt sei eine formale Sprache, die wie $\mathcal{L}$ (aus §3) aufgebaut ist; es kommt jedoch nicht darauf an, welche (nicht-logischen) Symbole sie enthält. Hier in §4 verstehen wir unter Termen, Konstanten und Formeln solche, die dieser Sprache angehören.

Als Metavariable verwenden wir nun:
für Terme: $\sigma,\tau,\sigma_1,\tau_1,\ldots$;
für atomare Formeln: P;
für Formeln: $F,G,H,F_1,\ldots,Fx,\ldots$;
für $\wedge$-Listen (s.u.): Σ, T;
für $\vee$-Listen (s.u.): Γ,Δ.

An Stelle der von G. Gentzen eingeführten (klassischen) Sequenzen $H_1,\ldots,H_n \vdash G_1,\ldots,G_m$ verwende ich im Folgenden (um Schreibarbeit zu sparen) i.Allg. nur deren vor bzw. hinter dem Zeichen '$\vdash$' stehenden Formellisten $H_1,\ldots,H_n$ bzw. $G_1.G_2.\cdots.G_m$ (mit dem Punkt statt des Kommas). Es wird sich herausstellen, dass - für $n>1$ bzw. $m>1$ - das Komma in $H_1,\ldots,H_n$ als '$\wedge$' und der Punkt in $G_1.G_2.\cdots.G_m$ (wie bisher) als '$\vee$' gelesen werden kann. Dementsprechend nenne ich Listen der Form $H_1,\ldots,H_n$ mit $n\geq 0$ $\wedge$-Listen und Listen der Form $G_1.\cdots.G_m$ mit $m\geq 0$ $\vee$-Listen. Die leere $\wedge$-Liste $(n=0)$ ist von der leeren $\vee$-Liste $(m=0)$ zu unterscheiden.

$\Gamma \subseteq \Delta$ und entsprechend $\Sigma \subseteq T$ seien wie in §3 definiert.

Definition: Ist $\underline{u} \equiv u_1, \ldots, u_n$ mit voneinander verschiedenen Variablen u_i und $\underline{\sigma} \equiv \sigma_1, \ldots, \sigma_n$, so entstehe $\Gamma^{\underline{\sigma}}_{\underline{u}}$ aus Γ dadurch, dass man in Γ zuerst alle gebundenen Vorkommnisse von Variablen, die in $\underline{\sigma}$ (frei) vorkommen, durch Variable, die weder in Γ noch in $\underline{\sigma}$ oder $\underline{u}$ vorkommen, ersetzt und im so erhaltenen Resultat für $i = 1, \ldots, n$ alle freien Vorkommnisse von u_i simultan durch σ_i ersetzt. (Bei der erwähnten 'Umbenennung' der in F gebundenen Variablen sind gleiche bzw. verschiedene Variable durch gleiche bzw. verschiedene Variable zu ersetzen.) Für Formeln F sei F^{τ}_{x} entsprechend definiert.

Wir schreiben jedoch auch Fx statt F, $F\tau$ statt $(Fx)^{\tau}_{x}$ und Fy statt $(Fx)^{y}_{x}$. **Beachte**, dass kein Vorkommnis einer Variablen in τ in $F\tau$ gebunden ist.

Definition: $\mathcal{K}$ sei der '**Logik-Kalkül**' mit den folgenden Regeln:

$$\begin{array}{rcll}
 & \Rightarrow & P.\neg P & \text{(für atomare } P\text{)} \\
\Gamma & \Rightarrow & \Delta & \text{(falls } \Gamma \subseteq \Delta\text{)} \\
\Gamma.F & \Rightarrow & \Gamma.\neg\neg F & \\
\Gamma.F \,,,\, \Gamma.G & \Rightarrow & \Gamma.(F \wedge G) & \text{(mit zwei Prämissen)} \\
\Gamma.\neg F.\neg G & \Rightarrow & \Gamma.\neg (F \wedge G) & \\
\Gamma.Fy & \Rightarrow & \Gamma.\forall x\, Fx & \text{(falls } y \text{ neu, s.u.)} \\
\Gamma.\neg F\tau & \Rightarrow & \Gamma.\neg \forall x\, Fx &
\end{array}$$

Die Variablenbedingung "y neu" bedeute, dass y nicht in der Konklusion frei vorkommt.

$\mathcal{K}$ ist *vollständig* in dem Sinne, dass in ihm alle allgemeingültigen $\vee$-Listen herleitbar sind. Dabei heiße $G_1. \ldots .G_m$ allgemeingültig genau dann, wenn die Formel $G_1 \vee \ldots \vee G_n$ allgemeingültig ist.

Definition: $\vdash_{\mathcal{K}} \Gamma$ bedeute, dass Γ in $\mathcal{K}$ herleitbar ist.

4.1 Lemma: Für alle Formeln F gilt $\vdash_{\mathcal{K}} F.\neg F$.

Der Beweis gelingt durch Induktion über den Aufbau von F (vgl. Beweis von 3.2). $\square$.

4.2 Lemma: In $\mathcal{K}$ zulässig ist die Regel $\Gamma \Rightarrow \Gamma^{\underline{\sigma}}_{\underline{u}}$ (für $\underline{u}, \underline{\sigma}$ wie oben).

Beweis durch Prämisseninduktion: Für jeden Schluss $\Gamma_i\ (i \in I) \Rightarrow \Gamma$ von $\mathcal{K}$ (mit keiner, einer oder zwei Prämissen Γ_i) ist der 'Induktionsschritt' $(\Gamma_i)^{\underline{\sigma}}_{\underline{u}}\ (i \in I) \Rightarrow \Gamma^{\underline{\sigma}}_{\underline{u}}$ zulässig. Wir zeigen dies nur für Schlüsse der Form

$$\Gamma.F^{y}_{x} \Rightarrow \Gamma.\forall x\, F$$

in denen y nicht frei in $\Gamma.\forall x\, F$ vorkommt, aber alle Glieder von $\underline{u}$ in $\Gamma.\forall x\, F$ frei vorkommen. (Also ist y kein Glied von $\underline{u}$.) Ferner komme z weder in $\Gamma.\forall x\, F$ noch in $\underline{\sigma}$ vor. Der zur simultanen Substitution $^{z,\underline{\sigma}}_{y,\underline{u}}$ gehörige Induktionsschritt lautet

$$\Gamma^{\underline{\sigma}}_{\underline{u}}.\,(F^{y}_{x})^{z,\underline{\sigma}}_{y,\underline{u}} \Rightarrow \Gamma^{\underline{\sigma}}_{\underline{u}}.(\forall x\, F)^{\underline{\sigma}}_{\underline{u}}.$$

Bei der zu ${}^{z;\underline{\sigma}}_{y,\underline{u}}$ gehörigen Umbenennung der gebundenen Variablen sei x in $\dot{x}$ umzubenennen, und es sei $\dot{F} :\equiv F^{\dot{x}}_{x}$. $\dot{x}$ kommt nicht in $F, \underline{u}$ oder $\underline{\sigma}$ vor. Daher ist $(F^{y}_{x})^{z;\underline{\sigma}}_{y,\underline{u}} \equiv (\dot{F}^{y}_{\dot{x}})^{z;\underline{\sigma}}_{y,\underline{u}} \equiv (\dot{F}^{\underline{\sigma}}_{\underline{u}})^{z}_{\dot{x}}$. Der Induktionsschritt ist also identisch mit

$$\Gamma^{\underline{\sigma}}_{\underline{u}}.(\dot{F}^{\underline{\sigma}}_{\underline{u}})^{z}_{\dot{x}} \;\Rightarrow\; \Gamma^{\underline{\sigma}}_{\underline{u}}.\forall \dot{x}\, \dot{F}^{\underline{\sigma}}_{\underline{u}},$$

ist also ein Schluss von $\mathcal{K}$. □

4.3 Lemma: In $\mathcal{K}$ zulässig ist die Regel

$$\Gamma.\,\forall u\, Hu \;\Rightarrow\; \Gamma.\, H\sigma \quad (\text{für } H\sigma :\equiv (Hu)^{\sigma}_{u}).$$

Beweis: Für jede $\vee$-Liste Γ entstehe Γ° aus Γ dadurch, dass man jedes Glied von Γ, das $\equiv \forall u\, Hu$ ist, fortlässt. Es genügt zu zeigen, dass $\Gamma \Rightarrow \Gamma^{\circ}.H\sigma$ zulässig ist. Wir beweisen dies durch Induktion über die Länge der Herleitung von Γ. Zu diesem Zweck ersetzen wir in den Schlüssen von $\mathcal{K}$ jede Liste Γ durch $\Gamma^{\circ}.H\sigma$. Dadurch erhalten wir folgende Induktionsschritte, die in $\mathcal{K}$ zulässig sind:

$$\begin{array}{rcll}
 & \Rightarrow & P.\neg\, P.H\sigma & (\text{für atomare } P)\\
\Gamma^{\circ}.H\sigma & \Rightarrow & \Delta^{\circ}.H\sigma & (\text{falls } \Gamma \subseteq \Delta)\\
\Gamma^{\circ}.F.H\sigma & \Rightarrow & \Gamma^{\circ}.\neg\neg\, F.H\sigma & (\text{s.u.})\\
\Gamma^{\circ}.F.H\sigma\;,,\;\Gamma^{\circ}.G.H\sigma & \Rightarrow & \Gamma^{\circ}.(F \wedge G).H\sigma & (\text{s.u.})\\
\Gamma^{\circ}.\neg\, F.\neg\, G.H\sigma & \Rightarrow & \Gamma^{\circ}.\neg\,(F \wedge G).H\sigma & \\
\Gamma^{\circ}.Fz.H\sigma & \Rightarrow & \Gamma^{\circ}.\forall x\, Fx.H\sigma & (\text{für } \forall x\, Fx \not\equiv \forall u\, Hu;\, s.u.).\\
\Gamma^{\circ}.Hz.H\sigma & \Rightarrow & \Gamma^{\circ}.H\sigma & (\text{für } \forall x\, Fx \equiv \forall u\, Hu;\ \text{s. } 4.2)\\
\Gamma^{\circ}.\neg\, F\tau.H\sigma & \Rightarrow & \Gamma^{\circ}.\neg\,\forall x\, Fx.H\sigma. &
\end{array}$$

In den Prämissen ist das Glied F, G oder Fz fortzulassen, falls es $\equiv \forall u\, Hu$ ist. Für die drittletzte Zeile lautet der ursprüngliche Schluss $\Gamma.Fy \Rightarrow \Gamma.\forall x\, Fx$. Falls y in σ vorkommt - und somit in der Konklusion $\Gamma^{\circ}.\forall x\, Fx.H\sigma$ des Induktionschrittes $\Gamma^{\circ}.Fy.H\sigma \Rightarrow \Gamma^{\circ}.\forall x\, Fx.H\sigma$ frei vorkommt, ist dieser evtl. nicht zulässig. Aus der Herleitung der ursprünglichen Prämisse $\Gamma.Fy$ erhält man jedoch eine - ebenso lange - Herleitung von $\Gamma.Fz$, indem man in jener alle freien Vorkommnisse von y durch eine Variable z ersetzt, die weder in der Herleitung von $\Gamma.Fy$ noch in σ vorkommt. Dann ist der zu $\Gamma.Fz \Rightarrow \Gamma.\forall x\, Fx$ gehörige angegebene Induktionsschritt zulässig. □

Zulässig sind auch die Umkehrungen der Regeln von $\mathcal{K}$, in deren Konklusion $\neg\neg\, F$, $(F \wedge G)$ oder $\neg\,(F \wedge G)$ angeführt ist. Dies ergibt sich nach dem Muster der Beweise von 3.3, 3.4. In $\mathcal{K}$ ist auch die **Schnittregel**

$$\Gamma.F\;,,\;\Delta.\neg\, F \;\Rightarrow\; \Gamma.\Delta$$

zulässig. Der Beweis dafür verläuft nach dem Muster des Beweises des Schnittsatzes 3.5, jedoch einfacher. Dazu benötigt man die Umkehrbarkeit der erwähnten Regeln von $\mathcal{K}$. In seinen Beweis einzufügen ist nur noch der Induktionsschritt zur Regel $\Rightarrow P.\neg\, P$; er lautet: $\Rightarrow \Gamma.(P.\neg\, P - \neg\, G)$ mit einer Formel G (statt C), für die V2: $\vdash_{\mathcal{K}} \Gamma.G$ wie im Beweis von 3.5 vorausgesetzt ist. Er ist offenbar zulässig in $\mathcal{K}$.

Für Formeln F, G verwenden wir wieder die Abkürzungen: $F \vee G :\rightleftharpoons \neg(\neg F \wedge \neg G)$; $F \to G :\rightleftharpoons \neg(F \wedge \neg G)$; $\exists x F :\rightleftharpoons \neg\forall x \neg F$. Wie leicht zu zeigen ist, sind in $\mathcal{K}$ folgende Regeln zulässig: $\Gamma.(F \vee G) \Leftrightarrow \Gamma.F.G$ (vgl. 3.3(j)) sowie $\Gamma.(F \to G) \Leftrightarrow \Gamma.\neg F.G$, nach der Schnittregel also auch $\Gamma.F\,,,\ \Gamma.(F \to G) \Rightarrow \Gamma.G$ (vgl. *modus ponens*).

Definitionen:
Für Formeln F sei $\sim\neg F :\rightleftharpoons F$. Beginnt F nicht mit '$\neg$', so sei $\sim F :\rightleftharpoons \neg F$.
Für $\Gamma \equiv G_1. \cdots .G_m$ sei $\Gamma' \equiv \sim G_1, \ldots, \sim G_m$ (i.S.v. $\sim G_1 \wedge \ldots \wedge \sim G_m$).
Für $\Sigma \equiv H_1, \ldots, H_n$ sei $\Sigma' \equiv \sim H_1. \cdots .\sim H_n$ (i.S.v. $\sim H_1 \vee \ldots \vee \sim H_n$).

$\Sigma \vdash_{\mathcal{K}} \Gamma$ bedeute: Aus den Gliedern von Σ ist Γ in $\mathcal{K}$ plus Schnittregel herleitbar (d.h. Γ ist nach den Regeln von $\mathcal{K}$, der Schnittregel und $\Rightarrow H_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ herleitbar).

4.4 Lemma: $\Sigma \vdash_{\mathcal{K}} \Gamma$ gilt genau dann, wenn $\vdash_{\mathcal{K}} \Sigma'.\Gamma$.

Beweis: Sei $\Sigma \equiv H_1, \ldots, H_n$. Zu $(\to)$: $\Sigma \vdash_{\mathcal{K}} \Gamma$ gilt genau dann, wenn die 'Sequenz' $\Sigma \vdash \Gamma$ nach folgenden Regeln herleitbar ist:

$$
\begin{array}{rcll}
 & \Rightarrow & \Sigma \vdash H_i & (\text{für } i = 1, \ldots, n) \\
 & \Rightarrow & \Sigma \vdash P.\neg P & \\
\Sigma \vdash \Gamma & \Rightarrow & \Sigma \vdash \Delta & (\text{falls } \Gamma \subseteq \Delta) \\
\Sigma \vdash \Gamma.F & \Rightarrow & \Sigma \vdash \Gamma.\neg\neg F & \\
\Sigma \vdash \Gamma.F\,,,\ \Sigma \vdash \Gamma.G & \Rightarrow & \Sigma \vdash \Gamma.(F \wedge G) & \\
\Sigma \vdash \Gamma.\neg F.\neg G & \Rightarrow & \Sigma \vdash \Gamma.\neg(F \wedge G) & \\
\Sigma \vdash \Gamma.Fy & \Rightarrow & \Sigma \vdash \Gamma.\forall x\, Fx & (\text{falls } y \text{ neu}) \\
\Sigma \vdash \Gamma.\neg F\tau & \Rightarrow & \Sigma \vdash \Gamma.\neg\forall x\, Fx & \\
\Sigma \vdash \Gamma.G\,,,\ \mathrm{T} \vdash \Delta.\neg G & \Rightarrow & \Sigma, \mathrm{T} \vdash \Gamma.\Delta & (\text{`}\Sigma\text{-Schnitt'}).
\end{array}
$$

Ersetzt man in diesen Regeln jede (als Prämisse oder Konklusion vorkommende) Sequenz der Form $\Sigma \vdash \Gamma$ durch $\Sigma'.\Gamma$, so erhält man in $\mathcal{K}$ zulässige Induktionsschritte. Daraus folgt 4.4$(\to)$ durch Prämisseninduktion.

Zu $(\leftarrow)$: Sei $\vdash_{\mathcal{K}} \Sigma'.\Gamma$, also $\vdash_{\mathcal{K}} \Gamma. \sim H_1. \cdots .\sim H_n$. Wegen $\Sigma \vdash_{\mathcal{K}} H_i$ $(i \leq n)$ folgt $\Sigma \vdash_{\mathcal{K}} \Gamma$ durch n-fache Anwendung der Regel Σ-Schnitt (s.o., mit leerem T). $\square$

Definition: Σ heiße **widerspruchsvoll** genau dann, wenn $\Sigma \vdash_{\mathcal{K}} G$ und $\Sigma \vdash_{\mathcal{K}} \neg G$ für eine Formel G gilt.

Aus 4.4 und der Zulässigkeit der Schnittregel folgt:

4.5 Lemma: Σ ist widerspruchsvoll genau dann, wenn $\vdash_{\mathcal{K}} \Sigma'$.

Definition: $\mathcal{W}$ sei der Kalkül mit den Regeln

$$
\begin{array}{rcll}
 & \Rightarrow & P, \neg P & \text{(für atomare } P\text{)} \\
\Sigma & \Rightarrow & \mathrm{T} & \text{(falls } \Sigma \subseteq \mathrm{T}\text{)} \\
\Sigma, F & \Rightarrow & \Sigma, \neg\neg F & \\
\Sigma, \neg F \,,,\, \Sigma, \neg G & \Rightarrow & \Sigma, \neg (F \wedge G) & \\
\Sigma, F, G & \Rightarrow & \Sigma, (F \wedge G) & \\
\Sigma, \neg F y & \Rightarrow & \Sigma, \neg \forall x\, F x & \text{(falls } y \text{ neu)} \\
\Sigma, F \tau & \Rightarrow & \Sigma, \forall x\, F x &
\end{array}
$$

Wir werden zeigen, dass in $\mathcal{W}$ alle widerspruchsvollen $\wedge$-Listen - und nur diese - herleitbar sind.

Definition: $\vdash_{\mathcal{W}} \Sigma$ bedeute: In $\mathcal{W}$ ist Σ herleitbar.

4.6 Satz: (a) Wenn $\vdash_{\mathcal{K}} \Gamma$, dann $\vdash_{\mathcal{W}} \Gamma'$.
(b) Alle **widerspruchsvollen $\wedge$-Listen** sind in $\mathcal{W}$ herleitbar.

Beweis von (a) durch Prämisseninduktion in $\mathcal{K}$: Ersetzen wir in den Schlüssen von $\mathcal{K}$ jede Liste Γ durch Γ', so erhalten folgende Induktionsschritte, die in $\mathcal{W}$ zulässig sind. (Dabei beachte man, dass $\Gamma', \sim F \;\Rightarrow\; \Gamma', \neg F$ in $\mathcal{W}$ zulässig ist.)

$$
\begin{array}{rcll}
 & \Rightarrow & \sim P, \sim\neg P & \\
\Gamma' & \Rightarrow & \Delta' & \text{(falls } \Gamma \subseteq \Delta\text{)} \\
\Gamma', \sim F & \Rightarrow & \Gamma', \sim\neg\neg F & \\
\Gamma', \sim F \,,,\, \Gamma', \sim G & \Rightarrow & \Gamma', \sim (F \wedge G) & \\
\Gamma', \sim\neg F, \sim\neg G, & \Rightarrow & \Gamma', \sim\neg (F \wedge G) & \\
\Gamma', \sim F y & \Rightarrow & \Gamma', \sim\forall x\, F x & \text{(falls } y \text{ neu)} \\
\Gamma', \sim\neg F \tau & \Rightarrow & \Gamma', \sim\neg\forall x\, F x. &
\end{array}
$$

Zu (b): Ist Σ widerspruchsvoll, dann gilt $\vdash_{\mathcal{K}} \Sigma'$ nach 4.5, also $\vdash_{\mathcal{W}} \Sigma''$ nach (a), und daher auch $\vdash_{\mathcal{W}} \Sigma$. Denn ist z.B. $\Sigma \equiv \forall x\, Hx, \neg (F \wedge G), \neg\neg F$, so ist $\Sigma'' \equiv \forall x\, Hx, \neg (F \wedge G), F$, sodass $\Sigma'' \Rightarrow \Sigma$ nach der dritten Regel von $\mathcal{W}$ zulässig ist. $\square$

4.7 Lemma: Wenn $\vdash_{\mathcal{W}} \Sigma$, dann gilt $\vdash_{\mathcal{K}} \Sigma'$; also ist dann Σ widerspruchsvoll (nach 4.5).

Beweis durch Prämisseninduktion bez. $\mathcal{W}$: In $\mathcal{K}$ zulässig sind folgende Induktionsschritte:

$$
\begin{array}{rcll}
 & \Rightarrow & \sim P. \sim\neg P & \\
\Sigma' & \Rightarrow & \mathrm{T}' & \text{(falls } \Sigma \subseteq \mathrm{T}\text{)} \\
\Sigma'. \sim F & \Rightarrow & \Sigma'. \sim\neg\neg F & \\
\Sigma'. \sim\neg F \,,,\, \Sigma'. \sim \neg G & \Rightarrow & \Sigma'. \sim\neg (F \wedge G) & \\
\Sigma'. \sim F. \sim G & \Rightarrow & \Sigma', \sim (F \wedge G) & \\
\Sigma'. \sim\neg F y & \Rightarrow & \Sigma'. \sim\neg\forall x\, F x & \text{(falls } y \text{ neu)} \\
\Sigma'. \sim F \tau & \Rightarrow & \Sigma'. \sim\forall x\, F x. & \square
\end{array}
$$

Formeln in Skolemform haben die Gestalt $\forall x_1 \ldots \forall x_k F$ ($k \geq 0$) mit einer quantorenfreien Formel F. Wir nennen Listen derartiger Formeln kurz **allpränex**. Wir wollen zeigen, dass jede allpränexe $\wedge$-Liste, die in $\mathcal{W}$ herleitbar ist, sogar ohne Anwendung der Regel $\Sigma, \neg Fy \Rightarrow \Sigma, \neg\forall x\, Fx$ (d.h. der vorletzten Regel von $\mathcal{W}$) herleitbar ist.

Definition: $\mathcal{W}^-$ entstehe aus $\mathcal{W}$ durch Fortlassen der Regel $\Sigma, \neg Fy \Rightarrow \Sigma, \neg\forall x\, Fx$.

4.8 Lemma: Für allpränexe $\wedge$-Listen Σ gilt:
Ist Σ herleitbar in $\mathcal{W}$, so auch in $\mathcal{W}^-$ (und natürlich umgekehrt).

Beweis durch Prämisseninduktion: Σ sei allpränex und in $\mathcal{W}$ herleitbar. Dann kommt in Σ kein Glied der Form $\neg\forall x\, Fx$ vor, sodass Σ die Konklusion eines Schlusses von $\mathcal{W}^-$ ist, dessen Prämissen (falls vorhanden) ebenfalls allpränex sind. Sind diese Prämissen in $\mathcal{W}^-$ herleitbar, so ist auch Σ in $\mathcal{W}^-$ herleitbar. $\square$

4.9 Theorem (nach Herbrand): Gilt $\vdash_{\mathcal{W}^-} \Sigma, \forall u\, Hu$, dann gibt es ein Termtupel $\tau_1, \ldots, \tau_k$ $(k \geq 0)$, für das auch $\vdash_{\mathcal{W}^-} \Sigma, H\tau_1, \ldots, H\tau_k$ gilt (für $H\tau_i :\risingdotseq (Hu)^{\tau_i}_u$).

Beweis: Σ° entstehe aus Σ durch Fortlassen aller Vorkommnisse von $\forall u\, Hu$ als Glied von Σ. Wir zeigen zunächst allgemeiner:

(*) Gilt $\vdash_{\mathcal{W}^-} \Sigma$, dann gibt es ein Termtupel $\tau_1, \ldots, \tau_k$ mit $\vdash_{\mathcal{W}^-} \Sigma^\circ, H\tau_1, \ldots, H\tau_k$.

Der Beweis gelingt durch Prämisseninduktion, denn in $\mathcal{W}^-$ sind Induktionsschritte folgender Gestalt mit $\Omega \equiv H\tau_1, \ldots, H\tau_k$ zulässig:

$$
\begin{array}{rcll}
 & \Rightarrow & P, \neg P, \Omega & \text{(z.B. mit leerem } \Omega) \\
\Sigma^\circ, \Omega & \Rightarrow & \mathrm{T}^\circ, \Omega & \text{(falls } \Sigma \subseteq \mathrm{T}) \\
\Sigma^\circ, \Omega, F & \Rightarrow & \Sigma^\circ, \Omega, \neg\neg F & \\
\Sigma^\circ, \Omega_1, \neg F,, \ \Sigma^\circ, \Omega_2, \neg G & \Rightarrow & \Sigma^\circ, \Omega_1, \Omega_2, \neg(F \wedge G) & \\
\Sigma^\circ, \Omega, F, G & \Rightarrow & \Gamma^\circ, \Omega, (F \wedge G) & \\
\Sigma^\circ, \Omega, F\tau & \Rightarrow & \Sigma^\circ, \Omega, \forall x\, Fx & \text{(falls } \forall x\, Fx \not\equiv \forall u\, Hu) \\
\Sigma^\circ, \Omega, H\tau & \Rightarrow & \Sigma^\circ, \Omega, H\tau & \text{(s.u.).}
\end{array}
$$

In den Prämissen ist das Glied F, G oder $F\tau$ fortzulassen, falls es $\equiv \forall u\, Hu$ ist. In der letzten Zeile steht der Induktionsschritt zu $\Sigma, H\tau \Rightarrow \Sigma, \forall u\, Hu$. Aus (*) erhalten wir 4.9, da wegen $\Sigma^\circ \subseteq \Sigma$ der Schluss $\Sigma^\circ, \Omega \Rightarrow \Sigma, \Omega$ zu $\mathcal{W}^-$ gehört. $\square$

4.10 Korollar: Gilt $\vdash_{\mathcal{W}^-} \Sigma, \forall u\, Hu$ und ist $\Sigma, \forall u\, Hu$ geschlossen, dann gibt es ein Konstantentupel $s_1, \ldots, s_k$ $(k \geq 0)$ mit $\vdash_{\mathcal{W}^-} \Sigma, Hs_1, \ldots, Hs_k$.

Beweis: $\Sigma, \forall u\, Hu$ sei geschlossen, und * sei eine Substitution aller in $\tau_1, \ldots, \tau_k$ vorkommenden Variablen durch Konstante (z.B. $\emptyset$). Dann ist der Schluss $\Sigma, H\tau_1, \ldots, H\tau_k \Rightarrow \Sigma, H\tau_1^*, \ldots, H\tau_k^*$ in $\mathcal{W}^-$ zulässig (vgl. 4.2). Daraus und aus 4.9 folgt 4.10 $\square$

Aus 4.6(b), 4.8, 4.10 und 4.7 erhält man sofort:

4.11 Korollar: Ist $\Sigma, \forall u\, Hu$ allpränex, geschlossen und widerspruchsvoll, dann gibt es ein Tupel $s_1, \ldots, s_k$ von Konstanten, für das auch $\Sigma, Hs_1, \ldots, Hs_k$ widerspruchsvoll ist.

§5. Die Widerspruchsfreiheit einer Modifikation von ZFC

In §1 hatten wir gezeigt, dass die $\mathcal{E}$-Mengen die Axiome von ZFC ohne das Unendlichkeits-Axiom erfüllen. $\mathrm{ZFC}_\circ$ sei das System dieser Axiome in Skolemform. Sie seien in der in §3 eingeführten Sprache $\mathcal{L}$ formuliert. Zur Formulierung eines Unendlichkeitsaxioms in Skolemform benötigen wir noch ein neues Individuensymbol Ψ. Durch Einfügen von Ψ in die Konstruktion der Terme und Formeln von $\mathcal{L}$ entstehe die Sprache $\mathcal{L}_\Psi$. Unter Termen und Konstanten verstehen wir nun solche, die dieser Sprache $\mathcal{L}_\Psi$ angehören.

Hinweis: Die Zeichen $\{, \}, \in, \subseteq$ und $\cup$ werden wir auch in der Metasprache auf übliche Weise verwenden.

Für beliebige Konstante schreiben wir $r, s, r_1, s_1, \dots$; für Elemente von $\mathcal{E}$ wie bisher $a, b, c, d, a_1, \dots$; für Terme $\sigma, \tau, \sigma_1, \tau_1, \dots$. - Wie in §1 setzen wir

$$\begin{array}{rcl} \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\} & :\risingdotseq & \emptyset\{\sigma_1\}\dots\{\sigma_n\} \\ \sigma \in \tau & :\risingdotseq & \{\sigma\} \subseteq \tau \\ \sigma = \tau & :\risingdotseq & \sigma \subseteq \tau \ \wedge \ \tau \subseteq \sigma \\ \sigma^+ & :\risingdotseq & \sigma\{\sigma\}. \end{array}$$

Die folgende Charakterisierung von $\subseteq$ durch $\in$ möge in Skolemform zu $\mathrm{ZFC}_\circ$ gehören:

$$\forall x, y\, (x \subseteq y \leftrightarrow \forall z\, (z \in x \to z \in y)).$$

Ferner zählen wir folgendes Axiom zu $\mathrm{ZFC}_\circ$:

$$\forall x, y, z\, (x \in y\{z\} \ \leftrightarrow \ x \in y \ \vee \ x = z).$$

Aus $\mathrm{ZFC}_\circ$ (d.h. aus endlich vielen Elementen von $\mathrm{ZFC}_\circ$) sind somit in $\mathcal{K}$ herleitbar:

$$\begin{array}{l} \forall x, y\, (x = y \ \leftrightarrow \ x \in \{y\}) \\ \forall x, y\, (x = y \ \leftrightarrow \ \forall z\, (x \in z \leftrightarrow y \in z)) \\ \forall x, y\, (x \in y^+ \leftrightarrow \ x \in y \ \vee \ x = y). \end{array}$$

Damit können wir das **Unendlichkeitsaxiom** so formulieren:

$$\emptyset \in \Psi \ \wedge \ \forall x\, (x \in \Psi \to x^+ \in \Psi).$$

Hinweise: 1. Die *einzigen* Schlüsse von $\mathcal{H}$ mit leerem Γ, deren Konklusion mit N beginnt (s. §3), sind: $\Rightarrow \mathrm{N}\,\emptyset$ und $\mathrm{N}a \Rightarrow \mathrm{N}\,a^+$. Mittels 3.8.1 erhält man daher
$$\vdash_{\mathcal{H}} A(0) \wedge \forall x\, (A(x) \to A(x^+)) \to \forall x\, (\mathrm{N}x \to A(x)).$$
2. Für Konstante r, in denen Ψ oder ein Funktionssymbol vorkommt, gilt $r \notin \mathcal{E}$, also $\nvdash_{\mathcal{H}} \mathrm{N}r$. Jede Aussage der Form $r \in \mathcal{E}$ oder $\vdash_{\mathcal{H}} \mathrm{N}r$ impliziert also, dass r Ψ-frei und funktionssymbol-frei ist. (Zur Erinnerung: Die Klammern $\{, \}$ in Termen zählen wir nicht zu den Funktionssymbolen.)

Definitionen: Die Konstanten $\emptyset, \emptyset^+, \emptyset^{++}, \emptyset^{+++}, \ldots$ nennen wir **Nummern**. (Sie sind genau diejenigen Konstanten r, für die $\vdash_{\mathcal{H}} \mathrm{N}r$ gilt.) Ferner setzen wir

$$\mathbb{N}\,\sigma :\rightleftharpoons \exists y\,(\mathrm{N}y \wedge \sigma = y).$$

Die folgenden Lemmata dienen zur Vorbereitung eines Widerspruchsfreiheitsbeweises. Die Beweise der meisten dieser Lemmata sind in anderer Form bereits bekannt.

5.1 Lemma: Wenn $\vdash_{\mathcal{H}} \mathrm{N}\{a_1, \ldots, a_n\}$, dann $\vdash_{\mathcal{H}} \mathrm{N}a_i \ \ (i \leq n)$;
also $\vdash_{\mathcal{H}} \forall x, y\,(\mathbb{N}\,y \wedge x \in y \to \mathbb{N}\,x)$ (nach 3.1).

Beweis durch Induktion über n: Im Falle $\vdash_{\mathcal{H}} \mathrm{N}\emptyset\{a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n\}$ gilt $\vdash_{\mathcal{H}} \mathrm{N}a_n$ und $a_n \equiv \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$, also nach Ind.ann. auch $\vdash_{\mathcal{H}} \mathrm{N}a_i$ für $i < n$. $\square$

5.2 Lemma: $\vdash_{\mathcal{H}} \mathrm{N}c \ \wedge \ a \in c \ \to \ a \subseteq c$, also $\vdash_{\mathcal{H}} \forall y\,(\mathbb{N}\,y \to y \subseteq \mathcal{P}(y))$.

Beweis durch Induktion über die Herleitung von $\mathrm{N}c$: Wegen $\vdash_{\mathcal{H}} a \notin \emptyset$ gilt der Ind.anfang $\vdash_{\mathcal{H}} a \in \emptyset \ \to \ a \subseteq \emptyset$, und aus der Ind.ann. $\vdash_{\mathcal{H}} a \in b \ \to \ a \subseteq b$ folgt:

$$\vdash_{\mathcal{H}} a \in b^+ \ \to \ a \in b \ \vee \ a = b \ \to \ a \subseteq b \subseteq b^+. \quad \square$$

5.3 Lemma: Zu jeder $\mathcal{L}$-Konstanten r gibt es eine Nummer κ mit $\vdash_{\mathcal{H}} \kappa \notin r$.

Beweis: Wir verwenden hier κ, λ, μ als Variable für Nummern. Nach 3.10 genügt es zu zeigen, dass für alle $a \in \mathcal{E}$ gilt $\vdash_{\mathcal{H}} \exists\kappa\,\forall\lambda\,(\lambda \supseteq \kappa \to \lambda \notin a)$, und zwar durch Induktion über die Konstruktion von a. Der Ind.anfang ist trivial. Die Ind.ann. $\vdash_{\mathcal{H}} \forall\lambda\,(\lambda \supseteq \kappa \to \lambda \notin a)$ impliziert $\vdash_{\mathcal{H}} \forall\lambda \supseteq \kappa\;[\lambda \in a\{b\} \to \lambda = b \to$
$\to \forall\mu \supseteq \lambda^+\ (\mu \in a\{b\} \to_{\mu \supseteq \kappa} \mu \notin a \to \mu = b = \lambda \in \mu) \to \forall\mu \supseteq \lambda^+\ \ \mu \notin a\{b\}]$,
also $\vdash_{\mathcal{H}} \forall\lambda \supseteq \kappa\ \ (\lambda \notin a\{b\} \vee \forall\mu \supseteq \lambda^+\ \ \mu \notin a\{b\})$, also
$\vdash_{\mathcal{H}} \exists\kappa\,\forall\lambda \supseteq \kappa\ \ \lambda \notin a\{b\} \vee \exists\kappa'\,\forall\mu \supseteq \kappa'\ \ \mu \notin a\{b\}$. $\square$

Definition: Für $b \in \mathcal{E}$ und Konstante s entstehe s^b aus s durch Einsetzen von b für Ψ.

5.4 Lemma: Kommt Ψ in s vor, so gilt $\vdash_{\mathcal{H}} \mathrm{N}s^b \to b \subseteq s^b$.

Beweis durch Induktion über die Konstruktion von s : Ψ komme in s vor und es gelte $\vdash_{\mathcal{H}} \mathrm{N}s^b$. Daher kommt in s^b, also auch in s, kein Funktionssymbol vor. Steht Ψ am Anfang von s (d.h. ist $s \equiv \Psi$ oder $s \equiv \Psi\{s_1\}\ldots\{s_n\}$), dann ist $s^b \equiv b$ oder $s^b \equiv b\{s_1^b\}\ldots\{s_n^b\}$, und daher gilt $\vdash_{\mathcal{H}} b \subseteq s^b$. Anderenfalls hat s die Gestalt $\emptyset\{s_1\}\ldots\{s_n\}$ und Ψ kommt in s_i für ein $i \leq n$ vor. Dann ist $s^b \equiv \emptyset\{s_1^b\}\ldots\{s_n^b\}$. Nach 5.1 gilt also $\vdash_{\mathcal{H}} \mathrm{N}s_i^b$. Nach Ind.ann. erhalten wir $\vdash_{\mathcal{H}} b \subseteq s_i^b \in s^b$ und somit (nach 5.2) $\vdash_{\mathcal{H}} b \subseteq s^b$. $\square$

5.5 Lemma: Jede in $\mathcal{K}$ herleitbare $\vee$-Liste quantorenfreier $\mathcal{L}$-Aussagen ist auch in $\mathcal{H}$ herleitbar.

Beweis: Ist die Konklusion eines Schlusses von $\mathcal{K}$ quantorenfrei, so sind dies auch alle seine Prämissen. Jede in $\mathcal{K}$ herleitbare quantorenfreie $\vee$-Liste Γ von $\mathcal{L}$-Aussagen hat also eine quantorenfreie Herleitung in $\mathcal{K}$. Diese ist auch eine Herleitung nach den Regeln von $\mathcal{H}$ plus 3.2. $\square$

Definitionen: $\sigma \subseteq \mathbb{N} \;:\!\!\equiv\; \forall x\,(x \in \sigma \to \mathbb{N}x)$.
(Vorsicht: $\sigma \subseteq \mathbb{N}$ ist nicht quantorenfrei.) Im Folgenden sei $\underline{x} :\!\equiv x_1, \ldots, x_n$ mit $n \geq 0$.

$[\mathcal{H}]$ sei die Menge aller Aussagen $\forall \underline{x}\, C(\underline{x})$ mit je einer quantorenfreien $\mathcal{L}$-Formel $C(\underline{x})$ derart, dass $\vdash_{\mathcal{H}} C(\underline{r})$ für alle $\mathcal{L}$-Konstanten-n-tupel $\underline{r} :\!\equiv r_1, \ldots, r_n$ (die auch Funktionssymbole enthalten dürfen) gilt.

$[\mathcal{H}(\Psi)]$ sei die Menge aller Aussagen $\forall \underline{x}\, C(\underline{x}, \Psi)$ mit je einer quantorenfreien $\mathcal{L}$-Formel $C(\underline{x}, v)$ derart, dass $\vdash_{\mathcal{H}} \forall v\,(v \subseteq \mathbb{N} \to C(\underline{r}, v))$ für alle $\mathcal{L}$-Konstanten-n-tupel $\underline{r}$ gilt.

Offenbar ist $[\mathcal{H}] \subseteq [\mathcal{H}(\Psi)]$. (Man betrachte Ψ-freie Formeln $C(\underline{x}, \Psi) \equiv C(\underline{x})$.)

Hinweis: Alle in $\mathcal{H}$ herleitbaren stabilen $\mathcal{L}$-Aussagen gehören nach 3.10 zu $[\mathcal{H}]$.
(Def.-Wiederholung: Eine $\mathcal{L}$-Formel (ein $\mathcal{L}$-Term) heiße **stabil**, wenn sie $(\preceq)$-frei ist und in ihr (ihm) keine Teilformel der Gestalt $\mathrm{N}\alpha(x)$ mit einem offenen $\mathcal{E}$-Term $\alpha(x)$ steht.)

Beispiele:
1. $\forall x\,(\mathrm{N}x \to \mathrm{N}x^+)$ gehört zu $[\mathcal{H}]$, da für alle $\mathcal{L}$-Konstanten r gilt $\vdash_{\mathcal{H}} (\mathrm{N}r \to \mathrm{N}r^+)$.

2. Gilt $\vdash_{\mathcal{H}} \forall x, \underline{y}, v\,(\mathbb{N}x \to A(x, \underline{y}, v))$ und ist $A(x, \underline{y}, v)$ quantorenfrei und stabil, dann gilt $\vdash_{\mathcal{H}} \forall v \subseteq \mathbb{N}\;\; (q \in v \;\to\; A(q, \underline{r}, v))$ für alle $q, \underline{r}$. Also gehört $\forall x \in \Psi\;\; \forall \underline{y}\, A(x, \underline{y}, \Psi)$ zu $[\mathcal{H}(\Psi)]$.

3. Nach 5.2 gilt $\vdash_{\mathcal{H}} \forall x\,(\mathbb{N}x \to x \subseteq \mathcal{P}x \to \mathcal{V}x \subseteq x)$, also gilt $[\mathcal{H}(\Psi)] \vdash_{\mathcal{K}} \forall x \in \Psi\;\; (x \subseteq \mathcal{P}x \wedge \mathcal{V}x \subseteq x)$.

4. Bekanntlich gilt $\vdash_{\mathcal{H}} \forall x, y\,(\mathbb{N}x \wedge \mathbb{N}y \to x \cdot y = y \cdot x)$, also gilt $[\mathcal{H}(\Psi)] \vdash_{\mathcal{K}} \forall x, y \in \Psi\;\; x \cdot y = y \cdot x$.

Manche Axiome von $[\mathcal{H}(\Psi)]$ folgen aus den übrigen.

Definition: Wir setzen $\Phi :\!\equiv \Psi \cap \mathcal{P}\Psi$ und $\mathrm{N}\underline{x} :\!\equiv \mathrm{N}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{N}x_n$ für $n \geq 0$.
zfc* sei folgende Aussagenmenge:

$$\mathrm{zfc}^* \;:\!\equiv\; [\mathcal{H}(\Psi)] \cup \{\forall \underline{x}\;(\mathrm{N}\underline{x} \to \delta(\underline{x}) \in \Phi) :\; \vdash_{\mathcal{H}} \forall \underline{x}\;(\mathrm{N}\underline{x} \to \mathbb{N}\delta(\underline{x}))\}.$$

Dabei steht $\delta(\underline{x})$ für $\mathcal{L}$-Terme.

Bemerkungen: 1. Für $\delta(\underline{x}) \equiv x$ enthält zfc* das Axiom $\forall x\,(\mathrm{N}x \to x \in \Phi)$, abgekürzt $\mathrm{N} \subseteq \Phi$. 2. Das Unendlichkeitsaxiom lautet $\emptyset \in \Phi \wedge \forall x\,(x \in \Phi \to x^+ \in \Phi)$.
Statt dessen gilt aber vermutlich nur $\mathrm{zfc}^* \vdash_{\mathcal{K}} \emptyset \in \Phi \wedge \forall x\,(\mathrm{N}x \wedge x \in \Phi \to x^+ \in \Phi)$.
Insofern ist zfc* eine abgeschwächte Version von ZFC, die sich jedoch in anderer Hinsicht als 'stärker' als ZFC erweisen wird. (Daher '*' in 'zfc*'.)

5.6 Theorem: zfc* ist widerpruchsfrei.

Beweis: Wir nehmen an, zfc* sei widerspruchsvoll, kurz: $\vdash_{\mathcal{W}}$ zfc*, d.h. es gebe (endliche) $\wedge$-Listen $\mathrm{H}(\Psi) \subseteq [\mathcal{H}(\Psi)]$ und $\forall \underline{x}_i\,(\mathrm{N}\underline{x}_i \to \delta_i(\underline{x}_i) \in \Phi)$ $(i \in I)$ mit

$$\begin{aligned}&\vdash_{\mathcal{W}} \mathrm{H}(\Psi), \forall \underline{x}_i\,(\mathrm{N}\underline{x}_i \to \delta_i(\underline{x}_i) \in \Phi) \ \ (i \in I),\\ &\text{wobei} \ \ \vdash_{\mathcal{H}} \forall \underline{x}_i\,(\mathrm{N}\underline{x}_i \to \mathbb{N}\delta_i(\underline{x}_i)) \ \text{ für alle } i \in I.\end{aligned}$$

Nach 4.11 bleibt dieses Axiomensystem widerspruchsvoll, wenn man in ihm jedes Axiom $\forall \underline{x}\, C(\underline{x}, \Psi)$ von $\mathrm{H}(\Psi)$ durch endlich viele geeignete Axiome der Gestalt $C(\underline{r}, \Psi)$ substituiert (wobei Ψ in $\underline{r}$ vorkommen kann). Bei dieser Substitution entstehe die (quantorenfreie) Liste $\mathrm{H}(\Psi)^*$ aus $\mathrm{H}(\Psi)$. Somit gilt

$$\vdash_{\mathcal{W}} \mathrm{H}(\Psi)^*, \ \forall \underline{x}_i\,(\mathrm{N}\underline{x}_i \to \delta_i(\underline{x}_i) \in \Phi) \ \ (i \in I).$$

Ebenfalls nach 4.11 gibt es Konstanten-Tupel $\underline{s}_{i,j}$ $(i \in I, j \in J_i)$ mit

$$\vdash_{\mathcal{W}} \mathrm{H}(\Psi)^*, (\mathrm{N}\underline{s}_{ij} \to \delta_i(\underline{s}_{ij}) \in \Phi) \ \ (i \in I, j \in J_i).$$

Im Falle $\not\vdash_{\mathcal{H}} \mathrm{N}\underline{s}_{ij}$ sei $F_{ij} :\risingdotseq \neg\,\mathrm{N}s'_{ij}$; dabei sei s'_{ij} das im Tupel $\underline{s}_{ij}$ am weitesten links stehende Glied desselben, für das $\not\vdash_{\mathcal{H}} \mathrm{N}s'_{ij}$ gilt. Im Falle $\vdash_{\mathcal{H}} \mathrm{N}\underline{s}_{ij}$ sei $F_{ij} :\risingdotseq \delta_i(\underline{s}_{ij}) \in \Phi$. Kommt Ψ in $\underline{s}_{ij}$ vor, dann gilt $\not\vdash_{\mathcal{H}} \mathrm{N}\underline{s}_{ij}$. Daher und nach 3.1 ist F_{ij} für alle $i \in I, j \in J_i$ definiert. Wegen $F_{ij} \vdash_{\mathcal{K}} (\mathrm{N}\underline{s}_{ij} \to \delta_i(\underline{s}_{ij}) \in \Phi)$ erhalten wir $\vdash_{\mathcal{W}} \mathrm{H}(\Psi)^*, F_{ij}$ $(i \in I, j \in J_i)$. Dieses Ergebnis lässt sich durch Permutation der Aussagen F_{ij} so schreiben:

$$\vdash_{\mathcal{W}} \mathrm{H}(\Psi)^*, \neg\,\mathrm{N}r_1, \ldots, \neg\,\mathrm{N}r_m, a_1 \in \Phi, \ldots, a_n \in \Phi.$$

Dabei gilt $\vdash_{\mathcal{H}} \mathbb{N}\, a_\iota$ für $\iota \leq n$. $a_1, \ldots, a_n$ sind also Ψ-frei. Daher und wegen $\Phi :\risingdotseq \Psi \cap \mathcal{P}\Psi$ gilt für beliebige $\mathcal{E}$-Konstanten b (an Stelle von Ψ) auch

$$\vdash_{\mathcal{W}} \mathrm{H}(b)^*, \neg\,\mathrm{N}r_1^b, \ldots, \neg\,\mathrm{N}r_m^b, a_1 \in b \cap \mathcal{P}b, \ldots, a_n \in b \cap \mathcal{P}b.$$

Nach 5.3 gibt es Nummer κ mit $\vdash_{\mathcal{H}} \kappa \notin r_1^{\emptyset} \cup \ldots \cup r_m^{\emptyset} \cup a_1^+ \cup \ldots \cup a_n^+$.
Für eine solche Nummer κ setzen wir nun

$$b :\risingdotseq a_1^+ \cup \ldots \cup a_n^+ \cup \{\kappa^+\}.$$

Nach 4.5 erhalten wir

$$\vdash_{\mathcal{K}} (\mathrm{H}(b)^*)'.\, \mathrm{N}r_1^b. \cdots .\mathrm{N}r_m^b.\, a_1 \notin b \cap \mathcal{P}b. \cdots .\, a_n \notin b \cap \mathcal{P}b.$$

Diese Liste ist quantorenfrei und Ψ-frei, also nach 5.5 auch in $\mathcal{H}$ statt $\mathcal{K}$ herleitbar. In $\mathcal{H}$ herleitbar sind aber auch die Aussagen $a_1 \in b \cap \mathcal{P}b$,, $\ldots$,, $a_n \in b \cap \mathcal{P}b$. Wegen $\vdash_{\mathcal{H}} b \subseteq \mathbb{N}$ sind auch alle Glieder von $\mathrm{H}(b)^*$ in $\mathcal{H}$ herleitbar (vgl. die Def. von $[\mathcal{H}(\Psi)]$). Daher erhalten wir durch mehrfache Anwendung von 3.5:

$$\vdash_{\mathcal{H}} \mathrm{N}r_1^b. \cdots .\mathrm{N}r_m^b.$$

Nach 3.1 und 3.5 gibt es also ein $i \leq m$ mit $\vdash_{\mathcal{H}} \mathrm{N}r_i^b$. Für dieses i ergibt sich Folgendes:

Wegen $\nvdash_{\mathcal{H}}$ Nr_i (s.o.) ist $r_i^b \not\equiv r_i$. Also kommt Ψ in r_i vor. Nach der Def. von b und wegen $\vdash_{\mathcal{H}}$ Nr_i^b erhalten wir $\vdash_{\mathcal{H}} \kappa^+ \in b \subseteq r_i^b$ (nach 5.4), also $\vdash_{\mathcal{H}} \kappa \in \kappa^+ \subseteq r_i^b$ (nach 5.2). Wegen $\vdash_{\mathcal{H}}$ Nr_i^b kommen in r_i^b, also auch in r_i, keine Funktionssymbole vor. Also hat r_i die Gestalt $\emptyset\{r_{i1}\}\ldots\{r_{i\ell}\}$ oder $\Psi\{r_{i1}\}\ldots\{r_{i\ell}\}$. Daher ist $r_i^b \equiv \emptyset\{r_{i1}^b\}\ldots\{r_{i\ell}^b\}$ oder $r_i^b \equiv b\{r_{i1}^b\}\ldots\{r_{i\ell}^b\}$. Wegen $\vdash_{\mathcal{H}} \kappa \in r_i^b$ und $\vdash_{\mathcal{H}} \kappa \notin b$ gibt es ein $j \leq \ell$ mit $\vdash_{\mathcal{H}} \kappa = r_{ij}^b$. Für dieses j gilt $\vdash_{\mathcal{H}}$ Nr_{ij}^b (nach 5.1). Käme Ψ in r_{ij} vor, erhielten wir $\vdash_{\mathcal{H}} \kappa^+ \in b \subseteq r_{ij}^b$ (nach 5.4), also $\vdash_{\mathcal{H}} \kappa^+ \in \kappa$, was falsch ist. Also kommt Ψ nicht in r_{ij} vor. Also gilt $r_{ij}^b \equiv r_{ij}^\emptyset$, also $\vdash_{\mathcal{H}} \kappa = r_{ij}^\emptyset \in r_i^\emptyset$, was der Wahl von κ widerspricht. $\square$

Zur Problematik: Aus dem sog. Zweiten Unvollständigkeitssatz von Gödel folgt insbesondere: Falls eine Kodierung (bekannter Art) der Aussage „ZFC ist widerspruchsfrei“ aus ZFC herleitbar ist, dann ist ZFC widerspruchsvoll. Obwohl wir eine *Modifikation* der angeführten Aussage bewiesen haben, stellt sich die Frage, ob der hier angegebene Beweis von 5.6 in entsprechend kodierter Form als eine Herleitung aus ZFC darstellbar ist. Zu diesem Beweis gehört aber auch die Untersuchung des in §3 angeführten Halbformalismus $\mathcal{H}$ (mit einer Schlussregel mit unendlich vielen Prämissen). $\mathcal{H}$ ist jedoch nicht 'beweisdefinit', d.h. es gibt kein effektives Verfahren, das für jede angebliche Herleitung in $\mathcal{H}$ zu entscheiden gestattet, ob sie tatsächlich eine Herleitung in $\mathcal{H}$ ist. $\mathcal{H}$ ist also nicht ersetzbar durch einen Kalkül (dessen Regeln je nur endlich viele Prämissen haben).

§6. Allgemeine Folgerungen aus zfc*.

Von nun an schreiben wir einfach 'zfc$^* \vdash$' statt 'zfc$^* \vdash_{\mathcal{K}}$', lassen also den Index '$\mathcal{K}$' fort. Zur Vereinfachung von Formeln setzen wir ferner

$$\begin{aligned} \sigma \in \mathrm{N} \;&:\rightleftharpoons\; \mathrm{N}\,\sigma, \\ \sigma \in \mathbb{N} \;&:\rightleftharpoons\; \mathbb{N}\,\sigma, \\ \mathbb{N} \subseteq \Phi \;&:\rightleftharpoons\; \forall y\,(y \in \mathbb{N} \to y \in \Phi). \\ \forall x_1,\ldots,x_k \in \mathbb{N}\;\; F \;&:\rightleftharpoons\; \forall x_1,\ldots,x_k\;(x_1 \in \mathbb{N} \wedge \ldots \wedge x_k \in \mathbb{N} \;\to\; F). \end{aligned}$$

6.1 Satz: (a) zfc$^* \vdash \mathbb{N} \subseteq \Phi$.
(b) zfc$^* \vdash \forall x\,(x \in \Phi \to x \subseteq \Phi)$, also zfc$^* \vdash \Phi \subseteq \mathcal{P}\Phi \wedge \mathcal{V}\Phi \subseteq \Phi$.
(c) $B(x_1,\ldots,x_k)$ sei eine stabile $\mathcal{L}$-Formel ($k \geq 0$).
Gilt $\vdash_{\mathcal{H}} \forall x_1,\ldots,x_k \in \mathbb{N}\;\; B(x_1,\ldots,x_k)$, dann gilt auch
zfc$^* \vdash \forall x_1,\ldots,x_k \in \Phi\;\; B(x_1,\ldots,x_k)$.
(c') Für stabile $\mathcal{L}$-Formeln B mit $\vdash_{\mathcal{H}} B$ gilt auch zfc$^* \vdash B$ (nach (c) mit $k = 0$).
(d) Zu jeder stabilen $\mathcal{L}_\Psi$-Formel $B(\underline{x}, y)$ gibt es einen $\mathcal{L}_\Psi$-Term $g(\underline{x})$ mit
zfc$^* \vdash \forall \underline{x}\,(\exists y\, B(\underline{x}, y) \leftrightarrow B(\underline{x}, g(\underline{x})))$.
(e) Für $\mathcal{L}$-Terme $\delta(\underline{x})$, die invariant bezüglich (=) sind, gilt:
Wenn $\vdash_{\mathcal{H}} \forall \underline{x}\,(\underline{x} \in \mathbb{N} \to \delta(\underline{x}) \in \mathbb{N})$, dann zfc$^* \vdash \forall \underline{y}\,(\underline{y} \in \mathbb{N} \to \delta(\underline{y}) \in \Phi)$.

Beweise: (a) zfc$^* \vdash \forall y\,(\mathbb{N}y \to \exists x\,(\mathrm{N}x \wedge y = x) \to y \in \Phi)$.
(b) zfc$^* \vdash \forall x\,(x \in \mathcal{P}\Psi \cap \Psi \to x \subseteq \Psi \wedge x \subseteq_{Bsp.3} \mathcal{P}x \subseteq \mathcal{P}\Psi \to x \subseteq \Psi \cap \mathcal{P}\Psi)$.

(c) $\forall \underline{y}\, A(\underline{x}, \underline{y})$ sei eine Skolemform von $B(\underline{x})$. Nach Voraussetzung gilt $\vdash_{\mathcal{H}} \forall \underline{x} \in \mathrm{I\!N}\ \forall \underline{y}\ A(\underline{x}, \underline{y})$, also auch $\vdash_{\mathcal{H}} \forall v \subseteq \mathrm{I\!N}\ \forall \underline{x} \in v\ \forall \underline{y}\ A(\underline{x}, \underline{y})$.
Wegen $[\mathcal{H}(\Psi)] \subseteq$ zfc* folgt daraus zfc* $\vdash \forall \underline{x} \in \Psi\ \forall \underline{y}\ A(\underline{x}, \underline{y})$, also zfc* $\vdash \forall \underline{x} \in \Phi\ \ B(\underline{x})$.

(d) $B(\underline{x}, y)$ sei eine stabile $\mathcal{L}_\Psi$-Formel. Dann gibt es eine stabile $\mathcal{L}$-Formel $A(\underline{x}, u, y)$ mit $B(\underline{x}, y) \equiv A(\underline{x}, \Psi, y)$. Nach 3.11 ist $\forall \underline{x}, u\, (\exists y\, A(\underline{x}, u, y) \to A(\underline{x}, u, f(\underline{x}, u)))$ mit passendem Funktionssymbol f in $\mathcal{H}$ herleitbar, also auch aus zfc*. Daraus folgt zfc* $\vdash \forall \underline{x}\, (\exists y\, A(\underline{x}, \Psi, y) \to A(x, \Psi, f(\underline{x}, \Psi))$ und somit (d).

(e)

Aus $\vdash_{\mathcal{H}} \forall \underline{x}\, (\underline{x} \in \mathrm{I\!N} \to \delta(\underline{x}) \in \mathrm{I\!N})$ folgt nacheinander

$$
\begin{aligned}
&\vdash_{\mathcal{H}} \forall \underline{x}\, (\underline{x} \in \mathrm{N} \to \delta(\underline{x}) \in \mathrm{I\!N}),\\
&\text{zfc}^* \ni \forall \underline{x}\, (\underline{x} \in \mathrm{N} \to \delta(\underline{x}) \in \Phi) \ \text{(Axiom)},\\
&\text{zfc}^* \vdash \forall \underline{y}\, \forall \underline{x}\, (\underline{y} = \underline{x} \in \mathrm{N} \to \delta(\underline{y}) = \delta(\underline{x}) \in \Phi),\\
&\text{zfc}^* \vdash \forall \underline{y}\, (\exists \underline{x}\, (\underline{y} = \underline{x} \in \mathrm{N}) \to \delta(\underline{y}) \in \Phi),\\
&\text{zfc}^* \vdash \forall \underline{y}\, (\underline{y} \in \mathrm{I\!N} \to \delta(\underline{y}) \in \Phi). \quad \square
\end{aligned}
$$

Im Folgenden behandeln wir einige **arithmetische Fragen**. Dabei schreiben wir $0, 1, 2, \ldots$ für $\emptyset, \emptyset^+, \emptyset^{++}, \ldots$, ferner (zwischen Elementen von $\mathrm{I\!N}$ bzw. Φ), $<$ statt $\in$ und $\leq$ statt $\subseteq$.

6.2. Satz (zur Induktion in Φ): Für alle stabilen $\mathcal{L}$-Formeln $A(x, \underline{y})$, gilt
(a) zfc* $\vdash \forall \underline{y}\, [A(0, \underline{y}) \wedge \forall u\, (A(u, \underline{y}) \to A(u^+, \underline{y})) \to \forall x \in \Phi\ A(x, \underline{y})]$.
(b) zfc* $\vdash \forall \underline{y}\, [\forall v \in \Phi\ (\forall u < v\ A(u, \underline{y}) \to A(v, \underline{y})) \to \forall x \in \Phi\ A(x, \underline{y})]$.
(c) zfc* $\vdash \forall \underline{y}\, [\exists x \in \Phi\ A(x, \underline{y}) \to \exists v \in \Phi\ (A(v, \underline{y}) \wedge \forall u < v\ \neg A(u, \underline{y}))]$.

Beweis: (a) Für Formeln $Axy :\!\!\!= A(x, \underline{y})$ wie in 6.2 setzen wir $f(y) :\!\!\!= f(\underline{y}) :\!\!\!= \mu u\, \forall x\, [A0y) \wedge (Auy \to Au^+y) \to (\mathrm{N}x \to Axy)]$.
Da $\mathcal{H}$ außer den angegebenen *keine weiteren* Regeln, in denen N steht, enthält, ergibt sich nacheinander:

$$
\begin{aligned}
&\vdash_{\mathcal{H}} \forall y\, [A0y \wedge \forall u\, (Auy \to Au^+y) \to \forall x\, (\mathrm{N}\, x \to Axy)],\\
&\vdash_{\mathcal{H}} \forall y\, \exists u\, [A0y \wedge (Auy \to Au^+y) \to \forall x\, (\mathrm{N}\, x \to Axy)],\\
&\vdash_{\mathcal{H}} \forall y, x\, [A0y \wedge (Af(y)y \to Af(y)^+y) \to (\mathrm{N}x \to Axy)] \ \text{(nach 3.10)},\\
&\vdash_{\mathcal{H}} \forall x \in \mathrm{I\!N}\ \forall \underline{y}\, [A0y \wedge (Af(y)y \to Af(y)^+y) \to Axy],\\
&\text{zfc}^* \vdash \forall x \in \Phi\ \forall \underline{y}\ [A0y \wedge (Af(y)y \to Af(y)^+y) \to Axy] \ \text{(nach 6.1(c))}\ ,\\
&\text{zfc}^* \vdash \forall x \in \Phi\ \forall \underline{y}\ [A0y \wedge \forall u\, (Auy \to Au^+y) \to Axy].
\end{aligned}
$$

(b) erhält man analog. (c) folgt (mit $\neg A(\ldots)$ an Stelle von $A(\ldots)$) bekanntlich aus (b). $\square$

'Geschachtelte Induktion': Für stabile Axy kann man nun mittels 5.8 aus zfc* z.B. Folgendes herleiten und in Beweisen mancher arithmetischer Aussagen anwenden:

$$
\begin{aligned}
&A00 \wedge \forall y\, (A0y \to A0y^+) \wedge \forall x\, (Ax0 \to Ax^+0) \wedge\\
&\wedge \forall x, y\, \big((Axy \to Ax^+y) \to (Axy^+ \to Ax^+y^+)\big) \ \to\ \forall y \in \Phi\ \forall x \in \Phi\ Axy.
\end{aligned}
$$

Listen $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ und Tupel $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ hatten wir bisher als informelle Schreibweisen verwendet. Im Folgenden sollen jedoch **Paare**, **Tripel** usw. etwa nach Kuratowski wie folgt mengentheoretisch definiert sein: $(\sigma,\tau) :\Leftarrow \{\{\sigma\},\{\sigma,\tau\}\}$; $(\varrho,\sigma,\tau) :\Leftarrow ((\varrho,\sigma),\tau)$, usw. Das **karthesische Produkt** $M_1\times\ldots\times M_k$ von Mengen M_i sei wie üblich definiert. Es ist wieder eine Menge, die als $\{y\colon \exists x_1\in M_1\ \ldots\ \exists x_k\in M_k\ \ y=(x_1,\ldots,x_k)\}$ geschrieben werden kann. Wir definieren noch rekursiv

$$M^{1\times} := M \ \text{ und } \ M^{(k+1)\times} :\Leftarrow M^{k\times}\times M.$$

6.3 Lemma: Für alle Nummern μ,ν gilt $\vdash_{\mathcal H} \mu=\nu$ oder $\vdash_{\mathcal H} \mu<\nu$ oder $\vdash_{\mathcal H} \mu<\nu$, und daher (nach 6.1(c)) zfc$^* \vdash \forall x,y\in\Phi\ (x=y\ \vee\ x<y\ \vee\ y<x)$.

Bekannter Beweis: Wir setzen $A\mu\nu :\Leftarrow \mu=\nu\ \vee\ \mu<\nu\ \vee\ \nu<\mu$ und nehmen an, es gäbe Nummern μ,ν mit $\vdash_{\mathcal H} \neg A\mu\nu$. Dann gibt es ein kürzestes μ_0 mit $\vdash_{\mathcal H} \exists\nu\,\neg A\mu_0\nu$ und ein kürzestes ν_0 mit $\vdash_{\mathcal H} \neg A\mu_0\nu_0$. Wegen $\vdash_{\mathcal H} \mu_0=0\ \vee\ 0<\mu_0$ und $\vdash_{\mathcal H} 0=\nu_0\ \vee\ 0<\nu_0$ gilt $\nu_0\not\equiv 0\not\equiv\mu_0$. Daher schreiben wir κ^+ statt μ_0 und λ^+ statt ν_0. Da die Längen von κ^+ und λ^+ minimal sind, folgt

$$\begin{array}{ll}(1) & \vdash_{\mathcal H} \kappa=\lambda\ \vee\ \kappa<\lambda\ \vee\ \lambda<\kappa\\ (2) & \vdash_{\mathcal H} \kappa=\lambda^+\ \vee\ \kappa<\lambda^+\ \vee\ \lambda^+<\kappa\\ (3) & \vdash_{\mathcal H} \kappa^+=\lambda\ \vee\ \kappa^+<\lambda\ \vee\ \lambda<\kappa^+.\end{array}$$

Um obige Annahme zu widerlegen, zeigen wir, dass daraus $\vdash_{\mathcal H} A\kappa^+\lambda^+$ folgt.

Wegen $\vdash_{\mathcal H} \kappa=\lambda\to\kappa^+=\lambda^+\to A\kappa^+\lambda^+$ und (1) dürfen wir aus Symmetriegründen $\vdash_{\mathcal H} \kappa<\lambda$ annehmen. Wegen (3) haben wir drei Fälle zu unterscheiden:
$\vdash_{\mathcal H} \kappa^+=\lambda\to\kappa^{++}=\lambda^+\to\kappa^+<\lambda^+\to A\kappa^+\lambda^+$.
$\vdash_{\mathcal H} \kappa^+<\lambda\to\kappa^+<\lambda^+\to A\kappa^+\lambda^+$.
$\vdash_{\mathcal H} \lambda<\kappa^+\to\lambda<\kappa\vee\lambda=\kappa\to_{\kappa<\lambda}\kappa<\kappa$ (Widerspruch zum Fundierungsaxiom).
Somit gilt $\vdash_{\mathcal H} A\kappa^+\lambda^+$, also $\vdash_{\mathcal H} A\mu\nu$ für alle Nummern μ,ν. Nach 3.1 folgt daraus 6.3. □

6.4 Satz In $\mathcal H$ herleitbar sind

$$\begin{array}{llll}
(a) & \forall x\in\mathbb{N} & x\le x & \text{(nach 1.7)}\\
(b) & \forall x,y,z\in\mathbb{N} & (x\le y\le z\to x\le z) & \text{(nach 1.6)}\\
(c) & \forall x,y\in\mathbb{N} & (x\le y\le x\to x=y) & \text{(nach 1.7)}\\
(d) & \forall x,y\in\mathbb{N} & (x<y\leftrightarrow x\le y\wedge x\ne y) & \\
(e) & \forall x,y\in\mathbb{N} & (x\le y\leftrightarrow x<y\vee x=y) & \\
(f) & \forall x,y\in\mathbb{N} & (x\le y\ \vee\ y\le x). & \\
(g) & \forall x,y\in\mathbb{N} & (x<y\leftrightarrow x^+<y^+) & \\
(h) & \forall x,y\in\mathbb{N} & (x\le y\leftrightarrow x^+\le y^+). &
\end{array}$$

Beweisskizzen: Beachte, dass nach 5.2 gilt $\vdash_{\mathcal H} \forall x,y\in\mathbb{N}\ (x<y\to x\le y)$.
Zu (d)($\to$) : 5.2, $x\not<x$. ($\leftarrow$) : $x\not<y\to_{6.3} y<x\vee x=y\to_{y\not<y} x\not\le y\vee x=y$.
Zu (e)($\to$) : $x\le y\to_{y\not<y} y\not<x\to_{6.3} x<y\vee x=y$. ($\leftarrow$) : 5.2.

Zu (f): 6.3, (e). Zu (g):

$$\begin{array}{lll} \kappa < \lambda & \to & \forall x\,(x < \kappa^+ \to x < \kappa \leq_{5.2} \lambda \vee x = \kappa \to x < \lambda) \\ & \to & \kappa^+ \leq \lambda \\ & \leftrightarrow_{(e)} & \kappa^+ < \lambda \vee \kappa^+ = \lambda. \\ & \leftrightarrow & \kappa^+ < \lambda^+ \quad (\text{da} \quad \lambda < \lambda^+) \\ & \leftrightarrow & \kappa^+ \leq \lambda \quad (\text{wie gezeigt}) \\ & \to & \kappa < \lambda. \end{array}$$

(h) folgt aus (e) und (g). □

6.5 Lemma: $\vdash_{\mathcal{H}} \forall z \in \mathbb{N}\ \ \mathcal{V}(z^+) = z$, also $\vdash_{\mathcal{H}} \forall y \in \mathbb{N}\ (y \neq 0 \to \mathcal{V}(y)^+ = y)$.

Beweis durch Induktion: Anschaulich geht dies so: Es gilt $0 \in 1 \in 2 \in \ldots \in n \in n^+$. Hier ist $\in$ transitiv. Aus der Ind.ann., dass n auch <u>nur</u> die links von ihm stehenden Elemente hat, folgt, dass dies auch für n^+ gilt und daher n das größte Element von n^+ ist, also $n = \mathcal{V}(n^+)$ ist. □

Folgende Aussagen sind bekanntlich in der Peano-Arithmetik und somit in $\mathcal{H}$ herleitbar:

$$\begin{array}{l} \forall x, y, z \in \mathbb{N}\ \ \big[\,(x+y)+z \ = \ x+(y+z) \quad \wedge \quad (x \cdot y) \cdot z \ = \ x \cdot (y \cdot z)\,\big] \\ \forall x, y \in \mathbb{N}\ \ \big[\,x+y \ = \ y+x \quad \wedge \quad x \cdot y \ = \ y \cdot x\,\big] \\ \forall x, y \in \mathbb{N}\ \ \ x \cdot z + y \cdot z \ = \ (x+y) \cdot z. \end{array}$$

Aus 6.4(h) folgt durch Induktion nach z die Herleitbarkeit in $\mathcal{H}$ von:

$$\begin{array}{l} \forall x, y, z \in \mathbb{N}\ \ (x \leq y \leftrightarrow x+z \leq y+z) \\ \forall x, y, z \in \mathbb{N}\ \ (0 < z \to (x \leq y \leftrightarrow x \cdot z \leq y \cdot z)). \end{array}$$

Nun definieren wir noch rekursiv $a \dot{-} 0 :\rightleftharpoons a$; $a \dot{-} b^+ :\rightleftharpoons \mathcal{V}(a \dot{-} b)$ und erhalten

$$\begin{array}{l} \vdash_{\mathcal{H}} \forall x \in \mathbb{N}\ \ x \dot{-} 1 = \mathcal{V}x \\ \vdash_{\mathcal{H}} \forall x, y \in \mathbb{N}\ \ (x \leq y \to x + (y \dot{-} x) = y). \end{array}$$

Beweis durch Induktion nach x (Skizze): Ind.anfang: $\forall y \geq 0\ \ 0 + (y \dot{-} 0) = y$.
Ind.ann.: $\forall y\ \ (x \leq y \to x + (y \dot{-} x) = y)$. Für $y \equiv 0$ bzw. $y \equiv z^+$ folgt daraus:
$x^+ \not\leq 0$ bzw. $x^+ \leq z^+ \to x^+ + (z^+ \dot{-} x^+) =_{s.u.} x + 1 + (z \dot{-} x) = z + 1 = z^+$.
Hierzu ist noch $z^+ \dot{-} x^+ = z \dot{-} x$ durch Induktion über x zu zeigen:
$z^+ \dot{-} 0^+ = \mathcal{V}(z^+ \dot{-} 0) = \mathcal{V}(z^+) = z = z \dot{-} 0$;
$z^+ \dot{-} x^{++} = \mathcal{V}(z^+ \dot{-} x^+) =_{Ind.ann.} \mathcal{V}(z \dot{-} x) = z \dot{-} x^+$. □

Nach 6.1(c) entstehen aus den in 6.4 und danach angeführten Aussagen aus zfc* herleitbare Aussagen dadurch, dass man in ihnen '$\in \mathbb{N}$' durch '$\in \Phi$' ersetzt.
Z.B. gilt zfc* $\vdash \forall x, y, z \in \Phi\ (x \cdot z + y \cdot z = (x+y) \cdot z)$. Jedoch ist z.B.
$\forall x, y, z \in \Phi\ (x \cdot z + y \cdot z \in \Phi)$ **nicht** aus zfc* herleitbar (wegen $x \cdot 1 + 1 \cdot 1 = x^+$).

6.6 Lemma (zum Beweis von 6.7): $\vdash_{\mathcal{H}} \forall a \neq \emptyset\ \ \exists y \in a\ \ \forall x \in a\ \ y \notin x$.

Beweis: Auf S.7 hatten wir die 'Tiefe' T rekursiv so definiert: $T(\emptyset) :\risingdotseq 0$, $T(a\{b\}) := \max\{T(a), T(b)+1\}$. T hat die Eigenschaft $\vdash_{\mathcal{H}} \forall x, y\,(x \subseteq y \to Tx \leq Ty)$. Wir haben folgende Annahme zu widerlegen: $\vdash_{\mathcal{H}} a \neq 0 \wedge \forall y \in a\; \exists x\,(y \in x \in a)$. Zunächst zeigen wir, dass aus ihr folgt: $\vdash_{\mathcal{H}} \forall n \in \mathbb{N}\; \forall y \in a\;\; Ty + n < Ta$, und zwar durch Induktion über n. Der Ind.anfang folgt aus der Definition von T. Nun machen wir die Ind.ann. $\vdash_{\mathcal{H}} \forall y \in a\;\; Ty + n < Ta$. Aus ihr und obiger Annahme folgt $\vdash_{\mathcal{H}} \forall y \in a\;\; \exists x\,(y \in x \in a\; \wedge\; Ty + n + 1 \leq Tx + n < Ta)$. Aus dem Gezeigten folgt speziell $\vdash_{\mathcal{H}} \forall y \in a\;\; Ta = Ty + (Ta \dot{-} Ty) < Ta$, was falsch ist. $\square$

Abkürzung: $\quad \Omega :\risingdotseq \mathcal{V}(\Phi)$.

6.7 Satz: (a) Aus zfc* folgt, dass Ω das größte Element von Φ ist, und $\Omega^+ = \Phi$.
(b) Ist $s(x)$ ein N-stabiler $\mathcal{L}$-Term und gilt $\vdash_{\mathcal{H}} \forall x \in \mathbb{N}\;\; s(x) \subseteq \mathbb{N}$, so folgt aus zfc*, dass jede nicht-leere Teilmenge von $s(\Omega)$ ein größtes Element hat:

$$\mathrm{zfc}^* \vdash \forall z\,(\emptyset \neq z \subseteq s(\Omega) \to \exists y \in z\;\; \forall x\,(x \in z \to x \leq y)).$$

Beweis: (a) Aus 6.6 folgt nach 6.1(c') speziell
$\mathrm{zfc}^* \vdash \exists y \in \Phi\;\; \forall x\,(x \in \Phi \to y \notin x \to y \not< x \to_{6.3,\,6.4(e)} x \leq y)$.
D.h. aus zfc* folgt: Φ enthält ein größtes Element m. Für dieses m folgt aus zfc*:

$$\begin{aligned}
&\forall x\,(x \in \Omega \to \exists y\,(x \in y \in \Phi) \to \exists y\,(x \in y \subseteq m) \to x \in m), \quad \text{also} \quad \Omega \subseteq m.\\
&\forall x\,(x \in m \to x \in m \in \Phi \to x \in \Omega), \quad \text{also} \quad m \subseteq \Omega,\;\; m = \Omega,\;\; \Omega \in \Phi, \;\; \text{ferner}\\
&\forall x\,(x \in \Omega^+ \to x \in \Omega \vee x = \Omega \to_{6.1(b)} x \in \Phi), \;\; \text{also} \;\; \Omega^+ \subseteq \Phi,\\
&\forall x\,(x \in \Phi \to x \leq m = \Omega \to_{6.4(e)} x \in \Omega \vee x = \Omega \to x \in \Omega^+), \;\; \text{also} \;\; \Omega^+ = \Phi.
\end{aligned}$$

(b) Vorausgesetzt sei $\vdash_{\mathcal{H}} \forall n \in \mathbb{N}\; s(n) \subseteq \mathbb{N}$. Aus 6.6 folgt dann wie oben
$\vdash_{\mathcal{H}} \forall n \in \mathbb{N}\; \forall z\,(\emptyset \neq z \subseteq s(n) \to \exists y \in z\; \forall x\,(x \in z \to x \leq y))$, also nach 6.1(c)
$\mathrm{zfc}^* \vdash \forall n \in \Phi\;\; \forall z\,(\emptyset \neq z \subseteq s(n) \to \exists y \in z\; \forall x\,(x \in z \to x \leq y))$, speziell
$\mathrm{zfc}^* \vdash \forall z\,(\emptyset \neq z \subseteq s(\Omega) \to \exists y \in z\; \forall x\,(x \in z \to x \leq y))$. $\square$

6.8: Analogon zum **Leibniz'schen Prinzip**:
(a) Ist $B(y)$ eine stabile $\mathcal{L}$-Formel und gilt $\vdash_{\mathcal{H}} n \in \mathbb{N} \wedge \forall y \in \mathbb{N}\; (y \geq n \to B(y))$, dann gilt nach 6.1(a,c) auch $\mathrm{zfc}^* \vdash n \in \Phi \wedge \forall y \in \Phi\; (y \geq n \to B(y))$, also nach 6.7(a) insbesondere $\mathrm{zfc}^* \vdash B(\Omega)$. Grob: Was in $\mathcal{H}$ für 'fast alle' Nummern y gilt, das folgt aus zfc* für Ω.
(b) Für stabile $\mathcal{L}$-Terme $s(x)$ und stabile $\mathcal{L}$-Formeln $B(\underline{z})$ gilt also:
Wenn $\vdash_{\mathcal{H}} \forall x \in \mathbb{N}\;\; s(x) \in \mathbb{N}\; \wedge\; \forall z \in \mathbb{N}\;\; B(z)$, dann $\mathrm{zfc}^* \vdash \forall x \in \Phi\;\; B(s(x))$, speziell $\mathrm{zfc}^* \vdash B(s(\Omega))$.

Wir können 6.1(c) wie folgt verallgemeinern:

6.9 Satz: Sei $s(z)$ ein stabiler $\mathcal{L}$-Term und $B(\underline{x})$ eine stabile $\mathcal{L}$-Formel.
(a) Gilt $\vdash_{\mathcal{H}} \forall z \in \mathbb{N}\;\; s(z) \subseteq \mathbb{N}$ und $\vdash_{\mathcal{H}} \forall \underline{x} \in \mathbb{N}\;\; B(\underline{x})$, dann gilt $\mathrm{zfc}^* \vdash \forall \underline{x} \in s(\Omega)\;\; B(\underline{x})$.
(b) Gilt $\vdash_{\mathcal{H}} \forall z \in \mathbb{N}\;\; s(z) \subseteq \mathbb{N}$ und $\vdash_{\mathcal{H}} \forall \underline{x} \subseteq \mathbb{N}\;\; B(\underline{x})$, dann gilt $\mathrm{zfc}^* \vdash \forall \underline{x} \subseteq s(\Omega)\;\; B(\underline{x})$,

also speziell $\text{zfc}^* \vdash B(s(\Omega))$.
(c) Für $s(z)$ wie in (a) gilt insbesondere: $\text{zfc}^* \vdash \forall x, y \in s(\Omega)\ \ (x < y \vee x = y \vee y < x)$.

Beweis. (a,b) Nach Voraussetzung gilt $\vdash_{\mathcal{H}} \forall z \in \mathsf{IN}\ \ \forall \underline{x} \in / \subseteq s(z)\ \ B(\underline{x})$, also (nach 6.1(c)) $\text{zfc}^* \vdash \forall z \in \Phi\ \ \forall \underline{x} \in / \subseteq s(z)\ \ B(\underline{x})$. Hierin kann man Ω für z einsetzen.
(c) Man wende (a) auf die Formel $B(x, y) \equiv (x < y \vee x = y \vee y < x)$ an. $\square$

Definition: $\quad s \in^* \mathsf{IN}\ :\rightleftharpoons\ \forall x \in s^+\ (x = 0\ \vee\ x = \mathcal{V}(x)^+)$.

Im Kontext von zfc^* sagen wir, jede $\mathcal{L}_\Psi$-Konstante stelle eine Menge dar, oder kurz, sie sei eine Menge. Ist (allgemeiner) K ein Symbol derart, dass $\sigma \in K$ für jeden Term σ eine $\mathcal{L}_\Psi$-Formel ist oder als neue Schreibweise für eine $\mathcal{L}_\Psi$-Formel definiert ist, so sagen wir, K stelle eine **Klasse** dar, oder kurz, K sei eine Klasse. Klassen, die keine Mengen sind, sind auch keine Elemente von Mengen. Sie dürfen nicht (wie Mengen) für Variable eingesetzt werden.

N, IN und $^*\mathsf{IN}$ sind also Klassen, aber keine Mengen. $^*\mathsf{IN}$ ist N-frei (entgegen dem Augenschein).

6.10 Satz: (a) $\vdash_{\mathcal{H}} \forall x\ (x \in \mathsf{IN} \leftrightarrow x \in^* \mathsf{IN})$, also $\text{zfc}^* \vdash \mathsf{IN} \subseteq^* \mathsf{IN}$.
(b) Für stabile $\mathcal{L}$-Formeln $A(\underline{x})$ gilt: Wenn $\vdash_{\mathcal{H}} \forall \underline{x} \in \mathsf{IN}\ \ A(\underline{x})$, dann $\text{zfc}^* \vdash \forall \underline{x} \in^* \mathsf{IN}\ \ A(\underline{x})$.
(c) Für stabile $\mathcal{L}$-Terme $s(x)$ mit $\vdash_{\mathcal{H}} \forall x \in \mathsf{IN}\ \ s(x) \in \mathsf{IN}$ gilt auch $\text{zfc}^* \vdash \forall x \in \mathsf{IN}\ \ s(x) \in^* \mathsf{IN}$, sowie $\text{zfc}^* \vdash \forall x \in \Phi\ \ s(x) \in^* \mathsf{IN}$, also speziell $\text{zfc}^* \vdash s(\Omega) \in^* \mathsf{IN}$.
(d) Für stabile $\mathcal{L}$-Terme $s(x)$ mit $\vdash_{\mathcal{H}} \forall x \in \mathsf{IN}\ \ s(x) \subseteq \mathsf{IN}$ gilt auch $\text{zfc}^* \vdash \forall x \in \mathsf{IN}\ \ s(x) \subseteq^* \mathsf{IN}$ und $\text{zfc}^* \vdash \forall x \in \Phi\ \ s(x) \subseteq^* \mathsf{IN}$, also speziell $\text{zfc}^* \vdash s(\Omega) \subseteq^* \mathsf{IN}$.
(e) $A(\mathsf{IN})$ sei eine Aussage derart, daß jedes Vorkommnis von IN in $A(\mathsf{IN})$ in einer Teilformel von $A(\mathsf{IN})$ der Gestalt $\forall x \in \mathsf{IN}\ \ B(x)$ oder $\exists x \in \mathsf{IN}\ \ B(x)$ steht.
$A(^*\mathsf{IN})$ sei stabil. Dann gilt: Wenn $\vdash_{\mathcal{H}} A(\mathsf{IN})$, dann $\text{zfc}^* \vdash A(^*\mathsf{IN})$.
(f) Für stabile $\mathcal{L}$-Formeln $A(x, \underline{y})$ gilt

$$\text{zfc}^* \vdash \forall \underline{y}\, [\exists x \in^* \mathsf{IN}\ \ A(x, \underline{y})\ \rightarrow\ \exists v \in^* \mathsf{IN}\ (A(v, \underline{y}) \wedge \forall u < v\ \ \neg A(u, \underline{y}))].$$

Beweis: (a) Zu $\vdash_{\mathcal{H}} \mathsf{IN} \subseteq^* \mathsf{IN}$: Jede Nummer $n \neq 0$ hat die Form $n = \mathcal{V}(n)^+$, und alle Elemente von $n \setminus \{0\}$ haben dieselbe Form. - Zu $\vdash_{\mathcal{H}} {}^*\mathsf{IN} \subseteq \mathsf{IN}$:

$$\begin{aligned}
\vdash_{\mathcal{H}} 0 \neq s \in^* \mathsf{IN}\ \ &\rightarrow\ \ s = (\mathcal{V}s)^+ = \mathcal{V}s\{\mathcal{V}s\}\ \rightarrow\ \mathcal{V}s \subseteq s\ \wedge\ \mathcal{V}s \in s\ \rightarrow \\
&\rightarrow\ \ \forall x\ (x \in (\mathcal{V}s)^+ \rightarrow x \in \mathcal{V}s \vee x = \mathcal{V}s\ \rightarrow\ x \in s\ \rightarrow\ x \in s^+) \\
&\rightarrow\ \ \forall x\ (x \in (\mathcal{V}s)^+\ \rightarrow\ x \in s^+\ \rightarrow\ x = 0\ \vee\ x = (\mathcal{V}x)^+) \\
&\rightarrow\ \ \mathcal{V}s \in^* \mathsf{IN}\ \rightarrow_{Ind.ann}\ \mathcal{V}s \in \mathsf{IN}\ \rightarrow_{s=(\mathcal{V}s)^+}\ s \in \mathsf{IN}.
\end{aligned}$$

(b) - (d) folgen aus aus (a) und 6.1(c').
(e) Nach (a) gilt $\vdash_{\mathcal{H}} \forall/\exists x \in \mathsf{IN}\ \ B(x)\ \leftrightarrow\ \forall/\exists x \in^* \mathsf{IN}\ \ B(x)$, also:
Wenn $\vdash_{\mathcal{H}} A(\mathsf{IN})$, dann $\vdash_{\mathcal{H}} A(^*\mathsf{IN})$, also (nach 6.1(c')) $\text{zfc}^* \vdash A(^*\mathsf{IN})$.
(f) folgt aus (e). $\square$

Um eine '**Vergrößerung**' von der Menge Φ kennen zu lernen, die ebenfalls eine Menge ist und evtl. an die Stelle der Klasse $^*\mathsf{IN}$ treten kann, definieren wir zunächst für $a, b, c \in \mathcal{E}$

noch rekursiv die Potenz durch $a^0 :\fallingdotseq 1$ und $a^{b\{c\}} :\fallingdotseq a^b \cdot a$ sowie die 'Superpotenz' ('Tetration') durch ${}^0a :\fallingdotseq 1$ und ${}^{b\{c\}}a :\fallingdotseq a^{({}^ba)}$. (Z.B. ist ${}^3a \equiv a^{a^a}$.) Für alle Nummern $\kappa, \lambda > 2$ sind in $\mathcal{H}$ herleitbar: $\kappa^+, \lambda^+ < \kappa + \lambda < \kappa \cdot \lambda < \kappa^\lambda < {}^\lambda\kappa$. Für $\kappa \geq \kappa_1, \ldots, \kappa_m$; $\lambda \geq \lambda_1, \ldots, \lambda_n$; $m, n \in \mathbb{N}$ und $K :\fallingdotseq \max\{\kappa, m, \lambda, n\} + 1$ sind ferner in $\mathcal{H}$ herleitbar:

$$
\begin{aligned}
&(\kappa_1 + \ldots + \kappa_m) \cdot (\lambda_1 + \ldots + \lambda_n) \leq \kappa \cdot m \cdot \lambda \cdot n < K^4, \\
&(\kappa_1 \cdot \ldots \cdot \kappa_m)^{\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n} \leq (\kappa^m)^{\lambda^n} = \kappa^{m \cdot \lambda^n} \leq \kappa^{\max\{m,\lambda\}^{n+1}} < K^{K^K} = {}^3K \\
&(\kappa_1^{\kappa_2^{\kappa_m}})^{\lambda_1^{\lambda_2^{\lambda_n}}} \leq \kappa_1^{\kappa_2^{\kappa_m \lambda_1^{\lambda_2^{\lambda_n}}}} < {}^{(m+n)}K.
\end{aligned}
$$

Wir betrachten nun durch $\mathcal{L}$-Terme $f(\underline{x})$ mit $\underline{x} :\fallingdotseq (x_1, \ldots, x_k)$ dargestellte Funktionen. Die Schreibweise $f\colon D \to \mathbb{N}$ sei wie üblich zu verstehen; dabei sei D eine $\mathcal{L}$-Konstante (die in $\mathcal{H}$ eine Menge darstellt) oder die Darstellung einer 'Klasse'; im ersten Falle ist $\underline{x} \in D$ eine $\mathcal{L}$-Formel; im zweiten Falle sei $\underline{x} \in D$ eine Abkürzung für eine $\mathcal{L}$-Formel.
Eine solche Funktion $f\colon D \to \mathbb{N}$ mit $D \subseteq \mathbb{N}^{k\times}$ heiße **höchstens exponentiell**, wenn für eine 'feste' Nummer ℓ und $x :\fallingdotseq \max\{x_1, \ldots, x_k, \ell\}$ Folgendes gilt:

$$\vdash_{\mathcal{H}} \forall \underline{x} \in D \;\; f(\underline{x}) \leq x^x.$$

Höchstens exponentiell sind z.B. die durch $x, x^+, x+y, x \dot{-} y, x \cdot y, x^y, x!$ dargestellten Funktionen.

Wir werden in $\mathcal{H}$ folgende **Abschätzungen** anwenden:

$$\text{(i)} \quad ({}^kx)^{({}^nx)} \leq {}^{k+n}x. \qquad\qquad \text{(ii)} \quad {}^k({}^nx) \leq {}^{k \cdot n}x.$$

Beweise durch Induktion: Zu (i): $\quad ({}^0x)^{({}^nx)} = 1^{({}^nx)} = 1 \leq {}^{0+n}x.$

. $$({}^{k+1}x)^{({}^nx)} = \left(x^{({}^kx)}\right)^{({}^nx)} = x^{({}^kx) \cdot ({}^nx)} \leq x^{({}^kx)^{({}^nx)}} \leq_{Ind.ann.} x^{({}^{k+n}x)} = {}^{k+1+n}x.$$

Zu (ii): $\quad {}^0({}^nx) = 1 = {}^0x = {}^{0 \cdot n}x.$

. $${}^{k+1}({}^nx) = ({}^nx)^{{}^k({}^nx)} \leq_{Ind.ann} ({}^nx)^{({}^{k \cdot n}x)} \leq_{(i)} {}^{n+kn}x =^{(k+1)n} x. \;\Box$$

6.11 Satz: Gilt $\vdash_{\mathcal{H}} h\colon D \to \mathbb{N} \wedge D \subseteq \mathbb{N}^{j\times} \wedge j, m \in \mathbb{N}$, ist h N-stabil und aus höchstens exponentiellen Funktionen nur durch Verkettung aufgebaut, so gibt es zu jeder Nummer m eine Nummer n mit

$$\text{zfc}^* \vdash \forall \underline{x} \; (\underline{x} \in D \cap ({}^m\Omega)^{j\times} \;\to\; h(\underline{x}) \in {}^{mn}\Omega).$$

Die Klasse $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} {}^n\Omega$ ist also abgeschlossen gegen sukzessive Anwendungen höchstens exponentieller Funktionen.

Beweis: Zunächst sei $\vdash_{\mathcal{H}} D \subseteq \mathbb{N}^{j\times}$, $\vdash_{\mathcal{H}} f_i : D \to \mathbb{N}$ für $i \leq k$,
$\vdash_{\mathcal{H}} g\colon f_1[D] \times \ldots \times f_k[D] \to \mathbb{N}$; $\underline{x} :\fallingdotseq (x_1, \ldots, x_j)$, $x :\fallingdotseq \max\{x_1, \ldots, x_j, \ell\}$,

$y :\Leftarrow \max\{y_1, \ldots, y_k, \ell'\}$, $n :\Leftarrow \max\{n_1, \ldots, n_i\}$ und $f(\underline{x}) :\Leftarrow \max\{f_1(\underline{x}), \ldots, f_k(\underline{x}), \ell'\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\text{Wenn } \vdash_{\mathcal{H}} \forall i \le k \ \forall \underline{x} \in D \ \ f_i(\underline{x}) \le {}^{n_i}x \ \wedge \ \forall \underline{y} \in D_g \ \ g(y_1, \ldots, y_k) \le y^y, \\
&\text{dann } \vdash_{\mathcal{H}} \forall \underline{x} \in D \ \ g(f_1(\underline{x}), \ldots, f_k(\underline{x})) \le f(\underline{x})^{f(\underline{x})} \le ({}^{n}x)^{{}^{n}x} \le_{(i)} {}^{2n}x. \\
&\text{also } \ \vdash_{\mathcal{H}} \forall \underline{x} \in D \ \ g(f_1(\underline{x}), \ldots, f_k(\underline{x})) \le {}^{2n}x.
\end{aligned}$$

Durch Induktion über den Funktionenaufbau folgt: Für alle Funktionen h mit $\vdash_{\mathcal{H}} h : D \to \mathbb{N} \ \wedge \ D \subseteq \mathbb{N}^{j\times}$, die aus höchstens exponentiellen Funktionen nur durch Verkettung aufgebaut sind, gibt es zu jeder Nummer m eine Nummer n mit

$$\vdash_{\mathcal{H}} \forall z \in \mathbb{N} \ \forall \underline{x} \in D \cap ({}^{m}z)^{j\times} \ \ h(\underline{x}) \le {}^{n}x < {}^{n}({}^{m}z) \le_{(ii)} {}^{mn}z, \ \text{ also nach 6.8}$$

$$\text{zfc}^* \vdash \forall \underline{x} \ \ (\underline{x} \in D \cap ({}^{m}\Omega)^{j\times} \to h(\underline{x}) < {}^{mn}\Omega). \ \Box$$

Anmerkung: Wegen

$$\textstyle\sum_{\mu=0}^{n} f(\mu, \underline{x}) \le (n+1) \cdot \max\{f(0, \underline{x}), \ldots, f(n, \underline{x})\} \ \text{ und}$$

$$\textstyle\prod_{\mu=0}^{n} f(\mu, \underline{x}) \le \max\{f(0, \underline{x}), \ldots, f(n, \underline{x})\}^{n+1}$$

kann man 6.11 auch auf Funktionen anwenden, die mit Hilfe von $\sum$ und $\prod$ aufgebaut sind.

§7. Erweiterungen der Klasse aller rationaler Zahlen. Einfache Beispiele aus der Nichtstandard-Analysis

Rationale Zahlen lassen sich durch Tripel natürlicher Zahlen darstellen. Wir schreiben diese Tripel in der Form $\frac{\kappa - \lambda}{\nu}$ mit $\nu \neq 0$ und definieren zunächst eine Äquivalenzrelation $\sim$ durch

$$\frac{\kappa - \lambda}{\nu} \sim \frac{\kappa' - \lambda'}{\nu'} \ :\Leftarrow \ \kappa \cdot \nu' + \lambda' \cdot \nu = \kappa' \cdot \nu + \lambda \cdot \nu' \quad (\nu, \nu' \neq 0).$$

Die zugehörigen Äquivalenzklassen lassen sich repräsentieren durch teilerfremde Brüche der Formen

$$\frac{\kappa}{\nu} :\Leftarrow \frac{\kappa - 0}{\nu} \quad \text{bzw.} \quad -\frac{\lambda}{\nu} :\Leftarrow \frac{0 - \lambda}{\nu} \quad (\nu, \lambda \neq 0).$$

Dementsprechend definieren wir die ‘Klasse’ ${}^*\mathbb{Q}$ durch

$$r \in {}^*\mathbb{Q} \ :\Leftarrow \ r \in ({}^*\mathbb{N})^{3\times} \wedge \exists x, y \in {}^*\mathbb{N} \ \big[(r = \frac{x}{y^+} \ \vee \ r = -\frac{x}{y^+}) \ \wedge \ x, y^+ \ \underline{\text{teilerfremd}}\big].$$

Die sich in zfc* ergebenden Elemente von ${}^*\mathbb{N}$ bzw. ${}^*\mathbb{Q}$ (genauer: auf andere Weise eingeführte Analoga dieser Elemente) heißen hypernatürliche bzw. hyperrationale Zahlen. Die Operationen $+, -, \cdot$ in ${}^*\mathbb{Q}$, die Division (außer durch 0), sowie die Relationen $\le$ und

$<$ in ${}^*\mathbb{Q}$ seien wie üblich definiert. $({}^*\mathbb{Q}, 0, 1, +, \cdot, \leq)$ ist ein angeordneter Körper. Er ist abgeschlossen bezüglich dieser Operationen. Für $\kappa \in {}^*\mathbb{N}$ identifizieren wir κ mit $\frac{\kappa}{1}$ und betten damit ${}^*\mathbb{N}$ in ${}^*\mathbb{Q}$ ein. Zur Vereinfachung setzen wir noch

$$\frac{\sigma}{0} :\Longleftrightarrow \frac{\sigma}{1}.$$

Der Einfachheit halber reden wir von nun an informell, als redeten wir über ein Modell von zfc*; d.h. jede Behauptung einer $\mathcal{L}_\Psi$-Aussagen sei zu verstehen als die Behauptung, dass diese Aussage aus zfc* herleitbar ist. D.h. wir lassen i.Allg. den Hinweis 'zfc* $\vdash$' fort (außer zum Vergleich mit '$\vdash_{\mathcal{H}}$').

Ein Element $\frac{\kappa-\lambda}{\mu^+}$ von ${}^*\mathbb{Q}$ heiße **standard-rational**, wenn $\vdash_{\mathcal{H}} \kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{N}$. Die (hier) Klasse aller standard-rationalen Zahlen bezeichnen wir wie üblich mit $\mathbb{Q}$. Für $a, b \in {}^*\mathbb{Q}$ setzen wir $a \approx b :\Longleftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}\ |a-b| < \frac{1}{k}$. Dann stellt $\approx$ eine Äquivalenzrelation dar. Ein Element h von ${}^*\mathbb{Q}$ heiße **infinitesimal**, wenn $0 \neq h \approx 0$. (Z.B. ist $\frac{1}{\Omega}$ infinitesimal.) a heiße **endlich** (oder 'beschränkt'), wenn $\exists n \in \mathbb{N}\ |a| \leq n$. Ferner stehe $n >> 1$ für $n \in {}^*\mathbb{N} \wedge \forall m \in \mathbb{N}\ n > m$ (d.h. $n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$).

Wir behandeln nun einige einfache **Beispiele aus der Nichtstandard-Analysis**. Zunächst betrachten wir durch $\mathcal{L}$-Terme f_n darstellbare **Folgen** von Elementen von ${}^*\mathbb{Q}$. **Cauchy-Folgen** seien diejenigen Folgen, für die gilt:

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \exists \ell \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in {}^*\mathbb{N}\ (m, n \geq \ell \to |f_m - f_n| \leq \frac{1}{k}),$$

Diese Bedingung impliziert sofort die **Konvergenz** gegen f_Ω im folgenden Sinne:

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \exists \ell \in \mathbb{N}\ \forall m \in {}^*\mathbb{N}\ (m \geq \ell \to |f_m - f_\Omega| \leq \frac{1}{k}).$$

Grundsätzlich identifizieren wir eine Funktion $f\colon D \to T$ mit ihrem Graphen $\{(\underline{x}, y) \in D \times T\colon y = f(\underline{x})\}$. Dieser ist eine rechtseindeutige Relation, also eine Menge oder Klasse. Ist $s(\underline{x})$ ein N-freier $\mathcal{L}_\Psi$-Term mit $\underline{x} \equiv x_1, \ldots, x_n$, so ist die Funktion $\{(\underline{x}, y) \in D \times T\colon\ y = s(\underline{x})\}$ genau dann eine Menge, wenn D eine Menge ist.

Voraussetzung: Alle im Folgenden betrachteten Funktionen $f : D \to {}^*\mathbb{Q}$ haben die Form $\frac{f_1 - f_2}{f_3^+}$ mit $f_i\colon D \to {}^*\mathbb{N}$. Dabei sei f_i (für $i = 1, 2, 3$) durch einen stabilen $\mathcal{L}$-Term $f_i(\underline{x})$ dargestellt. (Es würde genügen vorauszusetzen, dass die f_i durch stabile $\mathcal{L}_\Psi$-Terme $f_i(\underline{x}, \Psi)$ (d.h. für die $f(\underline{x}, y)$ stabil ist) darstellbar sind.)

Eine Funktion f heiße **standard-stetig** bei $\underline{a} :\Longleftrightarrow (a_1, \ldots, a_k)$, wenn $\underline{a} \in D \subseteq ({}^*\mathbb{Q})^{k\times}$ und es zu jeden standard-rationalen $\varepsilon > 0$ ein standard-rationales $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $\underline{x} :\Longleftrightarrow (x_1, \ldots, x_k)$ mit $\underline{x} \in D$ gilt

$$|x_1 - a_1| < \delta\ \wedge\ \ldots\ \wedge\ |x_k - a_k| < \delta\ \to\ |f(\underline{x}) - f(\underline{a})| < \varepsilon.$$

Z.B. sind die Funktionen $+, -, \cdot$ sowie $0 \neq x \mapsto 1 : x$ und $x \mapsto x^n$ standard-stetig. Ferner sind alle aus standard-stetigen Funktionen durch Verkettung aufgebauten Funktionen ebenfalls standard-stetig.

Eine Funktion $f: D \to {}^*\mathbb{Q}$ heiße **Cauchy-stetig** bei $\underline{a} \in D \subseteq ({}^*\mathbb{Q})^{k\times}$, wenn für alle $\underline{x} \in D$ gilt

$$x_1 \approx a_1 \wedge \ldots \wedge x_k \approx a_k \to f(\underline{x}) \approx f(\underline{a}).$$

Alle bei a standard-stetigen Funktionen sind erst recht dort Cauchy-stetig. Denn ist f z.B. 1-stellig und standard-stetig bei a und ist $|x-a| \approx 0$, so gilt für alle $\varepsilon > 0$ auch $|x-a| < \delta(\varepsilon)$, also $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, also insgesamt $|f(x) - f(a)| \approx 0$.

Um zu beweisen, dass auch umgekehrt jede bei a Cauchy-stetige 1-stellige Funktion dort auch standard-stetig ist, beachten wir, dass für $G_k(h) :\Longleftrightarrow \frac{1}{k} - |f(a+h) - f(a)|$ gilt

$$f(a+h) - f(a) \approx 0 \ \leftrightarrow\ \forall k \in \mathbb{N}\ \ G_k(h) > 0.$$

Somit genügt es, folgendes Prinzip (mit $\frac{1}{k}$ statt ε und $\frac{1}{\ell}$ statt $\delta(\varepsilon)$) zu beweisen:

Cauchy'sches Prinzip: Für stabile $G: D \to {}^*\mathbb{Q}$ mit $\{h \in {}^*\mathbb{Q} :\ h \approx 0\} \subseteq D$ gilt

$$\forall h\ \big(h \approx 0 \to G(h) > 0\big)\ \to\ \exists \ell \in \mathbb{N}\ \ \forall h\ \big(|h| < \frac{1}{\ell}\ \to\ G(h) > 0\big).$$

Beweis: Für $M :\Longleftrightarrow \{\mu \in {}^*\mathbb{N} :\ \forall h\,(|h| < \frac{1}{\mu} \to G(h) > 0)$ und $\mu_0 :\Longleftrightarrow \min M$ gilt

$$\begin{aligned}
&\forall h\ (h \approx 0\ \to\ G(h) > 0)\ \to \\
\to\ \ &\forall \mu \in {}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}\ \ \forall h\ (|h| < \tfrac{1}{\mu}\ \to\ \forall m \in \mathbb{N}\ \ |h| < \tfrac{1}{m}\ \to\ h \approx 0\ \to\ G(h) > 0) \\
\to\ \ &{}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N} \subseteq M, \text{ also } M \neq \emptyset, \text{ also } \mu_0 \text{ existiert (nach 6.2(c)), } \mu_0 \in M \subseteq {}^*\mathbb{N} \\
\to\ \ &\mathcal{V}\mu_0 < \mu_0, \text{ also } \mathcal{V}\mu_0 \in {}^*\mathbb{N}\setminus M \subseteq \mathbb{N}, \text{ also } \mu_0 \in \mathbb{N} \cap M \\
\to\ \ &\exists \ell \in \mathbb{N}\ \ \forall h\ (|h| < \tfrac{1}{\ell} \to G(h) > 0). \quad \square
\end{aligned}$$

Wir betrachten noch einmal Folgen $f: {}^*\mathbb{N} \to {}^*\mathbb{Q}$. Ersetzt man im letzten Beweis überall $f(a+h) - f(a)$ durch $f_n - b$, ferner h durch $\frac{1}{n}$, also $h \approx 0$ durch $n >> 1$, so erhält man folgende Nichtstandard-Charakterisierung der gewöhnlichen Konvergenz:

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \ \exists \ell \in \mathbb{N}\ \ \forall n \in {}^*\mathbb{N}\ \big(n > \ell \to |f_n - b| < \frac{1}{k}\big)\ \leftrightarrow\ \forall n >> 1\ \ f_n \approx b.$$

Ganz analog zeigt man: f ist genau dann eine **Cauchy-Folge**, wenn $\forall m, n >> 1\ \ f_m \approx f_n$. (Dies geht zurück auf Euler (1734) und Cauchy (1821).)

Zwischenwertsatz: Seien $a, b, b-a \in {}^*\mathbb{N}$ endlich und f sei (Cauchy-)stetig in $[a,b] \subseteq D_f$; ferner sei $f(a) < c < f(b)$. Dann gibt es ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) \approx c$.

Beweis: Für $y \in [0,1]$ setzen wir $g(y) :\Longleftrightarrow f(a + y(b-a)) - c$. n_0 sei das kleinste $n \in {}^*\mathbb{N}$ mit $\frac{n}{\Omega} \in [0,1]$ und $g(\frac{n}{\Omega}) \geq 0$. ($n_0$ existiert nach 6.10(f).) Dann ist $g(\frac{n_0-1}{\Omega}) < 0$, also $0 \leq g(\frac{n_0}{\Omega}) < g(\frac{n_0}{\Omega}) - g(\frac{n_0-1}{\Omega}) \approx 0$ (wegen der Stetigkeit von g), also $g(\frac{n_0}{\Omega}) \approx 0$, d.h. $f(a + \frac{n_0}{\Omega}(b-a)) \approx c$. $\square$

Vom angenäherten Maximum: Seien $a, b, b-a \in {}^*\mathbb{N}$ endlich und f sei stetig in $[a,b] \subseteq D_f$. Dann gibt es ein $x_0 \in [a,b]$ mit $\forall x \in [a,b]\ \ \forall \ell \in \mathbb{N}\ \ f(x) < f(x_0) + \frac{1}{\ell}$.

Beweis: O.B.d.A. sei $[a,b]=[0,1]$ und f stetig in $[0,1]$. Wir erhalten nacheinander

$$\begin{array}{l}
\vdash_{\mathcal{H}} \forall n\in \mathbb{N}\ \exists m\le n\ \forall k\le n\ \ f\big(\frac{k}{n}\big)\le f\big(\frac{m}{n}\big)\\
\mathrm{zfc}^*\vdash \forall n\in {}^*\mathbb{N}\ \exists m\le n\ \forall k\le n\ \ f\big(\frac{k}{n}\big)\le f\big(\frac{m}{n}\big)\quad \text{(nach 6.10(e))}\\
\mathrm{zfc}^*\vdash \exists m\le \Omega\ \ \forall k\le \Omega\ \ f\big(\frac{k}{\Omega}\big)\le f\big(\frac{m}{\Omega}\big)\\
\vdash_{\mathcal{H}} \forall n\in \mathbb{N}\ \ \forall x\in[0,1]\ \exists k<n\ \ \frac{k}{n}\le x\le \frac{k+1}{n}\\
\mathrm{zfc}^*\vdash \forall x\in[0,1]\ \exists k<\Omega\ \ \frac{k}{\Omega}\le x\le \frac{k+1}{\Omega}\quad \text{(nach 6.10(e))}\\
\mathrm{zfc}^*\vdash \exists m\le\Omega\ \forall x\in[0,1]\ \exists k\le\Omega\ \ f(x)\approx f\big(\frac{k}{\Omega}\big)\le f\big(\frac{m}{\Omega}\big)\ \ \text{(nach Zeile 3)}\\
\mathrm{zfc}^*\vdash \exists m\le\Omega\ \ \forall x\in[0,1]\ \forall \ell\in\mathbb{N}\ \ f(x)<f\big(\frac{m}{\Omega}\big)+\frac{1}{\ell}.\ \Box
\end{array}$$

Wir setzen noch

$$\omega :\Longleftarrow \frac{1}{\Omega}.$$

Differentiation und Integration: Für $f,g: D\to {}^*\mathbb{Q}$ mit $D\subseteq {}^*\mathbb{Q}$ und $a, a+\omega\in D$ bzw. $[a,b]\subseteq D$ setzen wir

$$f'(a) :\Longleftarrow \frac{f(a+\omega)-f(a)}{\omega},$$

$$\int_a^b g(x)dx :\Longleftarrow \sum_{\mu=a\Omega}^{b\Omega-1} g(\mu\omega)\cdot\omega.$$

Anmerkung: Falls $g(a)$ und $g(b)$ endlich sind, gilt

$$\sum_{\mu=a\Omega+1}^{b\Omega} g(\mu\omega)\cdot\omega-\sum_{\mu=a\Omega}^{b\Omega-1} g(\mu\omega)\cdot\omega=\big(g(b)-g(a)\big)\cdot\omega\approx 0.$$

Analog zum Hauptsatz der Differential und Integralrechnung gilt

$$\int_a^b f'(x)dx=\sum_{\mu=a\Omega}^{b\Omega-1}\frac{f((\mu+1)\omega)-f(\mu\omega)}{\omega}\cdot\omega=f(b)-f(a).$$

$$(y\mapsto\int_a^y g(x)dx)'(b)=\int_b^{b+\omega} g(x)dx\cdot\Omega=\sum_{\mu=b\Omega}^{b\Omega} g(\mu\omega)\cdot\omega\cdot\Omega=g(b).$$

f heiße **differenzierbar** bei a, wenn $a, a+\omega\in D$, $f'(a)$ endlich ist, und für alle infinitesimalen h mit $a+h\in D$ gilt

$$f'(a)\approx\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

In diesem Falle ist f Cauchy-stetig bei a.

f heiße **integrierbar** in $[a, b]$, wenn $[a, b] \subseteq D$ und für alle Unterteilungen $I_1, \ldots, I_n$ von $[a, b]$ infinitesimaler Längen dx_μ und beliebige $\xi_\mu \in I_\mu$ gilt

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{\mu=1}^{n} f(\xi_\mu)dx_\mu.$$

Kettenregel: Ist f differenzierbar bei a und g differenzierbar bei $f(a)$, so ist auch $g \circ f$ differenzierbar bei a, und es gilt

$$(g \circ f)'(a) \approx g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Beweis: Wir setzen $dy :\risingdotseq f(a+h) - f(a)$. Für alle infinitesimalen h ist auch $dy = f'(a) \cdot h \approx 0$. Im Falle $dy \neq 0$ folgt daraus

$$\tfrac{g(f(a+h))-g(f(a))}{h} = \tfrac{g(f(a)+dy)-g(f(a))}{dy} \cdot \tfrac{dy}{h} \approx g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Im Falle $dy = 0$ ist $f'(a) = 0$, also $g'(f(a)) \cdot f'(a) = 0$ und $g(f(a+h)) - g(f(a)) = 0$, also auch $(g \circ f)'(a) = 0$. Insbesondere ist also

$$(g \circ f)'(a) = \frac{g(f(a+\omega)) - g(f(a))}{\omega} \approx g'(f(a)) \cdot f'(a). \ \square$$

Satz von Rolle: Seien $a, b, b-a \in {}^*\mathbb{N}$ endlich, $a < b$. f sei stetig in $[a, b]$ und differenzierbar in $]a, b[$. Ferner sei $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $c \in]a, b[$ mit $f'(c) \approx 0$.

Beweis: O.B.d.A. sei wieder $[a, b] = [0, 1]$. Folgende 3 Fälle können eintreten:
1. Alle Funktionswerte $f(\frac{k}{\Omega})$ mit $0 \le k \le \Omega$ sind $= f(0)$. 2. Einer dieser Werte ist $> f(0)$. 3. Einer dieser Werte ist $< f(0)$. Wir behandeln nur den 2. Fall.
Nach 6.10(e) gibt es ein $m \le \Omega$ mit $\forall k \le \Omega \ f(\frac{k}{\Omega}) \le f(\frac{m}{\Omega})$. Im 2. Fall ist $0 < m < \Omega$, also insbesondere $f(\frac{m}{\Omega}) \ge f(\frac{m \pm 1}{\Omega})$. Wir setzen $c :\risingdotseq \frac{m}{\Omega}$ und erhalten nacheinander
$f(c) \ge f(c \pm \omega)$, $f'(c) = \frac{f(c+\omega)-f(c)}{\omega} \le 0$,

$$\begin{aligned}
&0 \le \tfrac{f(c)-f(c-\omega)}{\omega} = \tfrac{f(c-\omega)-f(c)}{-\omega} \approx f'(c),\\
&\forall n \in \mathbb{N} \ \ 0 \le \tfrac{f(c)-f(c-\omega)}{\omega} \le f'(c) + \tfrac{1}{n}, \ \text{ also } \ f'(c) \approx 0. \quad \square
\end{aligned}$$

Exponentialfunktion und **Logarithmus**: Für $x, b \in {}^*\mathbb{Q}$ und $b > 0$ setzen wir

$$\exp x :\risingdotseq \sum_{\mu=0}^{\Omega} \frac{x^\mu}{\mu!} \quad \text{und} \quad \ln b :\risingdotseq \int_1^b \frac{dx}{x}.$$

Zunächst zeigen wir, dass für alle $x, y \in {}^*\mathbb{Q}$ gilt

$$\exp x \cdot \exp y \approx \exp(x+y),$$

$$\text{speziell} \quad \exp x \cdot \exp(-x) \approx \exp 0 = 1, \ \text{ also } \ \exp(-x) \approx \tfrac{1}{\exp x}.$$

Beweis: Bekanntlich gilt für alle standard-rationalen x, y:

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{\nu=0}^{n} \frac{x^\nu}{\nu!} \cdot \sum_{\nu=0}^{n} \frac{y^\nu}{\nu!} - \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(x+y)^\nu}{\nu!}\Big) = 0.$$

D.h. für einen stabilen $\mathcal{L}$-Term $\delta(k,x,y)$ (der also invariant bez. $(=)$ ist) gilt

$$\vdash_{\mathcal{H}} \forall k \in \mathrm{N} \;\; \forall x, y \in \mathbb{Q} \;\; \delta(k,x,y) \in \mathbb{N} \quad \text{und}$$

$$\vdash_{\mathcal{H}} \forall k, n \in \mathbb{N} \;\; \forall x, y \in \mathbb{Q} \;\Big(n \geq \delta(k,x,y) \to \big| \textstyle\sum_{\nu=0}^{n} \frac{x^\nu}{\nu!} \cdot \sum_{\nu=0}^{n} \frac{y^\nu}{\nu!} - \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(x+y)^\nu}{\nu!} \big| < \frac{1}{k}\Big),$$

Wegen $\Omega \equiv \mathcal{V}(\Phi)$ folgt nach 6.1(e)

$$\mathrm{zfc}^* \vdash \forall k \in \mathbb{N} \;\; \forall x, y \in \mathbb{Q} \;\; \delta(k,x,y) \leq \Omega \qquad \text{sowie}$$

$$\mathrm{zfc}^* \vdash \forall k \in \mathbb{N} \;\; \forall x, y \in \mathbb{Q} \;\Big(\Omega \geq \delta(k,x,y) \to \big| \textstyle\sum_{\nu=0}^{\Omega} \frac{x^\nu}{\nu!} \cdot \sum_{\nu=0}^{\Omega} \frac{y^\nu}{\nu!} - \sum_{\nu=0}^{\Omega} \frac{(x+y)^\nu}{\nu!} \big| < \frac{1}{k}\Big),$$

$$\text{also} \qquad \mathrm{zfc}^* \vdash \forall k \in \mathbb{N} \;\; \forall x, y \in \mathbb{Q} \;\; \big|\exp x \cdot \exp y - \exp(x+y)\big| < \tfrac{1}{k}. \;\; \square$$

Für $x \leq n \in \mathbb{N}$ ist $\exp x \leq \exp n = \exp(1 + \ldots + 1) \approx \exp 1 \cdot \ldots \cdot \exp 1 = (\exp 1)^n$ endlich; denn wie üblich erhält man $\exp 1 < 3$.

Nun zeigen wir: Für endliche $x \in {}^*\mathbb{Q}$ ist $\exp'(x) \approx \exp x$.

Hierzu definieren wir eine Funktion f durch $f(x,n) :\equiv \sum_{\nu=o}^{n} \frac{x^\nu}{\nu!}$. Somit ist $\exp x \equiv f(x,\Omega)$ und $\exp' x \equiv f'(x,\Omega)$. - Für alle $x \in \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{N}^{3\times}$ ist in $\mathcal{H}$ herleitbar

$$\begin{aligned} f(x,n) - f'(x,n) &= \textstyle\sum_{\nu=0}^{n} \frac{x^\nu}{\nu!} - \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\mu x^{\mu-1}}{\mu!} \\ &= \textstyle\sum_{\nu=0}^{n} \frac{x^\nu}{\nu!} - \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{x^\nu}{\nu!} = \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

Für $z :\equiv [|x|] :\equiv$ kleinste ganze Zahl $\geq |x|$, und $n > 2z$ gilt also

$$\begin{aligned} \vdash_{\mathcal{H}} |f(x,n) - f'(x,n)| &\leq \tfrac{z^n}{n!} = \tfrac{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2z} \cdot \tfrac{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}{(2z+1)\cdot(2z+2)\cdot \ldots \cdot n} \\ &< \tfrac{z^{2z}}{(2z)!} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \ldots \cdot \tfrac{1}{2} \\ &= \tfrac{z^{2z}}{(2z)! \cdot 2^{n-2z}} = \tfrac{(2z)^{2z}}{(2z)!} \cdot \tfrac{1}{2^n} < \tfrac{(2z)^{2z}}{(2z)!} \cdot \tfrac{1}{n}, \quad \text{also} \end{aligned}$$

$$\vdash_{\mathcal{H}} \forall k, n \in \mathbb{N} \;\; \forall x \in \mathbb{Q} \;\Big(n > k^+ \cdot \frac{(2z)^{2z}}{(2z)!} \;\to\; |f(x,n) - f'(x,n)| < \frac{1}{k^+}\Big).$$

Wegen $\mathrm{zfc}^* \vdash \forall k \in \mathbb{N} \;\; \forall x \in \mathbb{Q} \;\; \Omega > k^+ \cdot \frac{(2z)^{2z}}{(2z)!}$ folgt daraus

$$\mathrm{zfc}^* \vdash \forall k \in \mathbb{N} \;\; \forall x \in \mathbb{Q} \;\; |\exp x - \exp' x| = |f(x,\Omega) - f'(x,\Omega| < \frac{1}{k},$$

Für endliche $x \in {}^*\mathbb{Q}$ ist also $\exp'(x) \approx \exp x$, also

$$(\ln \circ \exp)'(x) \approx \ln'(\exp x) \cdot \exp'(x) = \frac{\exp'(x)}{\exp x} \approx \frac{\exp x}{\exp x} = 1.$$

Für endliche $b \in {}^*\mathbb{Q}$ folgt

$$\ln(\exp b) = \int_0^b (\ln \circ \exp)'(x)dx \approx \int_0^b 1 \cdot dx = b.$$

Einige weitere praktisch wichtige Funktionen sowie π können durch folgende Definitionen simuliert werden:

$$\begin{array}{ll} \cos x :\rightleftharpoons \sum_{\mu=0}^{\Omega}(-1)^\mu \frac{x^{2\mu}}{(2\mu)!}, & \sin x :\rightleftharpoons \sum_{\mu=0}^{\Omega}(-1)^\mu \frac{x^{2\mu+1}}{(2\mu+1)!} \\ \arctan y :\rightleftharpoons \sum_{\mu=0}^{\Omega} \frac{(-1)^\mu}{2\mu+1} y^{2\mu+1}, & \pi :\rightleftharpoons 4 \cdot \arctan 1. \end{array}$$

Ich hoffe somit, dass auch weitere Ausführungen von Laugwitz in [4], [5] im Rahmen von zfc* nachvollzogen werden können. Dazu sind weitere detailierte Untersuchungen erforderlich. Da uns jedoch gewöhnliche reelle (standard) Zahlen nicht zur Verfügung stehen, kann der Standardteil endlicher Elemente von ${}^*\mathbb{Q}$ hier nicht definiert werden. (Bei Laugwitz enthält jede 'Monade' $\{x : x \approx a\}$ einer endlichen Nichtstandard-Zahl a genau eine gewöhnliche reelle Zahl, die der Standardteil von a genannt wird.)

Daher versuchen wir nun, in unserem Kontext einen **Ersatz für reelle Zahlen** zu finden. Es liegt nahe, hierfür die Monaden endlicher Elemente von ${}^*\mathbb{Q}$ zu nehmen. An ihrer Stelle verwenden wir einfach die Symbole Sa mit Symbolen a für endliche Elemente von ${}^*\mathbb{Q}$ und S als 'Abstraktor', und definieren zunächst

$$Sa = Sb \ :\rightleftharpoons \ a \approx b.$$

Die Abstraktion besteht (nach Lorenzen) darin, dass man nur mit (=) verträgliche Formeln und Terme, in denen das Symbol S vorkommt, einführt. Demgemäß definieren wir (mit a, b, c für endliche Elemente von ${}^*\mathbb{Q}$):

$$\begin{array}{rcl} Sa = 0 & :\rightleftharpoons & a \approx 0 \\ Sa > 0 & :\rightleftharpoons & \exists k \in \mathbb{N}\ a > \frac{1}{k}\ (\leftrightarrow\ a > 0 \wedge a \not\approx 0) \\ Sa \circ Sb & :\rightleftharpoons & S(a \circ b) \quad \text{für } \circ \in \{+, -, \cdot, :\} \\ |Sa| & :\rightleftharpoons & S|a| \\ f(Sa) & :\rightleftharpoons & Sf(a) \quad \text{für weitere Funktionen } f \text{, die mit } \approx \text{ verträglich sind.} \\ Sa > Sb & :\rightleftharpoons & S(a-b) > 0 \\ Sa < Sb & :\rightleftharpoons & S(b-a) > 0. \end{array}$$

(Dazu beachten wir, dass die Operationen $+. -, \cdot, : (\neq 0)$ und $(x \mapsto |x|)$ Cauchy-stetig und somit verträglich mit $\approx$ sind.) Die algebraischen Gleichungen ergeben sich wie im folgenden Beispiel:

$$Sa(Sb + Sc) = S(a(b+c)) = S(ab + ac) = SaSb + SaSc.$$

Ferner erhalten wir leicht

$$\begin{array}{l} Sa = 0 \ \vee \ Sa > 0 \ \vee \ S(-a) > 0 \\ \neg\,(Sa = 0 \ \wedge \ Sa > 0) \\ \neg\,(Sa = 0 \ \wedge \ S(-a) > 0) \\ \neg\,(Sa > 0 \ \wedge \ S(-a) > 0 \\ Sa > 0 \ \wedge \ Sb > 0 \ \rightarrow \ S(a+b) > 0 \\ Sa > 0 \ \wedge \ Sb > 0 \ \rightarrow \ Sa \cdot Sb > 0. \end{array}$$

Nun sei $\mathcal{S}$ die Klasse aller (neuen) Konstanten der Form Sa mit endlichen Elementen a von ${}^*\mathbb{Q}$. $(\mathcal{S},+,\cdot,<)$ ist also ein angeordneter Körper. Für $q,r \in \mathbb{Q}$ gilt $Sq = Sr \to q = r$. Daher können wir für $q \in \mathbb{Q}$ einfach q statt Sq schreiben und damit $\mathbb{Q}$ in $\mathcal{S}$ einbetten. Zu jedem $Sa \in \mathcal{S}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a < n < n+1$, also $Sa < n+1$. Somit ist der Körper $\mathcal{S}$ archimedisch angeordnet.

Für Folgen f, die durch stabile Terme $f(x)$, darstellbar sind, gilt:
Wenn $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists \ell \in \mathbb{N}\ \forall m,n \in {}^*\mathbb{N}\ (m,n > \ell \to |Sf_m - Sf_n| < 1/k)$,
dann $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists \ell \in \mathbb{N}\ \forall m \in {}^*\mathbb{N}\ (m,n > \ell \to |Sf_m - Sf_\Omega| < 1/k)$.
Wegen des Vorkommens von ${}^*\mathbb{N}$ im Antezedens ist es uns jedoch noch nicht gelungen, $\mathbb{R}$ durch $\mathcal{S}$ zufriedenstellend zu simulieren.

Dennoch lassen sich einige Sätze in $\mathcal{S}$ übertragen. Z.B. aus dem **Zwischenwertsatz** folgt: Seien $a, b, b-a \in {}^*\mathbb{N}$ endlich und f sei (Cauchy-)stetig in $[a,b] \subseteq D_f$; ferner sei $f(Sa) < Sc < f(Sb)$. Dann gibt es ein x mit $Sx \in]Sa, Sb[$ mit $f(Sx) = Sc$. - Beweis:

$$\begin{array}{rll}
f(Sa) < Sc < f(Sb) & \to & Sc - Sf(a) > 0 \ \wedge\ Sf(b) - Sc > 0 \\
& \to & 0 \not\approx c - f(a) > 0 \ \wedge\ 0 \not\approx f(b) - c > 0 \\
& \to & f(a) < c < f(b) \ \wedge\ f(a) \not\approx c \not\approx f(b) \\
\text{(Zwischenwertsatz)} & \to & \exists x \in [a,b]\ \ (f(x) \approx c\ \wedge\ (x \approx a \to f(a) \approx f(x) \approx c)) \\
& \to & \exists x \in [a,b]\ \ (f(x) \approx c\ \wedge\ x \not\approx a\ \wedge\ \text{(desgl.)}\ x \not\approx b)) \\
& \to & \exists x \in]a,b[\ \ (f(Sx) = Sc\ \wedge\ a \not\approx x \not\approx b) \\
& \to & \exists x\ (Sx \in]Sa, Sb[\wedge f(Sx) = Sc). \quad \square
\end{array}$$

Obiger Satz **vom angenäherten Maximum** lautet: Seien $a, b \in {}^*\mathbb{N}$ endlich und f sei stetig in $[a,b] \subseteq D_f$. Dann gibt es ein $x_0 \in [a,b]$ mit $\forall x \in [a,b]\ \ \forall \ell \in \mathbb{N}\ \ f(x) \le f(x_0) + \frac{1}{\ell}$.
Aus der Bedingung $\forall \ell \in \mathbb{N}\ \ f(x) \le f(x_0) + \frac{1}{\ell}$ folgt aber $\neg \exists \ell\ \ f(x) - f(x_0) > \frac{1}{\ell}$, d.h. $\neg S(f(x) - f(x_0)) > 0$, d.h. $f(Sx) \le f(Sx_0)$.

Die Formeln $x \in [a,b]$ und $x \in]a,b[$ lassen sich jedoch nicht überall durch $Sx \in [Sa, Sb]$ bzw. $Sx \in]Sa, Sb[$ ersetzen.

Satz von Rolle: Seien $a, b, b-a \in {}^*\mathbb{N}$ endlich, $a < b$. f sei stetig in $[a,b]$ und differenzierbar in $]a,b[$. Ferner sei $f(Sa) = f(Sb)$. Dann gibt es ein $c \in]a,b[$ mit $f'(Sc) = 0$.

Im Falle $a \approx c$ können wir Sa in die Monade $\{x : x \approx c\}$ als deren 'Pseudo-Standardteil' einfügen durch die Definitionen

$$\left.\begin{array}{r} Sa \approx c \\ c \approx Sa \\ Sa \approx Sc \end{array}\right\} :\Longleftrightarrow\ a \approx c.$$

Wegen $c \approx c$ hat jede Monade einen Pseudo-Standardteil und dieser ist eindeutig bestimmt; denn im Falle $Sa \approx c$ und $Sb \approx c$ gilt $a \approx c \approx b$, also $a \approx b$, also $Sa = Sb$.

Eine Menge hyperrationaler Zahlen

Da die Klasse $^*\mathbb{Q}$ keine Menge ist, definieren wir - mit $\Theta :\Longleftrightarrow {}^{\Omega}\Omega$ - noch die Menge

$$\mathcal{Q} :\Longleftrightarrow \{z\in(\Theta^+)^{3\times} : \exists\kappa,\lambda^+\in\Theta^+\ ((z=\frac{\kappa}{\lambda^+}\ \vee\ z=-\frac{\kappa}{\lambda^+})\ \wedge\ \kappa,\lambda^+\ \underline{\text{teilerfremd}})\}.$$

Die Operationen $+,-,\cdot$ in $\mathcal{Q}$, die Division (außer durch 0), sowie die Relationen $\leq$ und $<$ in $\mathcal{Q}$ seien wieder wie üblich definiert. $(\mathcal{Q},0,1,+,\cdot,\leq)$ erfüllt die Axiome für angeordnete Körper - außer der Abgeschlossenheit gegen $+,-,\cdot,:$. Für $\kappa\in\Theta^+$ identifizieren wir κ mit $\frac{\kappa}{1}$ und betten damit Θ^+ in $\mathcal{Q}$ ein.

Offenbar ist Θ das größte und $-\Theta$ das kleinste Element von $\mathcal{Q}$.
$\frac{1}{\Theta}$ ist das kleinste positive Element von $\mathcal{Q}$.

Satz: $\frac{1}{\Theta(\Theta-1)}$ ist der kleinste Abstand zwischen zwei verschiedenen Elementen von $\mathcal{Q}$. ($\mathcal{Q}$ ist also diskret, obwohl $\pm\frac{x}{y^+}\in\mathcal{Q}$ für alle $x,y^+\in\Theta^+$ gilt.)

Beweis: $\frac{1}{\Theta-1}-\frac{1}{\Theta}=\frac{1}{\Theta(\Theta-1)}$. - Aus Symmetriegründen genügt es, nicht-negative Elemente von $\mathcal{Q}$ zu betrachten und folgende Annahmen widerlegen:

$$\frac{k}{\ell}<\frac{m}{n}<\frac{k}{\ell}+\frac{1}{\Theta(\Theta-1)},\ \ 0\leq k,m\leq\Theta,\ \ 1\leq\ell,n\leq\Theta.$$

Aus ihnen folgt

$$kn<\ell m<kn+\frac{\ell n}{\Theta(\Theta-1)}.$$

Im Falle $\ell=n$ folgt (indem man durch n dividiert) weiter

$$k+1\leq m<k+\frac{n}{\Theta(\Theta-1)}\leq k+\frac{1}{\Theta-1},\quad 1<\frac{1}{\Theta-1},\ \text{ was falsch ist.}$$

Daraus folgt: $\ell\neq n,\ \ell n\leq\Theta(\Theta-1),\ kn<\ell m<kn+1,\ kn<kn$: Widerspruch. $\Box$

Satz: Jede nicht-leere Teilmenge von $\mathcal{Q}$ hat ein größtes und ein kleinstes Element (und damit eine obere und eine untere Grenze).

Beweis: Durch Multiplikation der Elemente von $\mathcal{Q}$ mit deren 'Hauptnenner' $\Theta!$ entstehen 'ganze Zahlen', die zwischen $-\Theta\cdot\Theta!$ und $+\Theta\cdot\Theta!$ (je einschließlich) liegen. Durch anschließende Addition von $\Theta\cdot\Theta!$ entstehen daraus 'nichtnegative ganze Zahlen' $\leq 2\Theta\cdot\Theta!$, die in derselben Reihenfolge angeordnet sind wie die ursprünglichen Elemente von $\mathcal{Q}$. - Wir zeigen nacheinander (1) - (3).

(1) $\forall y\ (0<y\leq\Theta\rightarrow\exists z\ \ y\cdot z=\Theta!)$.

Beweis: $\vdash_{\mathcal{H}}\forall n\in\mathbb{N}\ \forall y\ (0<y\leq n\rightarrow\exists z\ \ y\cdot z=n!)$ (durch Induktion bez. n), also zfc$^*\vdash\forall n\in\Theta^+\ \forall y\ (0<y\leq n\rightarrow\exists z\ \ y\cdot z=n!)$ (nach 6.9(a) mit $s(\Omega)=\Theta^+=({}^{\Omega}\Omega)^+$), speziell (1).

(2) $\forall M\,(\emptyset \neq M \subseteq \mathcal{Q} \to \exists y \in M\ \ \forall x\,(x \in M \to x \leq y))$.

Beweis: Für $x, y^+ \in \Theta^+$ gibt es nach (1) ein z mit $\frac{x}{y^+}\cdot\Theta! = \frac{x}{y^+}\cdot y^+ z = xz \leq \Theta\cdot\Theta!$.
1. Fall: $M \subseteq \mathcal{Q}$ enthalte mindestens ein Element $p \geq 0$. Wir betrachten die Menge $M' :\!\!\Longleftarrow \{p\cdot\Theta! : p \in M \wedge p \geq 0\}$. Wegen $M' \subseteq (\Theta\cdot\Theta!)^+$ existiert nach 6.7(b) das Maximum m von M'. $\frac{m}{\Theta!}$ ist das Maximum von M.
2. Fall: $M \neq \emptyset$ enthalte nur negative Elemente. Ähnlich wie im 1. Fall existiert das Maximum m' von $\{p + \Theta : p \in M\}$. Dann ist $m' - \Theta$ das Maximum von M.

(3) $\forall z\,(\emptyset \neq M \subseteq \mathcal{Q} \to \exists z{\in}M\ \ \forall x\,(x{\in}M \to z \leq x))$.

Beweis: Ist y das größte Element von $\{x{\in}\mathcal{Q}\colon -x \in M\}$, so ist $-y$ das kleinste Element von M. $\square$

Hat eine Funktion $f\colon D \to \mathcal{Q}$ mit $D \subseteq \mathcal{Q}^{k\times}$ die Form $\frac{f_1 - f_2}{f_3^+}$, und sind ihre Komponenten f_i aus höchstens exponentiellen Funktionen nur durch Verkettung zusammengesetzt, so erfüllt f nach 6.11 für jede Nummer m die Bedingung

$$\forall \underline{x}\,\big(\underline{x}{\in}D_f \cap ({}^{m}\Omega)^{3k\times} \to f(\underline{x}) \in \mathcal{Q} \cap \bigcup_{n\in\mathrm{IN}} ({}^{mn}\Omega)^{3\times}\big).$$

(Wegen ${}^{mn}\Omega < \Theta$ ist $\bigcup_{n\in\mathrm{IN}}({}^{mn}\Omega)^{3\times} \subseteq \mathcal{Q}$.) Anwendungen derartiger Funktionen f auf Argumente aus $D \cap \bigcup_{m\in\mathrm{IN}}({}^{m}\Omega)^{3k\times}$ führen also nicht aus $\mathcal{Q}$ hinaus. Der 'Mangel', dass $(\mathcal{Q}, 0, 1, +, \cdot, \leq)$ nicht abgeschlossen ist bezüglich $+, \cdot$ und weiterer Funktionen f, stört also in der Praxis nicht.

§8. Anhang: Dialogische Interpretation des Halbformalismus $\mathcal{H}$

In §3 haben wir beschrieben, wie nach den Regeln von $\mathcal{H}$ mit ($\vee$-)Listen $C_1.C_2.\cdots.C_n$ von Aussagen der Sprache $\mathcal{L}$ zu operieren ist. Für beliebige dieser Listen schreiben wir wieder $\Gamma, \Gamma_0, \Gamma_1, \ldots$. (Zur Trennung solcher Listen verwenden wir von nun an das einfache Komma an Stelle von ' ,, '.)

Die in $\mathcal{H}$ herleitbaren Listen sind genau diejenigen, die ein 'Proponent' P in bestimmten Dialogspielen gegen beliebige 'Opponenten' verteidigen kann (vgl. [6] S.67). $\mathcal{H}$ ist (wie erwähnt) nicht beweisdefinit. Demgegenüber hat jedes der im Folgenden behandelten Dialogspiele den methodischen Vorteil, dass nachprüfbar ist, ob in ihm die Spielregeln nicht verletzt worden sind, ob es vollendet worden ist und ob im letzten Falle P gewonnen hat; d.h. sie sind 'dialogisch-definit'. Es kommt allerdings darauf an, ob es eine Gewinnstrategie gegen *beliebige* Opponenten gibt.

Unter einem Schluss verstehen wir im Folgenden einen Schluss von $\mathcal{H}$.

Ein $\mathcal{H}$-Dialog um eine Liste Γ_0 beginnt damit, dass ein Proponent P sie (d.h. deren Herleitbarkeit) durch Angabe eines Schlusses $\mathrm{P}(\Gamma_0)$ mit der Konklusion Γ_0 verteidigt. Daraufhin sind ein Opponent O und P abwechselnd am Zuge. Hat P im Verlaufe dieses

Dialogs einen Schluss $P(\Gamma)$ mit der Konklusion Γ gewählt, so wählt O darauf hin eine Prämisse Δ von $\mathrm{P}(\Gamma)$. Danach wählt P einen Schluss $\mathrm{P}(\Delta)$ mit der Konklusion Δ.

Um zu erreichen, dass jeder $\mathcal{H}$-Dialog nach endlich vielen Schritten zu einem Gewinn oder Verlust seitens P führt, vereinbaren wir zunächst: Hat P eine Liste Γ_k durch einen Schluss $\Gamma_{k+1} \Rightarrow \Gamma_k$ mit $\Gamma_{k+1} \subseteq \Gamma_k$ verteidigt, so sei es für P verboten, anschließend Γ_{k+1} durch $\Gamma_{k+2} \Rightarrow \Gamma_{k+1}$ mit $\Gamma_{k+2} \subseteq \Gamma_{k+1}$ zu verteidigen. (P hätte dann aber Γ_k sogleich durch $\Gamma_{k+2} \Rightarrow \Gamma_k$ verteidigen dürfen.)

Hat P einen Schluss $\Rightarrow A$ ohne Prämissen angegeben, dann habe P gewonnen. Er habe verloren, falls er nicht mehr ziehen kann. Hat P auf diese Weise gewonnen oder verloren, so sei der Dialog vollendet.

Jeder $\mathcal{H}$-Dialog hat also die Form $\Gamma_0, P(\Gamma_0), \ldots, \Gamma_k, P(\Gamma_k), \Gamma_{k+1}, \ldots$. Dabei ist Γ_{k+1} eine von O zu wählende Prämisse von $\mathrm{P}(\Gamma_k)$ (falls vorhanden).

Im Falle $\Gamma_{k+1} \not\subseteq \Gamma_k$ entsteht Γ_{k+1} aus Γ_k dadurch, dass man das letzte Glied von Γ_k durch ein oder zwei 'einfachere' (s. Beweis von 3.5) Glieder ersetzt, und im Falle $\Gamma_{k+1} \subseteq \Gamma_k$ ist $\Gamma_{k+2} \not\subseteq \Gamma_{k+1}$ (nach der obigen Vereinbarung). Daher gewinnt oder verliert P den Dialog nach endlich vielen Schritten.

Definition: Eine $\mathcal{H}$-**Gewinnstrategie** für Γ_0 sei eine Vorschrift P, die bei jeder Eingabe einer Liste Γ einen Schluss $\mathrm{P}(\Gamma)$ von $\mathcal{H}$ mit der Konklusion Γ oder *Error* auszugeben vorschreibt, sodass Folgendes für jedes mit der 'These' Γ_0 beginnende Tupel $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ gilt: Wenn $\mathrm{P}(\Gamma_k)$ für jedes $k < n$ ein Schluss mit der Konklusion Γ_k und Γ_{k+1} eine Prämisse dieses Schlusses ist, dann ist auch $\mathrm{P}(\Gamma_n) \not\equiv \mathit{Error}$.

Mittels einer Gewinnstrategie P für Γ_0 lässt sich (von unten nach oben fortschreitend) ein Baum $\mathcal{B}$ mit der Wurzel Γ_0 (unten) wie folgt erzeugen. Dabei ist P zuerst auf Γ_0 anzuwenden und danach auf alle Prämissen von Schlüssen, die P jeweils schon angegeben hat, in einer noch zu beschreibenden Reihenfolge anzuwenden. In $\mathcal{B}$ endet dann jeder Zweig (oben) mit der Konklusion eines Schlusses von $\mathcal{H}$ ohne Prämissen.

Um die erwähnte Reihenfolge der Anwendungen von P übersichtlich darzustellen, bezeichnen wir Γ_0 kurz mit 0 und für jede schon mit γ bezeichnete Liste die Prämissen von $\mathrm{P}(\gamma)$ (soweit vorhanden) in lexikographischer Anordnung mit $\gamma 0, \gamma 1, \gamma 2, \ldots$. Wir ordnen die Resultate wiederholter Anwendungen von P nach der *Anzahl* der Vorkommnisse von Ziffern $0, 1, 2, \ldots$ in ihren Bezeichnungen, bei gleicher Anzahl nach der Summe der darin stehenden Ziffern, und bei gleicher Summe lexikographisch. Auf diese Weise entstehe der Baum $\mathcal{B}$ aus folgendem Schema durch Fortlassen von Bezeichnungen nicht vorhandener Prämissen:

$\ldots$
$00000, \ldots$
$0000; 0001, 0010, 0100; 0002, 0011, 0020, 0101, 0110, 0200; \ldots$
$000; 001, 010; 002, 011, 020; 003, 012, 021, 030; \ldots$ (Prämissen von $P(00), P(01), \ldots$)
$00, 01, 02, 03, \ldots$ (Prämissen von $P(0)$)
0 (d.h. Γ_0).

Von oben nach unten gelesen stellt $\mathcal{B}$ eine Herleitung von Γ_0 dar, in der aber die Prämissen einer Liste in der darüber stehenden Zeile i.Allg. 'verstreut' stehen. - Jede in $\mathcal{B}$ angeführte Liste lässt sich in folgender diagonalen Reihenfolge in endlich vielen Schritten erreichen:

$$0; 00; 01, 000; 02, 001, 0000; 03, 010, 0001, 00000; \ldots$$

In dieser Folge stehen hinter jedem ihrer Glieder Γ auch alle Prämissen von $\mathrm{P}(\Gamma)$.

Nun betrachten wir die Vorschrift, alle Glieder dieser Folge nacheinander aufzuschreiben, und zwar wie in der schon angegebenen Tabelle angeordnet. Z.B. nach 7 Schritten erhält man ggf.

$$\begin{array}{l} 0000 \\ 000, 001 \\ 00, 01, 02 \\ 0. \end{array}$$

V sei diese Vorschrift. Nach ihr ist eine Liste nur dann in die Tabelle einzutragen, wenn sie die Konklusion eines Schlusses ist, dessen Prämissen ebenfalls (i.Allg. später) in die Tabelle einzutragen sind. Somit ist V eine Herleitungsvorschrift von Γ_0 in einem etwas liberalisierten Sinne, d.h. nach der es für Schlüsse (mit endlich oder unendlich vielen Prämissen) erlaubt ist, ihre Konklusion herzuleiten, nachdem beschrieben worden ist, wie ihre Prämissen herzuleiten sind (also i.Allg. schon bevor sie hergeleitet worden sind).

Ist umgekehrt eine derartige Vorschrift V zur Herleitung von Γ_0 in $\mathcal{H}$ gegeben, und wird durch P jeder nach V herzuleitenden Liste Γ genau ein Schluss $\mathrm{P}(\Gamma)$ mit der Konklusion Γ effektiv zugeordnet, dessen Prämissen (falls vorhanden) ebenfalls nach V herzuleiten sind, so ist P eine Gewinnstrategie für Γ_0. (Für weitere Γ sei $\mathrm{P}(\Gamma)$ nicht definiert.)

Um dies zu zeigen, betrachten wir irgendein mit Γ_0 beginnendes Tupel $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ derart, dass Γ_{k+1} für jedes $k < n$ eine Prämisse von $\mathrm{P}(\Gamma_k)$ ist. Dann sind auch $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ nach V herzuleiten, also $\mathrm{P}(\Gamma_n)$ ein Schluss mit der Konklusion Γ_n, also $\mathrm{P}(\Gamma_n) \not\equiv$ *Error*. (Zu weiteren Fragen zu halbformalen Systemen s. [9] VI.)

Literatur

[1] W. Ackermann: „Die Widerspruchsfreiheit der allgemeinen Mengenlehre“, Math. Annalen 114 (1937).

[2] G. Gentzen: „Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie“, Math. Annalen 112 (1936).

[3] Herbrand, J.: “Recherches sur la theorie de la demonstration”; in Travoux de la Societe des Sciences et de Lettres de Varsovie, Class III, Sciences Mathematiques et Physiques, Nr. 33, 1930.

[4] Laugwitz, D.: „Ein Weg zur Nonstandard-Analysis“, Jber. Deutsch. Math.-Verein. **75** (1973), 66-93.

[5] Laugwitz, D.: „Zahlen und Kontinuum. Eine Einf. in die Infinitesimalmathematik“ BI 1986.

[6] Lorenzen, P.: „Metamathematik“, BI 1962.

[7] Lorenzen, P.: „Lehrbuch der konstruktiven Wissenschaftstheorie“, BI 1987.

[8] Russell, B.: “On Denoting”, Mind 14, 1905, 479-493.

[9] Schütte, K.: „Beweistheorie“, 1960, VI.

Folgende Arbeiten enthalten einen ‘konstruktiven’ Zugang zu [4], [5]:

Zahn, P.: “A Predicative Approach to Nonstandard Mathematics”
Zeitschr. f. math. Logik u. Grundl. d. Math., Bd.33, 85-96 (1987).

–: “Supplements to ‘A Predicative Approach to Nonstandard Math.’ ”.
Zeitschr. f. math. Logik u. Grundl. d. Math., Bd.35, 269-271 (1989).

–: “A Nonstandard Delta Function in a Predicative Theory”,
Math. Logic Quart. 41 (1995) 257-260.