A Herleitung der optimierten Hubfunktion

Ausgehend von den Stützpunkten X_1 bis X_9 nach Bild A-1 und den Eingabeparametern (Tabelle A-1) soll die Gleichung (4-69) hergeleitet werden. Bei der hier verwendeten Hubfunktion handelt es sich um eine abschnittsweise definierte Funktion, die aus Geraden und Parabeln zusammengesetzt ist. Die hierbei auftretenden Unstetigkeiten in der Geschwindigkeit spielen für den realen Betrieb mit bewegter Mechanik eine untergeordnete Rolle, da hier eine Tiefpaßwirkung erreicht wird. Die Parabel und Geradengleichungen sind in Kapitel 4 in Gleichung (4-69) dargestellt. In diesem Abschnitt sollen die Stützpunkte X_1 bis X_9 in Abhängigkeit der Eingabeparameter nach Tabelle A-1 berechnet werden. Für die Herleitung der ersten vier Stützpunkte ist es hilfreich Bild 4-27 zu betrachten.

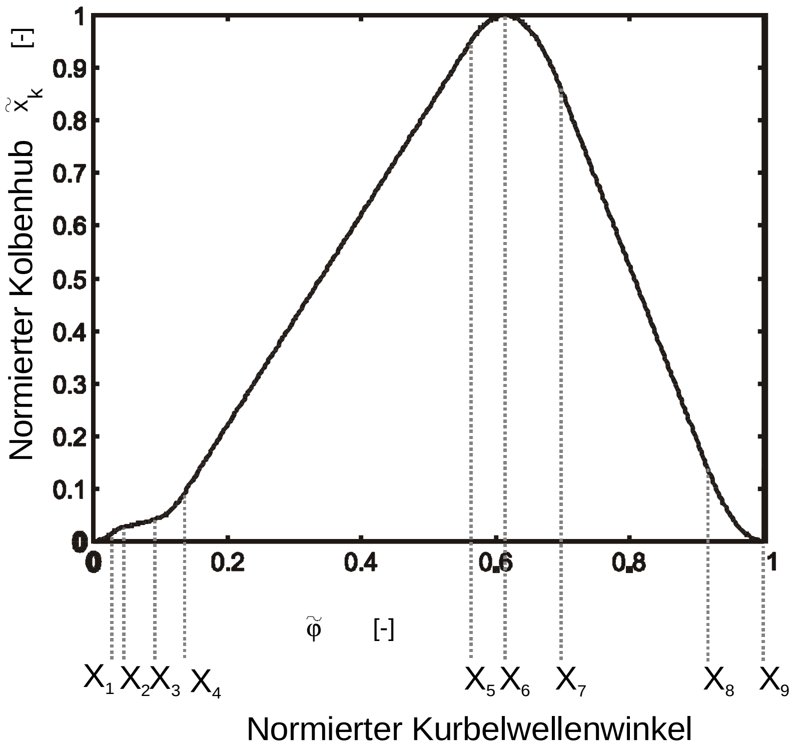

Bild A-1: Definition der Sützpunkte X_1 bis X_9

Tabelle A-1: Eingabeparameter für die optimierte Hubfunktion

Parameter	Bedeutung
Δh_k	Anteil der Ventilöffnung am Gesamthub in normierter Darstellung
α_h	Beschleunigung während des Ausschiebens in der Druckphase
β_h	Beschleunigung am Übergang der Druck- in die Saugphase
ε	Länge der Beruhigungsphase
v_b	Geschwindigkeit während der Beruhigungsphase
v_a	Geschwindigkeit während des Ausschiebens

Berechnung des Stützpunkt X_1:
Um in dem Bereich X_1 bis X_2 die Hubfunktion

$$h(x) = h(X_1) + \int_{X_1}^{x} -2\alpha_h (x - X_2) + v_b dx \qquad \textbf{(A-1)}$$

durch die Parameter in Tabelle A-1 auszudrücken kann zum einen die Beziehung

$$X_2 = 2 * X_1 - \frac{v_b}{2\alpha_h} \qquad \textbf{(A-2)}$$

und zum anderen die Randbedingung

$$h(X_2) = \Delta h_k \qquad \textbf{(A-3)}$$

benutzt werden. Durch Einsetzen von (A-2) und (A-3) in (A-1) ergibt sich eine Beziehung zwischen dem unbekannten Stützpunkt X_1 und den Eingabeparametern zu

$$\Delta h_k = 2\alpha_h X_1^2 - \frac{v_b}{2\alpha_h} \quad \textbf{und somit} \quad X_1 = \sqrt{\frac{\Delta h_k}{2\alpha_h} + \frac{v_b^2}{4\alpha_h^2}}\,. \qquad \textbf{(A-4)}$$

Berechnung des Stützpunkt X_2:
Setzt man (A-4) in (A-2) ein so ergibt sich

$$X_2 = 2 * \sqrt{\frac{\Delta h_k}{2\alpha_h} + \frac{v_b^2}{4\alpha_h^2}} - \frac{v_b}{2\alpha_h} \qquad \textbf{(A-5)}$$

Berechnung des Stützpunkt X_3:
Diese ergibt sich aus der Definition der Beruhigungsphase $\varepsilon = X_3 - X_2$

$$X_3 = \varepsilon - X_2 = \varepsilon - 2 * \sqrt{\frac{\Delta h_k}{2\alpha_h} + \frac{v_b^2}{4\alpha_h^2}} - \frac{v_b}{2\alpha_h} \quad . \qquad \textbf{(A-6)}$$

Berechnung des Stützpunkt X_4:
Die Berechnung dieses Stützpunktes ergibt sich aus der konstanten Beschleunigung mit α_h von dem Stützpunkt X_3 bis X_4 zu

$$X_4 = X_3 + \frac{v_a - v_b}{\alpha_h} \quad . \qquad \textbf{(A-7)}$$

Berechnung des Stützpunkt X_5:
Ausgehend von der Randbedingung, daß bei X_6 der maximale Hub (in normierter Darstellung 1) erreicht wird, ergibt sich durch das Integral

$$\int_{0}^{X_6} v(x)dx = 1 \tag{A-8}$$

die Gleichung

$$\Delta h_k + v_b\varepsilon + \int_{X_3}^{X_4} v(x)dx + \int_{X_4}^{X_5} v(x)dx + \int_{X5}^{X_6} v(x)dx = 1 \quad . \tag{A-9}$$

Durch Betrachten der Teilintegrale aus (A-9)

$$\int_{X_3}^{X_4} v(x)dx = \frac{v_a^2 - v_b^2}{2\alpha_h} \tag{A-10}$$

und

$$\int_{X5}^{X_6} v(x)dx = \frac{v_a^2}{2\beta_h} \tag{A-11}$$

ergibt sich die Beziehung

$$\int_{X_4}^{X_5} v(x)dx = 1 - \Delta h_k - v_b\varepsilon - \int_{X_3}^{X_4} v(x)dx - \int_{X5}^{X_6} v(x)dx \tag{A-12}$$

$$v_a\left(X_5 - X_4\right) = 1 - \Delta h_k - v_b\varepsilon - \frac{v_a^2 - v_b^2}{2\alpha_h} - \frac{v_a^2}{2\beta_h} \quad ,$$

die aufgelöst

$$X_5 = X_4 + \frac{1 - \Delta h_k - v_b\varepsilon}{v_a} - \frac{v_a^2 - v_b^2}{2\alpha_h v_a} - \frac{v_a}{2\beta_h} \tag{A-13}$$

ergibt.

Berechnung des Stützpunkt X_6:

Mit dem bekannten Wert für X_5 kann mit der Steigung β_h X_6 errechnet werden:

$$X_6 = \frac{v_a}{\beta} + X_5 \tag{A-14}$$

Berechnung des Stützpunkte X_7 bis X_9:

Um die Stützpunkte für den Saughub zu berechnen, ist es sinnvoll die Geschwindigkeit v_e beim Einlaß als Parameter zu wählen. Da diese zunächst unbekannt ist, soll sie durch das Verhältnis von Druck- zu Saughublänge (in normierter Darstellung ist dies X_6) und der Beschleunigung β_h ausgedrückt werden. Als Randbedingung wird hier die Symmetrie mit

$$\left(X_7 - X_6\right) = \left(1 - X_8\right) \quad , \qquad \textbf{(A-15)}$$

den Bedingungen

$$X_9 = 1 \qquad \textbf{(A-16)}$$

und

$$X_7 = \frac{v_e}{\beta_h} + X_6 \qquad \textbf{(A-17)}$$

genutzt. Der Ansatz zur Berechnung ist, daß die Fläche im Negativen der Geschwindigkeitssollwertkurve die Fläche im positiven aufheben muß:

$$\int_{X_6}^{X_9} v(x)dx = -1 \ . \qquad \textbf{(A-18)}$$

Dadurch ergibt sich mit (A-15)

$$-1 = -\frac{\beta_h}{2}\left(X_7 - X_6\right)^2 - v_e\left(X_8 - X_7\right) - \frac{\beta_h}{2}\left(X_9 - X_8\right)^2 \qquad \textbf{(A-19)}$$

$$. \ 1 = \beta_h\left(X_7 - X_6\right)^2 + v_e\left(X_8 - X_7\right)$$

Durch einsetzen von (A-16) in (A-19) ergibt sich

$$1 = v_e X_8 - v_e X_6 \ . \qquad \textbf{(A-20)}$$

Mit der Steigung β_h ergibt sich für X_8

$$X_8 = X_9 - \frac{v_e}{\beta_h} = 1 - \frac{v_e}{\beta_h} \ . \qquad \textbf{(A-21)}$$

Durch Einsetzen von (A-21) in (A-20) ergibt sich die quadratische Gleichung

$$0 = v_e^2 + v_e\beta_h\left(X_6 - 1\right) + \beta_h \qquad \textbf{(A-22)}$$

für v_e. Da diese Geschwindigkeit negativ sein muß ergibt sich

$$v_e = \frac{1 - X_6}{2}\beta_h - \sqrt{\left(\frac{1 - X_6}{2}\beta_h\right)^2 - \beta_h} \ . \qquad \textbf{(A-23)}$$

Anhand dieser Gleichung wird deutlich, daß die Geschwindigkeit beim Saugen von der Länge des Druckhubes und der Beschleunigung abhängt.