B Ableitung geometrischer Größen für das mathematische Ventilmodell

B.1 Herleitung des Radius Δr

Die für die Berechnung von Δr notwendigen geometrischen Zusammenhänge werden in Bild B-1 für einen kugelförmigen Schließkörper mit Ventilsitz wiedergegeben.

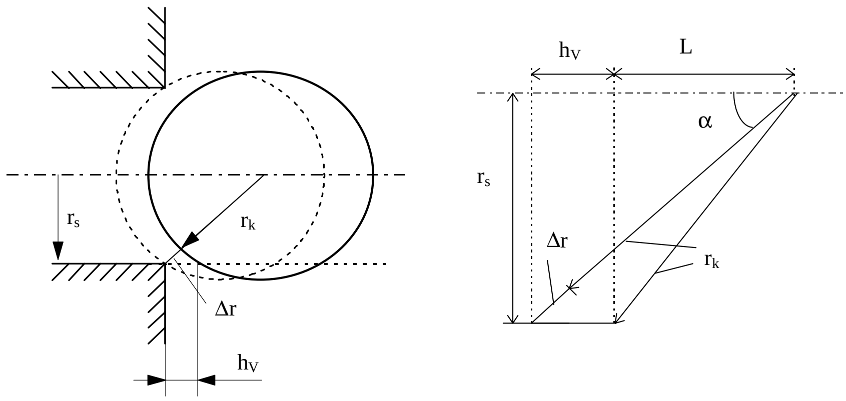

Bild B-1: Skizze zur Berechnung des Radius Δr

Aus Bild B-1 können folgende geometrische Beziehungen abgeleitet werden:

$$\left(r_k + \Delta r\right) = \sqrt{r_s^2 + \left(L + h_v\right)^2} \tag{B-1}$$

und

$$L = \sqrt{r_k^2 - r_s^2} \tag{B-2}$$

Durch Einsetzen von (B-1) in (B-2) folgt für Δr

$$\boxed{\Delta r = \sqrt{r_s^2 + \left(\sqrt{r_k^2 - r_k^2} + h_v\right)^2} - r_k} \tag{B-3}$$

B.2 Herleitung der freigegebenen Ventilspaltfläche A_{sp}

Die durchströmte Ventilspaltfläche in Abhängigkeit von Δr entspricht der Mantelfläche eines Kegelstumpfs. Die gesuchten Fläche A_{sp} folgt nach [A14] unter Bezug Bild B-1 zu

$$A_{sp} = \pi \cdot \Delta r (r_s + r_k \sin(\alpha)) \tag{B-4}$$

Durch Einsetzen von

$$\sin(\alpha) = \frac{r_s}{r_k + \Delta r} \tag{B-5}$$

in (B-4) erhält man

$$A_{sp} = \pi \cdot \Delta r \cdot r_s (1 + \frac{r_k}{r_k + \Delta r}) \tag{B-6}$$

Anhand Gleichung (B-6) kann man erkennen, daß für $r_k >> \Delta r$ die freigegebene Spaltfläche eine lineare Funktion des Radius Δr ist.

B.3 Berechnung des hydraulischen Durchmessers

Für den hydraulischen Durchmesser d_h findet man beispielsweise in [A8] folgende mathematische Beziehung:

$$d_h = \frac{4A}{U} \tag{B-7}$$

In (B-7) stellt A die durchströmte Spaltfläche A_{sp} und U den benetzten Umfang der durchströmten Spaltfläche dar. Der benetzte Umfang U kann unter Bezug auf Bild B-1 zu

$$U = 2\pi \cdot \left(\sin(\alpha) \cdot r_k + r_s\right) \tag{B-8}$$

berechnet werden. Mit Gleichung (B-4) erhält man für den gesuchten hydraulischen Durchmesser

$$d_h = 2 \cdot \Delta r \tag{B-9}$$

B.4 Berechnung der Zeitableitung der Ventilspaltfläche A_{sp}

Für die Berücksichtigung der Leitungsinduktivitäten bei der Berechnung der Strömungsgeschwindigkeit im Ventilspalt ist die Kenntnis der Zeitableitung der Ventilspaltfläche notwendig. Mit (B-3) und (B-6) erhält man für die Ventilspaltfläche folgenden Zusammenhang

$$A_{sp} = \pi \cdot \Delta r \cdot r_s + \frac{\pi \cdot \Delta r \cdot r_s \cdot r_k}{r_k + \Delta r} \qquad \textbf{(B-10)}$$

$$= \pi \cdot r_s\left(\sqrt{r_k^2 + 2h_v L + h_v^2} - r_k\right) + \frac{\pi \cdot \left(\sqrt{r_k^2 + 2h_v L + h_v^2} - r_k\right) \cdot r_s \cdot r_k}{r_k + \left(\sqrt{r_k^2 + 2h_v L + h_v^2} - r_k\right)}$$

$$= \pi \cdot r_s \sqrt{r_k^2 + 2h_v L + h_v^2} - \pi \cdot r_s \cdot r_k + \pi \cdot r_s \cdot r_k - \frac{\pi \cdot r_s \cdot r_k^2}{\sqrt{r_k^2 + 2h_v L + h_v^2}}$$

$$A_{sp} = \pi \cdot r_s \sqrt{r_k^2 + 2h_v L + h_v^2} - \frac{\pi \cdot r_s \cdot r_k^2}{\sqrt{r_k^2 + 2h_v L + h_v^2}}$$

Für die Zeitableitung der Ventilspaltfläche folgt unter Ausnutzung der Kettenregel

$$\frac{dA_{sp}}{dt} = \frac{dA_{sp}}{dh_v}\dot{h}_v \qquad \textbf{(B-11)}$$

durch weitere Umformung

$$= \pi \cdot r_s \frac{1}{2\sqrt{r_k^2 + 2h_v L + h_v^2}}\left(2L + 2h_v\right) + \frac{1}{2}\pi \cdot r_s \cdot r_k^2 \frac{\left(2L + 2h_v\right)}{\left(\sqrt{r_k^2 + 2h_v L + h_v^2}\right)^3}$$

$$= \pi \cdot r_s\left(L + h_v\right)\left\{\frac{1}{\sqrt{r_k^2 + 2h_v L + h_v^2}} + \frac{r_k^2}{\left(\sqrt{r_k^2 + 2h_v L + h_v^2}\right)^3}\right\}$$

$$\frac{dA_{sp}}{dt} = \pi \cdot r_s\left(L + h_v\right)\frac{2r_k^2 + 2h_v L + h_v^2}{\left(\sqrt{r_k^2 + 2h_v L + h_v^2}\right)^3} \qquad \textbf{(B-12)}$$

mit

$$L = \sqrt{r_k^2 - r_s^2} \qquad \textbf{(B-13)}$$