

# Die Selbstenergie des $\omega$ -Mesons

Vom Fachbereich Physik  
der Technischen Universität Darmstadt

zur Erlangung des Grades  
eines Doktors der Naturwissenschaften  
(Dr. rer. nat.)

genehmigte Dissertation von  
Dipl.-Phys. Mirko Wachs  
aus Elsterwerda

Darmstadt 2000  
D17

*Referent:* Prof. Dr. J. Wambach  
*Korreferent:* Prof. Dr. Dr. h.c. mult. A. Richter

*Tag der Einreichung:* 18. April 2000  
*Tag der Prüfung:* 10. Mai 2000

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>1 Hadronisches Modell des <math>\omega</math>-Mesons</b>	<b>6</b>
1.1 Zerfälle des $\omega$ -Mesons . . . . .	6
1.2 Vektordominanzmodell . . . . .	7
1.3 Lagrangedichte des Modells . . . . .	16
<b>2 <math>\omega</math>-Meson im Vakuum</b>	<b>22</b>
2.1 Bestimmung der Kopplungskonstanten . . . . .	22
2.1.1 Kopplungskonstante des $\omega\rho\pi$ -Vertex . . . . .	22
2.1.2 Kopplungskonstante des $\omega\pi\pi\pi$ -Vertex . . . . .	24
2.2 Selbstenergie des $\omega$ -Mesons . . . . .	25
2.2.1 Selbstenergiediagramme . . . . .	25
2.2.2 Einfacher Beitrag . . . . .	28
2.2.3 Austauschdiagramm . . . . .	30
2.2.4 Interferenzterm . . . . .	33
2.2.5 Direkter Beitrag . . . . .	35
2.2.6 Beitrag durch den mikroskopischen Formfaktor . . . . .	36
2.3 Ergebnisse . . . . .	47
2.3.1 Imaginär- und Realteil der $\omega$ -Selbstenergie . . . . .	47
2.3.2 Breite des $\omega$ -Mesons und seine nackte Masse . . . . .	50
2.4 Selbstkonsistenz im $\rho$ -Kanal . . . . .	53
2.5 Dalitz-Zerfälle des $\omega$ -Mesons . . . . .	55
2.5.1 Beiträge in niedrigster Ordnung Störungstheorie . . . . .	55
2.5.2 Berücksichtigung des mikroskopischen Formfaktors . . . . .	57
<b>3 <math>\omega</math>-Meson in kalter Kernmaterie</b>	<b>62</b>
3.1 Medium-Modifikationen des Pions und des $\rho$ -Mesons . . . . .	62
3.2 Einfaches Diagramm in Kernmaterie . . . . .	66
<b>Zusammenfassung</b>	<b>71</b>
<b>Anhang</b>	<b>75</b>
<b>Literatur</b>	<b>84</b>

# Einleitung

In den letzten Jahren sind verstärkt experimentelle und theoretische Bemühungen unternommen worden, um die Physik relativistischer Schwerionstöße zu untersuchen. Das Hauptziel dieser Arbeiten ist die Entdeckung und Erklärung möglicher Phasenübergänge in Kernmaterie im Rahmen der Theorie der starken Wechselwirkung – der Quanten Chromodynamik (QCD). Man glaubt heute, daß es in frühen Phasen des Universums, d.h.  $10^{-6}$  bis  $10^{-4}$  s nach dem Urknall, zu solchen Phasenübergängen in der Materie kam. Bei geringem Baryonüberschuß erwartet man typischerweise Temperaturen von 150 bis 200 MeV für den Phasenübergang. Der andere Grenzfall: hohe Dichte und geringe Temperatur ist im Inneren von Neutronensternen realisiert. Während die Oberflächentemperatur typischerweise einige  $10^5$  K beträgt, erwartet man im Inneren Dichten von ungefähr  $10^{15}$  g/cm<sup>3</sup>, also näherungsweise das Vierfache der normalen Kerndichte. Zur Modellierung des chronologischen Ablaufs einer Supernovae oder zur Erklärung des Aufbaus der Neutronensterne sind Kenntnisse über mögliche Phasenübergänge und die Zustandsgleichung (EOS) notwendig Voraussetzung.

Irgendwann werden beim Erhitzen und Komprimieren von Kernmaterie einzelne Hadronen überlappen und das ursprünglich vorhandene 'Confinement' von Quarks und Gluonen wird aufgehoben. Somit sind Nukleonen, Mesonen und Resonanzen nicht länger die thermodynamisch relevanten Freiheitsgrade. Dieses einfache Bild eines Quark-Hadron-Phasenübergangs wird bei der Motivation theoretischer Modelle, wie dem BAG-Modell [1], benutzt. Beispielsweise zeigen auch die QCD-Gitterrechnungen in einem relativ schmalen Temperaturintervall ein ausgeprägtes Anwachsen von Energie- und Entropiedichte an, was vermutlich auf einen Übergang von der hadronischen Phase zum Quark-Gluon-Plasma (QGP) hindeutet.

Zonen heißer, dichter Kernmaterie in denen es möglicherweise zu einem Übergang in das QGP gekommen ist, wurden am CERN-SpS beispielsweise bei CERES/NA45 [2] mit S-Au bei 200 AGeV untersucht. In nächster Zukunft werden auch von der HADES-Kollaboration bei der GSI Messungen von Dileptonenspektren im Bereich von SIS-Energien durchgeführt.

Gleichzeitig zum Phasenübergang von hadronischer Materie in das QGP erwartet man den sogenannten chiralen Phasenübergang. Die ursprünglich in der Confinement-Phase vorhandenen Konstituentenmassen der Quarks u,d,s verschwinden beim Übergang in das QGP und man gelangt in eine Phase, in der die chirale Symmetrie wiederhergestellt ist.

Dabei ist die chirale Symmetrie der QCD nur im Sektor leichter Quarks in guter Näherung erfüllt. Das Verschwinden der spontan gebrochenen Phase führt zu einer Entkopplung von links und rechtshändigen Quarks und damit zu einer Entartung der hadronischen Zustände in der Parität. Das Phänom des chiralen Phasenübergangs kann auch im Rahmen effektiver Modelle wie z. B. im linearen Sigma-Modell [3] oder im NJL-Modell [4] studiert werden.

Wie kann die Existenz eines möglichen QGP in Schwerionstößen festgestellt werden? Als Sonden zur Untersuchung eines im Anfangsstadium der Reaktion möglicherweise vorhandenen QGP sind Teilchen geeignet, die nach ihrer Produktion keiner weiteren Wechselwirkung in der hadronischen Umgebung unterliegen. Dieses Kriterium wird von Dileptonen und Photonen erfüllt. Im Gegensatz hierzu werden die Hadronen vor allem Informationen von ihrer letzten Wechselwirkung tragen, also im Zustand thermischen 'Freezeouts' vom Detektor registriert werden. Der thermische 'Freezeout' wird erreicht, wenn die mittlere freie Weglänge der Teilchen zwischen zwei elastischen Stößen die Größe des Feuerballs erreicht. Typische Größenordnungen für die Zeit liegen hier bei  $10 \text{ fm}/c$ . In Analogie ist der Zeitpunkt chemischen 'Freezeouts' erreicht, wenn die zu inelastischen Prozessen gehörende freie Weglänge die Ausdehnung des Feuerballs erreicht, damit ist die hadronische Zusammensetzung festgelegt.

Ein Problem besteht nun darin, die Erzeugungsmechanismen einer Vielzahl von Quellen der Dileptonenproduktion zu kennen. Dileptonen können in allen Prozessen erzeugt werden, in denen sowohl virtuelle oder reelle Photonen vorhanden sind an die sie koppeln können. So stammen Dileptonen aus der frühen Phase des Feuerballs, d.h. bei Zeiten von  $\approx 1 \text{ fm}/c$  typischerweise aus Drell-Yan Prozessen. Die invarianten Dileptonmassen liegen hier bei Werten oberhalb von  $\approx 3 \text{ GeV}$ . Die daraufhin folgende Abkühlung sollte erwartungsgemäß zum QGP führen. Dabei sind dann Quark-Antiquark Annihilationen Quellen der Dileptonproduktion. Die invarianten Dileptonmassen liegen jetzt typischerweise zwischen  $\approx 1.5$  und  $\approx 3 \text{ GeV}$ .

Interessant im Zusammenhang mit Dileptonen werden weitere Betrachtungen wenn Vektormesonen einbezogen werden. Nachdem sich der Feuerball infolge Expansion soweit abgekühlt hat, daß er von der Phase des QGP in ein heißes Hadrongas gelangt ist, sind Zweikörper-Annihilationen, wie z.B.  $\pi^+\pi^- \rightarrow l^+l^-$  oder  $K^+K^- \rightarrow l^+l^-$  Quellen der Dileptonproduktion. Dieser Zerfälle laufen über Zwischenzustände ab, in denen leichte Vektormesonen wie  $\rho$ ,  $\omega$  und  $\phi$  die entscheidende Rolle spielen. Dabei sind Kenntnisse über die Eigenschaften dieser Vektormesonen, wie Masse und Breite, zur Beschreibung des Annihilationsquerschnittes notwendig. Die invariante Masse des Dileptonpaares bildet damit die Masseverteilung des jeweiligen Vektormesons zum Zeitpunkt des Zerfalls ab.

Da die leichten Quarks u,d,s die Dynamik im invarianten Massenbereich bis zu  $1 \text{ GeV}$  bestimmen, macht sich ein Verschwinden der Konstituentenmassen in eben in diesem Bereich bemerkbar. Man erwartet bei Annäherung an den chiralen Phasenübergang eine Abnahme der Hadronenmassen, die Goldstonebosonen ausgenommen. Ein solches Verhalten für die  $\rho$ -Massen ergibt sich beispielsweise auch aus dem Brown-Rho-Scaling [5]. Sollte es also ein QGP gegeben haben, so führt das zu einer Wiederherstellung der chiralen Symmetrie im leichten Quarksektor und damit zu einer Erhöhung der Dileptonrate im unteren invarianten Massenbereich.

Vektormesonen können hinsichtlich ihrer mittleren Lebensdauer unterschieden wer-

den. Solche, wie das  $\rho$ -Meson, besitzen eine so geringe Lebensdauer, daß sie innerhalb des Feuerballs zerfallen, die Verschiebung der  $\rho$ -Masse zu kleineren Werten kann dann zur Identifizierung der teilweisen Wiederherstellung der chiralen Symmetrie benutzt werden. Beide noch verbleibenden leichten Vektormesonen, das  $\omega$ - und das  $\phi$ -Meson, besitzen dagegen eine geringe Breite – das  $\omega$ -Meson beispielsweise  $\approx 8$  MeV. Könnte man die  $\omega$ -Breite auf Kernmaterie übertragen, so würde das  $\omega$ -Meson nach dem thermischen 'Freezeout' zerfallen. Damit wäre dann keine Verschiebung der Masse mehr beobachtbar. Deshalb ist die Untersuchung der Mediummodifikationen bei Vektormesonen so interessant.

Messungen der Dileptonspektren bei CERES [2] haben gezeigt, daß Masse und Breite leichter Vektormesonen in Kernmaterie im Vergleich zum Vakuum stark modifiziert werden. In-Medium-Modifikationen von Hadronen wurden in einer Vielzahl theoretischer Arbeiten untersucht [6, 7, 8, 9, 10, 11]. In den bisherigen Untersuchungen spielte vor allem das  $\rho$ -Meson die entscheidende Rolle. Ziel dieser Arbeit ist die Untersuchung des  $\omega$ -Mesons.

Interessant ist ein Vergleich beider Vektormesonen. Beide besitzen zwar eine fast gleiche Masse aber eine deutlich unterschiedliche mesonische Struktur. So kann das  $\rho$ -Mesons als eine breite Zwei-Pion-Resonanz verstanden werden, während es sich beim  $\omega$ -Meson um eine relativ schmale Drei-Pion-Resonanz handelt.

Für das Verständnis des Dileptonspektrums ist sowohl die Breite als auch eine eventuelle Masseverschiebung des  $\omega$ -Mesons wichtig. Ausgangspunkt aller folgenden Betrachtungen in Kernmaterie muß ein Vakuummodell des  $\omega$ -Mesons sein. Bevor die In-Medium-Eigenschaften untersucht werden können, muß zuerst ein zufriedenstellendes Modell für das Vakuum entwickelt werden. Hierzu muß schließlich die  $\omega$ -Selbstenergie berechnet werden. Dieses Modell muß in der Lage sein, die experimentelle  $\omega$ -Breite der später noch im Detail zu erläuternden Kanäle zu erklären, ein in den letzten 15 Jahren nicht endgültig gelöstes Problem. Nachdem das erreicht ist, können Rechnungen in Kernmaterie vorgenommen werden.

Im ersten Kapitel werden die zur Beschreibung der  $\omega$ -Selbstenergie notwendigen hadronischen Freiheitsgrade und die Wechselwirkungen zusammengestellt. Der  $\omega$ -Zerfall kann dabei direkt, d.h.  $\omega \rightarrow \pi\pi\pi$  oder über  $\omega \rightarrow \rho\pi \rightarrow \pi\pi\pi$  erfolgen. Beide Kopplungen ergeben sich aus der anomalen Brechung der chiralen  $U_A(1)$  Symmetrie, eine aus Quantenkorrekturen folgende Brechung der klassisch zugrundegelegten chiralen Symmetrie masseloser Quarkfelder.

Im zweiten Kapitel werden zunächst die Kopplungskonstanten des Modells bestimmt. Dabei kann die  $\omega\rho\pi$ -Kopplungskonstante aus experimentellen Daten ermittelt werden, während die Kopplungskonstante für den direkten Zerfall aus einer theoretischen Arbeit übernommen werden muß, da sie experimentell nicht zugänglich ist. Anschließend werden die Beiträge zur  $\omega$ -Selbstenergie im Vakuum ausgewertet und die daraus resultierende Partialbreite  $\omega \rightarrow 3\pi$  bestimmt. Eine detaillierte Darlegung dieser doch recht aufwendigen Auswertetechniken ist im Anhang zu finden. Diese Gliederung wurde wegen besserer Übersichtlichkeit gewählt. Außerdem wird in der Arbeit die Berechnung eines mikroskopischen Formfaktors im Rahmen eines Zwei-Loop-Diagramms durchgeführt. Im zweiten Teil dieses Kapitels werden Dalitz-Zerfälle, z.B.  $\omega \rightarrow \mu^+\mu^-\pi^0$ , untersucht. Damit ist ein direkter Vergleich des berechneten Formfaktors für den Zerfall  $\omega \rightarrow \rho\pi \rightarrow \pi\pi\pi$  mit dem aus dem Experiment zugänglichen Formfaktor von  $\omega \rightarrow \pi^0\rho \rightarrow \pi^0\gamma$  möglich.

Es wird anschließend gezeigt, wie damit auf Beiträge weiterer, als der hier betrachteten Selbstenergiediagramme, geschlossen werden kann. Auch unter Voraussetzung aller hier untersuchten Diagramme konnten nur 57% der  $\omega$ -Breite im Vakuum erklärt werden. Unter Zugrundelegung des hadronischen Modells müßten prinzipiell alle weiteren Selbstenergiediagramme zur Erklärung der  $\omega$ -Vakuumbreite aufsummiert werden, ein Vorhaben das in dieser Allgemeinheit unmöglich durchzuführen ist.

Im dritten Kapitel werden die Untersuchungen auf kalte Kernmaterie ausgedehnt. Zur Modellierung der Eigenschaften des Pions wird dabei das Drei-Niveaumodell benutzt. Sowohl für das Pion als auch für das  $\rho$ -Meson wird auf eine theoretische Arbeit aus unserer Gruppe zurückgegriffen. Insbesondere werden dabei die an Daten angepaßten Parameter für das  $\rho$ -Meson und Pion übernommen. In diesem Kapitel wird der einfachste Beitrag zur  $\omega$ -Selbstenergie und der Breite im Kanal  $\omega \rightarrow \pi\pi\pi$  in Abhängigkeit vom Dreierimpuls und Kerndichte untersucht. Die Rechnungen in Kernmaterie deuten auf eine deutliche Verbreiterung des  $\omega$ -Mesons hin. Schon die Berechnung des einfachen Beitrags für ein in Kernmaterie ruhendes  $\omega$ -Meson führt zu Breiten von  $\approx 60$  MeV bei einfacher Kerndichte.

# Kapitel 1

## Hadronisches Modell des $\omega$ -Mesons

### 1.1 Zerfälle des $\omega$ -Mesons

Die Eigenschaften leichter Mesonen lassen sich bei Beschränkung auf Energien, die innerhalb der Skala der Nukleonmasse liegen, in effektiven Theorien modellieren. Relevante Freiheitsgrade dieser Theorien sind Hadronen, deren Masse die Energieskala nicht überschreitet. Eine weitere Eingrenzung der zu berücksichtigenden Freiheitsgrade folgt aus den Symmetrien der starken Wechselwirkung, d.h. es müssen erhaltene Quantenzahlen unter starker Wechselwirkung betrachtet werden.

Das  $\omega(782)$ -Meson ist ein Vektormeson und ein Isosingulett. Im Gegensatz zum  $\rho$ -Meson ist die G-Parität ( $G = Ce^{iI_y\pi}$ ) dieses Mesons negativ. Daraus ergibt sich folgende Charakterisierung des  $\omega$ -Mesons durch Quantenzahlen :

$$J^{PC} (I^G) = 1^{--} (0^-) \quad .$$

Die  $\omega$ -Masse und die totale Zerfallsbreite  $\Gamma_0$  sind mit hoher Genauigkeit bekannt und gegeben durch [12]

$$m_\omega = (781.94 \pm 0.12) \text{ MeV} \quad \Gamma_0 = (8.41 \pm 0.09) \text{ MeV} \quad .$$

Damit wären  $\pi$ ,  $K$ ,  $\eta$  und  $\rho$ -Meson in den Endzuständen des starken Zerfalls energetisch erlaubt. Das  $\rho$ -Meson besitzt eine Breite in der Größe der Pionmasse und ist deshalb mit zu berücksichtigen. Wegen der Isospinerhaltung entfallen jedoch  $K\pi$  und  $\eta\pi$  als mögliche Zerfallskanäle. Da sowohl Pion als auch  $\omega$ -Meson negative G-Parität besitzen, kann der Endzustand beim  $\omega$ -Zerfall nur aus drei oder fünf Pionen bestehen. Der  $5\pi$ -Endzustand ist wegen des kleineren Phasenraumes gegenüber dem  $3\pi$ -Kanal unterdrückt. Außerdem kann das  $\omega$ -Meson wegen der Erhaltung der C-Parität nicht ausschließlich in  $\pi^0$ -Mesonen zerfallen, welche positive C-Parität besitzen. Die erlaubten Prozesse sind deshalb

$$\omega \rightarrow \pi^0\pi^+\pi^- \quad \text{und} \quad \omega \rightarrow \rho\pi \quad . \quad (1.1)$$

Dabei kann das  $\rho$ -Meson in allen drei Isospineinstellungen mit dem entsprechenden Pion zum Isosingulett koppeln. Da das  $\rho$ -Meson selbst in zwei Pionen konvertiert, führt der Prozeß über den  $\rho$ -Zwischenzustand zum gleichen Endzustand wie der direkte Zerfall in



die drei verschiedenen Pionen. Weitere mögliche Zwischenzustände, die beim  $\omega$ -Zerfall in drei Pionen auftreten können, sind durch die Bedingung festgelegt, daß sie sowohl an das  $\pi\pi$ - als auch an das  $\omega\pi$ -System koppeln müssen. Die Quantenzahlen dieses intermediären Zustands sind dann zu

$$J^P = (\text{ungerade})^- \quad \text{und} \quad I^G = 1^+ \quad (1.2)$$

festgelegt. Das nach dem  $\rho$ -Meson nächst schwerere Teilchen, das diese Quantenzahlen besitzt, ist das  $\rho(1450)$ -Vektormeson. Wegen seiner großen Masse, ist zu erwarten, daß es nur einen kleinen Beitrag zur  $\omega$ -Breite liefert. Damit lassen sich Beiträge durch massivere Vektormesonen mit dem direkten  $\omega$ -Zerfall zusammen durch einen effektiven Vertex beschreiben. Deshalb wird nur der Prozeß mit einem  $\rho$ -Meson im Zwischenzustand getrennt betrachtet. Diese Form der Behandlung des  $\omega$ -Zerfalls geht auf Referenz [13] zurück.

Da die Pionen im Vakuum nur auf der Zeitskala der schwachen Wechselwirkung zerfallen können, werden sie als stabile Teilchen in das hadronische Modell eingebaut. Zum Vergleich sind die wichtigsten experimentell bestimmten Partialbreiten in Tabelle 1.1. dargestellt.

Kanal	Verhältnis $\Gamma_i/\Gamma_0$ in %	$\Gamma_i$ in MeV
$\pi^0\pi^+\pi^-$	$88.8 \pm 0.7$	7.486
$\pi^0\gamma$	$8.5 \pm 0.5$	0.717
$\pi^+\pi^-$	$2.21 \pm 0.3$	0.186
$\eta\gamma$	$(6.5 \pm 1.0) \cdot 10^{-4}$	$5.47 \cdot 10^{-3}$
$\pi^0 e^+ e^-$	$(5.9 \pm 1.9) \cdot 10^{-4}$	$5.0 \cdot 10^{-3}$
$\pi^0 \mu^+ \mu^-$	$(9.6 \pm 2.3) \cdot 10^{-5}$	$8.0 \cdot 10^{-4}$
$e^+ e^-$	$(7.07 \pm 0.19) \cdot 10^{-5}$	$5.9 \cdot 10^{-4}$

Tabelle 1.1: Die experimentellen Partialbreiten des  $\omega$ -Mesons nach [12].

Dabei bringt der  $3\pi$ -Kanal den Hauptbeitrag zur  $\omega$ -Breite. Die aufgeführte Partialbreite im Kanal  $\omega \rightarrow \pi^0\gamma$  wird im 2.Kapitel zur Bestimmung benötigter Parameter der Theorie verwendet. Dort wird dann auch im Zusammenhang mit der Frage nach der Impulsabhängigkeit der  $\omega\rho\pi$ -Kopplungskonstante auf die Partialbreiten der Dalitz-Zerfälle  $\omega \rightarrow \pi^0 l^+ l^-$  eingegangen.

Daß der durch die G-Parität verbotene starke Zerfall  $\omega \rightarrow \pi^+\pi^-$  im Vakuum trotzdem erscheint, liegt an der Mischung von  $\rho$ - und  $\omega$ -Meson. Im Quarkbild folgt diese Mischung aus der nicht exakt erfüllten SU(2)-Flavor Symmetrie von u- und d-Quarks.

## 1.2 Vektordominanzmodell

Im folgenden Kapitel wird unter anderem im Zusammenhang mit Dalitz-Zerfällen Gebrauch vom Vektordominanzmodell (VDM) gemacht. Deswegen sollen in diesem Abschnitt grundlegende Eigenschaften dieses Modell erläutert werden.

Etwa gleichzeitig mit den gruppentheoretischen Beschreibungen der Isomultipletts der starken Wechselwirkung durch Gell-Mann, Ne'man und Zweig [14, 15, 16] wurde von

Sakurai versucht, eine Eichtheorie auf der Isospinerhaltung der starken Wechselwirkung aufzubauen, bei der die Vektormesonen die Rolle von Eichbosonen übernehmen [17].

Seit etwa dreißig Jahren wissen wir jedoch, daß die Hadronen nicht elementar sind und die Quantenchromodynamik (QCD) die Eichtheorie der starken Wechselwirkung ist. Die Eichbosonen der QCD sind die Gluonen und die zugrundeliegende Eichgruppe die  $SU(3)_c$ . Es ist deshalb interessant zu verstehen, weshalb sich das in den 60er Jahren von Sakurai vorgeschlagene Modell auch heute noch bewährt.

Beginnen wir mit folgender Lagrangedichte, die per Konstruktion auf die Isospinerhaltung führt.

$$\mathcal{L} = \bar{N}(i\not{\partial} - m)N + \frac{1}{2}\partial_\mu\vec{\pi}\cdot\partial^\mu\vec{\pi} - \frac{m_\pi^2}{2}\vec{\pi}^2 + \mathcal{L}_{int} \quad (1.3)$$

$$\mathcal{L}_{int} = f\bar{N}i\gamma^5\vec{\tau}\cdot\vec{\pi}N \quad (1.4)$$

Dabei ist  $N$  das Nukleondublett und  $\vec{\pi}$  das pseudoskalare Piontripllett im Isospinraum. Als Wechselwirkungsterm  $\mathcal{L}_{int}$  wurde der Einfachheit halber eine pseudoskalare Kopplung der Pionen an die Nukleonen gewählt [18]. Im weiteren werden Raumzeit-Komponenten stets mit griechischen und Isospinkomponenten mit lateinischen Buchstaben bezeichnet.

Die Drehungen im Isospinraum werden in der bekannten Weise aus den Generatoren  $T_a$  der  $SU(2)$ -Gruppe

$$[T_a, T_b] = i\epsilon_{abc}T_c$$

aufgebaut. In ihrer 2-dimensionalen Darstellung sind das die Paulimatrizen  $\vec{\tau}/2$  und in der 3-dimensionalen Darstellung die Drehgeneratoren  $\vec{T}$  mit

$$T_1 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad T_2 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad T_3 = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Aus der Invarianz der Lagrangedichte in Gl. (1.3) unter der (globalen)  $SU(2)$ -Transformation im Isospinraum

$$N \longrightarrow e^{-i\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\Theta}}N \quad (1.5)$$

$$\vec{\pi} \longrightarrow e^{-i\vec{T}\vec{\Theta}}\vec{\pi} \quad (1.6)$$

ergibt sich nach dem Noethertheorem der lokal erhaltene Vektorstrom zu

$$\vec{j}^\mu = \bar{N}\gamma^\mu\frac{\vec{\tau}}{2}N + \vec{\pi}\times\partial^\mu\vec{\pi} \quad \text{mit} \quad \partial_\mu\vec{j}^\mu(x) = 0 \quad . \quad (1.7)$$

Dann folgt die Isospinerhaltung durch Raumintegration der Kontinuitätsgleichung (1.7) zu

$$\vec{Q}_V = \int d^3x \left( N^\dagger\frac{\vec{\tau}}{2}N + \vec{\pi}\times\partial^0\vec{\pi} \right) \quad \text{mit} \quad \frac{d\vec{Q}_V}{dt} = 0 \quad . \quad (1.8)$$

Hierauf wird nun eine Eichtheorie (Yang-Mills-Theorie) aufgebaut, das heißt also Substitution der globalen Phasentransformation  $\vec{\Theta}$  der Felder in Gl. (1.5) und (1.6) durch

eine lokale Phasentransformation  $\vec{\Theta}(x)$ . Um die Invarianz der Lagrangedichte in Gl. (1.3) unter lokaler Phasentransformation zu erreichen, wird eine eich-kovariante Ableitung  $D_\mu$ , die das gleiche Transformationsverhalten wie die Felder besitzt, definiert.

$$(D_\mu N)' = e^{-i\frac{\vec{\pi}}{2}\vec{\Theta}(x)} D_\mu N \quad , \quad (D_\mu \vec{\pi})' = e^{-i\vec{T}\vec{\Theta}(x)} D_\mu \vec{\pi} \quad (1.9)$$

Um die durch Gl. (1.9) gegebene Forderung zu erfüllen, werden Eichfelder  $\vec{\rho}_\mu(x)$  eingeführt. In der einfachsten Weise läßt sich die Bedingung (1.9) durch die minimale Ankopplung

$$D_\mu = \partial_\mu - ig \vec{T} \cdot \vec{\rho}_\mu \quad (1.10)$$

des Eichfeldes an die hadronische Ladung  $g$  erfüllen. Wegen des Wechselwirkungsterms kann es nur eine Kopplungskonstante geben. Nach Einsetzen von Gl. (1.10) in Gl. (1.9) erhält man für das infinitesimale Transformationsverhalten der Eichfelder

$$\vec{\rho}'_\mu = \vec{\rho}_\mu - \frac{1}{g} \partial_\mu \vec{\Theta}(x) + \vec{\Theta}(x) \times \vec{\rho}_\mu \quad . \quad (1.11)$$

Die zugrundeliegende SU(2)-Gruppe bestimmt das Transformationsverhalten der Eichfelder (Universalität) entsprechend Gl. (1.11). Dabei mischt der letzte Term in Gl. (1.11) die verschiedenen Isospineinstellungen und führt zur Selbstkopplung von  $\vec{\rho}_\mu(x)$ .

Um die Dynamik der Eichfelder zu konstruieren, wird der antisymmetrische Feldtensor  $\vec{F}_{\mu\nu}$  gebildet.

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu] &= -ig \vec{T} \cdot \vec{F}_{\mu\nu} \\ \vec{F}_{\mu\nu} &= \partial_\mu \vec{\rho}_\nu - \partial_\nu \vec{\rho}_\mu + g(\vec{\rho}_\mu \times \vec{\rho}_\nu) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Dann ergibt sich schließlich für die zu Gl. (1.3) zu addierende Wechselwirkungsichte, die das  $\rho, \pi, N$ -System beschreibt,

$$\mathcal{L}'_\rho = g \vec{\rho}_\mu \cdot \vec{j}^\mu + \frac{g^2}{2} (\vec{\rho}^\mu \times \vec{\pi}) \cdot (\vec{\rho}_\mu \times \vec{\pi}) - \frac{1}{4} \vec{F}_{\mu\nu} \cdot \vec{F}^{\mu\nu} \quad . \quad (1.13)$$

Der erste Term in Gl. (1.13) entspricht der Ankopplung des erhaltenen Vektorstromes an das Eichfeld und führt u.a. zu einem  $\rho\pi\pi$ -Vertex, der im weiteren Verlauf dieser Arbeit benutzt wird. Hätte man in Gl. (1.4) statt einer pseudoskalaren eine Axialvektorkopplung der Nukleonen an die Pionen gewählt [18], so würde sich zwar der Ausdruck für den erhaltenen Strom in Gl. (1.7) ändern, nicht aber die Struktur von Gl. (1.13). Analog gibt der zweite Summand in Gl. (1.13) einen  $\rho\rho\pi\pi$ -Vertex und der letzte Summand weitere nichtlineare Terme, die die Dynamik der Eichfelder beschreiben.

Wie sehen nun die Quantenzahlen des Eichfeldes aus? Entsprechend Gl. (1.11) handelt es sich hierbei um die Triplet-Darstellung der SU(2)-Gruppe, also  $I = 1$ . Des weiteren hat man es in Gl. (1.13) durch  $j^\mu \rho_\mu$  mit einer Vektorkopplung zu tun, also gilt  $J = 1$ ,  $P = -1$  und für elektrisch neutrale Eichfelder  $C = -1$ , da die Lagrangedichte sowohl invariant unter Paritätstransformation als auch Ladungskonjugation sein soll. Dazu passende Teilchen des Hadronenspektrums sind beispielsweise das  $\rho(770)$  und das  $\rho(1450)$ -Meson.

In analoger Weise läßt sich aus der Invarianz der Lagrangedichte in Gl. (1.3) unter U(1)-Transformation im Isospinraum

$$N \longrightarrow e^{-i\Theta} N \quad (1.14)$$

auf die Erhaltung des isoskalaren Stromes  $j^\mu$  und der Baryonenzahl schließen. Dabei ergibt sich dann das  $\omega$ -Meson als isoskalares Eichfeld  $w^\mu$ .

$$\begin{aligned} j^\mu &= \bar{N}\gamma^\mu N \quad \text{mit} \quad \partial_\mu j^\mu(x) = 0 \quad \implies \quad \frac{d}{dt} \int d^3x N^\dagger N = 0 \\ \mathcal{L}'_\omega &= g_\omega w_\mu j^\mu - \frac{1}{4} W^{\mu\nu} W_{\mu\nu} \quad \text{mit} \quad W^{\mu\nu} = \partial^\mu w^\nu - \partial^\nu w^\mu \end{aligned} \quad (1.15)$$

Wie aus der obigen Ableitung folgt, müßten  $\rho$ - und  $\omega$ -Meson masselos sein, wie es im allgemeinen für die Eichfelder jeder Eichtheorie gilt. Wie man trotzdem massive Vektormesonen in diese Modelle einbauen kann, soll im letzten Teil dieses Abschnittes geklärt werden.

Das Vektordominanzmodell, so wie es ursprünglich von Sakurai [17] vorgeschlagen wurde, basiert nun auf der Hypothese, daß ein Hadron nie direkt, sondern nur über ein neutrales Vektormeson an ein Photon koppeln kann [19]. Es gibt allerdings auch eine Version des VDM von Kroll, Lee und Zumino [20], die auf einer Eichtheorie basiert, die sowohl das Photon als auch die Vektormesonen  $\rho$ ,  $\omega$  und  $\phi$  als Eichfelder besitzt und dann folglich zu einer direkten Photon-Hadron-Wechselwirkung führt. In dieser Arbeit wird jedoch nur auf die Sakurai'sche Formulierung zurückgegriffen.

Zusätzlich wird also noch eine effektive Wechselwirkung von Vektormeson und Photon, aber keine direkte Kopplung von Photon und Hadron benötigt. Zur Konstruktion der Wechselwirkung wird die U(1)-Symmetrie der QED-Lagrangedichte zugrundegelegt. Man erhält dann durch Eichung die bekannte Wechselwirkung des elektromagnetischen Stromes  $j_{em}^\mu$  und des Eichfeldes  $A^\mu$

$$\mathcal{L}'_\gamma = -e j_{em}^\mu A_\mu \quad . \quad (1.16)$$

Im folgenden sollen die Betrachtungen auf das fundamentalere Quarkbild (u,d,s) und die SU(3)-Flavor Symmetrie verallgemeinert werden. Man erhält dann eine weitere isoskalare Komponente zum elektromagnetischen Strom durch das  $\phi(1020)$ -Meson. Der elektromagnetische Hadronenstrom im Standardmodell kann dann unter Voraussetzung idealer Mischung in den isovektoriellen ( $j_\rho^\mu$ ) und den isoskalaren Anteil zerlegt werden. Der isovektorielle Anteil wird vom  $\rho^0$  und der isoskalare Anteil vom  $\omega$ - und  $\phi$ -Meson gebildet.

$$j_{em}^\mu = \frac{2}{3} \bar{u}\gamma^\mu u - \frac{1}{3} \left[ \bar{d}\gamma^\mu d + \bar{s}\gamma^\mu s \right] \quad (1.17)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} j_\rho^\mu + \frac{1}{3\sqrt{2}} j_\omega^\mu - \frac{1}{3} j_\phi^\mu \quad (1.18)$$

Im nächsten Schritt müssen Übergangsamplituden des elektromagnetischen Hadronenstromoperators zwischen einem Vektormeson  $|V\rangle$  und dem QCD-Vakuum  $|0\rangle$  betrachtet

werden. Wegen der 4-er Vektorstruktur des Stromes  $j^\mu$  können diese Matrixelemente nur in folgender Form vom Viererimpuls  $k^\mu$  des einlaufenden Vektormesons und vom Polarisationsvektor  $\epsilon_V^\mu$  des Vektormesons abhängen :

$$\langle 0 | j_V^\mu | V \rangle = f_V^{(1)}(k^2) \epsilon_V^\mu + f_V^{(2)}(k^2) k^\mu \quad (1.19)$$

Unter der Voraussetzung von  $k^2 \neq 0$  folgt aus der Stromerhaltung :

$$k_\mu \langle 0 | j_V^\mu | V \rangle = 0 \quad \text{schließlich} \quad \langle 0 | j_V^\mu | V \rangle = f_V^{(1)}(k^2) \epsilon_V^\mu \quad . \quad (1.20)$$

Betrachtet man einen Referenzpunkt für  $k^2$ , beispielsweise die physikalische Masse des Vektormesons, so ist der Vektorfeldoperator  $V^\mu$  dem Stromoperator  $j_V^\mu$  direkt proportional. Dann läßt sich die VDM-Hypothese in Form der sogenannten 'Current-Field'-Identität

$$j_{em}^\mu = \sum_V f_V \cdot V^\mu \quad (1.21)$$

schreiben und die Lagrangedichte in Gl. (1.16) bekommt damit schließlich die Form

$$\mathcal{L}'_\gamma = - \sum_V e f_V V^\mu \cdot A_\mu \quad . \quad (1.22)$$

Im Anschluß hieran wird sich zeigen, daß diese Relation allgemeinere Gültigkeit besitzt, also  $f_V$  impulsunabhängig wird.

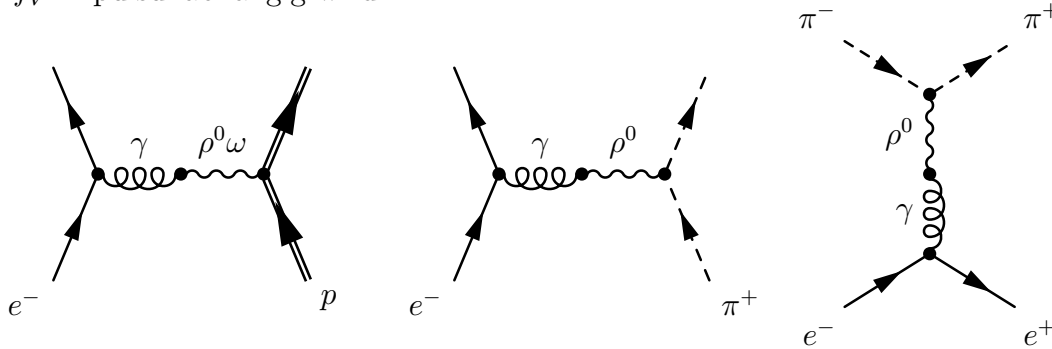


Abbildung 1.1: Beschreibung des elektromagnetischen Formfaktors von Hadronen im VDM-Modell. Die virtuellen Photonen koppeln stets über das Vektormeson an das Hadron. Im rechten Bild ist der elektromagnetische Pionformfaktor im zeitartigen und im mittleren Bild im raumartigen Bereich gezeigt.

Dieses Modell wurde inzwischen auf eine Vielzahl von Prozesse erfolgreich angewendet, bei denen die elektromagnetischen Eigenschaften hadronischer Materie getestet werden. So läßt sich beispielsweise die  $e^- \pi^+$ -Streuung wie in Abb. 1.1 gezeigt durch das VDM beschreiben. Dreht man das mittlere Diagramm, d.h. schaut man in den s-Kanal, so ergibt sich die im rechten Bild gezeigte Reaktion  $e^- e^+ \rightarrow \pi^+ \pi^-$ , deren Wirkungsquerschnitt ebenfalls durch VDM erfolgreich beschrieben wurde [21, 22]. Als weitere Anwendungsbeispiele des Vektordominanzmodells seien die Bestimmung von Photoabsorptionsquerschnitten [23, 24, 25, 26] oder die Berechnung von Dalitz-Zerfallsbreiten genannt.

Wieso ist das bisher geschilderte Modell so erfolgreich, wenn doch die QCD die eigentlich zugrundeliegende Eichtheorie ist? Der Grund ist in dem Niederenergielimes der

QCD zu finden. Dort kann die QCD auf eine rein mesonische Theorie reduziert werden, in der die Mesonen nichtlinear miteinander wechselwirken [27, 28]. Ein effektives Modell, das sich aus dem Niederenergieverhalten der QCD-Lagrangedichte theoretisch begründen läßt, ist das nichtlineare  $\sigma$ -Modell. Im Gegensatz zu Gl. (1.4) besitzt dieses Modells außerdem chirale Symmetrie, eine Symmetrie der QCD-Lagrangedichte, die im Fall verschwindender Stromquarkmassen vorliegt. Die Lagrangedichte des nichtlinearen  $\sigma$ -Modells [28] ist gegeben durch

$$\mathcal{L}_\sigma = \frac{f_\pi^2}{4} \text{tr} \partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger \quad \text{wobei} \quad (1.23)$$

$$U = \exp \left[ i \frac{\vec{\tau} \cdot \vec{\Phi}}{f_\pi} \right] = (\sigma + i \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}) / f_\pi \quad \text{mit} \quad \sigma^2 + \vec{\pi}^2 = f_\pi^2 \quad . \quad (1.24)$$

Um chirale Symmetrie sicherzustellen, enthält  $U$  neben dem pseudoskalaren  $\vec{\pi}$ -Feld ein skalares  $\sigma$ -Feld. Das  $\sigma$ -Feld ist ein Skalar unter der  $SU(2)$ -Isospintransformation. Man kann dann ein Hilfsfeld  $\vec{\Phi}$  in nichtlinearer Kopplung, wie in Gl. (1.24) gezeigt wird, einführen. Entwickelt man den Exponentialausdruck in Gl. (1.24) und vergleicht mit der rechten Seite, so ergibt sich die Gleichung des chiralen Kreises, die beide Felder miteinander verknüpft, und die die nichtlineare Kopplung der Mesonen realisiert.

Die Transformationen unter der chiralen Gruppe  $SU(2)_L \times SU(2)_R$  lassen sich folgendermaßen schreiben :

$$U' = g_L U g_R^\dagger \quad \text{mit} \quad g_{L,R} = e^{-i P_{L,R} \frac{\vec{\tau} \cdot \vec{\Theta}}{2}} \quad . \quad (1.25)$$

Dabei ist  $P_L$  der Projektionsoperator auf Zustände negativer und  $P_R$  der auf Zustände positiver Helizität. Das Transformationsverhalten für das Feld  $U$  unter  $g_L \in SU(2)_L$  und  $g_R \in SU(2)_R$  wird durch die Invarianz von Gl. (1.23) unter chiraler Symmetrie festgelegt. Jetzt soll  $U$  in zwei linear unabhängige  $2 \times 2$ -Matrizen  $\eta_L, \eta_R$  faktorisiert werden, auf die im Anschluß eine Eichtransformation angewendet wird. Dabei definiert die Zerlegung von  $U$  das Transformationsverhalten von  $\eta_L$  und  $\eta_R$  unter der chiralen Gruppe, gemäß der beiden rechten Gleichungen in (1.26). Diese Transformationsgesetze lassen sich sofort aus Gl. (1.25) einsehen.

$$U = \eta_L^\dagger \eta_R \quad \text{mit} \quad \eta_L' = \eta_L g_L^\dagger \quad \text{und} \quad \eta_R' = \eta_R g_R^\dagger \quad (1.26)$$

Dabei sind  $\eta_{L,R}$  selbst unitär. Auf  $\eta_{L,R}$  wird nun die folgende  $SU(2)_h$ -Eichtransformation im Isospinraum angewendet :

$$\eta_{L,R} \longrightarrow e^{-i \frac{\vec{\tau} \cdot \vec{\Theta}(x)}{2}} \eta_{L,R} \quad . \quad (1.27)$$

Diese Eichtransformation wird als implizit bezeichnet, da sie  $U$  invariant läßt. Im Gegensatz hierzu wird bei einer expliziten Eichung, wie sie beispielsweise in Gl. (1.6) angegeben wurde, die Transformation vom Feld 'gesehen'. Mit der in Gl. (1.26) definierten Zerlegung von  $U$  schreibt sich die Lagrangedichte des nichtlinearen  $\sigma$ -Modells wie folgt:

$$\mathcal{L}_\sigma = \frac{f_\pi^2}{4} \text{tr} \partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger = - \frac{f_\pi^2}{4} \text{tr} [(\partial_\mu \eta_L) \eta_L^\dagger - (\partial_\mu \eta_R) \eta_R^\dagger]^2 \quad (1.28)$$

Führt man wieder entsprechend Gl. (1.10) die minimale Ankopplung des Eichfeldes  $\vec{\rho}_\mu$  ein, so erhält man aus Gl. (1.28)

$$\mathcal{L}_\sigma = -\frac{f_\pi^2}{4} \text{tr} [(D_\mu \eta_L) \eta_L^\dagger - (D_\mu \eta_R) \eta_R^\dagger]^2 \quad (1.29)$$

Dieser Ausdruck kann sofort wieder in den von Gl. (1.28) vereinfacht werden, da die Eichtransformation per Konstruktion implizit ist oder, anders ausgedrückt, die Lagrangedichte in Gl. (1.23) ist selbst invariant unter der in Gl. (1.27) angegebenen lokalen Phasentransformation. Wie kann nun trotzdem eine Kopplung von Mesonen und Eichfeld in diesen impliziten Eichtheorien erreicht werden?

Dazu wird ein weiterer eichinvarianter Ausdruck  $\mathcal{L}_V$  über einen Lagrangemultiplikator  $\lambda$  eingeführt. Dieser kann, wie unter Gl. (1.31) angegeben, durch Addition beider Terme minimaler Kopplung gebildet werden.

$$\mathcal{L}'_\sigma = \mathcal{L}_\sigma + \lambda \mathcal{L}_V \quad \text{mit} \quad (1.30)$$

$$\mathcal{L}_V = -\frac{f_\pi^2}{4} \text{tr} [(D_\mu \eta_L) \eta_L^\dagger + (D_\mu \eta_R) \eta_R^\dagger]^2 \quad (1.31)$$

$$= g^2 f_\pi^2 \text{tr} \left[ \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{\rho}_\mu - \frac{1}{2ig} \left( (\partial_\mu \eta_L) \eta_L^\dagger + (\partial_\mu \eta_R) \eta_R^\dagger \right) \right]^2 \quad (1.32)$$

Dabei transformiert sich das Eichfeld wieder entsprechend der Gl. (1.11). Betrachtet man nun die sich aus Gl. (1.30) ergebende Bewegungsgleichung des Eichfeldes  $\vec{\rho}_\mu$ , so führt das zu

$$\frac{\delta \mathcal{L}'_\sigma}{\delta(\vec{\tau} \cdot \vec{\rho}^\mu)} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{\tau} \cdot \vec{\rho}_\mu = \frac{1}{ig} \left( (\partial_\mu \eta_L) \eta_L^\dagger + (\partial_\mu \eta_R) \eta_R^\dagger \right) \quad (1.33)$$

Bisher wurden keine kinetischen Terme  $\vec{F}_{\mu\nu}$  des Eichfeldes berücksichtigt. An dieser Stelle wird nun folgende wichtige Annahme gemacht. Die Addition einer Null durch den zusätzlich hinzugefügten Term  $\lambda \mathcal{L}_V$  in Gl. (1.30) läßt sich, wie die Bewegungsgleichung zeigt, dann trivialerweise durchführen, wenn keine kinetischen Terme  $\vec{F}_{\mu\nu}$  des Eichfeldes hinzugefügt werden. Es wird deshalb angenommen, daß die kinetischen Terme des Eichfeldes nur durch Quanteneffekte erzeugt werden [29]. Danach ergibt sich für die Bewegungsgleichung die in Gl. (1.33) angegebene klassische Lösung. Die vollständige Lagrangedichte lautet dann:

$$\mathcal{L}'_\sigma = \mathcal{L}_\sigma + \lambda \mathcal{L}_V - \frac{1}{4} \vec{F}_{\mu\nu} \cdot \vec{F}^{\mu\nu} \quad (1.34)$$

Die Auswertung des in  $\vec{\rho}_\mu$  quadratischen Terms von  $\mathcal{L}_V$  führt zu dem Masseterm des Eichfeldes.

$$\lambda g^2 f_\pi^2 \text{tr} \left[ \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{\rho}_\mu \right]^2 = \frac{\lambda}{2} g^2 f_\pi^2 \vec{\rho}_\mu \cdot \vec{\rho}^\mu \stackrel{!}{=} \frac{m_\rho^2}{2} \vec{\rho}_\mu \cdot \vec{\rho}^\mu \quad (1.35)$$

Um mit dem mesonischen Anteil in der zuerst benutzten linearen Lagrangedichte in Gl. (1.3) und (1.13) vergleichen zu können, wird die in Gl.(1.36) gegebene Eichung für  $\eta_{L,R}$

gewählt und anschließend die in Gl. (1.37) angegebene Linearisierung in  $\vec{\Phi}$  vorgenommen.

$$\eta_L^\pm \stackrel{!}{=} \eta_R = \eta \quad \Longrightarrow \quad U = \eta^2 \quad \text{und} \quad \eta = \exp \left[ i \frac{\vec{\tau} \cdot \vec{\Phi}}{2 f_\pi} \right] \quad (1.36)$$

$$U = 1 + i \frac{\vec{\tau} \cdot \vec{\Phi}}{f_\pi} = (\sigma + i \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}) / f_\pi \quad \Longrightarrow \quad \vec{\Phi} = \vec{\pi} \quad (1.37)$$

Damit kann der Ausdruck für das klassische  $\rho$ -Feld in Gl. (1.33) weiter vereinfacht werden :

$$\vec{\rho}_\mu = \frac{1}{2 f_\pi^2 g} \partial_\mu \vec{\pi} \times \vec{\pi} \quad (1.38)$$

Man erhält also einen Ausdruck der proportional zum mesonischen Anteil des Isospinstromes ist. Hier liegt die Grundidee des Sakurai'schen Modells, denn die dritte Isospinkomponente gibt den elektromagnetischen Hadronenstrom und dieser ist nach Gl. (1.38) dem klassischen  $\rho_3(x)$ -Feld proportional.

Um mit der Entwicklung in Gl. (1.37) konsistent zu bleiben, vernachlässigt man die in  $\vec{\pi}$  quadratischen Terme bei der Auswertung von Gl. (1.32). Man erhält dann die folgende linearisierte Lagrangedichte

$$\mathcal{L}'_\sigma = \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\pi} \cdot \partial^\mu \vec{\pi} + \frac{m_\rho^2}{2} \vec{\rho}_\mu \cdot \vec{\rho}^\mu + \frac{\lambda}{2} g \vec{\rho}_\mu \cdot (\vec{\pi} \times \partial^\mu \vec{\pi}) - \frac{1}{4} \vec{F}_{\mu\nu} \cdot \vec{F}^{\mu\nu} \quad . \quad (1.39)$$

Der dritte Term in Gl. (1.39) beschreibt wieder die Ankopplung des Eichfeldes an die mesonische Komponente des Isospinstromes. Will man die hier eingeführte Kopplungskonstante  $g$  mit der früher in Gl. (1.10) eingeführten identifizieren, so muß der Lagrange-multiplikator auf 2 gesetzt werden. Dann ergibt sich aus Gl. (1.35) die KSFR-Relation [30]

$$g = \frac{m_\rho}{\sqrt{2} f_\pi} = 5.9 \quad . \quad (1.40)$$

Der gleiche Wert für  $g$  ergab sich auch in Referenz [24] durch Anpassung an den elektromagnetischen Pionformfaktor. Dabei ist das  $\rho$ -Meson in der bisher geschilderten klassischen Betrachtung natürlich elementar.

Im Unterschied zu der in Gl. (1.13) besprochenen früheren Variante, gibt es in Gl. (1.39) keinen  $\rho\rho\pi\pi$ -Vertex und damit kein Tadpol-Diagramm. Stattdessen werden die Eichfelder selber massiv.

Kommen wir nun zur Einkopplung des elektromagnetischen Feldes  $A'_\mu$  [31, 32]. Dazu muß die implizite  $SU(2)$ -Eichtransformation auf die Gruppe  $SU(2)_h \times U(1)_Q$  erweitert werden. Dabei ist die Abelsche Eichtransformation  $U(1)_Q$  explizit, d.h.  $U$  'sieht' die Eichung und wird demzufolge entsprechend Gl. (1.41) transformiert.

$$U \longrightarrow e^{ie_0 \frac{\tau_3}{2} \Theta(x)} U e^{-ie_0 \frac{\tau_3}{2} \Theta(x)} \quad \Longrightarrow \quad \eta'_{L,R} = \eta_{L,R} e^{-ie_0 \frac{\tau_3}{2} \Theta(x)} \quad (1.41)$$

Bei der Einführung der minimalen Kopplung wird die Reihenfolge von  $\eta$  und  $\tau_3$  im letzten Term von Gl. (1.42), durch die Invarianz der Lagrangedichte in Gl. (1.34) unter der  $U(1)_Q$ -Eichtransformation vorgegeben.

$$D_\mu \eta_{L,R} = \partial_\mu \eta_{L,R} - ig \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{\rho}_\mu \eta_{L,R} + ie_0 \eta_{L,R} \frac{\tau_3}{2} A'_\mu \quad (1.42)$$



Das weitere Vorgehen ist analog dem vorherigen Fall, d.h. man fixiert die Eichung wie in Gl. (1.36) vorgegeben und linearisiert wie in Gl. (1.37) beschrieben. In Gl. (1.28) und (1.31) eingesetzt, ergibt sich unter Vernachlässigung der in  $\vec{\pi}$  quadratischen Terme

$$\mathcal{L}_\sigma = \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\pi} \cdot \partial^\mu \vec{\pi} + e_0 A'_\mu \cdot (\vec{\pi} \times \partial^\mu \vec{\pi})_3 \quad (1.43)$$

$$\begin{aligned} \lambda \mathcal{L}_V &= \frac{m_\rho^2}{2} \vec{\rho}_\mu \cdot \vec{\rho}^\mu + \frac{\lambda}{2} g \vec{\rho}_\mu \cdot (\vec{\pi} \times \partial^\mu \vec{\pi}) \\ &\quad - \frac{\lambda}{2} e_0 A'_\mu \cdot (\vec{\pi} \times \partial^\mu \vec{\pi})_3 - \lambda f_\pi^2 e_0 g \rho_3^\mu \cdot A'_\mu + \lambda \frac{f_\pi^2}{2} e_0^2 A'_\mu A'^\mu \quad . \end{aligned} \quad (1.44)$$

Man erkennt in Gl. (1.43) die übliche Ankopplung des elektromagnetischen Feldes an die mesonische Komponente des elektromagnetischen Hadronenstromes. Zusätzlich erscheint in  $\mathcal{L}_V$  ein Term, der die direkte Ankopplung des elektromagnetischen Feldes an die dritte Isospinkomponente des  $\vec{\rho}^\mu$ -Feldes beschreibt. Werden die entsprechenden elektromagnetischen Wechselwirkungsterme zusammengefaßt, so erhält man

$$\mathcal{L}_{em} = \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) e_0 A'_\mu \cdot (\vec{\pi} \times \partial^\mu \vec{\pi})_3 - \lambda f_\pi^2 e_0 g \rho_3^\mu \cdot A'_\mu + \lambda \frac{f_\pi^2}{2} e_0^2 A'_\mu A'^\mu \quad . \quad (1.45)$$

Identifiziert man die hier eingeführte Kopplungskonstante  $g$  des Hadronenstroms an das Eichfeld  $\vec{\rho}_\mu$  wieder mit der unter Gl. (1.10) gegebenen, d.h. setzt man  $\lambda = 2$ , so verschwindet der erste Term in Gl. (1.45) und damit die Ankopplung des elektromagnetischen Hadronenstromes an das Eichfeld  $A'_\mu$ , so wie es in der Sakuraischen Formulierung gefordert wird. Der zweite Term in Gl. (1.45) führt dann schließlich zu

$$\mathcal{L}'_\gamma = - \frac{e_0 m_\rho^2}{g} \rho_3^\mu \cdot A'_\mu \quad . \quad (1.46)$$

Man sieht, daß es hier zu der angesprochenen impulsunabhängigen  $\rho_3^\mu \cdot A'_\mu$ -Kopplung kommt, die ihrerseits auf die 'Current-Field'-Identität führt.

Sind nun die hier eingeführten Eichfelder mit den physikalischen Feldern von  $\rho_0^\mu$  und Photon  $A^\mu$  gleichzusetzen? Offensichtlich nicht, denn dann dürfte es keinen Masseterm in Gl. (1.45) für das Photon geben. Durch die Annahme einer spontanen Brechung der  $SU(2)_h \times U(1)_Q$  nach  $U(1)_{em}$  können die physikalischen Felder durch Mischung der hier eingeführten Eichfelder gemäß

$$\begin{pmatrix} \rho_0^\mu \\ A^\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_m & -\sin \theta_m \\ \sin \theta_m & \cos \theta_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_3^\mu \\ A'^\mu \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \cos \theta_m = \frac{g}{\sqrt{g^2 + e_0^2}} \quad (1.47)$$

aufgebaut werden. Das bedeutet unter anderem, daß das physikalische Photon eine hadronische Komponente in seiner Wolke von virtuellen Teilchen enthält [33] und das physikalische  $\rho_0$ -Vektormeson analog eine elektromagnetische Komponente besitzt, woraus Vektordominanz in natürlicher Weise folgt. Bei Diagonalisierung der Massenmatrix erhält man für die physikalische  $\rho_0$ -Masse

$$m_{phys} = \frac{m_\rho}{\cos \theta_m} \quad . \quad (1.48)$$

während die Photonmasse und der Wechselwirkungsterm in Gl. (1.45) verschwinden. Das bedeutet, daß der elektromagnetische Wechselwirkungsanteil in Gl. (1.45) in den physikalischen Felder  $\rho_0$  und  $A_\mu$  diagonalisiert und somit von diesen nicht gesehen wird. In der ursprünglichen Sakuraischen Version, werden die elektromagnetischen Korrekturen zur  $\rho_0$ -Masse jedoch vernachlässigt, so daß  $m_\rho$  mit der physikalischen Masse gleichgesetzt wird.

Im folgenden Text wird die Kopplungskonstante  $g$  zur besseren Unterscheidung in  $g_{\rho\pi\pi}$  umbenannt. Die entsprechenden Feynmanregeln der elektromagnetischen Wechselwirkung des  $\rho_3$  sind dann folgendermaßen gegeben :

$$\begin{array}{c} \rho \\ \text{---} \bullet \text{---} \gamma \end{array} = -i f_\rho g^{\mu\nu} = -i \frac{e m_\rho^0{}^2}{g_{\rho\pi\pi}} g^{\mu\nu} \quad (1.49)$$

$$\text{~~~~~} = i \mathcal{D}_\gamma^{\mu\nu}(k) = i g^{\mu\nu} \mathcal{D}_\gamma(k^2) \quad \text{mit} \quad \mathcal{D}_\gamma(k^2) = -\frac{1}{k^2 + i\epsilon}. \quad (1.50)$$

Abschließend soll als Beispiel der elektromagnetische Formfaktor des Pions unter VDM, wie er u.a. im rechten Diagramm von Abb. 1.1 zu sehen ist, bestimmt werden. Berechnet man nach den Feynmanregeln den Wirkungsquerschnitt für das gezeigte Diagramm einmal unter VDM ( $\sigma_{VDM}$ ) und unter der Annahme punktförmiger Kopplung des Photons an das  $\pi^+\pi^-$ -Paar ( $\sigma_{QED}$ ) und dividiert beide Wirkungsquerschnitte, so erhält man den elektromagnetischen Pionformfaktor in Abhängigkeit vom Viererimpuls  $\sqrt{s}$  des Dileptonpaares zu

$$\frac{\sigma_{VDM}}{\sigma_{QED}} = |F_\pi(s)|^2 \quad \text{mit} \quad |F_\pi(s)|^2 = |m_\rho^0{}^2 \mathcal{D}_\rho(s)|^2. \quad (1.51)$$

In Gl. (1.51) ist  $\mathcal{D}_\rho(s)$  der  $\rho$ -Propagator und  $m_\rho^0$  die nackte  $\rho$ -Masse. Da ein reelles Photon nur die Ladung, nicht aber die Substruktur des Pions sieht, erhält man erwartungsgemäß  $|F_\pi(0)| = 1$  [34].

### 1.3 Lagrangedichte des Modells

In diesem Abschnitt wird die effektive mesonische Lagrangedichte, die Berechnungsgrundlage unseres Modells ist, zusammengestellt. Den Ausführungen des vorherigen Abschnitts folgend, sind  $\rho$ -Meson und Pion die relevanten effektiven Freiheitsgrade, die man zur Beschreibung der Wechselwirkung des  $\omega$ -Mesons heranziehen muß.

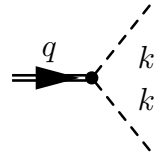
$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} \quad \text{mit} \quad (1.52)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 = & \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\pi} \cdot \partial^\mu \vec{\pi} - \frac{m_\pi^2}{2} \vec{\pi}^2 - \frac{1}{4} \vec{F}_{\mu\nu} \cdot \vec{F}^{\mu\nu} + \frac{m_\rho^0{}^2}{2} \vec{\rho}_\mu \cdot \vec{\rho}^\mu \\ & - \frac{1}{4} W_{\mu\nu} W^{\mu\nu} + \frac{m_\omega^0{}^2}{2} \omega_\mu \omega^\mu \end{aligned} \quad (1.53)$$

Im Hinblick auf das folgende Kapitel beschränken wir uns vorerst auf das Vakuum. Der Wechselwirkungsanteil der Lagrangedichte lautet dann

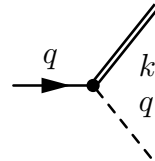
$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} = & g_{\rho\pi\pi} \epsilon_{ijk} \pi_i (\partial^\mu \pi)_j (\rho_\mu)_k \\ & - \frac{g_{\omega\rho\pi}}{m_\omega} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \partial^\alpha \rho_i^\beta \omega^\gamma \partial^\delta \pi_i + \frac{h}{2i} \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} \omega^\mu \epsilon_{ijk} \partial^\alpha \pi_i \partial^\beta \pi_j \partial^\gamma \pi_k \quad . \end{aligned} \quad (1.54)$$

Der Term in der ersten Zeile von Gl. (1.54) beschreibt die sich durch Eichung der freien pionischen Lagrangedichte ergebende  $\rho\pi\pi$ -Wechselwirkung (vergl. Gl. 1.13). Der sich daraus ergebende Vertex in der Impulsraumbasis ist im nächsten Bild gezeigt. Dabei werden  $\rho$ -Mesonen mit einer doppelt durchgezogenen Linie und Pionen mit einer unterbrochenen Linie symbolisiert.



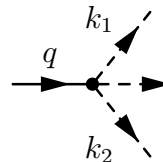
$$= g_{\rho\pi\pi} \epsilon_{ijk} (2k + q)_\mu \quad (1.55)$$

Abgesehen von diesen aus dem Eichkonzept ableitbaren 'Standard'-Wechselwirkungen zwischen Pseudoskalaren und Vektormesonen gibt es weitere, aus der chiralen Anomalie folgende Wechselwirkungen. Diese Kopplungen werden durch die Terme in der zweiten Zeile von Gl. (1.54) beschrieben. Dabei entspricht der erste Term der Ankopplung von  $\rho$ - und  $\omega$ -Meson (durchgezogene Linie) an ein Pion



$$= -i \frac{g_{\omega\rho\pi}}{m_\omega} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} k^\alpha (q - k)^\delta \quad (1.56)$$

und der zweite Term der Kopplung des  $\omega$ -Mesons an 3 Pionen



$$k_3 = -3 h \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} k_1^\alpha k_2^\beta k_3^\gamma \quad . \quad (1.57)$$

Folglich kann sich ein Beitrag zur  $\omega$ -Selbstenergie nur durch die anomalen Kopplungsterme ergeben. Die Fixierung der Kopplungskonstanten des Modells erfolgt im Abschnitt 2.1.

Wie läßt sich die Existenz und die Struktur dieser anomalen Terme verstehen? Wie im vorherigen Abschnitt an Beispielen gezeigt wurde, folgen aus kontinuierlichen Symmetrien der Lagrangedichte erhaltene Noetherströme. Man könnte nun erwarten, daß im Falle der Quantisierung der Felder, diese Ströme auch weiterhin erhalten bleiben. Doch im allgemeinen Fall, wird in einer Eichtheorie durch die zweite Quantisierung der Felder,

eine Reduktion der Anzahl der klassisch zugrundegelegten Symmetrien erfolgen [35, 36, 37]. Man spricht dann von einer anomalen Brechung der Symmetrie. In dem hier zu betrachtenden Fall ist es die anomale Brechung der chiralen Symmetrie, die zu einer Modifikation der Viererdivergenz des Axialvektorstromes führt und damit Kopplungen des unter Gl. (1.56) und (1.57) gezeigten Typs erst ermöglicht. Um zum Beispiel die Struktur des  $\omega\rho\pi$ -Kopplungsterms aus Gl. (1.56) zu verstehen, kann man von folgender 3-Punkt Greensfunktion

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{ab} = i \int d^4x d^4y e^{ik_1x + ik_2y} \langle 0 | T \rho_\alpha^a(x) A_\beta^b(y) w_\gamma(0) | 0 \rangle \quad (1.58)$$

ausgehen [38, 39]. Dabei sind die Vektorströme  $\rho_\alpha^a(x)$ ,  $w_\gamma(0)$  und der Axialvektorstrom  $A_\beta^b(y)$  gegeben durch

$$\rho_\alpha^a(x) = \bar{q}\gamma_\alpha \frac{\tau^a}{2} q \quad w_\gamma(0) = \bar{q}\gamma_\gamma \frac{1}{2} q \quad A_\beta^b(y) = \bar{q}\gamma_\beta \gamma^5 \frac{\tau^b}{2} q \quad .$$

Hierbei sind  $q$  die Quarkfelder im  $SU(2)_f$  Sektor. Die Auswertung von Gl. (1.58) erfolgt unter Verwendung der Stromalgebra und unter Annahme verschwindender Stromquarkmassen. Da die Eichfelder außerdem an einen erhaltenen Strom koppeln, erhält man schließlich

$$\partial^\beta A_\beta^b = 0 \quad \text{und} \quad \partial^\alpha \rho_\alpha^a = \partial^\gamma w_\gamma = 0 \quad . \quad (1.59)$$

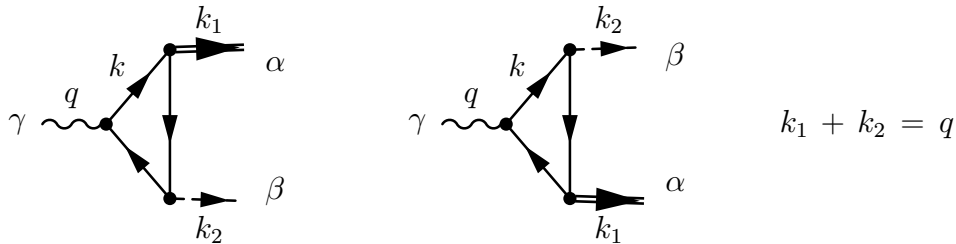
Zur Auswertung der 3-Punkt Greensfunktion werden weiterhin masselose Eichfelder vorausgesetzt. Das ist zwar für das folgende nicht maßgeblich, doch führt das hier zum Verschwinden des Schwingerterms [40]. Man erhält dann drei Ward-Identitäten, zwei für die Vektorströme und eine für den Axialvektorstrom.

$$k_1^\alpha \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{ab} = -i \epsilon^{abc} \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T A_\beta^c(x) w_\gamma(0) | 0 \rangle = 0 \quad (1.60)$$

$$q^\gamma \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{ab} = 0 \quad (1.61)$$

$$k_2^\beta \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{ab} = i \epsilon^{abc} \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T A_\alpha^c(x) w_\gamma(0) | 0 \rangle = 0 \quad (1.62)$$

Nun werden Beiträge von Quantenkorrekturen in niedrigster Ordnung, wie sie in der folgenden Abbildung zu sehen sind, berücksichtigt. Dabei sind die Quarkpropagatoren  $S$  im folgenden Bild als einfach durchgezogene Linien und das  $\omega$ -Meson mit einer Wellenlinie symbolisiert. Das rechte Diagramm ergibt sich durch Umkehr des Loopimpulses  $k$  aus dem linken Bild.



$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{ab} = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-1) \operatorname{tr} \left\{ \left[ iS(k)\gamma_\alpha \frac{\tau^a}{2} iS(k-k_1)\gamma_\beta\gamma^5 \frac{\tau^b}{2} iS(k-q)\gamma_\gamma \frac{1}{2} \right] + \left( \begin{array}{c} k_1 \leftrightarrow k_2 \\ \gamma_\alpha, a \leftrightarrow \gamma_\beta\gamma^5, b \end{array} \right) \right\} \quad (1.63)$$

Obwohl der in Gl. (1.63) gegebene Ausdruck konvergent ist, sind beide Diagrammbeiträge einzeln betrachtet linear divergent, so daß eine Unbestimmtheit des Ausdruck in Gl. (1.63) infolge Redefinition des Loopimpulses gemäß

$$k \longrightarrow k' = k + e \cdot k_1 + (e - f) \cdot k_2$$

besteht. Die freie Wahl des Loopimpulses korrespondiert, wie sich gleich zeigen wird, mit der Freiheit, die Anomalie zwischen den verschiedenen Strömen hin und her zu schieben. Dann ergibt sich mit dem redefinierten Loopimpuls folgende Unbestimmtheit in Gl. (1.63)

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{ab}(k') = \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{ab}(k) - 3 \frac{\delta^{a,b}}{4} \frac{f}{8\pi^2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} (k_1^\delta - k_2^\delta) \quad . \quad (1.64)$$

Der  $\epsilon$ -Tensor ergibt sich durch Auswertung der Spur über die  $\gamma$ -Matrizen und das relative Vorzeichen zwischen  $k_1$  und  $k_2$  durch die Definition des Loopimpulses aus dem rechten Diagramm. Daß nur der Parameter  $f$  auftaucht, ergibt sich als Folge der Addition beider Diagramme. Die Spur im Isospinraum führt zu  $\delta^{a,b}/4$  und die Farbfreiheitsgrade bringen einen Faktor drei.

Für die in Gl. (1.63) gegebene Quantenkorrektur müssen nun die Ward-Identitäten einzeln geprüft werden. Beginnen wir mit der für den Vektorstrom in Gl. (1.61). Man erhält jetzt

$$\begin{aligned} q^\gamma \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{ab}(k) &= 3 \frac{\delta^{a,b}}{4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \operatorname{tr} [\gamma_\alpha iS(k-k_1)\gamma_\beta\gamma^5 iS(k-q) - \gamma_\alpha iS(k)\gamma_\beta\gamma^5 iS(k-k_2)] \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{tr} [\gamma_\alpha iS(k-q)\gamma_\beta\gamma^5 iS(k-k_2) - \gamma_\alpha iS(k-k_1)\gamma_\beta\gamma^5 iS(k)] \right\} \\ &= -3 \frac{\delta^{a,b}}{4} \frac{1}{4\pi^2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} k_1^\gamma k_2^\delta \quad . \end{aligned} \quad (1.65)$$

Um die unter Gl. (1.61) gegebene Ward-Identität für den Vektorstrom zu erfüllen, wird die Unbestimmtheit der 3-Punkt-Greensfunktion hinsichtlich Redefinition des Loopimpulses gemäß Gl. (1.64) benutzt.

$$\begin{aligned} q^\gamma \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{ab}(k') &= q^\gamma \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{ab}(k) - 3 \frac{\delta^{a,b}}{4} \frac{f}{8\pi^2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} (k_1^\delta - k_2^\delta) q^\gamma \\ &= -3 \frac{\delta^{a,b}}{4} \frac{\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} k_1^\gamma k_2^\delta}{4\pi^2} (1 - f) \end{aligned} \quad (1.66)$$

Mit der Wahl  $f = 1$  ist der Viererstrom  $w_\gamma$  in Gl. (1.59) dann wieder erhalten. Eine analoge Rechnung kann auch für die zweite Vektor Ward-Identität durchgeführt werden,

mit dem Ergebnis, daß auch hier durch die Wahl von  $f = 1$  der Viererstrom für  $\rho_\alpha^a$  erhalten bleibt.

Was passiert nun mit dem Axialvektorstrom? Die Auswertung der Quantenkorrektur von Gl. (1.63) produziert wieder einen zu Gl. (1.62) zusätzlichen Term mit folgender Gestalt

$$k_2^\beta \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{ab}(k) = -3 \frac{\delta^{a,b}}{4} \frac{1}{8\pi^2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} k_1^\delta k_2^\beta \quad . \quad (1.67)$$

Wird wieder die Unbestimmtheit der 3-Punkt Greensfunktion hinsichtlich der Redefinition des Loopimpulses genutzt, so führt das diesmal zu

$$k_2^\beta \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{ab}(k') = -3 \frac{\delta^{a,b}}{4} \frac{\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} k_1^\delta k_2^\beta}{8\pi^2} (1 + f) \quad . \quad (1.68)$$

Offensichtlich können nicht beide Gl. (1.66) und (1.68) simultan verschwinden. Das entspricht einer Reduktion der klassisch zugrundegelegten Symmetrien. Die Anomalie muß auf den Axialvektorstrom geschoben werden, da  $\omega$ - und  $\rho$ -Meson als Eichfelder an erhaltene Ströme koppeln. Deshalb ergibt sich folgender Anomalieterm in der Viererdivergenz des Axialvektorstroms

$$\partial^\beta A_\beta^b = G \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_\alpha \rho_\beta^b \partial_\gamma \omega_\delta \quad . \quad (1.69)$$

Dabei stehen  $\rho, \omega$  für die jeweiligen Vektorfelder und  $G$  für eine Kopplungskonstante. In analoger Weise kann auf den Wess-Zumino Term, also die  $\omega\pi\pi\pi$ -Kopplung, geschlossen werden.

Es bleibt jetzt noch, die am Anfang dieses Abschnittes begonnene Diskussion der Feynman-Regeln abzuschließen. Das zu betrachtende System wird durch Angabe der Vakuum-Propagatoren wie folgt vervollständigt. Dabei ist  $\Sigma_\rho$  die  $\rho$ -Selbstenergie (vgl. Abschnitt 2.1).

$$\text{=====} = i \mathcal{D}_\rho^{\mu\nu}(k) = i \mathcal{D}_\rho(k^2) \left( \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} - g^{\mu\nu} \right) + \frac{k^\mu k^\nu}{m_\rho^2 k^2} \quad (1.70)$$

$$\text{mit} \quad \mathcal{D}_\rho(k^2) = \frac{1}{k^2 - m_\rho^2 - \Sigma_\rho(k^2)}$$

$$\text{-----} = i \mathcal{D}_\pi(k^2) = \frac{i}{k^2 - m_\pi^2 + i\epsilon} \quad (1.71)$$

Abschließend soll noch die Spektraldarstellung der Propagatoren angegeben werden. Die Spektralfunktion  $\mathcal{A}$  wird gemäß der rechten unteren Gleichung durch den Imaginärteil der Greensfunktion  $\mathcal{D}$  gegeben. Der vollständige Propagator  $\mathcal{D}$  kann dann mit Hilfe eines Dispersionsintegrals wie unten gezeigt dargestellt werden [41, 42].

$$\mathcal{D}(k) = \int_0^\infty \frac{dw^2}{2\pi} \frac{\mathcal{A}(w, |\vec{k}|)}{k_0^2 - w^2 + i\epsilon} \quad \text{mit} \quad \mathcal{A}(w, |\vec{k}|) = -2 \Im m \mathcal{D}(w, |\vec{k}|) \quad . \quad (1.72)$$

Hierauf wird im Verlauf der Arbeit, u.a. bei der Auswertung von Selbstenergiediagrammen, zurückgegriffen. Man hätte in Gl. (1.72) bei Beschränkung auf das Vakuum auch zu einer explizit lorentzinvarianten Form greifen können. Im Hinblick auf die Anwendung bei Kernmaterie, soll aber durchweg die Variante in Gl. (1.72) benutzt werden.

# Kapitel 2

## $\omega$ -Meson im Vakuum

### 2.1 Bestimmung der Kopplungskonstanten

#### 2.1.1 Kopplungskonstante des $\omega\rho\pi$ -Vertex

Die Beschreibung von Zerfällen des  $\omega$ -Mesons erfordert Kenntnisse über sekundäre Prozesse wie  $\rho \rightarrow \pi\pi$ . Hierzu muß die Kopplung des  $\rho$ -Mesons an die Pionenwolke berücksichtigt werden.

Für den im folgenden Kapitel verwendeten Ausdruck der Selbstenergie des  $\rho$ -Mesons wird die Arbeit von M. Urban [24] zugrundegelegt. Die freien Parameter der Theorie des  $\rho$ -Mesons, die Regulatormasse  $\Lambda$ , die nackte Masse  $m_\rho^0$  und die Kopplungskonstante  $g_{\rho\pi\pi}$  bestimmen sich durch Anfitzen an Daten zum elektromagnetischen Pionformfaktor und die  $\pi\pi$ -Streuphasen im  $\delta_1^1$ -Kanal. Dabei ist für Schwerpunktsenergien des Pionenpaares von  $\sqrt{s} \simeq m_\rho$  der Beitrag vom  $\rho^0$ -Austausch im s-Kanal dominant.

Der Selbstenergietensor hängt nur vom Viererimpuls des Vektormesons ab und kann als

$$\Sigma^{\mu\nu}(k) = \left( \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} - g^{\mu\nu} \right) \Sigma(k^2) \quad (2.1)$$

geschrieben werden [43]. Demnach genügt es den Real- und Imaginärteil der Funktion

$$\Sigma(k^2) = -\frac{1}{3} g^{\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu}(k) \quad (2.2)$$

anzugeben. Aus der Referenz [24] entnimmt man für die Pauli-Villars regularisierte Selbstenergie des  $\rho$ -Mesons

$$\Im m \Sigma_\rho(s) = -\frac{g_{\rho\pi\pi}^2}{48\pi} s \Theta(s - 4m_\pi^2) \left( 1 - \frac{4m_\pi^2}{s} \right)^{3/2} + Reg. \quad (2.3)$$

$$\Re \Sigma_\rho(s) = -\frac{g_{\rho\pi\pi}^2}{24\pi^2} s [\mathcal{G}(s, m_\pi) - \ln m_\pi] + Reg. \quad (2.4)$$

Dabei bezeichne  $\sqrt{s}$  die invariante Masse des  $\rho$ -Mesons. Oberhalb der  $\rho \rightarrow \pi\pi$ -Schwelle gibt es einen Imaginärteil zur Selbstenergie, der für die Breite des  $\rho$ -Mesons verantwortlich



ist. Die Funktion  $\mathcal{G}(s, m_\pi)$  im Realteil der  $\rho$ -Selbstenergie ist unter- und oberhalb dieser Schwelle durch die folgenden analytischen Ausdrücke gegeben [24].

$$\mathcal{G}(s, m) = \begin{cases} \left( \frac{4m^2}{s} - 1 \right)^{3/2} \arctan \left( \frac{4m^2}{s} - 1 \right)^{-1/2} & 0 < s < 4m^2 \\ -\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{4m^2}{s} \right)^{3/2} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}}} \right| & \text{sonst} \end{cases}$$

Setzt man den Regulator auf 1 GeV, so ergibt sich durch die Anpassung an die experimentellen Daten [24]

$$\begin{aligned} m_\rho^0 &= 853 \text{ MeV} \\ g_{\rho\pi\pi} &= 5.9 \quad . \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt wird der  $\omega\rho\pi$ -Vertex untersucht. Hier kann die Kopplungskonstante  $g_{\omega\rho\pi}$  zum Beispiel über den Zerfall  $\omega \rightarrow \pi^0\gamma$  bestimmt werden [44]. In dem verwendeten Modell läßt sich dieser Zerfall als ein Zweistufenprozeß darstellen. Wegen der Isospinertretung am  $\omega\rho\pi$ -Vertex erfolgt der Zerfall über einen  $\rho^0$ -Zwischenzustand.

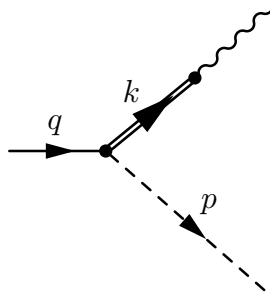


Abbildung 2.1:  $\omega$ -Zerfall in  $\pi^0$  und  $\gamma$  unter VDM. Die unterbrochene Linie symbolisiert das  $\pi^0$ -Meson und die Wellenlinie das auslaufende Photon.

Für die zu diesem Zerfall gehörende Partialbreite ergibt sich im Ruhesystem des  $\omega$ -Mesons [45]

$$\Gamma_{\pi^0\gamma} = \frac{1}{3} \frac{1}{2m_\omega} \int \frac{d^3k}{2k^0(2\pi)^3} \frac{d^3p}{2w_\pi(2\pi)^3} \sum_{\lambda,\lambda'} |\mathcal{M}_{\lambda,\lambda'}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(q - k - p) \quad . \quad (2.5)$$

Den Faktor  $1/3$  erhält man aus der Mittelung über die Polarisationsrichtungen des einlaufenden Vektormesons. Damit ergibt sich in niedrigster Ordnung Störungstheorie für die Amplitude dieses Prozesses

$$\mathcal{M}_{\lambda,\lambda'}^{(1)} = i \frac{g_{\omega\rho\pi}}{m_\omega} f_\rho \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} k^\alpha p^\delta g^{\beta\mu} \mathcal{D}_\rho(k^2) \epsilon_\mu^*(\lambda') \epsilon^\gamma(\lambda) \quad . \quad (2.6)$$

Dabei ist  $\epsilon^\mu(\lambda')$  der Polarisationsvektor des Photons und  $\epsilon^\gamma(\lambda)$  der des  $\omega$ -Mesons. Die Kopplungskonstante  $f_\rho$  des  $\rho$ -Mesons an das Photon ist in Gl. (1.49) gegeben. Da die

Selbstenergie des  $\rho$ -Mesons am Photopunkt nach Gl. (2.17) verschwindet, vereinfacht sich bei Auswertung von Gl. (2.5) die Amplitude zu

$$\sum_{\lambda, \lambda'} |\mathcal{M}_{\lambda, \lambda'}^{(1)}|^2 = 2 \vec{k}^2 \left( \frac{e g_{\omega\rho\pi}}{g_{\rho\pi\pi}} \right)^2 .$$

Es ergibt sich ein Ausdruck für die partielle Zerfallsbreite des  $\omega$ -Mesons, der mit dem experimentellen Wert gleichgesetzt, das Verhältnis der Kopplungskonstanten  $g_{\omega\rho\pi}/g_{\rho\pi\pi}$  fixiert. Unter Benutzung der Feinstrukturkonstante  $\alpha$  schreibt sich die Zerfallsbreite

$$\begin{aligned} \Gamma_{\pi^0\gamma} &= \frac{\alpha}{24} \left( \frac{g_{\omega\rho\pi}}{g_{\rho\pi\pi}} \right)^2 m_\omega \left( 1 - \frac{m_\pi^2}{m_\omega^2} \right)^3 \\ &\stackrel{!}{=} 0.72 \text{ MeV} \quad . \end{aligned} \quad (2.7)$$

Zusammen mit  $g_{\rho\pi\pi}$  ist auch  $g_{\omega\rho\pi}$  bestimmt. Damit hängt die Kopplungskonstante  $g_{\omega\rho\pi}$  von dem jeweiligen Modell für das  $\rho$ -Meson ab. So führte das hier verwendete Modell, dem eine energieabhängige  $\rho$ -Breite zugrundeliegt, auf die Kopplungskonstante  $g_{\rho\pi\pi} = 5.9$ . Mit Gl. (2.7) erhält man dann

$$\begin{aligned} g_{\omega\rho\pi} &= 1.827 g_{\rho\pi\pi} \\ &= 10.794 \quad . \end{aligned} \quad (2.8)$$

Typische Zahlenwerte für  $g_{\omega\rho\pi}$  liegen bei 10–12 und sind durch die Anpassung an verschiedene Experimente bedingt [46]. Beispielsweise ist es auch möglich, mit Hilfe des durch die chirale Anomalie dominierten Zerfalls eines Pions in zwei Photonen, die Kopplungskonstante  $g_{\omega\rho\pi}$  zu bestimmen. Unter VDM kann dieser Prozeß in zwei Stufen  $\pi^0 \rightarrow \rho^0 \omega \rightarrow 2\gamma$  ablaufen, wodurch auf die  $g_{\omega\rho\pi}$ -Kopplungskonstante geschlossen werden kann.

Bei der Diskussion von Vertexkorrekturen im Abschnitt 2.2.6 komme ich auf das hier dargestellte Vorgehen zur Bestimmung der Kopplungskonstante  $g_{\omega\rho\pi}$  am Photopunkt zurück.

### 2.1.2 Kopplungskonstante des $\omega\pi\pi\pi$ -Vertex

Zur Zerfallsbreite des  $\omega$ -Mesons im  $3\pi$ -Kanal gibt es auch Beiträge, die sich aus der direkten Kopplung des  $\omega$ -Mesons an die 3 Pionen ergeben. Die hierfür relevante Kopplungskonstante  $h$  läßt sich nicht aus dem Experiment ableiten, da eine Trennung der Beiträge  $\omega \rightarrow \rho\pi \rightarrow 3\pi$  und  $\omega \rightarrow 3\pi$  wegen der kurzen Lebensdauer des  $\rho$ -Mesons von  $\tau \simeq 1 \text{ fm}/c$  unmöglich ist.

Deshalb wird zur Bestimmung der Kopplungskonstante des Wess–Zumino Terms auf die Arbeit von U.G. Meißner [47] zurückgegriffen. In dieser Arbeit werden die gleichen Zerfälle auf der Basis von Überlegungen zur chiralen Symmetrie betrachtet. Die relevanten Wechselwirkungsterme dieser effektiven chiralen Lagrangedichte sind gegeben durch

$$\mathcal{L}_{VV\Phi} = -g_{VV\Phi} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr} [ \partial^\mu V^\nu \partial^\alpha V^\beta \Phi ] \quad (2.9)$$

$$\mathcal{L}_{V\Phi\Phi} = \left( \frac{ig}{2} \right) \text{Tr} [ V_\mu \Phi \overleftrightarrow{\partial}^\mu \Phi ] \quad (2.10)$$

$$\mathcal{L}_{V\Phi\Phi\Phi} = ih \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr} [ V^\mu \partial^\nu \Phi \partial^\alpha \Phi \partial^\beta \Phi ] \quad . \quad (2.11)$$

Dabei bezeichne  $V$  das Vektorfeld und  $\Phi$  das pseudoskalare Feld. Man erkennt wieder in Gl. (2.9) und Gl. (2.11) die aus der chiralen Anomalie folgenden Kopplungsterme. Im Gegensatz zu dem auf Referenz [13] basierenden  $\omega\rho\pi$ -Wechselwirkungsterm in Gl. (1.54), stehen die Ableitungen in Gl. (2.9) vor dem  $\omega$ -Feld und nicht vor dem  $\pi$ -Feld. Es kann aus den Symmetrieeigenschaften des  $\epsilon$ -Tensors gezeigt werden [44], daß beide Versionen zu dem gleichen Vertex in Gl. (1.56) führen. Der Term in Gl. (2.10) folgt aus dem Eichkonzept und wurde im Zusammenhang mit der Gl. (1.13) erörtert. Die Kopplungskonstanten des Meißnerschen Modells [47] sind gegeben durch

$$g = \sqrt{2} \cdot g_{\rho\pi\pi} = 8.6 \quad (2.12)$$

$$g_{VV\Phi} = \frac{g_{\omega\rho\pi}}{\sqrt{2} m_\omega} = \frac{3 g^2}{16 \pi^2 F_\pi} \quad (2.13)$$

$$F_\pi = \sqrt{2} f_\pi, \quad f_\pi = 93\text{MeV} \quad (2.14)$$

$$h = -\frac{g}{2 \pi^2 F_\pi^3} \left\{ 1 - \frac{3}{4} \left( \frac{g F_\pi}{m_\rho} \right)^2 + \frac{3}{32} \left( \frac{g F_\pi}{m_\rho} \right)^4 \right\} . \quad (2.15)$$

Für Gl. (2.12) wird in unserem Fall die KSFR-Relation [30] aus Gl. (1.40) benutzt. Diese Relation folgt aus der Annahme idealer Vektordominanz (vgl. hierzu Gl. (1.35) und (1.45)), d.h. dem Verschwinden der direkten Photon-Hadron Kopplung. Dagegen ist der Wert für  $g_{\rho\pi\pi}$  in der Meißnerschen Arbeit etwas größer als der KSFR-Wert.

Die in Gl. (2.13) angegebene Relation für die  $\omega\rho\pi$ -Kopplungskonstante folgt aus dem Vergleich der nach Gl. (2.9) berechneten Partialbreite für  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ , mit der, die unter Verwendung der Stromalgebra und unter Berücksichtigung der chiralen Anomalie, direkt aus der 3-Punkt Greensfunktion folgt [35, 38]. Dabei wird ebenfalls ideale Vektordominanz vorausgesetzt.

Die Kopplungskonstante für den Wess-Zumino Term ergibt sich dann aus den beiden oberen Kopplungskonstanten  $g, g_{VV\Phi}$  wie in Gl. (2.15) angegeben [47]. Zum Abschluß sind alle in dieser Arbeit verwendeten Kopplungskonstanten noch einmal in Tabelle. 2.1 aufgeführt.

	$g_{\rho\pi\pi}$	$g_{\omega\rho\pi}$	h in $10^{-8} \text{ MeV}^{-3}$
hier	5.9	10.8	2.30
Referenz [47]	6.08	11.8	3.48

Tabelle 2.1: Vergleich der in dieser Arbeit verwendeten Kopplungskonstanten mit den Werten von Referenz [47].

## 2.2 Selbstenergie des $\omega$ -Mesons

### 2.2.1 Selbstenergiediagramme

Nachdem die entsprechenden Wechselwirkungen des  $\omega\rho\pi$ -Systems herausgearbeitet wurden und die Kopplungskonstanten bestimmt sind, kommen wir nun zu den Selbstenergiediagrammen, die in dieser Arbeit betrachtet werden und in Abb. 2.2.1 dargestellt sind.

Das einfachste Diagramm enthält einen Zwischenzustand mit einem angezogenen  $\rho$ -Meson und einem Pion. Im Falle eines elementaren  $\rho$ -Mesons würde dieses Diagramm keinen Beitrag zur Breite für ein sich auf der Massenschale befindendes  $\omega$ -Meson bringen. Erst die pionischen Komponenten im  $\rho$ -Propagator erlauben Schnitte durch das Diagramm, die einem Zerfall des  $\omega$ -Mesons in drei Pionen entsprechen.

Einen weiteren Beitrag bekommt man durch das zweite Diagramm, das sich nur in der Impulsverteilung der Pionen vom ersten unterscheidet und in gleicher Ordnung in der  $\omega\rho\pi$ -Wechselwirkung ist. Die letzten beiden Diagramme erhält man infolge Substitution des zweistufigen Prozesses durch den direkten Zerfall aus dem ersten Diagramm. Hier nicht erfaßt sind Prozesse, in denen die Ladung des intermediären  $\rho$ -Mesons mehr als einmal geändert wird.

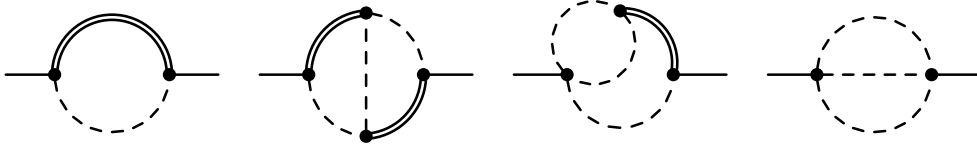


Abbildung 2.2: Die in dieser Arbeit betrachteten Selbstenergiediagramme des  $\omega$ -Mesons

Kommen wir kurz auf die Struktur der Selbstenergie zu sprechen, bevor das Verfahren zu deren Auswertung geschildert wird. Da das  $\omega$ -Meson gemäß Gl. (1.15) als Eichfeld an den erhaltenen isoskalaren Strom bzw. direkt an das Photon koppelt, muß die Selbstenergie der Forderung nach Eichinvarianz genügen. Das führt schließlich dazu, daß die Selbstenergie vierdimensional transversal ist [43].

$$q_\mu \Sigma_\omega^{\mu\nu} = q_\nu \Sigma_\omega^{\mu\nu} = 0 \quad \longrightarrow \quad \Sigma_\omega^{\mu\nu}(q) = \left( \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} - g^{\mu\nu} \right) \Sigma_\omega(q^2) \quad (2.16)$$

Durch die Symmetrieeigenschaft des  $\epsilon$ -Tensors, der sowohl im  $\omega\rho\pi$  als auch im  $\omega\pi\pi\pi$ -Vertex enthalten ist (siehe Gl. (1.56),(1.57)), wird diese Forderung von jedem der in Abb. 2.2 dargestellten Diagramme einzeln erfüllt.

Eine zweite Forderung ergibt sich direkt aus dem VDM. Danach sieht ein reelles Photon nur die Ladung, nicht aber die Substruktur der Hadronen, was schließlich durch die Wahl

$$\Sigma_\omega^{\mu\nu}(q^2 = 0) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \Sigma_\omega(q^2 = 0) = 0 \quad (2.17)$$

erreicht werden kann. Dementsprechend wird die  $\omega$ -Selbstenergie am Photopunkt verschwinden.

Kommen wir nun zum Vorgehen, das zur Berechnung der oben dargestellten Beiträge gewählt wurde. Die Auswertung der Diagramme läßt sich vereinfachen, indem man sich vorerst auf den Imaginärteil von  $\Sigma(q^2)$  beschränkt. Dazu werden die Beiträge, die die einzelnen Diagramme zum Imaginärteil liefern, getrennt ausgewertet. Anschließend wird mit Hilfe des subtrahierten Dispersionsintegrals

$$\Re \Sigma_\omega(q^2) = \Re \Sigma_\omega(0) + q^2 \wp \int_0^{+\infty} \frac{ds}{\pi} \frac{\Im m \Sigma_\omega(s)}{s(s - q^2)} \quad (2.18)$$

der gesamte dazugehörige Realteil bestimmt. Dabei verschwindet  $\Re\Sigma(0)$  wie unter Gl. (2.17) angegeben. Nachdem die Selbstenergie nun formal berechnet ist, kann auch der Propagator des  $\omega$ -Mesons im Vakuum durch Aufsummieren der Dyson-Reihe bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
 \text{---} &= \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\
 i\mathcal{D}_\omega^{\mu\nu} &= i\mathcal{D}_\omega^{0\mu\nu} + i\mathcal{D}_\omega^{0\mu\kappa} (-i\Sigma_{\kappa\lambda}) i\mathcal{D}_\omega^{\lambda\nu} \quad (2.19)
 \end{aligned}$$

Der volle  $\omega$ -Propagator lautet dann

$$\mathcal{D}_\omega^{\mu\nu}(q) = \mathcal{D}_\omega(q^2) \left( \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} - g^{\mu\nu} \right) + \frac{q^\mu q^\nu}{m_0^2 q^2} \quad \text{mit} \quad \mathcal{D}_\omega(q^2) = \frac{1}{q^2 - m_0^2 - \Sigma_\omega(q^2)} .$$

Daraus folgt sowohl die Verschiebung der  $\omega$ -Masse von  $m_0$  zum physikalischen Wert  $m_\omega$ , als auch der Beitrag zur  $\omega$ -Breite  $\Gamma_\omega$ . Die physikalische Masse des  $\omega$ -Mesons ist durch den Pol des Propagators gegeben:

$$m_\omega^2 = m_0^2 + \Re\Sigma_\omega(m_\omega) . \quad (2.20)$$

Die Breite ergibt sich dann durch

$$\Gamma_\omega = \frac{-\Im\Sigma_\omega(m_\omega)}{m_\omega} . \quad (2.21)$$

Die Berechnung der Zerfallsbreite entspricht (bis auf einen Faktor) der Bildung des Imaginärteils der Selbstenergie entlang eines Schnittes, der das zugehörige Diagramm so trennt, daß der gesuchte Endzustand auftritt. Alle in dieser Arbeit betrachteten Schnitte gehören zur Partialbreite des  $\omega$ -Mesons im  $3\pi$ -Kanal. In der betrachteten Entwicklung in Selbstenergiediagrammen ergeben sich dann die in Abb. 2.3 gezeigten Beiträge zum Imaginärteil. Von den drei Pionen im linken Diagramm ist zwar nur eines offensichtlich,

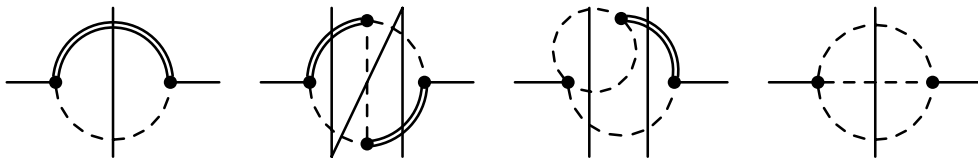


Abbildung 2.3: Die in dieser Arbeit betrachteten Beiträge zum Imaginärteil der  $\omega$ -Selbstenergie

doch werden die beiden anderen über die Spektralfunktion des  $\rho$ -Mesons generiert, da die Breite des  $\rho$  praktisch vollständig durch den Zerfall in zwei Pionen erzeugt wird. Deshalb brauchen keine weiteren Zerfallskanäle des  $\rho$ -Mesons berücksichtigt zu werden. Der fehlende Schnitt im zweiten Diagramm durch beide  $\rho$ -Propagatoren ist ein fünf Pionbeitrag zur  $\omega$ -Breite.

An dieser Stelle soll ein Vergleich mit der Entwicklung in Matrixelementen vorgenommen werden. Dabei sind nur Beiträge von Matrixelementen berücksichtigt die keine Vertexkorrekturen enthalten.

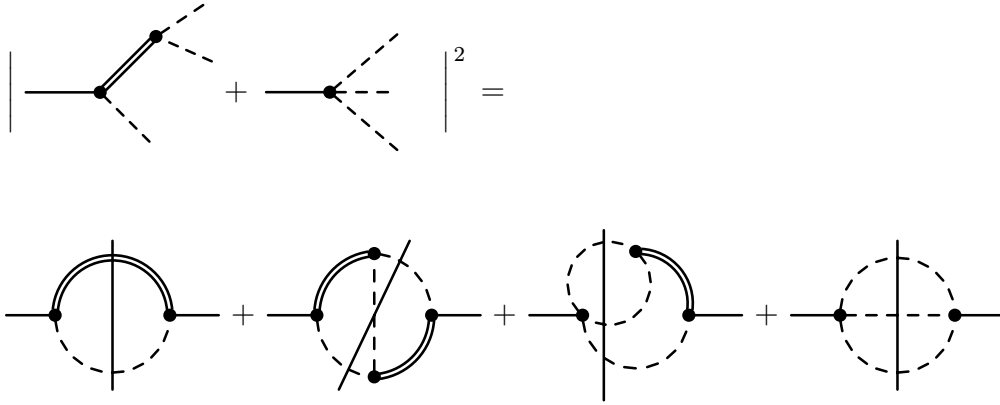


Abbildung 2.4: Vergleich der Entwicklungsschemata in Selbstenergiendiagrammen und Matrixelementen.

Man erkennt, daß beide Entwicklungsschemata zu einer verschiedenen Anzahl von Beiträgen zur  $\omega$ -Breite führen. Die in der Abb. 2.4 eingezeichneten Schnitte sind im folgenden Text als Beiträge niedrigster Ordnung bezeichnet. In den folgenden Abschnitten werden sie in der Reihenfolge des Bildes 2.4 von links nach rechts abgearbeitet. Anschließend werden die noch verbleibenden Schnitte aus Abb. 2.3 als Beiträge von Vertexkorrekturen zur Selbstenergie in Abschnitt 2.2.6 behandelt. Dieses Vorgehen ist technischer Natur. Wie sich dann zeigen wird, liefern beide Vertexkorrekturen einen Beitrag zum mikroskopischen Formfaktor auf den nochmals im Abschnitt 2.5.2 bei der Behandlung von Dalitz-Zerfällen zurückgegriffen wird.

## 2.2.2 Einfacher Beitrag

Der einfachste Beitrag zum Imaginärteil der Selbstenergie des  $\omega$ -Mesons stammt von dem ersten Diagramm in Abb. 2.3 und ist nochmals in Abb. 2.5 dargestellt. Dieser Beitrag läßt sich aus Matrixelementen aufbauen, die nur über ein intermediäres  $\rho$ -Meson zum  $3\pi$ -Kanal beitragen (vgl. Abb. 2.4).

Dieses Diagramm erhält durch die Summation über die Isospinkomponenten den Faktor 3. Mit den im 1. Kapitel angegebenen Feynmanregeln erhält man für den Selbstenergiensensor

$$\Sigma_{(1)}^{\mu\nu}(q) = -i3 \left( \frac{g_{\omega\rho\pi}}{m_\omega} \right)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \epsilon^{\alpha\beta\mu\delta} \epsilon^{\alpha'\beta'\nu\delta'} k_\beta (q-k)_\delta k_{\beta'} (q-k)_{\delta'} g_{\alpha\alpha'} \mathcal{D}_\rho(k) \mathcal{D}_\pi(q-k).$$

Nutzt man zur Vereinfachung der Rechnung die Transversalität und die Lorentzinvarianz der Selbstenergie aus, so erhält man für das Ruhesystem des  $\omega$ -Mesons unter

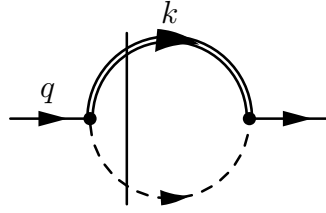


Abbildung 2.5: Einfacher Beitrag zur  $\omega$ -Selbstenergie. Die Berechnung des Schnittes entspricht der Bestimmung des Imaginärteils von dem Diagramm.

Verwendung von Gl. (2.2) schließlich

$$\Sigma_{(1)}(q_0^2) = 3 \frac{2i q_0^2}{3} \left( \frac{g_{\omega\rho\pi}}{m_\omega} \right)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \vec{k}^2 \mathcal{D}_\rho(k) \mathcal{D}_\pi(q-k) \quad . \quad (2.22)$$

Zur Auswertung des Imaginärteils der Selbstenergie sei auf die Gl. (17) im ersten Teil vom Anhang verwiesen. Mit der Spektralfunktion  $\mathcal{A}_\rho$  des  $\rho$ -Mesons ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \Im m \Sigma_{(1)}(q_0^2) &= -2 q_0^2 \left( \frac{g_{\omega\rho\pi}}{m_\omega} \right)^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \vec{k}^2 \int_0^{q_0} \frac{dw}{4\pi} \mathcal{A}_\rho(w, |\vec{k}|) [-2 \Im m \mathcal{D}_\pi(q^0 - w, |\vec{k}|)] \\ &= -q_0^2 \left( \frac{g_{\omega\rho\pi}}{m_\omega} \right)^2 \int \frac{d^3 k}{2w_\pi (2\pi)^3} \vec{k}^2 \int_0^{q_0} dw \mathcal{A}_\rho(w, |\vec{k}|) \delta(q^0 - w - w_\pi) \\ &= - \left( \frac{g_{\omega\rho\pi} q_0}{2\pi m_\omega} \right)^2 \int_0^{k_m} dk \frac{k^4}{w_\pi} \mathcal{A}_\rho(q^0 - w_\pi, k) \quad . \end{aligned} \quad (2.23)$$

Die Raumwinkelintegration ist elementar und von der zweiten zur dritten Zeile ausgeführt worden. Es verbleibt eine Integration über den Betrag des Dreierimpulses, die numerisch ausgeführt werden muß. Dabei ist  $w_\pi$  die Energie des Pions auf der Massenschale.

$$w_\pi = \sqrt{\vec{k}^2 + m_\pi^2}$$

Damit ist die obere Integrationsgrenze  $k_m$  durch die  $\rho \rightarrow \pi\pi$ -Schwelle der Spektralfunktion  $\mathcal{A}_\rho(s)$  gegeben. Unter Benutzung der invarianten  $\rho$ -Masse  $\sqrt{s}$  schreibt sich die Schwellenbedingung

$$s = (q^0 - w_\pi)^2 - \vec{k}^2 \stackrel{!}{=} (2m_\pi)^2 \quad .$$

$$\Rightarrow k_m = \sqrt{\frac{1}{4} \left( q^0 - \frac{3m_\pi^2}{q^0} \right)^2 - m_\pi^2} \quad (2.24)$$

Da das Argument unter der Quadratwurzel positiv sein muß, ergibt sich als Schwelle für den Zerfall des  $\omega$ -Mesons in drei Pionen erwartungsgemäß  $q^0 > 3m_\pi$ .

Wegen des  $k^4$ -Faktors im Integranden von Gl. (2.23), der sich aus Phasenraum und Vertex ergibt, werden die Beiträge von kleineren invarianten  $\rho$ -Massen zum  $\omega$ -Zerfall stärker gewichtet.

### 2.2.3 Austauschdiagramm

Werden im Gegensatz zum vorherigen Diagramm die Matrixelemente, die sich aus dem Zerfall des  $\omega$ -Mesons über ein intermediäres Rho ergeben, in umgekehrter Weise zusammengefügt, so gelangt man zu folgendem Schnitt.

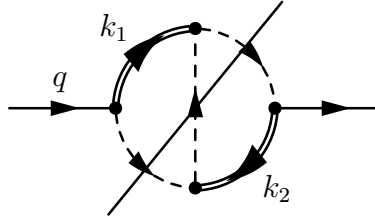


Abbildung 2.6: Austauschdiagramm zur Selbstenergie. Der eingezeichnete Schnitt entspricht dem Beitrag der sich aus der Permutation der Pionen im Zwischenzustand des einfachen Beitrags ergibt.

Nach den Feynmanregeln ergibt sich für dieses Diagramm ein Isospinfaktor 6. Setzt man sich wieder in das Ruhesystem des  $\omega$ -Mesons, so erhält man zum obigen Diagramm folgenden Ausdruck für die Selbstenergie.

$$\Sigma_{(2)}(q_0^2) = 2i \left( \frac{g_{\omega\rho\pi} q_0}{m_\omega} \right)^2 \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \vec{k}_1^2 \mathcal{D}_\rho(k_1) \mathcal{D}_\pi(q - k_1) \Gamma_A(q_0, k_1) \quad (2.25)$$

Dabei ist

$$\Gamma_A(q_0, k_1) = 4i g_{\rho\pi\pi}^2 \int \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \left[ \vec{k}_2^2 - \frac{(\vec{k}_1 \vec{k}_2)^2}{\vec{k}_1^2} \right] \mathcal{D}_\rho(k_2) \mathcal{D}_\pi(q + k_2) \mathcal{D}_\pi(q + k_2 - k_1) \quad (2.26)$$

und stellt eine Vertexkorrektur zum  $\omega\rho\pi$ -Vertex dar.

Abbildung 2.7: Die Vertexkorrektur  $\Gamma_A$  zum  $\omega\rho\pi$ -Vertex .



Da sich der Schnitt in Abb. 2.6 aus einer störungstheoretischen Entwicklung in Matrixelemente in niedrigster Ordnung ergibt, wird er mit Index 1 bezeichnet. Andere Schnitte in dem Diagramm (vgl. Abb. 2.3) werden aus dem Matrixelement mit der Vertexkorrektur  $\Gamma_A$  aufgebaut und werden als Beiträge höherer Ordnung in Abschnitt 2.2.6 behandelt.

Zur Auswertung des Imaginärteils von  $\Sigma_{(2)}$  sei auf die Gl. (20) und die Erläuterungen im zweiten Teil vom Anhang verwiesen.

$$\Im m \Sigma_{(2)}^1(q^2) = 2 \left( \frac{g_{\omega\rho\pi} q_0}{m_\omega} \right)^2 \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \vec{k}_1^2 \int_0^{q^0} \frac{dw}{2\pi} \Im m \Gamma_2(q^0, q^0 - w, \vec{k}_1) \Re e \mathcal{D}_\rho(q^0 - w, |\vec{k}_1|) \mathcal{A}_\pi(w, |\vec{k}_1|) \quad (2.28)$$

$$\Im m \Gamma_2(q^0, k_1^0, \vec{k}_1) = -4 g_{\rho\pi\pi}^2 \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \left[ \vec{k}_2^2 - \frac{(\vec{k}_1 \vec{k}_2)^2}{\vec{k}_1^2} \right] \int_0^\infty \frac{dw_1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{dw_2}{2\pi} \mathcal{A}_\pi(w_1, |\vec{k}_2|) \mathcal{A}_\pi(w_2, |\vec{k}_2 - \vec{k}_1|) \Re e \mathcal{D}_\rho(q^0 - w_1, |\vec{k}_2|) \pi \delta(k_1^0 - w_1 - w_2) \quad (2.29)$$

Wie man aus Gl. (2.28) und Gl. (2.29) erkennt, bekommen die drei aufgeschnittenen  $\pi$ -Zustände in Abb. 2.6 den Imaginärteil und die beiden nicht geschnittenen  $\rho$ -Zustände den Realteil ihres Propagators zugeordnet [48]. Da der Schnitt durch die Vertexkorrektur verläuft, kann der Ausdruck für den Selbstenergieschnitt, wie in Gl. (2.28) angegeben, durch den dazugehörigen Imaginärteil der Vertexkorrektur kompakt geschrieben werden.

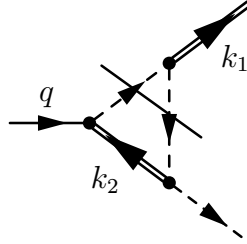


Abbildung 2.8: Beitrag vom Vertex zum Selbstenergieschnitt durch die 3 Pionen

Im nächsten Schritt werden die Spektralfunktionen  $\mathcal{A}_\pi$  für die beiden aufgeschnittenen Pionlinien des Vertex' eingesetzt und der Ausdruck für  $\Im m \Gamma_2$  ausgewertet.

$$\Im m \Gamma_2(q^0, k_1^0, \vec{k}_1) = -4 g_{\rho\pi\pi}^2 \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \left[ \vec{k}_2^2 - \frac{(\vec{k}_1 \vec{k}_2)^2}{\vec{k}_1^2} \right] \frac{\Re e \mathcal{D}_\rho(q^0 - w_{2\pi}, k_2)}{2w_{2\pi} 2w_{3\pi}} \pi \delta(k_1^0 - w_{2\pi} - w_{3\pi}) \quad (2.30)$$

$$= -\frac{g_{\rho\pi\pi}^2}{4\pi |\vec{k}_1|} \int_0^\infty dk_2 \frac{k_2^3}{w_{2\pi}} [1 - x_0^2] \Re e \mathcal{D}_\rho(q^0 - w_{2\pi}, k_2) \Theta(k_1^0 - w_{2\pi} - w_{3\pi}^-) \Theta(w_{2\pi} + w_{3\pi}^+ - k_1^0) \quad (2.31)$$

Die erste Winkelintegration in Gl. (2.30) ist durch die geeignete Wahl des Koordinatensystems trivial ausführbar. Die Integration des Relativwinkels  $x = \cos(\vec{k}_1, \vec{k}_2)$  läßt sich

unter Verwendung der Deltafunktion durchführen. Dabei ergeben sich zwei Thetafunktionen, die garantieren, daß die Nullstelle im Argument der Deltafunktion innerhalb des Integrationsintervalls von  $x$  durchlaufen wird. Wie sich gleich zeigen wird, ist hierzu  $k_1^2 > (2m_\pi)^2$  erforderlich. Dabei ist  $w_{2\pi}$  bzw.  $w_{3\pi}$  die Energie des jeweiligen Pions auf der Massenschale:

$$w_{2\pi} = \sqrt{\vec{k}_2^2 + m_\pi^2} \quad w_{3\pi} = \sqrt{(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)^2 + m_\pi^2}.$$

$w_{3\pi}^-$  entspricht der minimalen Pionenergie bei kollinearer Orientierung der Dreierimpulse beider  $\rho$ -Mesonen und  $w_{3\pi}^+$  der maximalen Pionenergie bei linearer Orientierung beider Dreierimpulse

$$w_{3\pi}^\pm = \sqrt{(|\vec{k}_1| \pm |\vec{k}_2|)^2 + m_\pi^2}.$$

Über die Deltafunktion in Gl. (2.30) wird dann der Relativwinkel zwischen den beiden Dreierimpulsen der  $\rho$ -Mesonen festgelegt und man erhält für  $x$

$$x_0 = \frac{w_{2\pi}^2 + \vec{k}_1^2 - (k_1^0 - w_{2\pi})^2}{2|\vec{k}_1|k_2}.$$

Es verbleibt eine numerische Integration über den Betrag des Dreierimpulses  $k_2$ . Die Integrationsgrenzen sind dabei durch die Theta-Funktionen festgelegt. Durch Auflösen der Argumente beider Theta-Funktionen ergibt sich für die untere und die obere Integrationsgrenze  $k_2^l$  bzw.  $k_2^u$

$$k_2^l = \frac{1}{2} \left| |\vec{k}_1| - k_1^0 \sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{s}} \right| \quad k_2^u = \frac{1}{2} \left( |\vec{k}_1| + k_1^0 \sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{s}} \right).$$

Dabei bezeichne  $s$  das Quadrat der invarianten  $\rho$ -Masse. Aus der Forderung, daß das Argument unter der Quadratwurzel positiv sein muß, ergibt sich für  $\Im m\Gamma_2$  die erwartete Schwelle bei der doppelten Pionmasse.

Die weitere Auswertung von  $\Im m\Sigma_{(2)}^1$  verläuft analog zu Abschnitt 2.2.2, d.h. Einsetzen der Pionspektralfunktion und Auswertung der Raumwinkelintegration:

$$\begin{aligned} \Im m\Sigma_{(2)}^1(q^2) &= 2 \left( \frac{g_{\omega\rho\pi} q_0}{m_\omega} \right)^2 \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \frac{\vec{k}_1^2}{2w_{1\pi}} \Im m\Gamma_2(q^0, q^0 - w_{1\pi}, |\vec{k}_1|) \Re \mathcal{D}_\rho(q^0 - w_{1\pi}, |\vec{k}_1|) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{g_{\omega\rho\pi} q_0}{\pi m_\omega} \right)^2 \int_0^\infty dk_1 \frac{k_1^4}{w_{1\pi}} \Im m\Gamma_2(q^0, q^0 - w_{1\pi}, k_1) \Re \mathcal{D}_\rho(q^0 - w_{1\pi}, k_1). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Es verbleibt noch ein numerisch auszuwertendes Integral. Auch hierbei wird das außerhalb der Vertexkorrektur verbleibende dritte Pion über die Spektralfunktion auf seine Massenschale gesetzt.

$$w_{1\pi} = \sqrt{\vec{k}_1^2 + m_\pi^2}$$

Zwei der drei Pionen im Endkanal werden diesmal, wie man aus Gl. (2.30) entnehmen kann, durch den Schnitt im Vertex generiert. Die obere Integrationsgrenze für  $k_1$  ergibt sich jetzt aus der Schwellenwertbedingung von  $\Im m\Gamma_2(q^0, s)$

$$s = (q^0 - w_{1\pi})^2 - \vec{k}_1^2 \stackrel{!}{=} (2m_\pi)^2$$

und führt ebenso wie im Fall des Ein-Loop Diagramms in Gl. (2.24) zu dem Wert von  $k_m$ . Damit ergibt sich auch hier die Schwelle für den Imaginärteil der Selbstenergie des  $\omega$ -Mesons zu  $q^2 > (3m_\pi)^2$ .

Abschließend soll noch auf einen Vorzeichenwechsel von  $\Im m\Sigma_{(2)}^1$  bei größeren invarianten  $\omega$ -Massen hingewiesen werden. Wie man aus Gl. (2.31) und Gl. (2.32) sieht, wird für die invariante Masse des  $\omega$ -Mesons von  $\sqrt{q^2} < m_\rho + m_\pi \approx 0.91 \text{ GeV}$  stets der Bereich unterhalb der physikalischen  $\rho$ -Masse im  $\rho$ -Propagator durchlaufen. Damit ist der Beitrag von der Vertexkorrektur  $\Im m\Gamma_2$  positiv und  $\Im m\Sigma_{(2)}^1$  negativ. Mit wachsendem  $q^2$  bleibt vorerst der Beitrag von  $\Im m\Gamma_2$  innerhalb des Integrationsintervalls von Gl. (2.32) positiv. Das führt wegen der nun auch möglichen positiven Beiträge von  $\Re e\mathcal{D}_\rho$  in Gl. (2.32) zu einem Vorzeichenwechsel. Wird die invariante Masse des  $\omega$ -Mesons schließlich genügend groß gewählt, so gibt es nur negative Beiträge von  $\Im m\Gamma_2$  zu Gl. (2.32), die den erneuten Vorzeichenwechsel in dem Imaginärteil der Selbstenergie verursachen. Das ist kein Widerspruch, da nur die Summe von  $\Im m\Sigma_{(2)}^1$  und  $\Im m\Sigma_{(1)}$  dem Quadrat des linken Matrixelements in Abb. 2.4 entspricht und dann das Vorzeichen nicht wechseln darf.

## 2.2.4 Interferenzterm

Ein weiterer Beitrag zur Breite im  $3\pi$ -Kanal ergibt sich aus dem Interferenzterm der Matrixelemente des direkten Zerfalls eines  $\omega$ -Mesons in drei Pionen und dem, das sich aus dem Zerfall über ein  $\rho$ -Meson ergibt.

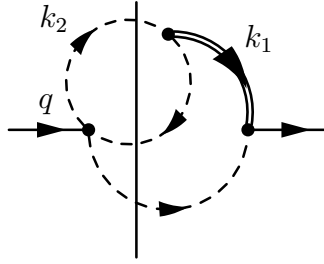


Abbildung 2.9: Beitrag zur Interferenz in niedrigster Ordnung

Aus den drei möglichen Ladungszuständen des  $\rho$ -Mesons und der Tatsache, daß der Pionloop auf beiden Seiten des Diagramms auftreten kann, ergibt sich ein Gewichtungsfaktor von 6. Nach Anwendung der Feynmanregeln erhält man folgenden Ausdruck für die Selbstenergie zu diesem Diagramm.

$$\Sigma_{(3)}(q_0^2) = 2 \times 2i \left( \frac{g_{\omega\rho\pi} q_0}{m_\omega} \right)^2 \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \vec{k}_1^2 \mathcal{D}_\rho(k_1) \mathcal{D}_\pi(q - k_1) \Gamma_B(k_1) \quad (2.33)$$

Dabei ist

$$\Gamma_B(k_1) = 3hi \frac{g_{\rho\pi\pi} m_\omega}{g_{\omega\rho\pi}} \int \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \left[ \vec{k}_2^2 - \frac{(\vec{k}_1 \vec{k}_2)^2}{\vec{k}_1^2} \right] \mathcal{D}_\pi(k_2) \mathcal{D}_\pi(k_2 - k_1) \quad (2.34)$$

und stellt wieder eine Korrektur zum  $\omega\rho\pi$ -Vertex dar. Insbesondere kommt es durch die spezielle Wahl des Ruhesystems für das  $\omega$ -Meson zu keiner  $q$ -Abhängigkeit in der Vertexkorrektur. Der in Abb. 2.9 dargestellte Schnitt gehört zu dem Beitrag der sich aus Matrixelementen in niedrigster Ordnung Störungstheorie, wie in Abb. 2.4 gezeigt, ergibt. Der zweite mögliche, durch das  $\rho$ -Meson laufende Schnitt, gehört dann wieder zu Matrixelementen höherer Ordnung und wird im Abschnitt 2.2.6 als Beitrag des mikroskopischen Formfaktors zur Selbstenergie untersucht. Die Auswertung des Imaginärteils dieses Graphen ist wieder im Anhang dargestellt.

$$\Im m\Sigma_{(3)}^1(q_0^2) = 2 \times 2 \left( \frac{g_{\omega\rho\pi} q_0}{m_\omega} \right)^2 \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \vec{k}_1^2 \int_0^{q_0} \frac{dw}{2\pi} \Im m\Gamma_B(q^0 - w, \vec{k}_1) \Re e \mathcal{D}_\rho(q^0 - w, |\vec{k}_1|) \mathcal{A}_\pi(w, |\vec{k}_1|) \quad (2.35)$$

$$\Im m\Gamma_B(k_1^0, \vec{k}_1) = -3h \frac{g_{\rho\pi\pi} m_\omega}{g_{\omega\rho\pi}} \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \left[ \vec{k}_2^2 - \frac{(\vec{k}_1 \vec{k}_2)^2}{k_1^2} \right] \frac{\pi \delta(k_1^0 - w_{2\pi} - w_{3\pi})}{2w_{2\pi} 2w_{3\pi}} \quad (2.36)$$

Das Selbstenergiendiagramm in Abb. 2.9 geht durch die Kontraktion des  $\rho$ -Propagators  $\mathcal{D}_\rho(k_2) \rightarrow 1$  aus dem Austauschdiagramm hervor. Dementsprechend ergibt sich der Imaginärteil der Vertexkorrektur im wesentlichen aus Gl. (2.30) mit  $\mathcal{D}_\rho(k_2) \rightarrow 1$ .

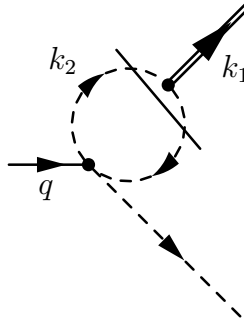


Abbildung 2.10: Beitrag vom Vertex zum Selbstenergieschnitt durch die 3 Pionen

Die beiden aufgeschnittenen Pionlinien im Vertex werden wieder durch ihre Spektralfunktion auf die Massenschale gesetzt.

$$w_{2\pi} = \sqrt{\vec{k}_2^2 + m_\pi^2} \quad w_{3\pi} = \sqrt{(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)^2 + m_\pi^2} \quad (2.37)$$

Insbesondere folgt hieraus die gleiche Abhandlung zur Kinematik beider Pionen im Vertex wie im vorherigen Abschnitt. Da hier kein  $\rho$ -Propagator im Integral von Gl. (2.36) auftaucht, ist auch noch die letzte Integration über den Betrag des Dreierimpulses  $k_2$  analytisch ausführbar und man erhält für den Imaginärteil des Vertex'

$$\Im m\Gamma_B(k_1^0, \vec{k}_1) = -\frac{3h}{96\pi} \frac{g_{\rho\pi\pi} m_\omega}{g_{\omega\rho\pi}} (s - 4m_\pi^2) \sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{s}} \Theta(s - 4m_\pi^2). \quad (2.38)$$

Dabei ist  $s = k_1^2$  wieder das Quadrat der invarianten  $\rho$ -Masse. Auch hier ergibt sich für den Imaginärteil des Vertex' eine Schwelle bei der doppelten Pionmasse. Diese Forderung war nötig um die  $\delta$ -Funktion in Gl. (2.36) überhaupt erfüllen zu können. Außerdem ist der Imaginärteil dieser Vertexkorrektur im Gegensatz zu  $\Im m\Gamma_2$  stets negativ. Desweiteren fällt auf, daß sich in Gl. (2.38) die gleiche funktionale Abhängigkeit von der invarianten  $\rho$ -Masse ergibt, wie bei dem Imaginärteil der  $\rho$ -Selbstenergie (siehe Abschnitt 2.1.1). Das ist darauf zurückzuführen, daß der einzige Beitrag zum Imaginärteil der  $\rho$ -Selbstenergie über genau diesen Zwei-Pion-Loop generiert wird [24].

Zur weiteren Auswertung von  $\Im m\Sigma_{(3)}^1$  wird die Pionspektralfunktion in den Ausdruck von Gl. (2.35) eingesetzt. Man erhält:

$$\begin{aligned}\Im m\Sigma_{(3)}^1(q_0^2) &= 2 \times 2 \left( \frac{g_{\omega\rho\pi} q_0}{m_\omega} \right)^2 \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \frac{\vec{k}_1^2}{2w_{1\pi}} \Im m\Gamma_B(q^0 - w_{1\pi}, |\vec{k}_1|) \Re e\mathcal{D}_\rho(q^0 - w_{1\pi}, |\vec{k}_1|) \\ &= \left( \frac{g_{\omega\rho\pi} q_0}{\pi m_\omega} \right)^2 \int_0^\infty dk_1 \frac{k_1^4}{w_{1\pi}} \Im m\Gamma_B(q^0 - w_{1\pi}, k_1) \Re e\mathcal{D}_\rho(q^0 - w_{1\pi}, k_1)\end{aligned}\quad (2.39)$$

Es verbleibt eine numerisch auszuführende Integration, wobei die obere Integrationsgrenze wieder durch die  $2\pi$ -Schwelle des Vertex' gegeben ist. Dieses Diagramm liefert einen destruktiven Beitrag zur Breite des  $\omega$ -Mesons, da für  $q^0 = m_\omega$  stets der Bereich unterhalb der physikalischen  $\rho$ -Masse in  $\Re e\mathcal{D}_\rho(m_\omega - w_{1\pi}, k_1)$  durchlaufen wird und  $\Im m\Sigma_{(3)}^1(m_\omega^2)$  in Gl. (2.39) positiv ist.

## 2.2.5 Direkter Beitrag

Der noch in niedrigster Ordnung Störungstheorie verbleibende Beitrag zur Zerfallsbreite im  $3\pi$ -Kanal, wird durch die direkte Kopplung des  $\omega$ -Mesons an die Pionen gegeben. Dem entspricht folgendes Diagramm.

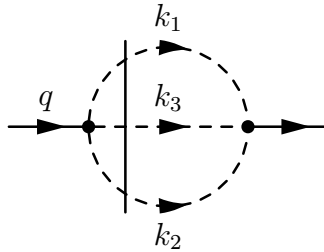


Abbildung 2.11: Beitrag vom Wess-Zumino Term

Mit den Feynmanregeln ergibt sich für dieses Selbstenergiendiagramm folgender Ausdruck:

$$\Sigma_{(4)}(q_0^2) = \frac{1}{3}(3hq_0)^2 \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \vec{k}_1^2 \left[ \frac{(\vec{k}_1\vec{k}_2)^2}{\vec{k}_1^2} - \vec{k}_2^2 \right] \mathcal{D}_\pi(k_1)\mathcal{D}_\pi(k_2)\mathcal{D}_\pi(q - k_1 - k_2).$$

Zur Auswertung des Imaginärteils von  $\Sigma_{(4)}$  sei wieder auf den Anhang verwiesen. Die Pionen werden durch ihre Spektralfunktion auf die Massenschale gesetzt. Dabei liegt die Notation aus dem vorherigen Abschnitt für die jeweilige Pionenergie, d.h. Gl. (2.37) zu Grunde.

$$\Im \Sigma_{(4)}(q^2) = -\frac{(3hq_0)^2}{3} \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{\vec{k}_1^2}{2w_{1\pi}} \int \frac{d^3 k_2}{2w_{2\pi}(2\pi)^3} \left[ \vec{k}_2^2 - \frac{(\vec{k}_1 \vec{k}_2)^2}{\vec{k}_1^2} \right] \frac{1}{2w_{3\pi}} \pi \delta(q^0 - w_{1\pi} - w_{2\pi} - w_{3\pi}) \quad (2.40)$$

Das Diagramm in Abb. 2.11 entsteht durch Kontraktion von  $\mathcal{D}_\rho(k_1) \rightarrow 1$  aus dem Selbstenergiendiagramm in Abb. 2.9. Genau wie unter Abschnitt 2.2.4 kann man die Dynamik der beiden Pionen  $w_{2\pi}$  und  $w_{3\pi}$  in dem Diagramm zusammenfassen (man vergleiche mit Gl. (2.36)). Mit der Substitution  $k_1^0 \rightarrow q^0 - w_{1\pi}$  in der Kinematik ergibt sich, abgesehen von den Kopplungskonstanten, in vollkommener Analogie der Ausdruck von Gl. (2.38), der wie schon erwähnt, dem Imaginärteil der  $\rho$ -Selbstenergie proportional ist. Schließlich wird das so ausgewertete Pionpaar wieder in Gl. (2.40) eingesetzt und man erhält

$$\Im \Sigma_{(4)}(q^2) = -\frac{(3hq_0)^2}{3} \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{\vec{k}_1^2}{2w_{1\pi}} \frac{(s - 4m_\pi^2)}{96\pi} \sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{s}} \Theta(s - 4m_\pi^2) \quad (2.41)$$

$$= -\frac{(hq_0)^2}{2(4\pi)^3} \int_0^\infty dk_1 \frac{k_1^4}{w_{1\pi}} (s - 4m_\pi^2) \sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{s}} \Theta(s - 4m_\pi^2) \quad (2.42)$$

Es verbleibt eine numerische Integration über den Betrag vom Dreierimpuls eines Pions. Die obere Integrationsgrenze von  $k_1$  wird wieder durch die  $2\pi$ -Schwelle im Argument der Thetafunktion festgelegt. Damit ergibt sich auch hier eine Schwelle für den Imaginärteil der  $\omega$ -Selbstenergie bei  $\sqrt{q^2} > 3m_\pi$ .

## 2.2.6 Beitrag durch den mikroskopischen Formfaktor

In diesem Abschnitt sollen die noch verbleibenden Schnitte in den zweiten und dritten Selbstenergiendiagramm von Abbildung 2.3 untersucht werden. Diese Schnitte sind noch

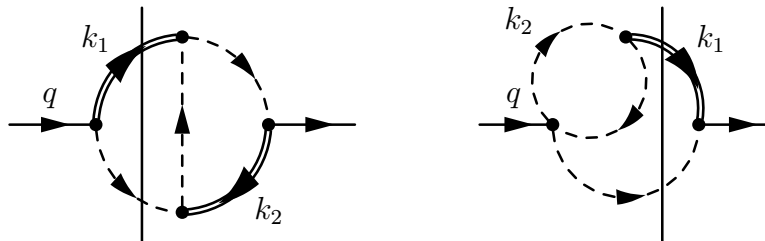


Abbildung 2.12: Beitrag von Vertexkorrekturen zum Imaginärteil der  $\omega$ -Selbstenergie

einmal in Abb. 2.12 dargestellt. Dabei handelt es sich um Interferenzterme von Matrixelementen niedrigster Ordnung mit Matrixelementen, die Vertexkorrekturen enthalten (siehe z.B. Abb. 2.7).

Beide Beiträge gehören, verglichen mit dem Interferenzterm aus Abschnitt 2.2.4, zur höheren Ordnung der Störungsreihe und werden deshalb mit Index 2 versehen. Für den Vertex des linken Diagramms (siehe Gl. (2.26)) wird wieder Index A und für den des rechten Diagramms wieder Index B (siehe Gl. (2.34)) verwendet. Beginnen werde ich mit der Auswertung des linken Bildes, dabei wurde nur einer der beiden möglichen Schnitte zum  $3\pi$ -Kanal eingezeichnet. Mit Gl. (25) findet man

$$\Im m_{\Sigma(2)}^2(q_0^2) = -\left(\frac{g_{\omega\rho\pi} q_0}{m_\omega}\right)^2 \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{\vec{k}_1^2}{2w_{1\pi}} \Re e \Gamma_A(q^0, q^0 - w_{1\pi}, |\vec{k}_1|) \mathcal{A}_\rho(q^0 - w_{1\pi}, |\vec{k}_1|) \quad (2.43)$$

wobei

$$\begin{aligned} \Re e \Gamma_A(q_0, k_1) = & -4g_{\rho\pi\pi}^2 \oint \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \left[ \vec{k}_2^2 - \frac{(\vec{k}_1 \vec{k}_2)^2}{k_1^2} \right] \frac{1}{2w_{2\pi} 2w_{3\pi}} \int_0^\infty \frac{dw}{2\pi} \mathcal{A}_\rho(w, |\vec{k}_2|) \quad (2.44) \\ & \left( \frac{2w}{w^2 - (q^0 - w_{2\pi})^2} \frac{1}{k_1^0 - w_{2\pi} - w_{3\pi}} - \frac{2w}{w^2 - (q^0 + w_{2\pi})^2} \frac{1}{k_1^0 + w_{2\pi} + w_{3\pi}} \right. \\ & \left. + \frac{2w_{2\pi}}{w_{2\pi}^2 - (q^0 + w)^2} \frac{1}{k_1^0 - q^0 - w - w_{3\pi}} - \frac{2w_{2\pi}}{w_{2\pi}^2 - (q^0 - w)^2} \frac{1}{k_1^0 - q^0 + w + w_{3\pi}} \right). \end{aligned}$$

Im Gegensatz zum Schnitt durch den Vertex stehen hier Beiträge des Realteils der Vertexkorrektur unter dem Integral. Prinzipiell könnte man die bei Berechnung des Realteils von  $\Gamma_A$  verbleibenden Integrationen nach Wahl eines geeigneten Regularisierungsverfahrens numerisch auswerten, doch soll hier ein anderer Zugang gewählt werden. Damit wird insbesondere die zur Auswertung des Hauptwertintegrals notwendige Bestimmung der Polstruktur vereinfacht. Außerdem hat sich im nachhinein gezeigt, daß dieses Verfahren numerisch wesentlich schneller und stabiler arbeitet.

Dazu wird erst der vollständige Imaginärteil der Vertexfunktion bestimmt. Die Benutzung von Dispersionsintegralen bzw. Hilbert-Transformationen, macht dann die wesentlich einfachere Berechnung des Realteils von  $\Gamma_A$  möglich. Da die Anwendung der Dispersionsintegrale retadierte Randbedingungen voraussetzt, muß auch hier von der retadierten Vertexkorrektur  $\Gamma_A^+$  ausgegangen werden [41, 42].  $\Gamma_A^+$  und  $\Gamma_A$  unterscheiden sich nur hinsichtlich des über die Randbedingung fixierten Imaginärteils, aber nicht im Realteil. Weiterhin ist aus der Gl. (2.26) sofort die Symmetrie  $\Gamma_A(q^0, k_1) = \Gamma_A(-q^0, -k_1)$  zu erkennen. Im Gegensatz hierzu ist der Imaginärteil der bezüglich  $k_1^0$  retadierten Vertexkorrektur in Gl. (2.45) ungerade unter Umkehr beider Impulse. Für  $\Im m \Gamma_A$  ist das Minuszeichen vor dem jeweils zweiten Term der Zeilen zwei bis vier in Gl. (2.45) durch ein Pluszeichen zu ersetzen. Die Beiträge aus den einzelnen Zeilen gehören zu den drei Schnitten im Vertex. (vgl. Anhang und Abb. 2.16)

$$\begin{aligned}
 \Im \Gamma_A^+(q_0, k_1) &= 4g_{\rho\pi\pi}^2 \wp \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \left[ \vec{k}_2^2 - \frac{(\vec{k}_1 \vec{k}_2)^2}{\vec{k}_1^2} \right] \frac{1}{2w_{2\pi} 2w_{3\pi}} \int_0^\infty \frac{dw}{2\pi} \mathcal{A}_\rho(w, |\vec{k}_2|) \\
 &\left[ \frac{2w}{w^2 - (q^0 - w_{2\pi})^2} \pi \delta(k_1^0 - w_{2\pi} - w_{3\pi}) - \frac{2w}{w^2 - (q^0 + w_{2\pi})^2} \pi \delta(k_1^0 + w_{2\pi} + w_{3\pi}) \right. \\
 &+ \frac{2w_{2\pi}}{w_{2\pi}^2 - (q^0 + w)^2} \pi \delta(k_1^0 - q^0 - w - w_{3\pi}) - \frac{2w_{2\pi}}{w_{2\pi}^2 - (q^0 - w)^2} \pi \delta(k_1^0 - q^0 + w + w_{3\pi}) \\
 &\left. + \frac{2w_{3\pi}}{w_{3\pi}^2 - (k_1^0 - w_{2\pi})^2} \pi \delta(q^0 - w - w_{2\pi}) - \frac{2w_{3\pi}}{w_{3\pi}^2 - (k_1^0 + w_{2\pi})^2} \pi \delta(q^0 + w + w_{2\pi}) \right] \quad (2.45)
 \end{aligned}$$

Die zweite Zeile in Gl. (2.45) läßt sich wie in Abschnitt 2.2.3 dargestellt vereinfachen und für die dritte Zeile verbleiben zwei numerisch auszuwertende Integrationen.

Im Vakuum können Vertexkorrekturen mit drei externen Linien nur Funktionen von den lorentzinvarianten Größen  $q^2$ ,  $k_1^2$  und  $(q \cdot k_1)$  sein. Also ergibt sich für  $\Gamma_A$  auf Grund der Wahl des Ruhesystems eine Abhängigkeit von  $k_1^0$  und  $q^0$ . Damit muß von der allgemeinen Form der Hilbert–Transformation ausgegangen werden [42]. In den nächsten Gleichungen wird der Vierervektor  $k_1$  in seiner Null–Komponente  $\omega$  und im Dreiervektor  $\vec{k}_1$  geschrieben.

$$\begin{aligned}
 \Re \Gamma(q^0, k_1) &= \wp \int_{-\infty}^\infty \frac{dw}{\pi} \frac{\Im \Gamma^+(q^0, w, |\vec{k}_1|)}{w - k_1^0} \\
 &= \frac{1}{2} \wp \int_0^\infty \frac{dw^2}{\pi} \frac{\Im \Gamma^+(q^0, w, |\vec{k}_1|) - \Im \Gamma^+(q^0, -w, |\vec{k}_1|)}{w^2 - k_1^{02}} \\
 &\quad + k_1^0 \wp \int_0^\infty \frac{dw}{\pi} \frac{\Im \Gamma^+(q^0, w, |\vec{k}_1|) + \Im \Gamma^+(q^0, -w, |\vec{k}_1|)}{w^2 - k_1^{02}} \quad (2.46)
 \end{aligned}$$

Bei der Auswertung des Dispersionsintegrals gibt es keine Beiträge von der vierten Zeile in Gl. (2.45) zum Realteil von  $\Gamma_A$ . Alternativ hätte man auch bezüglich  $q^0$  retardieren können. Dann erhält man für die Ausdrücke in der dritten Zeile von Gl. (2.45) einen Vorzeichenwechsel und bei der Auswertung des Dispersionsintegrals würden die Terme aus der zweiten Zeile von Gl. (2.45) keinen Beitrag zum Realteil von  $\Gamma_A$  bringen.

Für den Fall einer verschwindenden  $(q \cdot k_1)$ -Abhängigkeit der Vertexkorrektur, wie sie bei dem Zwei–Pion–Loop in Gl. (2.34) auftrat, entfällt die letzte Zeile von Gl. (2.46) und man gelangt wieder zur vereinfachten Form der Hilbert–Transformation, die im Anschluß hieran zur Berechnung des Realteils von  $\Gamma_B(k_1)$  benutzt wird.

Das zur Auswertung des Realteils der Vertexkorrekturen notwendige Regularisierungsverfahren läßt sich ebenfalls mit Hilfe des Dispersionsintegrals durchführen. Dazu wird die  $w$ -Integration in Gl. (2.46) abgeschnitten. Um das Verfahren lorentzinvariant zu halten wird als Cut–off Energie

$$w_\Lambda = \sqrt{\vec{k}_1^2 + \Lambda}$$



gewählt, d.h. es wird bei der invarianten Masse von  $\sqrt{\Lambda}$  abgebrochen. Für größere invariante Massen sind die hier betrachteten Hadronen nicht länger die relevanten Freiheitsgrade.

Außerdem muß bei Berücksichtigung der Vertexkorrekturen eine Modifikation der Kopplungskonstanten  $g_{\omega\rho\pi}$  vorgenommen werden. Mit Hilfe des  $\omega \rightarrow \pi\gamma$  Zerfalls kann der Photopunkt als Renormierungspunkt für die nun impulsabhängige Kopplungskonstante  $g_{\omega\rho\pi}$  vorgegeben werden. Die dafür notwendige Separation der Impulsabhängigkeit von  $g_{\omega\rho\pi}$  läßt sich unter Verwendung von subtrahierten Dispersionsintegralen durchführen. Das hier geschilderte Vorgehen soll an Hand der Vertexkorrektur von Gl. (2.34) exemplarisch durchgeführt werden. Mit Gl. (2.46) erhält man nach Separation des Photopunktes

$$\Re\Gamma_B(s) = \Re\Gamma_B(0) + \Re\Delta\Gamma_B(s) = \Re\Gamma_B(0) + s \wp \int_0^\Lambda \frac{ds'}{\pi} \frac{\Im m\Gamma_B(s')}{s'(s'-s)}. \quad (2.47)$$

Dabei ist eine Variablensubstitution zur invarianten  $\rho$ -Masse  $\sqrt{s}$  durchgeführt worden. Die Impulsabhängigkeit des Realteils der Vertexkorrektur wird durch den jeweils zweiten Term in Gl. (2.47) gegeben. Einsetzen von Gl. (2.38) in den obigen Integranden ergibt

$$\begin{aligned} \Re\Gamma_B(0) &= -\frac{3h}{96\pi^2} \frac{g_{\rho\pi\pi} m_\omega}{g_{\omega\rho\pi}^0} 4m_\pi^2 \left[ \left( \frac{\Lambda}{4m_\pi^2} + 2 \right) \sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{\Lambda}} - 3 \ln \sqrt{\frac{\Lambda}{4m_\pi^2}} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{\Lambda}} \right) \right] \\ \Re\Delta\Gamma_B(s) &= -\frac{3h}{48\pi^2} \frac{g_{\rho\pi\pi} m_\omega}{g_{\omega\rho\pi}^0} s \left[ -\frac{4m_\pi^2}{s} \sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{\Lambda}} + \ln \sqrt{\frac{\Lambda}{4m_\pi^2}} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{\Lambda}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{G}(s, \Lambda) \right] \end{aligned} \quad (2.48)$$

Dabei ist der Ausdruck  $\mathcal{G}(s, \Lambda)$  im Realteil von  $\Delta\Gamma_B(s)$  unter- und oberhalb der  $2\pi$ -Schwelle gegeben durch

$$\mathcal{G}(s, \Lambda) = \begin{cases} \left( \frac{4m_\pi^2}{s} - 1 \right)^{3/2} \arctan \left[ \frac{1 - \frac{4m_\pi^2}{\Lambda}}{\frac{4m_\pi^2}{s} - 1} \right]^{1/2} & 0 < s < 4m_\pi^2 \\ -\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{4m_\pi^2}{s} \right)^{3/2} \ln \left| \frac{\sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{\Lambda}} + \sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{s}}}{\sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{\Lambda}} - \sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{s}}} \right| & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Kopplungskonstante  $g_{\omega\rho\pi}$  muß jetzt durch die nackte Kopplungskonstante  $g_{\omega\rho\pi}^0$  ersetzt werden. Wie man aus Gl. (2.48) erkennt, bleibt eine logarithmische Abhängigkeit vom Regulator im impulsabhängigen Anteil von  $\Re\Delta\Gamma_B(s)$  stehen.

Die Auswertung von  $\Re\Delta\Gamma_A(q^0, k_1)$  wird unter Verwendung von Gl. (2.46) numerisch durchgeführt. Dabei wird der Photopunkt des Vertex für ein auf der Massenschale sitzendes  $\omega$ -Meson absepariert.

$$\Re\Gamma_A(q^0, k_1) = \Re\Gamma_A(m_\omega, k_\gamma) + \Re\Delta\Gamma_A(q^0, k_1)$$

$$\text{mit } k_\gamma^2 = 0 \quad k_\gamma^0 = |\vec{k}_\gamma| = \sqrt{\frac{1}{4} \left( m_\omega + \frac{m_\pi^2}{m_\omega} \right)^2 - m_\pi^2}$$

Wie erwähnt läßt sich der Photopunkt als Renormierungspunkt für die impulsabhängige Kopplungskonstante  $g_{\omega\rho\pi}$  heranziehen. Dazu müssen die gleichen Vertexkorrekturen zu dem in Abschnitt 2.1.1 betrachteten Zerfall  $\omega \rightarrow \pi\gamma$  berücksichtigt werden. Die entsprechenden Matrixelemente sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\lambda,\lambda'}^{(2)} &= 2i \frac{g_{\omega\rho\pi}^0}{m_\omega} f_\rho \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} p^\gamma q^\delta \mathcal{D}_\rho(k) \epsilon_\mu^*(\lambda') \epsilon^\beta(\lambda) \\ &\quad 4i g_{\rho\pi\pi}^2 \int \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} k_2^\alpha (q + k_2)^\mu \mathcal{D}_\pi(q + k_2) \mathcal{D}_\pi(q + k_2 - k) \mathcal{D}_\rho(k_2) \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\lambda,\lambda'}^{(3)} &= -i f_\rho \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} k^\gamma p^\delta \mathcal{D}_\rho(k) \epsilon_\mu^*(\lambda') \epsilon^\alpha(\lambda) \\ &\quad 2g_{\rho\pi\pi} 3hi \int \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} k_2^\beta k_2^\mu \mathcal{D}_\pi(k_2) \mathcal{D}_\pi(k_2 - k) \quad . \end{aligned} \quad (2.50)$$

Bei Auswertung von Gl. (2.5) werden die Beiträge, die durch die Interferenz mit dem Matrixelement der niedrigsten Ordnung  $\mathcal{M}^{(1)}$  gebildet werden, berücksichtigt. Bei Erweiterung der Berechnung der  $\omega$ -Selbstenergie auf 3-Loop-Diagramme, wäre dann auch die Einbeziehung von Korrekturen durch  $|\mathcal{M}^{(2)} + \mathcal{M}^{(3)}|^2$  notwendig. Der Grund für dieses Vorgehen folgt aus den nicht übereinstimmenden Entwicklungsschemata von Matrixelementen und Selbstenergiediagrammen. Man erhält damit für die  $\omega$ -Zerfallsbreite im  $\pi\gamma$ -Kanal

$$\begin{aligned} \Gamma_{\pi^0\gamma} &= \frac{\alpha}{24} \left( \frac{g_{\omega\rho\pi}^0}{g_{\rho\pi\pi}} \right)^2 m_\omega \left( 1 - \frac{m_\pi^2}{m_\omega^2} \right)^3 (1 + 2 \Re e \Gamma_A(m_\omega, k_\gamma) + 2 \Re e \Gamma_B(0)) \\ &\stackrel{!}{=} 0.72 \text{ MeV} \quad . \end{aligned} \quad (2.51)$$

Hieraus ergibt sich dann die entsprechende Renormierungsgleichung für die Kopplungskonstante  $g_{\omega\rho\pi}$  am Photopunkt.

$$g_{\omega\rho\pi}^2 = (g_{\omega\rho\pi}^0)^2 (1 + 2 \Re e \Gamma_A(m_\omega, k_\gamma) + 2 \Re e \Gamma_B(0)) \quad (2.52)$$

Dabei ist der Wert der Kopplungskonstante  $g_{\omega\rho\pi}$  am Photopunkt durch Gl. (2.8) gegeben.



Abbildung 2.13: Beitrag von Vertexkorrekturen zum  $\omega$ -Zerfall in  $\pi^0$  und  $\gamma$

Es bleibt nun noch der Schnitt  $\Im m \Sigma_{(3)}^2(q_0^2)$  im rechten Diagramm von Abb. 2.12 auszuwerten. Der analytische Ausdruck für  $\Im m \Sigma_{(3)}^2(q_0^2)$  läßt sich wieder als Faltung des Realteils der Vertexkorrektur  $\Gamma_B(s)$  mit der Spektralfunktion von  $\rho$ -Meson und Pion schreiben (vgl. Anhang)

$$\Im m \Sigma_{(3)}^2(q_0^2) = -2 \times \left( \frac{g_{\omega\rho\pi}^0 q_0}{m_\omega} \right)^2 \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{\vec{k}_1^2}{2w_{1\pi}} \Re e \Gamma_B(s) \mathcal{A}_\rho(q^0 - w_{1\pi}, |\vec{k}_1|) \quad (2.53)$$

$$\text{mit } s = (q^0 - w_{1\pi})^2 - \vec{k}_1^2.$$

Der Realteil von  $\Gamma_B(s)$  wurde bereits ausgewertet und kann in Gl. (2.53) eingesetzt werden, damit verbleibt eine numerisch auszuwertende Integration.

Schließlich läßt sich der durch die impulsabhängige Kopplungskonstante gegebene Beitrag zum Imaginärteil der  $\omega$ -Selbstenergie wie in Abb. 2.14 gezeigt wird zusammenfassen. Der Schnitt im Ein-Loop-Diagramm  $\Im m \Sigma_{(1)}(q_0^2)$  wurde durch Gl. (2.23) gegeben.

$$\Im m \Sigma_{(1)}(q_0^2) + 2 \times \Im m \Sigma_{(2)}^2(q_0^2) + \Im m \Sigma_{(3)}^2(q_0^2) = \Im m \Sigma_f(q_0^2)$$

Abbildung 2.14: Beitrag des Formfaktors  $|f_{\omega\pi}|^2$  zum Imaginärteil der  $\omega$ -Selbstenergie

$$\Im m \Sigma_f(q_0^2) = - \left( \frac{g_{\omega\rho\pi}^0 q_0}{m_\omega} \right)^2 \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{\vec{k}_1^2}{2w_{1\pi}} \mathcal{A}_\rho(q^0 - w_{1\pi}, |\vec{k}_1|) |f_{\omega\pi}|^2 \quad (2.54)$$

Dabei bezeichnet  $|f_{\omega\pi}|^2$  den mikroskopischen Formfaktor.

$$|f_{\omega\pi}|^2 = 1 + \left( \frac{g_{\omega\rho\pi}^0}{g_{\omega\rho\pi}} \right)^2 [2 \Re e \Delta \Gamma_A(q^0, q^0 - w_{1\pi}, |\vec{k}_1|) + 2 \Re e \Delta \Gamma_B(s)] \quad (2.55)$$

Der Koeffizient 2 der Interferenzterme in Gl. (2.55) folgt im linken Bild von Abb. 2.12 aus dem analogen Schnitt auf der rechten Seite des Diagramms und im rechten Bild aus der Anordnung des Zwei-Pion-Loops auf der rechten Seite des Diagramms. Wie im weiteren aus Gl. (2.55) zu erkennen ist, läuft der Formfaktor  $|f_{\omega\pi}|^2$  für ein reelles  $\omega$ -Meson und wegen der Renormierung in Gl. (2.52) im Falle eines lichtartigen  $\rho$ -Mesons gegen 1. (vgl. auch Abb. 2.18 und 2.19)

Im nächsten Schritt soll die Abhängigkeit des Formfaktors vom Regulator  $\Lambda$  untersucht werden. Dazu ist der Formfaktor  $|f_{\omega\pi}|^2$  in Abb. 2.15 für drei verschiedene Regulatormassen  $\sqrt{\Lambda} = 1.5, 2.0$  und  $3.0$  GeV abgebildet.

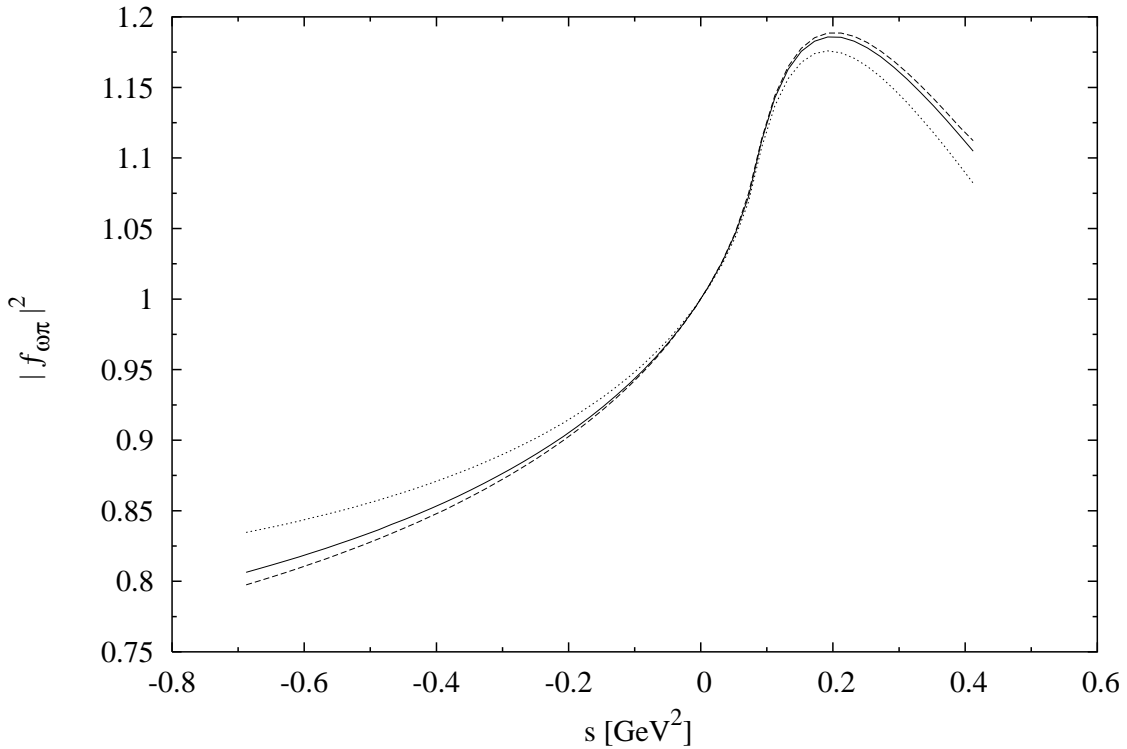


Abbildung 2.15: Der Formfaktor  $|f_{\omega\pi}|^2$  als Funktion der quadrierten invarianten  $\rho$ -Masse  $s$  für verschiedene Regulatormassen  $\sqrt{\Lambda}$ : 1.5 GeV (gepunktet), 2.0 GeV (durchgezogen), 3.0 GeV (gestrichelt).

Wie man erkennt, wird der Formfaktor ab  $\sqrt{\Lambda} = 2$  GeV praktisch unabhängig von der Regulatormasse. Der Grund dafür findet sich in den mit entgegengesetzten Vorzeichen behafteten Beiträgen beider Vertexkorrekturen. Die für  $\Re\Delta\Gamma_B(s)$  in Gl. (2.48) gegebene logarithmische Abhängigkeit von der Regulatormasse hebt sich in guter Näherung gegen die ebenfalls logarithmische Abhängigkeit von  $\sqrt{\Lambda}$  in  $\Re\Delta\Gamma_A(q^0, k_1)$  weg.

Weiterhin fällt auf, daß der Bereich vom Photopunkt bis zu  $\sqrt{s} \approx 0.35$  GeV schon ab kleineren Regulatormassen von 1.5 GeV unverändert bleibt. Wie im Abschnitt 2.5.2 genauer erläutert wird und hier vorweggenommen sei, ergibt der Vergleich mit dem experimentell bestimmten Formfaktor, daß genau dieser Bereich von  $|f_{\omega\pi}|^2$  durch die Daten reproduziert wird. Größere invariante Massen  $0.35 \text{ GeV} < \sqrt{s} < (m_\omega - m_\pi)$  können nur durch Terme höherer Ordnung erklärt werden, wie sich gleich zeigen wird. In der weiteren Verwendung des Formfaktors wurde der Regulator auf  $\sqrt{\Lambda} = 2.5$  GeV gesetzt.

In den Abbildungen 2.18 und 2.19 sind die beiden Vertexkorrekturen separat für diese Regulatormasse gezeigt. Dabei sollen vorerst die Imaginärteile von  $\Gamma_{A,B}$  in den jeweils rechten Bildern diskutiert werden.

Die Schwelle in Abb. 2.19 liegt wegen des einzig möglichen Schnittes in  $\Gamma_B$  bei der doppelten Pionmasse (siehe Abb. 2.10). Zur Korrektur  $\Gamma_A$  gibt es neben dem Schnitt durch die beiden Pionlinien auch zwei Schnitte die durch das  $\rho$ -Meson verlaufen (siehe Abb. 2.16). Deshalb verschwindet der Imaginärteil der Vertexkorrektur  $\Gamma_A$  für ein auf

der Massenschale sitzendes  $\omega$ -Meson nicht im raumartigen Bereich von  $s$ . Im zeitartigen Bereich kommt der Beitrag in guter Näherung ebenfalls von dem Schnitt durch die beiden Pionlinien. Geht man zu einem virtuellen  $\omega$ -Meson mit höherer invarianter Masse  $q^0$ , so werden auch beide  $\rho$ -Schnitte immer wichtiger. Erst durch höhere invariante  $\omega$ -Massen läßt sich die  $\rho$ -Resonanz in der Vertexkorrektur anregen. Dies sieht man auch beim Vergleich beider Realteile in den jeweils linken Bildern von Abb. 2.18 und 2.19.

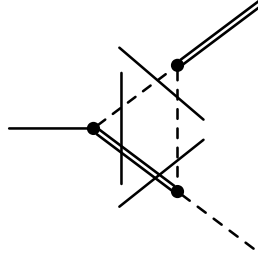


Abbildung 2.16: Die drei möglichen Schnitte in der Vertexkorrektur  $\Gamma_A$

Hier ergibt sich für  $\Re\Delta\Gamma_A$  eine resonante Struktur durch das  $\rho$ -Meson, die im unteren Bild fehlt. In beiden Fällen liegt der Bereich, in dem sich der Realteil der Vertexkorrektur am deutlichsten verändert, in der Nähe der Schwelle des Imaginärteils. Das ist auch plausibel, denn sobald die Kinematik reelle  $\pi$ -Endzustände erlaubt, die von der Wolke virtueller Teilchen abseparieren können, geht damit eine signifikante Änderung in der Kopplungskonstante einher.

Damit ist auch schon der Gültigkeitsbereich dieser Rechnung vorgegeben. Da mit den bisherigen Korrekturen nur der Bereich von  $\sqrt{s} < 3m_\pi$  bezüglich Schwellenverhalten berücksichtigt wurde, die  $\rho\pi$ -Schnitte in  $\Gamma_A$  sind hierbei vernachlässigbar klein, ist auch nur von einer realistischen Beschreibung des Formfaktors im unteren Bereich auszugehen. Es ist außerdem offensichtlich, daß die Vernachlässigung von jeglichen Beiträgen höherer Ordnung gleichbedeutend mit der Annahme ist, den Formfaktor  $|f_{\omega\pi}|^2$  auf eins zu setzen. Das ist immer dann möglich, wenn die Impulsabhängigkeit der Kopplungskonstante von der Kinematik des jeweiligen Prozesses nicht 'abgetastet' wird (z.B.  $\rho \rightarrow \pi^+\pi^-$  im Vakuum). Bei der hier vorliegenden Kinematik des 3-Körper Zerfalls wird allerdings der Bereich von  $2m_\pi \leq \sqrt{s} \leq m_\omega - m_\pi$  im Formfaktor durchlaufen, folglich müßten weitere

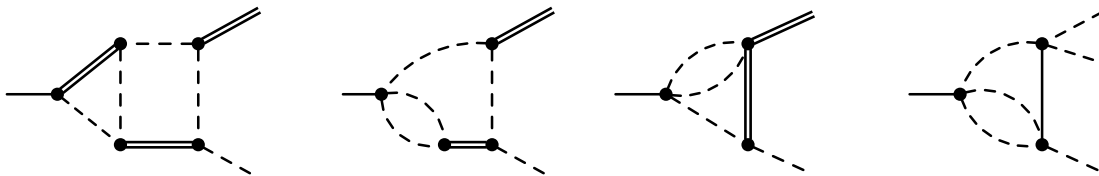


Abbildung 2.17: Beispiele für Beiträge von Vertexkorrekturen mit der Möglichkeit drei Pionlinien simultan aufzuschneiden.

Korrekturen betrachtet werden. Erste Vertexschnitte durch drei Pionlinien finden sich dann in Zwei-Loop-Vertexkorrekturen, wie sie beispielsweise in Bild 2.17 zu sehen sind.

Insbesondere gibt es dann den ersten Beitrag durch den  $\rho\rho\pi\pi$ -Vertex. Diese Korrekturen zum Formfaktor müßten bei einer Entwicklung bis zu Drei-Loop-Diagrammen berechnet werden. Allein schon aus der Anzahl der neu hinzukommenden Selbstenergiadiagramme muß sich im Rahmen dieser Arbeit auf die Entwicklung bis zu Zwei-Loop-Diagramme beschränkt werden.

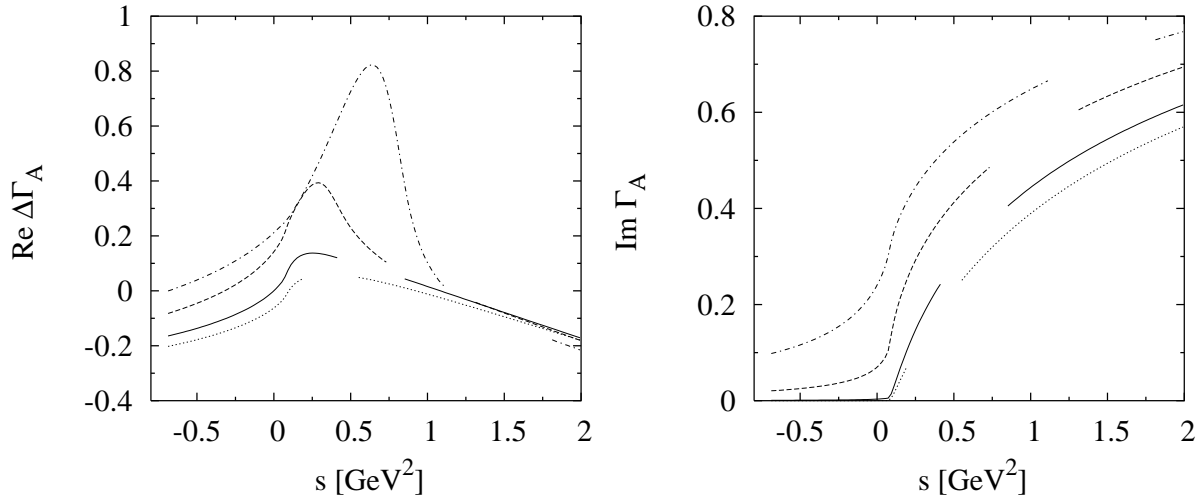


Abbildung 2.18:  $\Re\Delta\Gamma_A(q^0, k_1)$  und  $\Im\Gamma_A(q^0, k_1)$  als Funktion des Quadrates der invarianten  $\rho$ -Masse  $s$  für verschiedene invariante  $\omega$ -Massen  $q^0$ : 0.6 GeV(gepunktet), 0.782 GeV(durchgezogen), 1.0 GeV(gestrichelt), 1.2 GeV(Strich-Punkt). Die Lücken gehören zu dem kinematisch verbotenen Bereich von  $s = (q^0 - m_\pi)^2 \dots (q^0 + m_\pi)^2$ .

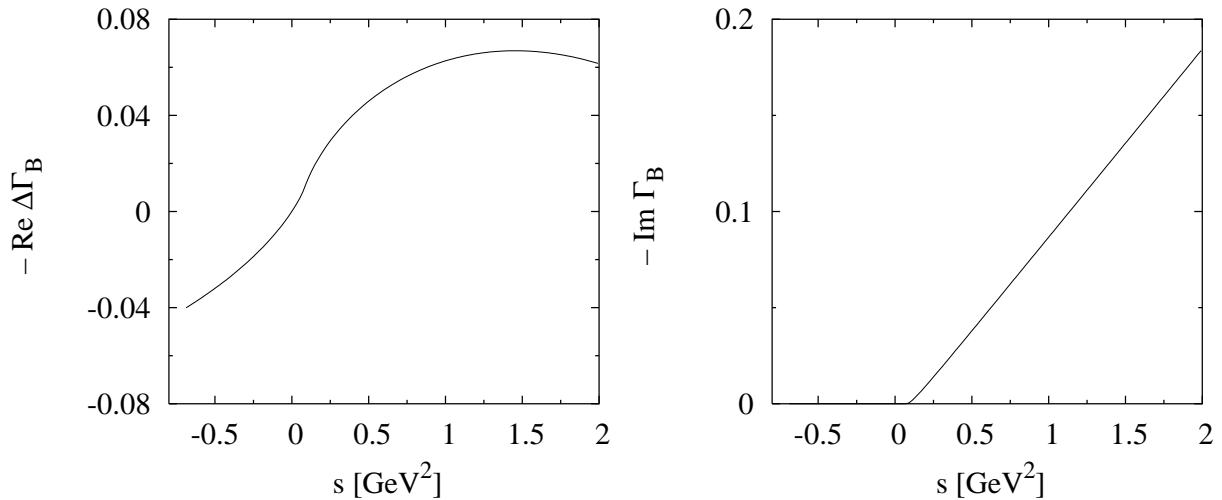


Abbildung 2.19:  $-\Re\Delta\Gamma_B$  und  $-\Im\Gamma_B$  als Funktion des Quadrates der invarianten  $\rho$ -Masse  $s$

Zum Abschluß soll zumindest noch der Ausblick auf die Fortsetzung der Störungsreihe der Selbstenergie gegeben werden. Dazu ist in Abb. 2.21 nochmals die Entwicklung in Matrixelementen und Selbstenergiediagrammen gegenübergestellt.

Die Schnitte in den vier Diagrammen der ersten Spalte gehören zur Rechnung ohne Vertexkorrektur. Die Interferenzterme von  $\mathcal{M}_1$  mit den Vertexkorrekturen entsprechen den Schnitten in beiden folgenden Diagrammen in Zeile eins und zwei. Dabei geht der jeweils zweite Schnitt in den Diagrammen der dritten Spalte durch Vertauschen des Zwei-Pion-Loops hervor. Die zweite Zeile entsteht aus den jeweils darüberliegenden Diagrammen infolge Permutation der Pionen. Die dabei rechten Gleichheitszeichen beziehen sich nur auf die Zeile und geben den Beitrag mit mikroskopischen Formfaktor wieder.

Analog wurde in der dritte Zeile geordnet. Die Schnitte entsprechen jetzt Interferenztermen von  $\mathcal{M}_2$  mit dem jeweiligen Matrixelement. Addiert man Zeile drei und vier, so führt das wieder auf einen Formfaktor, der sich allerdings von  $|f_{\omega\pi}|^2$  unterscheidet.

Wie lassen sich nun die Beiträge von  $|\mathcal{M}_3 + \mathcal{M}_4|^2$  verstehen? Eine analoge Rechnung zu der im Anhang dargestellten für Drei-Loop-Diagramme erbringt das gleiche Faktorisierungsverhalten in die Spektralfunktion der jeweils geschnittenen Propagatoren und den Realteil der verbleibenden Terme im Integral. Damit können Schnitte der unteren Zeile von Abb. 2.21 in die Form von Gl. (2.54) gebracht werden und mit in der ersten Zeile als Beitrag höherer Korrekturen zum Formfaktor aufsummiert werden. Die schließlich noch verbleibenden  $3\pi$ -Schnitte der 3-loop Diagramme entsprechen dann wieder Interferenztermen von  $\mathcal{M}_1$  mit höheren Vertexkorrekturen, wie sie in den beiden linken Bildern von Abb. 2.17 zu sehen sind. Durch diese Art des Zusammenfassens werden alle  $3\pi$ -Schnitte in den Selbstenergiediagrammen berücksichtigt ohne den Formfaktor aufzuschneiden. Noch fehlende Schnitte gehören zum  $5\pi$ -Kanal des  $\omega$ -Mesons.

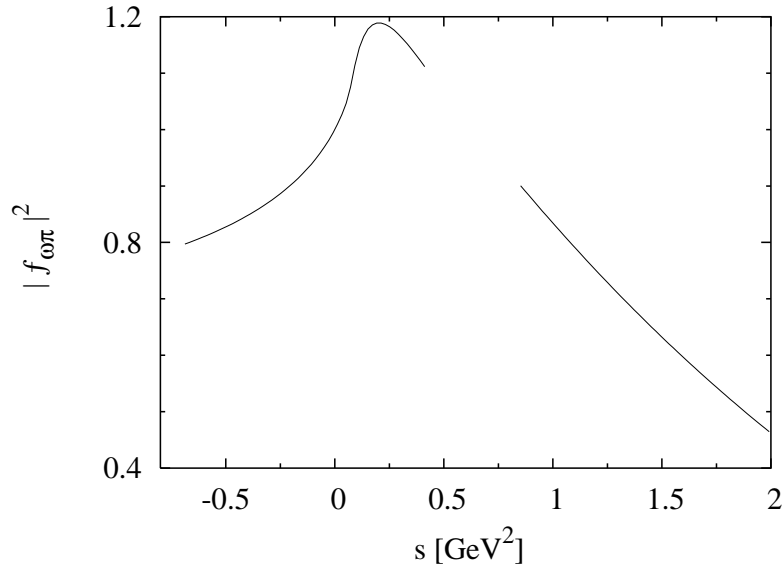
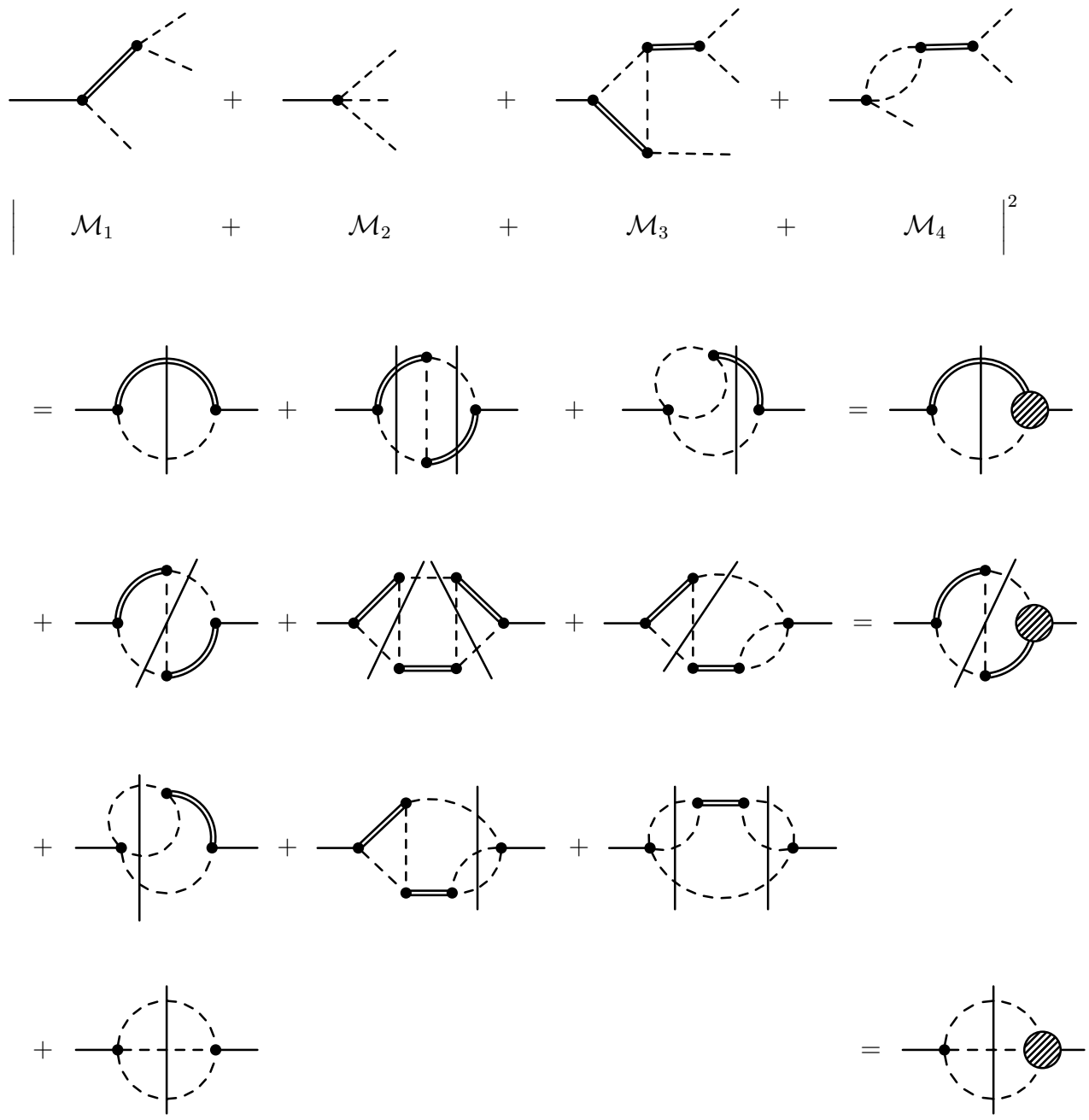


Abbildung 2.20: Der Formfaktor  $|f_{\omega\pi}|^2$  als Funktion des Quadrates der invarianten  $\rho$ -Masse  $s$  für ein reelles  $\omega$ -Meson. Die Lücke gehört zu dem kinematisch verbotenen Bereich  $s = (m_\omega - m_\pi)^2 \cdots (m_\omega + m_\pi)^2$ .

Zur besseren Übersicht ist der bisher berechnete mikroskopische Formfaktor nochmals in Abb. 2.20 dargestellt. Oberhalb des kinematisch verbotenen Bereichs kann der Wirkungsquerschnitt von  $e^-e^+ \rightarrow \omega\pi^0$  zur Analyse des Formfaktors benutzt werden [49].





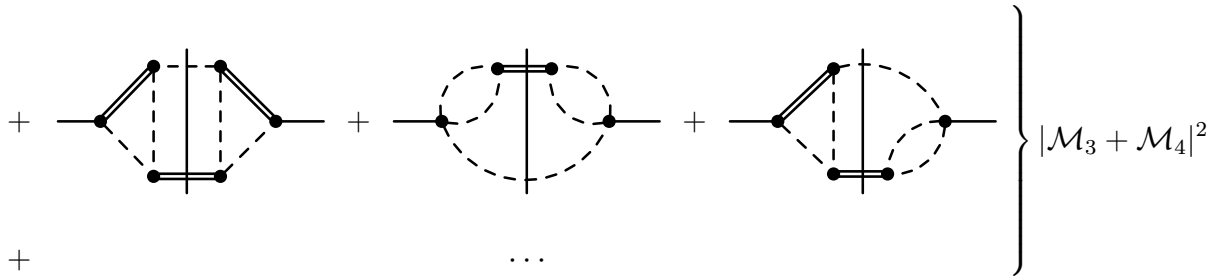


Abbildung 2.21: Vergleich der Entwicklung in Matrixelementen und Selbstenergiendiagrammen. Die gepunktete Linie symbolisiert die durch Permutation der Pionen entstehenden 4 loop-Selbstenergiendiagramme.

## 2.3 Ergebnisse

### 2.3.1 Imaginär- und Realteil der $\omega$ -Selbstenergie

In Abb. 2.22 ist der Imaginärteil der berechneten Diagramme gezeigt. Beginnen wir mit dem Imaginärteil des in Abb. 2.11 dargestellten Selbstenergiendiagramms (hier Strich-Punkt Linie). Dieses liefert wegen der kleinen Kopplungskonstante im Wess-Zumino Term den kleinsten Beitrag und ist für die  $\omega$ -Selbstenergie von untergeordneter Bedeutung. Im gleichen Zusammenhang soll auf den bisher nicht erwähnten Schnitt durch die 5 Pionen im Austauschdiagramm hingewiesen werden. Dieser wurde ebenfalls überprüft und es zeigt sich, daß dieser Beitrag zwei Größenordnungen unter dem hier gezeigten vom Wess-Zumino Term liegt.

Die Hauptbeiträge zum Imaginärteil der  $\omega$ -Selbstenergie bis zu invarianten Massen von 0.9 GeV kommen von dem führenden Matrixelement  $\mathcal{M}_1$ , dem die ersten Diagramme in Zeile 1 und 2 von Abb. 2.21 entsprechen. Dabei entspricht die gepunktete Kurve in Abb. 2.22 dem Beitrag des einfachen Diagramms und die durchgezogene Linie dem vom Schnitt durch die drei Pionlinien. Berücksichtigt man den doppelten Isospinfaktor des Austauschdiagramms, so sieht man daß beide Diagramme in diesem Bereich näherungsweise den gleichen Beitrag pro Isospinfaktor bringen. Im Bereich von 0.9 GeV aufwärts liefert das einfache Diagramm einen größeren Beitrag als das Austauschdiagramm. Der Grund wurde schon im letzten Teil von Abschnitt 2.2.3. angesprochen und sollte noch einmal kurz skizziert werden. Die Ursache liegt in dem Vorzeichenwechsel des zu diesem Schnitt gehörenden Imaginärteils der Vertexkorrektur  $\Im m\Gamma_2$ . Dieser führt dazu, daß Beiträge des unter dem Integral stehenden Realteils des  $\rho$ -Propagators mit unterschiedlichen Vorzeichen gewichtet werden und sich dann aufheben können. Daraus resultiert eine Abschwächung des Beitrags vom Austauschdiagramm relativ zu dem vom einfachen Diagramm für höhere invariante  $\omega$ -Massen.

Der Beitrag der beiden Vertexkorrekturen des Austauschdiagramms ist durch die gestrichelte Linie dargestellt. Im Bereich bis zu invarianten  $\omega$ -Massen von 1.0 GeV ist dieser Beitrag kleiner als der im gleichen Diagramm noch mögliche 3 Pionschnitt. Im Vergleich zu  $\Im m\Sigma_{(1)}$  ist für den Beitrag durch die Vertexkorrektur, die relative Änderung der am

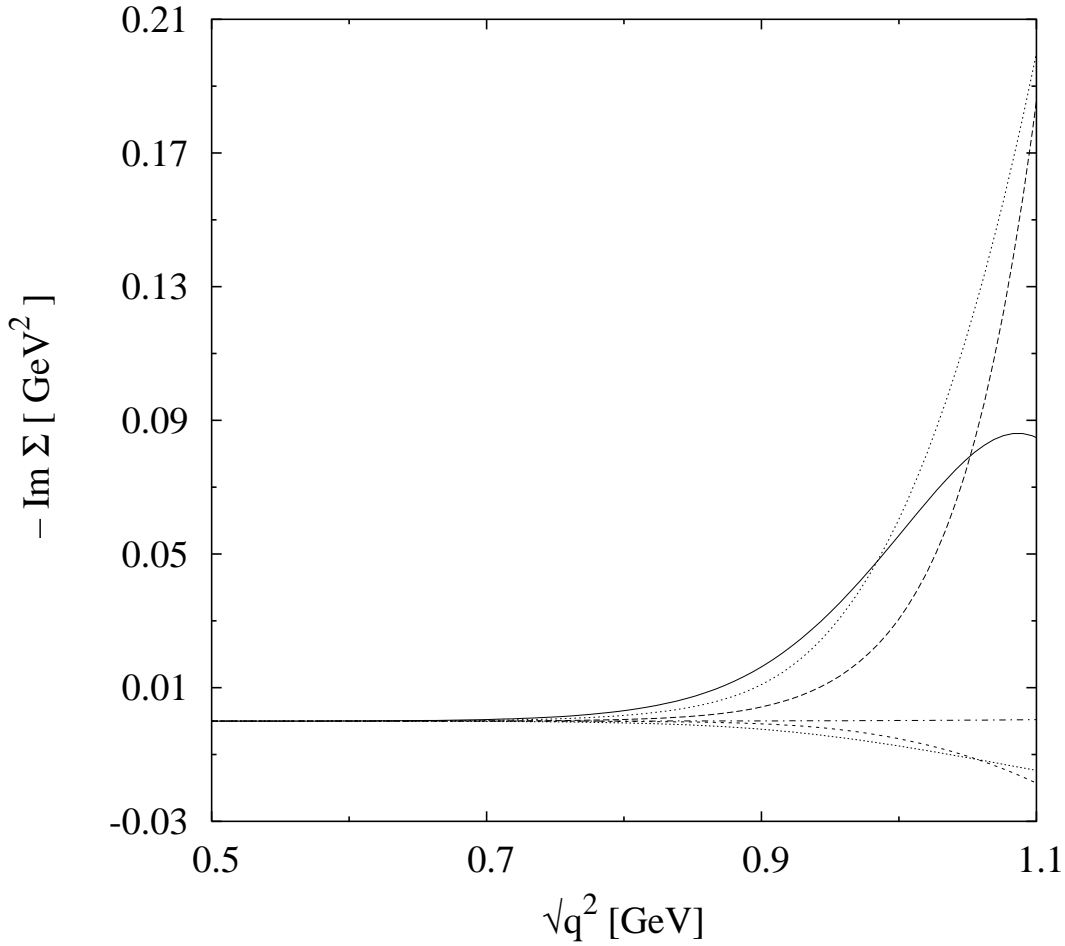


Abbildung 2.22: Beiträge der vier berechneten Diagramme zum Imaginärteil der  $\omega$ -Selbstenergie als Funktion der  $\omega$ -Masse  $\sqrt{q^2}$ . Positive Beiträge sind  $-\Im m\Sigma_{(1)}$  (gepunktet),  $-\Im m\Sigma_{(2)}^1$  (durchgezogen),  $-2\Im m\Sigma_{(2)}^2$  (gestrichelt). Die Strich-Punkt Linie gibt den Beitrag von  $-\Im m\Sigma_{(4)}$  wieder. Die beiden Beiträge im negativen Bereich sind  $-\Im m\Sigma_{(3)}^1$  (gepunktet) und  $-\Im m\Sigma_{(3)}^2$  (gestrichelt).

Photopunkt renormierten Kopplungskonstante entscheidend. Die Spektralfunktion des  $\rho$ -Propagators wird hier mit dem Realteil von  $\Delta\Gamma_A$  gefaltet. Wie in der linken Abb. 2.18 zu sehen ist, bildet sich bei größeren invarianten  $\omega$ -Massen ein ausgeprägtes Maximum aus. Dieses hat seinen Ursprung in dem im Vertex enthaltenen  $\rho$ -Zwischenzustand. Als Resultat der Integration von Gl. (2.43) ergibt sich dann ein Verlauf von  $-2\Im m\Sigma_{(2)}^2$  wie in Abb. 2.22 gezeigt. Da sich  $\Re\Delta\Gamma_A$  mit wachsender invarianter  $\omega$ -Masse vergrößert, nähert sich der Beitrag der Vertexschnitte im Austauschgraphen, dem vom einfachen Diagramm an.

Die nun noch verbleibenden Kurven im negativen Wertebereich von Abb. 2.22 gehören zu dem Interferenzterm aus Abschnitt 2.2.4 (gepunktet) und zum entsprechenden Beitrag der Vertexkorrektur dieses Diagramms (gestrichelt). Im Bereich bis  $\sqrt{q^2} < 0.9$  GeV domi-

niert von beiden Beiträgen der durch die drei Pionlinien. Erst bei höheren invarianten Massen von 1 GeV nähern sich beide Beiträge einander. Außerdem liefert dieses Diagramm destruktive Beiträge zur  $\omega$ -Selbstenergie.

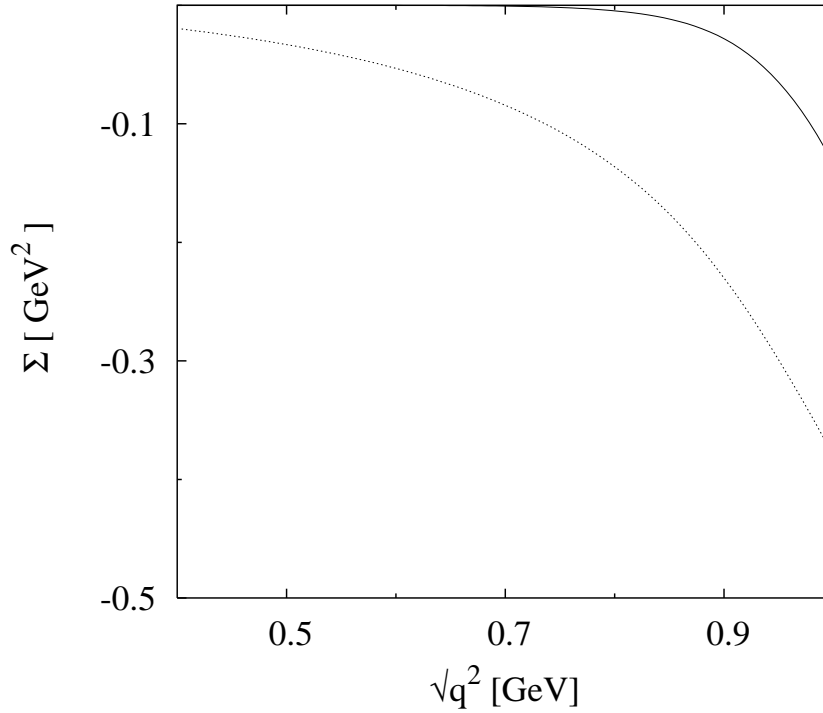


Abbildung 2.23: Real-(gepunktet) und Imaginärteil der  $\omega$ -Selbstenergie als Funktion der invarianten  $\omega$ -Masse  $\sqrt{q^2}$

Kommen wir nun zum noch fehlenden Realteil der Selbstenergie. Um von den Imaginärteil auf den Realteil der Selbstenergie schließen zu können, wird ein subtrahiertes Dispersionsintegral benutzt. Dieses verknüpft den Real- und Imaginärteil retardierter Selbstenergien. Für den hier zu betrachtenden Fall, wurde diese Forderung schon in Gl. (2.56) eingearbeitet, so daß der Realteil der Selbstenergie wegen des positiven Integrationsbereichs in Gl. (2.56) aus dem bisher betrachteten Imaginärteil berechnet werden kann.

$$\Re\Sigma(q^2) = q^2 \wp \int_0^{\Lambda_\omega} \frac{ds}{\pi} \frac{\Im m\Sigma(s)}{s(s - q^2)} \quad (2.56)$$

Durch die Subtraktion des Beitrags am Photopunkt wird die durch das VDM-Modell geforderte Randbedingung des Verschwindens der Selbstenergie am Photopunkt erfüllt. Dieses Integral ist allerdings immer noch linear divergent. In vollkommen analoger Weise zu der beim Formfaktor verwendeten Regularisierung wird auch hier regularisiert. Aus diesem Grund wird die Integration über das Quadrat der invarianten  $\omega$ -Masse  $s$  in Gl. (2.56) bei einer Masse  $\sqrt{\Lambda_\omega}$  abgebrochen. Dieses Vorgehen genügt der Lorentzinvarianz. Größere Energien führen zu höheren Impulsen der erzeugten Mesonen und damit zu Längenskalen

auf denen Hadronen nicht länger die relevanten Freiheitsgrade der Theorie sind, so daß dieses Abrechnen der Integration gerechtfertigt ist.

Zur Bestimmung der gesamten Selbstenergie, wie sie in Abb. 2.23 gezeigt ist, wurde als Masse  $\sqrt{\Lambda_\omega} = 1.3 \text{ GeV}$  gewählt. Auf die Wahl dieses Wertes komme ich im Zusammenhang mit der nackten Masse des  $\omega$ -Mesons im nächsten Abschnitt zurück.

### 2.3.2 Breite des $\omega$ -Mesons und seine nackte Masse

Kommen wir zu den Beiträgen, die die einzelnen Diagramme zur Breite des  $\omega$ -Mesons liefern. Dazu wurden die Schnitte in den Diagrammen einzeln noch einmal in Tabelle 2.2 zusammengestellt.


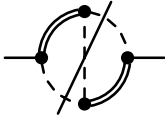
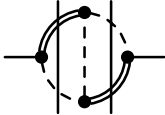
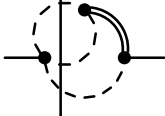

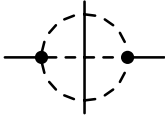
Schnitt	Breite in MeV
	1.55
	2.89
	$2 \times 0.204$
	$2 \times (-0.267)$
	$2 \times (-0.045)$
	0.016
$\Sigma$	4.24

Tabelle 2.2: Beiträge zur Breite des  $\omega$ -Mesons.

Offensichtlich bringt die Summe aller bisher berücksichtigten Diagramme mit 4.24 MeV nur 57% des experimentellen Wertes von 7.45 MeV. Die Ursachen für diesen fehlenden Beitrag werden sich auch noch einmal deutlich in Abschnitt 2.5.2 beim Vergleich

mit Dalitz-Zerfällen des  $\omega$ -Mesons zeigen. So viel sei vorweggenommen: Um eine bessere Übereinstimmung mit dem Experiment zu erhalten, ist eine Berücksichtigung von höheren Korrekturen wie sie in Abb. 2.21 gezeigt sind unerlässlich. Der selbst mit den hier einbezogenen Vertexkorrekturen gefundene Wert für die Breite ist immer noch sehr viel kleiner als der Wert von 7.6 MeV, der von Meißner [47] angegeben wurde und der ohne Berücksichtigung von Vertexkorrekturen erhalten wurde. Die Diskrepanz des hier angegebenen Wertes von 4.2 MeV verglichen mit dem Resultat von Meißner, kann unter anderem durch den leicht veränderten Parametersatz an Kopplungskonstanten und die Verwendung eines nackten  $\rho$ -Propagators erklärt werden. Da später Rechnungen in Kernmaterie durchgeführt werden, wird hier der in Abschnitt 2.1.1 angegebene Parametersatz aus Referenz [24] benutzt.

Kommen wir zu den einzelnen Beiträgen in Tabelle 2.2. Die in den ersten beiden Bildern dargestellten Schnitte gehören zu dem selben Matrixelement  $|\mathcal{M}_1|^2$  und deshalb zur gleichen Ordnung in der  $\omega\rho\pi$ -Wechselwirkung. Der Beitrag des Austauschdiagramms ist fast doppelt so groß wie der einfache Beitrag aus dem Diagramm in der ersten Zeile. Der Grund liegt in dem doppelt so großen Isospinfaktor des Austauschdiagramms. Der Phasenraum der den drei Pionen beim Zerfall zur Verfügung steht, ist in beiden Fällen in guter Näherung gleich groß. Der Hauptbeitrag zu diesen Schnitten, stammt aus dem invarianten Massebereich des  $\rho$ -Zwischenzustandes von  $\approx 500$  MeV (vgl. Abb. 2.32). Die Spektralfunktion bevorzugt also diejenige Aufteilung der Pionenimpulse, in der möglichst viel Energie für den  $\rho$ -Ast zur Verfügung steht.

Die in der dritten Zeile von Tabelle 2.2 angegebenen Vertexkorrekturen des Austauschdiagramms bringen mit 0.41 MeV ein Siebtel dessen, was man erhält, wenn die drei Pionen dieses Diagramms wie in der zweiten Zeile von Tab. 2.2 gezeigt aufgeschnitten werden. Der Effekt ist deshalb so klein, weil das Produkt aus  $\rho$ -Spektralfunktion und Phasenraum des  $\rho$ -Mesons erst bei einer invarianten  $\rho$ -Masse von 500 MeV ein Maximum besitzt, aber die Vertexkorrektur ihr Maximum schon in der Nähe der 2 Pionschwelle durchläuft. Entscheidend für die Größe des Beitrags durch Vertexkorrekturen ist allerdings, wegen der Renormierung auf den Photopunkt (siehe Gl. 2.52 und 2.55), die relative Änderung der Kopplungskonstante. Diese wiederum, erfolgt hauptsächlich in der Nähe von Schwellen des Imaginärteils der Vertexkorrektur. Folglich werden Vertexkorrekturen mit Schwellen von 3 Pionmassen aufwärts, einen weiteren Beitrag zur Breite des  $\omega$ -Mesons bringen. Außerdem wächst die Zahl der zu betrachtenden Diagramme, wie schon in Abschnitt 2.2.6 erörtert wurde deutlich an, so daß man mit einer Vielzahl kleinerer Beiträge von einzelnen Diagrammen höherer Ordnung zu rechnen hat.

Der in der vierten Zeile von Tabelle 2.2 dargestellte Schnitt ist der Interferenzterm von  $\mathcal{M}_1$  und  $\mathcal{M}_2$ . Dieser Schnitt liefert einen destruktiven Beitrag zur Breite des  $\omega$ -Mesons. Wie man sieht, kann dieser Schnitt durch Kontraktion einer der  $\rho$ -Propagatoren des Diagramms aus Zeile 2 erhalten werden. Da für ein auf der Massenschale befindliches  $\omega$ -Meson, stets der raumartige Bereich des  $\rho$ -Propagators bei der Loopintegration zum Imaginärteil der Selbstenergie durchlaufen wird, ergibt sich ein relatives Minuszeichen zwischen den Beiträgen von Zeile 2 und 4.

In Zeile 5 ist der Beitrag des Interferenzterms von  $\mathcal{M}_1$  und  $\mathcal{M}_4$  gezeigt. Dieser Schnitt bringt einen destruktiven Beitrag vom Formfaktor zur  $\omega$ -Breite. Durch einen analogen Schluß kann das relative Vorzeichen dieses Schnittes zu dem von Zeile 3 verstanden wer-

den. Die Interferenz zwischen dem direkten Zerfall in drei Pionen und dem Prozeß über ein intermediäres  $\rho$ -Meson, ist also destruktiv und führt unter anderem dazu, daß der Formfaktor  $|f_{\omega\pi}|^2$  in Abb. 2.20 mit der invarianten  $\rho$ -Masse geringer anwächst. Diese destruktiven Interferenzen aus Zeile 4 und 5 reduzieren die  $\omega$ -Breite um 0.62 MeV, also um ca. 13% des berechneten Wertes.

Der Beitrag des direkten Zerfall in 3 Pionen aus der letzten Zeile von Tabelle 2.2 ist verglichen mit dem aus der ersten Zeile klein, obwohl in beiden Fällen der gleiche Phasenraum für die drei Pionen zur Verfügung steht. Die Ursache ist in der kleinen Kopplungskonstante  $h$  aus dem Wess-Zumino Term zu finden.

Im folgenden Teil soll auf das Problem der nackten  $\omega$ -Masse eingegangen werden. Die Regularisierung erfolgt mit dem in Gl. (2.56) angegebenen Verfahren. Die Abhängigkeit der nackten Masse vom Cut-off Parameter ist in Abb. 2.24 gezeigt.

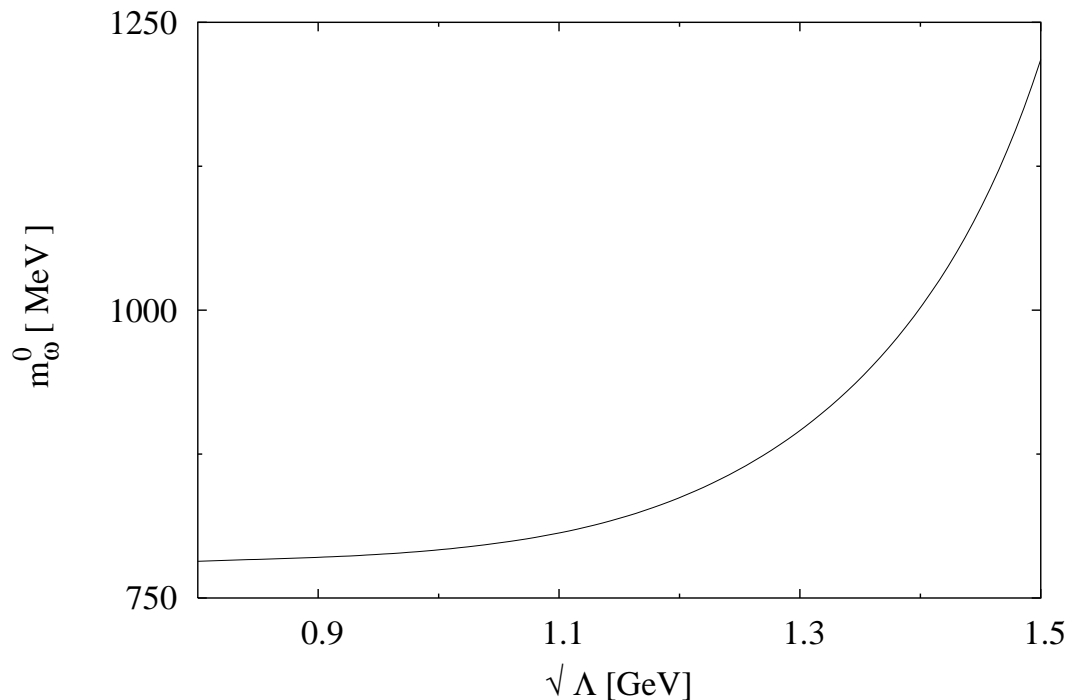


Abbildung 2.24: Die nackte  $\omega$ -Masse  $m_\omega^0$  in Abhängigkeit von der Regulatormasse  $\sqrt{\Lambda_\omega}$ .

Man erhält eine relativ ausgeprägte Abhängigkeit vom Regulator, so ist die nackte  $\omega$ -Masse für  $\sqrt{\Lambda_\omega} = 1.1$  GeV 806 MeV, für  $\sqrt{\Lambda_\omega} = 1.2$  GeV 836 MeV und für  $\sqrt{\Lambda_\omega} = 1.3$  GeV gar schon auf 895 MeV angewachsen. Die nackte Masse verändert ihren Wert also um näherungsweise 100 MeV in einem Regulatorbereich von 1.1 bis 1.3 GeV, also dem Doppelten des obigen Wertes.

An dieser Stelle ist ein Vergleich mit der nackten Masse des  $\rho$ -Mesons angebracht. Dieser Wert wurde aus Referenz [24] übernommen und folgt dort aus der Anpassung an Daten des elektromagnetischen Pionformfaktors zu  $\approx 850$  MeV. Da beide Vektormesonen eine näherungsweise gleiche Masse und eine ähnliche Quarkstruktur besitzen, sollte man auch ihre nackten Massen in der gleichen Größenordnung erwarten. Dem entspräche eine

Regulatorenmasse  $\sqrt{\Lambda_\omega}$  in Gl. (2.56) von  $\approx 1.2$  GeV. Offensichtlich liegt die Verschiebung der nackten-zur physikalischen Masse aber noch im Rahmen des zu erwartenden Wertes von 50 bis 100 MeV. Wird andererseits der Regulator zu groß gewählt, so ergeben sich Massenkorrekturen zum nackten  $\omega$ -Meson durch die Pion- bzw. Rhowolke, für die eine störungstheoretische Behandlung des Problems nicht mehr gerechtfertigt erscheint. So wurde ursprünglich das Standardverfahren der Pauli-Villars Regularisierung angewendet mit dem Ergebnis, daß bei einer Regulatorenmasse von 1 GeV, analog der, die beim  $\rho$ -Meson verwendet wurde, das  $\omega$ -Meson eine nackte von Masse 1.4 GeV erhält. Man müßte, um vernünftige Bereiche für  $m_\omega^0$  bis zu 900 MeV zu erhalten, kleinere Regulatorenmassen von 300 MeV verwenden.

Die einzige Alternative zur Bestimmung der nackten Masse des  $\omega$ -Mesons besteht in einem analogen Vorgehen wie im Falle des  $\rho$ -Mesons, d.h. benutzen der Daten des Drei-Pionformfaktors [50, 51, 52]. Im VDM-Modell ist der 3 Pionformfaktor  $F_{3\pi}(s)$  durch das Produkt aus dem Quadrat der nackten  $\omega$ -Masse und dem  $\omega$ -Propagator bestimmt. Der Wirkungsquerschnitt der in Abb. 2.25 gezeigten Reaktion schreibt sich dann folgendermaßen:

$$\frac{\sigma_{VDM}}{\sigma_{QED}} = |F_{3\pi}(s)|^2 \quad \text{mit} \quad |F_{3\pi}(s)|^2 = |m_\omega^0{}^2 \mathcal{D}_\omega(s)|^2 \quad (2.57)$$

Der Regulator kann dann durch die Anpassung an den experimentell bestimmten Wirkungsquerschnitt festgelegt werden. Dazu wäre aber wiederum der volle Imaginärteil der  $\omega$ -Selbstenergie erforderlich und mithin der richtige Wert für die  $\omega$ -Breite.

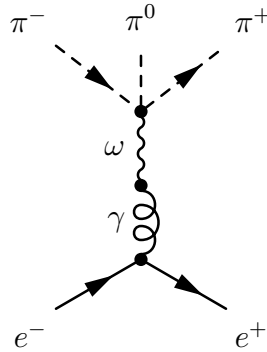
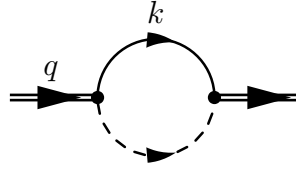


Abbildung 2.25: Beschreibung des Wirkungsquerschnittes der Reaktion  $e^- e^+ \rightarrow 3\pi$  im VDM-Modell.

## 2.4 Selbstkonsistenz im $\rho$ -Kanal

Um den prinzipiellen Gültigkeitsbereich einer entkoppelten Rechnung der  $\rho$ - und  $\omega$ -Selbstenergie im Vakuum abzuschätzen, wird in niedrigster Ordnung der in Abb. 2.26 dargestellte Beitrag berücksichtigt. Wegen der geringen  $\omega$ -Breite ist dieser Beitrag für ein reelles  $\rho$ -Meson vernachlässigbar. Für ein  $\rho$ -Meson mit höherer invarianter Masse bricht diese Näherung zusammen.

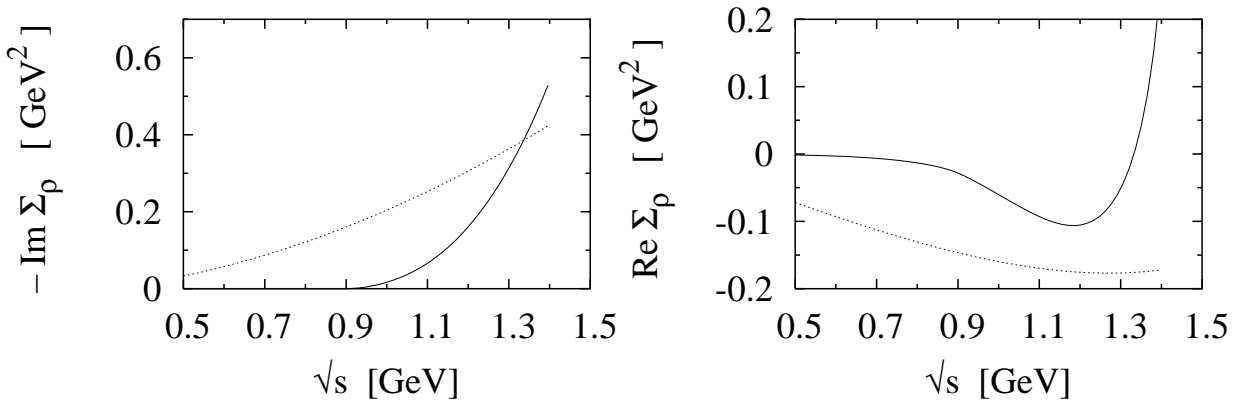
Abbildung 2.26: Beitrag des  $\omega$ -Mesons zur  $\rho$ -Selbstenergie in niedrigster Ordnung

Man erhält dann folgenden Ausdruck für den Imaginärteil der  $\rho$ -Selbstenergie

$$\Im m\Sigma_\rho(q_0^2) = -\frac{q_0^2}{3} \left( \frac{g_{\omega\rho\pi}}{m_\omega} \right)^2 \int \frac{d^3k}{2w_\pi(2\pi)^3} \vec{k}^2 \mathcal{A}_\omega(q^0 - w_\pi, |\vec{k}|) \quad . \quad (2.58)$$

Dazu wird die mit den bisherigen Diagrammen berechnete Spektralfunktion  $\mathcal{A}_\omega$  des  $\omega$ -Mesons benutzt. Die Berechnung des Realteils erfolgt mit Pauli-Villars Regularisierung und den Regulatoren der Referenz [24] über ein Dispersionsintegral.

Wie auf der Abb. 2.27 zu erkennen ist, kann der Einfluß der  $\omega$ -Wolke auf die  $\rho$ -Selbstenergie bis zu  $\rho$ -Massen von  $\sqrt{s} \approx 1.0$  GeV vernachlässigt werden. Das entspricht dem Bereich, in dem die Parameter des  $\rho$ -Modells an die Daten angepaßt wurden. Da in allen Selbstenergiebeitragen  $\Im m\Sigma_\omega(q_0^2)$  des  $\omega$ -Mesons die  $\rho$ - und  $\pi$ -Propagatoren gleichzeitig aufgeschnitten werden, also der invariante Massenbereich  $\sqrt{s} \leq q^0 - m_\pi$  in der  $\rho$ -Spektralfunktion aufintegriert wird, kann von der Gültigkeit der entkoppelten Rechnung bis zu  $q_0 \approx 1.2$  GeV ausgegangen werden.

Abbildung 2.27: Vergleich der  $\rho$ -Selbstenergie durch Kopplung an die Pionwolke (gepunktet) nach Ref.[24] mit dem Beitrag aus Abb. 2.26 als Funktion der  $\rho$ -Masse  $\sqrt{s}$



## 2.5 Dalitz-Zerfälle des $\omega$ -Mesons

### 2.5.1 Beiträge in niedrigster Ordnung Störungstheorie

Zur Analyse der Ursachen des fehlenden Beitrags zur Breite im  $3\pi$ -Kanal lassen sich Dalitz-Zerfälle des  $\omega$ -Mesons benutzen. Dieser Prozeß läuft in niedrigster Ordnung, wie in Abb. 2.28 angegeben, über ein intermediäres  $\rho$ -Meson ab. Sollten Vertexkorrekturen im  $3\pi$ -Kanal zur Erklärung der Breite wichtig werden, so muß gleiches auch für den Dalitz-Zerfall des  $\omega$ -Mesons in ein Myonenpaar gelten. Das Myon besitzt näherungsweise die gleiche Masse wie ein Pion und damit den gleichen Phasenraum beim Zerfall.

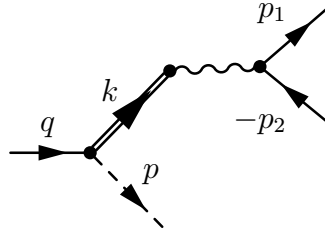


Abbildung 2.28: Dalitz-Zerfall des  $\omega$ -Mesons unter VDM

Geht man wieder von unpolarisierten  $\omega$ -Mesonen aus und summiert im Endkanal über die Spins ( $s$ ) des Dileptonenpaares, so erhält man für die Partialbreite im Ruhesystem des  $\omega$ -Mesons

$$\Gamma_{\pi^0 l^+ l^-} = \frac{1}{3} \frac{1}{2m_\omega} \int \frac{d^3 p}{2w_\pi (2\pi)^3} \frac{m}{E_1} \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{m}{E_2} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} \sum_{s,\lambda} |\mathcal{M}_{s,\lambda}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(q - p - p_1 - p_2). \quad (2.59)$$

Dabei ist  $m$  die Leptonmasse und  $E$  die Energie des Leptons auf der Massenschale. Die Amplitude für diesen Prozeß ist in niedrigster Ordnung gegeben durch

$$\mathcal{M}_{s,\lambda}^{(1)} = i \frac{g_{\omega\rho\pi}}{m_\omega} f_\rho \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} k^\alpha p^\delta g^{\beta\mu} \mathcal{D}_\rho(k^2) \epsilon^\gamma(\lambda) \mathcal{D}_\gamma(k^2) \bar{u}_{p_1} (-ie\gamma_\mu) v_{p_2}. \quad (2.60)$$

Das bei der Auswertung von Gl. (2.59) entstehende Quadrat des Leptonenstromes ergibt nach Summation über die Spins

$$\begin{aligned} \sum_s \bar{v}_{p_2} (e\gamma^{\mu'}) u_{p_1} \bar{u}_{p_1} (e\gamma^\mu) v_{p_2} &= -\text{tr} \left[ e\gamma^{\mu'} \frac{(\not{p}_1 + m)}{2m} e\gamma^\mu \frac{(-\not{p}_2 + m)}{2m} \right] \\ &= \left( \frac{e}{m} \right)^2 \left[ p_1^{\mu'} p_2^\mu + p_2^{\mu'} p_1^\mu - g^{\mu'\mu} (p_1 \cdot p_2 + m^2) \right]. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck kann mit dem Phasenraumfaktor des Dileptonenpaares zusammengefaßt werden. Man erhält einen Tensor  $T^{\mu'\mu}$  der in der Form  $k^{\mu'} k^\mu$  vom Viererimpuls  $k$  des  $\rho$ -Mesons und von  $g^{\mu'\mu}$  abhängen darf. Unter Verwendung der Lorentzinvarianz läßt sich

die Winkelintegration in Gl. (2.61) im Ruhesystem des  $\rho$ -Mesons trivial auswerten.

$$\begin{aligned}
T^{\mu'\mu} &= \int \frac{m}{E_1} \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{m}{E_2} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} \left(\frac{e}{m}\right)^2 \left[ p_1^{\mu'} p_2^\mu + p_2^{\mu'} p_1^\mu - g^{\mu'\mu} (p_1 \cdot p_2 + m^2) \right] \\
&\quad (2\pi)^4 \delta^4(k - p_1 - p_2) \tag{2.61} \\
&= -\frac{e^2}{6\pi} (k^2 + 2m^2) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}} \left( g^{\mu'\mu} - \frac{k^{\mu'} k^\mu}{k^2} \right) \Theta(k^2 - 4m^2)
\end{aligned}$$

Der Phasenraum des Dalitz-Zerfalls wird durch die doppelte Leptonmasse und die Differenz von  $\omega$ -Masse und Pionmasse beschränkt. Es gibt also nur Beiträge von Dileptonmassen aus dem Bereich  $(2m)^2 \leq k^2 \leq (m_\omega - w_\pi)^2$ . Für die Partialbreite ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\pi^0 l^+ l^-} &= \frac{1}{3} \frac{1}{2m_\omega} \frac{(g_{\omega\rho\pi} e f_\rho)^2}{6\pi} \int \frac{d^3 k}{2w_\pi (2\pi)^3} 2\vec{k}^2 (k^2 + 2m^2) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}} \\
&\quad |\mathcal{D}_\gamma(k^2)|^2 |\mathcal{D}_\rho(k^2)|^2 \Theta(k^2 - 4m^2) \tag{2.62}
\end{aligned}$$

Für das weitere ist man an der differentiellen Breite des Kanals interessiert. Folglich wird nur der Raumwinkel des Pions ausintegriert und der Dreierimpuls durch das Quadrat der invarianten Dileptonmasse  $s = k^2 = (m_\omega - w_\pi)^2 - \vec{k}^2$  ersetzt. Man erhält für ein Dileptonpaar der Masse  $\sqrt{s}$  einen Beitrag zur Dalitz-Breite von

$$\begin{aligned}
\frac{d\Gamma_{\pi^0 l^+ l^-}}{ds} &= \frac{1}{144\pi^3} \left(\frac{g_{\omega\rho\pi} f_\rho e}{m_\omega}\right)^2 \left[ \frac{1}{4} \left(\frac{m_\pi^2 - s}{m_\omega} + m_\omega\right)^2 - m_\pi^2 \right]^{\frac{3}{2}} (s + 2m^2) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} \\
&\quad |\mathcal{D}_\gamma(s)|^2 |\mathcal{D}_\rho(s)|^2 \\
&= \Gamma_{\pi^0 \gamma} \cdot \frac{\alpha}{3\pi} (s + 2m^2) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} \left[ \left(1 + \frac{s}{m_\omega^2 - m_\pi^2}\right)^2 - 4s \frac{m_\omega^2}{(m_\omega^2 - m_\pi^2)^2} \right]^{\frac{3}{2}} \\
&\quad |\mathcal{D}_\gamma(s)|^2 |m_\rho^0 \mathcal{D}_\rho(s)|^2 \tag{2.63}
\end{aligned}$$

In der letzten Zeile wurde die Partialbreite  $\Gamma_{\pi^0 \gamma}$  vom  $\omega \rightarrow \pi^0 \gamma$  Zerfall als Maßeinheit eingeführt. Damit fallen die Kopplungskonstanten  $f_\rho$  und  $g_{\omega\rho\pi}$  heraus. Verglichen mit einer punktförmigen Kopplung des Photons an das  $\omega$ -Meson gibt es bei Vektormesondominanz bereits durch den elektromagnetischen Pionformfaktor einen Beitrag zum Formfaktor  $|F_{\omega\pi^0}|^2$  dieses Prozesses.

$$|F_{\omega\pi^0}|^2 = |F_\pi(s)|^2 \tag{2.64}$$

Der elektromagnetische Pionformfaktor selbst, ergibt sich aus einer Anpassung an experimentelle Daten hoher Genauigkeit [24]. Ein Vergleich mit Abb. 2.30 zeigt, daß es bei hohen invarianten Dileptonmassen zu einem stärkeren Anwachsen des Formfaktors  $|F_{\omega\pi^0}|^2$  kommt, als es durch das VMD-Modell vorhergesagt wird. Es ergibt sich auch hier eine Situation fehlender Partialbreite analog dem  $3\pi$ -Kanal. Der nächste Schritt besteht dann in der Erweiterung des VMD-Modells durch Einbeziehung von Vertexkorrekturen.

## 2.5.2 Berücksichtigung des mikroskopischen Formfaktors

In diesem Abschnitt wird der Einfluß von Vertexkorrekturen im Dalitz-Zerfall untersucht. Dabei werden, in Analogie zum  $3\pi$ -Kanal, die in Abb. 2.29 dargestellten Beiträge berücksichtigt. Unter Verwendung der in Abb. 2.28 angegebenen Bezeichnung der exter-

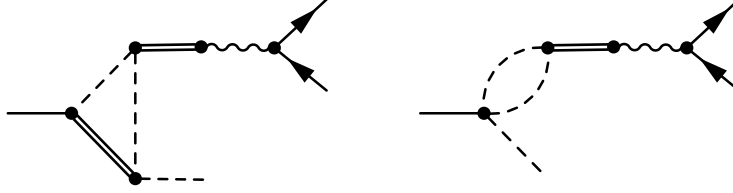


Abbildung 2.29: *Beitrag von Vertexkorrekturen zum Dalitz-Zerfall des  $\omega$ -Mesons*

nen Impulse, erhält man für die Matrixelemente zu beiden Diagrammen

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{s,\lambda}^{(2)} &= 2 \frac{g_{\omega\rho\pi}^0}{m_\omega} f_\rho \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} p^\gamma q^\delta \mathcal{D}_\rho(k) \epsilon^\beta(\lambda) \mathcal{D}_\gamma(k^2) \bar{u}_{p_1} (-ie\gamma_\mu) v_{p_2} \\ &\quad 4g_{\rho\pi\pi}^2 \int \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} k_2^\alpha (q+k_2)^\mu \mathcal{D}_\pi(q+k_2) \mathcal{D}_\pi(q+k_2-k) \mathcal{D}_\rho(k_2) \end{aligned} \quad (2.65)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{s,\lambda}^{(3)} &= -i f_\rho \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} k^\gamma p^\delta \mathcal{D}_\rho(k) \epsilon^\alpha(\lambda) \mathcal{D}_\gamma(k^2) \bar{u}_{p_1} (-ie\gamma_\mu) v_{p_2} \\ &\quad 2g_{\rho\pi\pi} 3hi \int \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} k_2^\beta k_2^\mu \mathcal{D}_\pi(k_2) \mathcal{D}_\pi(k_2-k) \quad . \end{aligned} \quad (2.66)$$

Bei der Auswertung von Gl. (2.59) werden wieder nur die Beiträge berücksichtigt, die durch Interferenz mit dem Matrixelement der niedrigsten Ordnung  $\mathcal{M}^{(1)}$  gebildet werden können. Man erhält dann für die auf die Partialbreite  $\Gamma_{\pi^0\gamma}$  normierte differentielle Dalitz-Zerfallsbreite des  $\omega$ -Mesons

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma_{\pi^0\gamma}} \frac{d\Gamma_{\pi^0 l^+ l^-}}{ds} &= \frac{\alpha}{3\pi} (s+2m^2) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} \left[ \left( 1 + \frac{s}{m_\omega^2 - m_\pi^2} \right)^2 - 4s \frac{m_\omega^2}{(m_\omega^2 - m_\pi^2)^2} \right]^{\frac{3}{2}} \\ &\quad |\mathcal{D}_\gamma(s)|^2 |m_\rho^{02} \mathcal{D}_\rho(s)|^2 \\ &\quad \left[ 1 + \left( \frac{g_{\omega\rho\pi}^0}{g_{\omega\rho\pi}} \right)^2 [2 \Re e \Delta \Gamma_A(m_\omega, m_\omega - w_\pi, |\vec{k}|) + 2 \Re e \Delta \Gamma_B(s)] \right]. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Erwartungsgemäß führt die Einbeziehung dieser Vertexkorrekturen zum gleichen Formfaktor  $|f_{\omega\pi}|^2$  wie im Falle des  $3\pi$ -Kanals (siehe Gl. (2.55)). Durch diese Korrekturterme ergibt sich eine Modifikation des Formfaktors  $|F_{\omega\pi^0}|^2$ . Statt des elektromagnetischen Pionformfaktors aus Gl. (2.64) erhält man jetzt

$$|F_{\omega\pi^0}|^2 = |f_{\omega\pi}|^2 \cdot |F_\pi(s)|^2 \quad . \quad (2.68)$$

Durch Messung der differentiellen Dalitzzerfallsbreite kann dann die Impulsabhängigkeit der Kopplungskonstante  $g_{\omega\rho\pi}$  untersucht werden.

Solche Messungen sind in den achtziger Jahren von Dzhelyadin [49] für  $\omega \rightarrow \pi^0\mu^+\mu^-$  durchgeführt worden und liegen in Form von  $|F_{\omega\pi^0}|^2$  vor. Einschränkend sollte erwähnt werden, daß die gesamte Messung aus etwa 80 Ereignissen besteht, die sich zudem auch noch auf den Bereich kleinerer invarianter Massen  $\sqrt{s}$  konzentrieren. Damit wird die Statistik für die Datenpunkte bei größeren invarianten Massen sehr schlecht. In Abb. 2.30 sind der berechnete und gemessene Formfaktor  $|F_{\omega\pi^0}|^2$  gegenübergestellt. Man beachte die logarithmische Skalierung der Achse des Formfaktors.

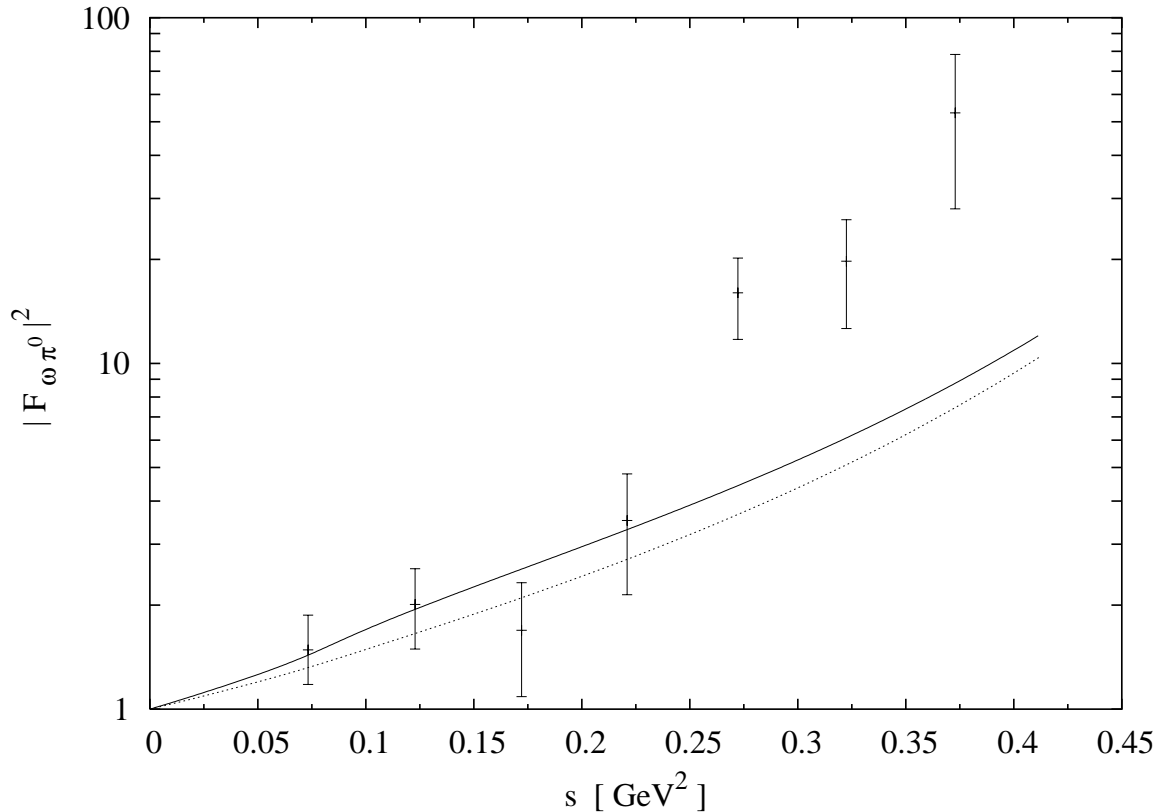


Abbildung 2.30: Vergleich von experimentell bestimmten Daten zum Formfaktor [49] mit dem in Gl. (2.68) berechneten Formfaktor.  $s$  ist das invariante Massenquadrat des Dileptonenpaares. Zum Vergleich ist der elektromagnetische Pionformfaktor zusätzlich gestrichelt eingezeichnet.

Wollte man die Breite des  $\omega$ -Mesons im  $3\pi$ -Kanal ohne jegliche Vertexkorrekturen erklären, also  $|\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2|^2$  in Abb. 2.21 bilden, so ist das im Dalitz-Kanal gleichbedeutend mit der Übereinstimmung von  $|F_{\omega\pi^0}|^2$  und elektromagnetischem Pionformfaktor. Außerdem würde dann über Gl. (2.7) die Kopplungskonstante  $g_{\rho\pi\pi}$  auf 7.2 gesetzt, womit sich die experimentellen Daten des  $\rho$ -Mesons nicht mehr beschreiben lassen. Vor allem aber die Messungen im oberen invarianten Massenbereich signalisieren ein stärkeres Anwachsen des Formfaktors als es durch das VMD-Modell vorhergesagt wird.

Mit den bisherigen Korrekturen zum Formfaktor kann nur eine Übereinstimmung im unteren Bereich der invarianten Masse bis zu  $\sqrt{s} \approx 0.35$  GeV erreicht werden. Insbesondere sind Messungen mit besserer Statistik im unteren Massenbereich zur genaueren Prüfung des berechneten Formfaktors notwendig.

Es zeigt sich jedoch auch hier, daß der noch fehlende Beitrag zur Breite im Dalitz-Kanal von dem Bereich  $\sqrt{s} \approx 0.35$  GeV  $\cdots m_\omega - m_\pi$  des Formfaktors stammt. Dieser Bereich kann nur durch Berücksichtigung weiterer Korrekturen erklärt werden. Knüpft man an die Ausführungen von Abschnitt 2.2.6 an, so hieße das Vertexkorrekturen mit mehr als zwei Pionlinien einzubeziehen (vgl. Abb. 2.17). Vielfache von bis zu 6 Pionmassen geben die nächsten Schwellen im Imaginärteil von Vertexkorrekturen bevor höhere Resonanzen wie  $\rho, \omega$  mit angeregt werden können. Damit wäre es möglich den Formfaktor oberhalb von zweieinhalb Pionmassen aufzufüllen.

Einerseits ist das Schwellenverhalten des Imaginärteils für signifikante Änderungen des Realteils der Vertexkorrektur und damit von  $|f_{\omega\pi}|^2$  relevant, andererseits läßt sich über die Hilbert-Transformation in Gl. (31) auch aus dem Real- auf den Imaginärteil der Vertexkorrektur schließen. Dieser Imaginärteil ist für Schnitte in Selbstenergiendiagrammen, die gleichzeitig durch die Vertexkorrekturen verlaufen, relevant. Die Abweichung des berechneten Formfaktors von dem gemessenen signalisiert also auch hier weitere Beiträge. Mit Hilfe des durch Dalitz-Zerfälle ermittelten Formfaktors läßt sich so eine detaillierte Analyse der Beiträge von den einzelnen Selbstenergiendiagrammen aus Abb. 2.21 vornehmen. Zur Bestimmung des Formfaktors eignet sich allerdings, wie aus den Bildern in 2.31 deutlich hervorgeht nur der Dalitz-Zerfall in Myonen.

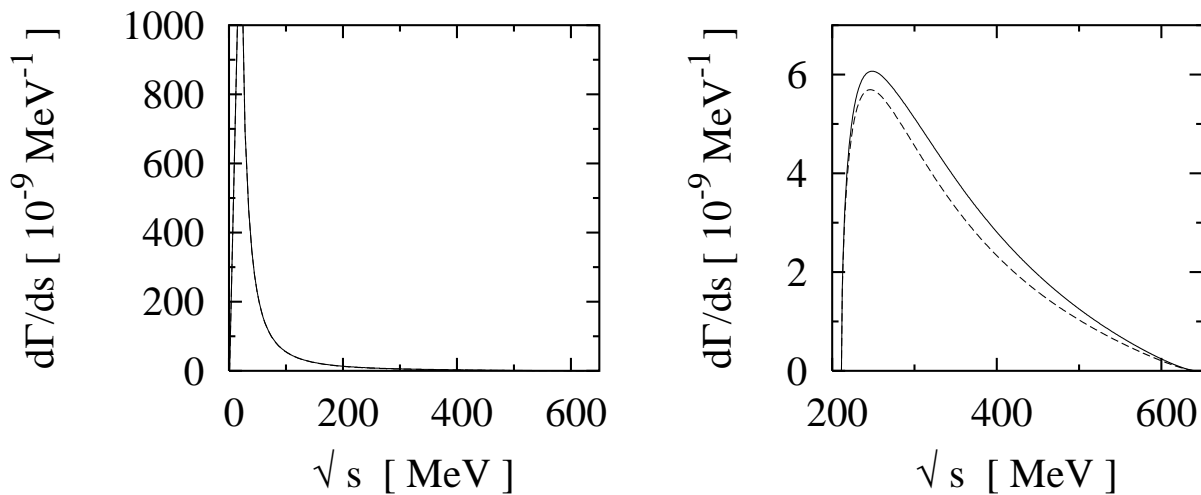


Abbildung 2.31: *Linkes Bild: Differentielle Zerfallsbreite für den Dalitz-Zerfall  $\omega \rightarrow \pi^0 e^+ e^-$ . Bei Berücksichtigung von Vertexkorrekturen ergeben sich keine erkennbaren Unterschiede. Rechtes Bild: Differentielle Zerfallsbreite für den Dalitz-Zerfall  $\omega \rightarrow \pi^0 \mu^+ \mu^-$ . Die durchgezogene Linie entspricht der Rechnung mit Vertexkorrekturen.*

Der Grund liegt in den anwachsenden Beiträgen kleiner werdender invarianter Massen des Dileptonspektrums zur Dalitz-Breite. Dieses Verhalten wird durch den Photonpro-

pagator in Gl. (2.67) verursacht. Die Schwelle für ein Elektron Positron-Paar liegt bei etwa 1 MeV, wo die  $1/s$ -Abhängigkeit des Photonpropagators dominiert. Deshalb ist der Beitrag des Formfaktors zum Zerfall  $\omega \rightarrow \pi^0 e^+ e^-$  vernachlässigbar klein, da die gesamte Stärke in der Nähe der Schwelle bei 1 MeV sitzt.

Für den Zerfall in ein Myonpaar ist dieses ausgeprägte Maximum durch die wesentlich höhere Schwelle von  $\sqrt{s} = 2 \times 105$  MeV unterdrückt. Deshalb läßt sich im rechten Bild von Abb. 2.31 der Effekt, der durch den mikroskopischen Formfaktor verursacht wird, deutlich erkennen. Im Vergleich zur niedrigsten Ordnung ergibt sich eine Anhebung der Partialbreite im  $\omega \rightarrow \pi^0 \mu^+ \mu^-$  Kanal durch die konstruktive Interferenz im Formfaktor.

	Exp.	Formfaktor	
		ohne Korrektur	mit Korrektur
$\Gamma_{\pi^0 e^+ e^-}$	$(5.0 \pm 1.7)$ keV	6.544 keV	6.678 keV
$\Gamma_{\pi^0 \mu^+ \mu^-}$	$(0.8 \pm 0.2)$ keV	0.672 keV	0.774 keV

Tabelle 2.3: Vergleich gemessener und berechneter Dalitz-Zerfallsbreiten. Die Resultate in niedrigster Ordnung sind in Spalte drei und die mit der Korrektur  $|f_{\omega\pi}|^2$  in Spalte vier angegeben.

Der durch die Interferenzterme hinzugekommene Beitrag ist in beiden Fällen ungefähr gleich groß, bringt aber für den Myonkanal ca. 10% der Breite.

Im Vergleich zum  $3\pi$ -Kanal, liegt die Schwelle von der an der Formfaktor  $|f_{\omega\pi}|^2$  beim Dalitz-Zerfall in ein Myonpaar integriert wird, etwas unterhalb von 2 Pionmassen. Außerdem werden durch den Photonpropagator Beiträge kleiner invarianter Massen stärker zur Partialbreite des Dalitz-Kanals gewichtet. So befindet sich das Maximum im rechten Bild von Abb. 2.31 näherungsweise bei der doppelten Pionmasse. Damit werden hier also die niedrigsten Schwellen in den Vertexkorrekturen wichtig.

Zum Vergleich werden die spektralen Verhältnisse beim  $3\pi$ -Zerfall des  $\omega$ -Mesons von Abb. 2.14 betrachtet. Natürlich kann dieser Beitrag nicht von dem, der aus dem Austauschdiagramm folgt, getrennt werden. Es sei deshalb nochmals betont, daß es sich hierbei nur um vergleichende Betrachtungen zum Dalitz-Kanal handelt. Man erhält aus den Selbstenergiediagrammen der ersten Zeile von Abb. 2.14 folgenden Beitrag zur differentiellen Breite des  $3\pi$ -Kanals:

$$\frac{1}{\Gamma_{\pi^0\gamma}} \frac{d\Gamma_{3\pi}}{ds} = \frac{3g_{\rho\pi\pi}^2}{8\alpha\pi^2} \left[ \left( 1 + \frac{s}{m_\omega^2 - m_\pi^2} \right)^2 - 4s \frac{m_\omega^2}{(m_\omega^2 - m_\pi^2)^2} \right]^{\frac{3}{2}} \mathcal{A}_\rho(s) \cdot |f_{\omega\pi}|^2. \quad (2.69)$$

Dabei ist  $\sqrt{s}$  die invariante Masse des aus dem  $\rho$ -Zwischenzustand gebildeten Pionpaares. Hier ist das Maximum, wie in Abb. 2.32 zu sehen ist, im oberen invarianten Massenbereich des Formfaktors zu finden. Damit können weitere Vertexkorrekturen, die zu einer Impulsabhängigkeit im oberen invarianten Massenbereich führen und zu dem in Abb. 2.30 gezeigten Anwachsen des Formfaktors beitragen, wichtig werden.

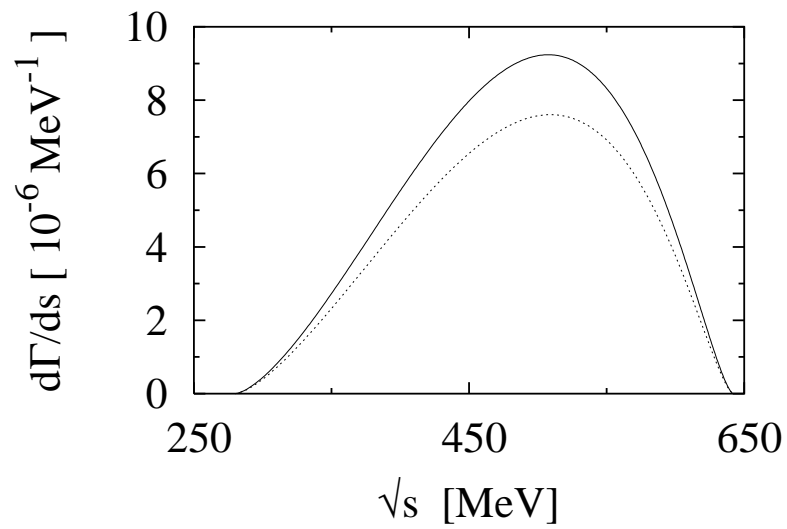


Abbildung 2.32: Der Beitrag zur differentiellen Zerfallsbreite in  $\omega \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$  aus Abb. 2.14. Dabei ist  $\sqrt{s}$  die Masse des aus dem  $\rho$ -Zustand gebildeten Pionpaares. Die durchgezogene Linie entspricht der Rechnung mit Formfaktor.

# Kapitel 3

## $\omega$ -Meson in kalter Kernmaterie

### 3.1 Medium-Modifikationen des Pions und des $\rho$ -Mesons

Die Ausführungen dieses Abschnittes zu den Medium-Modifikationen von Pion- und Rho-propagator folgen Referenz [24], dort können dann auch weitere Details entnommen werden.

Beim Übergang zu Kernmaterie werden die Eigenschaften der hadronischen Freiheitsgrade, die zur Modellierung der  $\omega$ -Selbstenergie betrachtet werden, verändert. In Kernmaterie erhalten die Pionen einen Selbstenergiebeitrag durch Teilchen-Loch ( $Nh$ ) und  $\Delta$ -Loch ( $\Delta h$ ) Anregungen. Die zugrundeliegenden Wechselwirkungsbeiträge der Lagrangendichte sind in dem hier verwendeten Modell gegeben durch [53]

$$\mathcal{L}_{\pi N} = \frac{f_N}{m_\pi} \bar{N} \gamma^\mu \gamma^5 \vec{\tau} \cdot \partial_\mu \vec{\pi} N \quad \text{und} \quad \mathcal{L}_{\pi N \Delta} = -\frac{f_\Delta}{m_\pi} \bar{N} \vec{T}^\dagger \Delta_\mu \cdot \partial^\mu \vec{\pi} + h.c. \quad (3.1)$$

Dabei ist  $\Delta_\mu$  ein Rarita-Schwinger-Spinor [54] und  $\vec{T}$  der Isospin  $1/2 \rightarrow 3/2$ -Übergangsoperator. Für die  $\pi N$ -Wechselwirkung wird die Schwingersche Axialvektorkopplung verwendet [18]. Von den Vertizes wird in einer  $1/m_N$ - bzw.  $1/m_\Delta$ -Entwicklung nur der führende Term gehalten und von den Propagatoren des  $\Delta, N$  werden Antiteilchen Beiträge vernachlässigt. Man behält aber die relativistische Kinematik

$$w_{\Delta, N}(\vec{k}) = \sqrt{\vec{k}^2 + m_{\Delta, N}^2}$$

bei [24]. Im weiteren wird eine konstante Breite von 120 MeV für die  $\Delta$ -Resonanz vorausgesetzt. Die kurzreichweitigen repulsiven Teilchen-Loch Korrelationen zur Verhinderung von Pionkondensationseffekten werden in bekannter Weise durch die Migdal-Parameter  $g'_{11}$  ( $NNNN$ ),  $g'_{12}$  ( $NNN\Delta$ ) und  $g'_{22}$  ( $NN\Delta\Delta$ ) beschrieben. Schließlich wird die endliche Ausdehnung von  $\Delta$  und Nukleon durch einen Monopolformfaktor

$$\Gamma_\pi = \frac{\Lambda^2}{\vec{k}^2 + \Lambda^2} \quad \text{mit} \quad \Lambda = 550 \text{ MeV} \quad (3.2)$$



am  $\pi NN$ - und  $\pi N\Delta$ -Vertex berücksichtigt. Die hier angestellten Rechnungen zur  $\omega$ -Selbstenergie wurden im 3-Niveaumodell durchgeführt. Hierbei handelt es sich um eine Näherung der  $\pi$ -Selbstenergie, die man durch die Annahme erhält, daß der Dreierimpuls des Loches im Fermisee klein im Vergleich zum Pionimpuls  $\vec{k}$  ist. Damit kann die Pionselbstenergie  $\Sigma'_{ab}$  folgendermaßen dargestellt werden

$$\Sigma'_{ab} = \vec{k}^2 \delta_{ab} \Gamma_\pi^2 \Pi(k) \quad \text{mit} \quad \Pi(k) = \frac{\alpha_1(k)}{k_0^2 - \Omega_1^2(\vec{k})} + \frac{\alpha_2(k)}{k_0^2 - \Omega_2^2(\vec{k})}. \quad (3.3)$$

Die Größen  $\Omega_1, \Omega_2$  beschreiben die Dispersionsrelationen der  $(Nh)$ - und  $(\Delta h)$ -Anregungen und  $\alpha$  die jeweilige Stärke. Unter dieser Voraussetzung kann der Pionpropagator  $\mathcal{D}_\pi$  als Summe dreier Quasiteilchen-Propagatoren

$$\mathcal{D}_\pi(\vec{k}) = \frac{S_1(\vec{k})}{k_0^2 - w_1^2(\vec{k})} + \frac{S_2(\vec{k})}{k_0^2 - w_2^2(\vec{k})} + \frac{S_3(\vec{k})}{k_0^2 - w_3^2(\vec{k})} \quad (3.4)$$

geschrieben werden. Das Pion ist demnach eine Mischung dreier Quasiteilchen mit den Dispersionsrelationen  $w_1, w_2, w_3$  und den jeweiligen Stärken  $S$ , die das Mischungsverhältnis bestimmen. Der untere Ast ( $w_1$ ) in Abb. 3.1 ist der  $(Nh)$ -Ast, der mittlere ( $w_2$ ) der Pion-Ast und der obere ( $w_3$ ) der  $(\Delta h)$ -Ast. Wie der unteren Abbildung zu entnehmen ist, läuft der  $\Delta h$ -Ast für hohe Pionimpulse gegen die freie Dispersionrelation des Pions und dominiert den Pionpropagator. Somit werden die Eigenschaften des Pions in kalter Kernmaterie vor allem bei niedrigen Impulsen geändert.

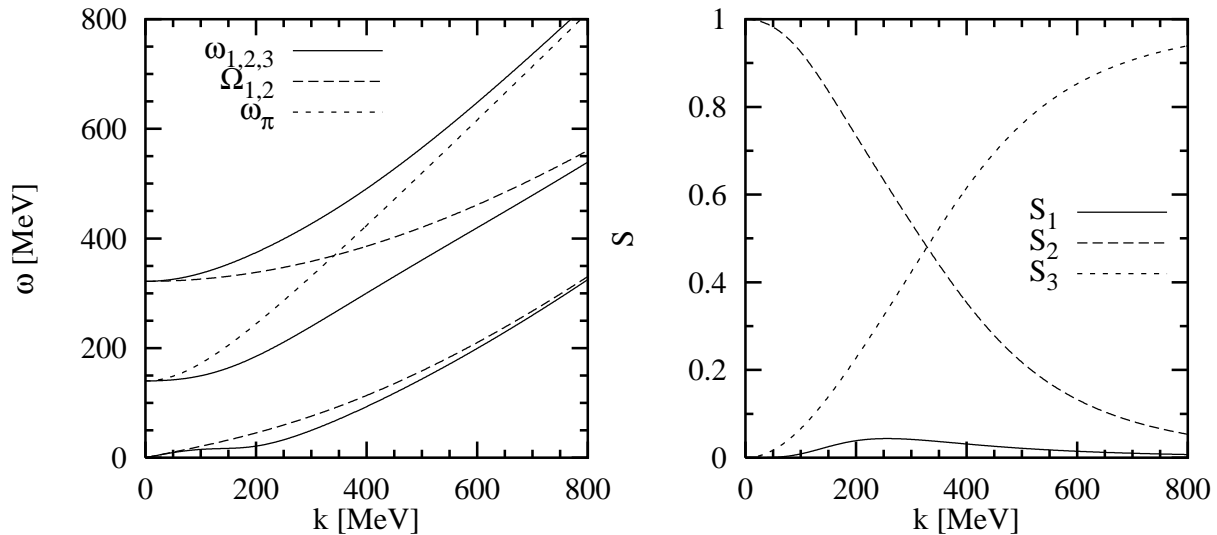


Abbildung 3.1: Links: Dispersionsrelationen im Drei-Niveau Modell bei einfacher Kernmateriedichte  $\rho_0 = 0.17 \text{ fm}^3$  [55]. Zum Vergleich ist auch die freie Pion-Dispersionsrelation  $w_\pi$  eingezeichnet. Rechts: Stärken der drei Pionäste bei  $\rho_0$  [55]. Es wurde  $\Lambda = 550 \text{ MeV}$  und für die Migdal-Parameter  $g'_{11} = 0.6$  und  $g'_{12} = g'_{22} = 0.25$  gewählt.

Kommen wir nun zu den Modifikationen des  $\rho$ -Propagators. Da in Kernmaterie der Pionpropagator wie in Gl. (3.4) gezeigt, geändert wird, verlangt die Erfüllung der Ward-

Identität des Vektorstromes [38], die Berücksichtigung von Vertexkorrekturen. Damit wird die  $\rho$ -Selbstenergie dann wieder vierdimensional transversal.

Die Lagrangedichte zur Beschreibung der  $\rho$ -Wechselwirkung wird aus dem Eichkonzept abgeleitet (vgl. hierzu 1.Kapitel) und ist im nukleonischen Sektor gegeben durch

$$\mathcal{L}_{\rho N} = g \bar{N} \frac{\tau_3}{2} \not{\rho} N \quad \text{und} \quad \mathcal{L}_{\rho\pi N} = i g \frac{f_N}{m_\pi} \bar{N} \vec{\tau} \cdot \vec{\rho} \gamma^5 N \cdot M_3 \vec{\pi}. \quad (3.5)$$

Bei Einbeziehung der  $\Delta$ -Resonanzen wird der obige Wechselwirkungsanteil schließlich vervollständigt durch

$$\mathcal{L}_{\rho\Delta} = g \bar{\Delta}_\mu \not{\rho} T_3^{3/2} \Delta^\mu - \frac{g}{3} \bar{\Delta}_\mu (\gamma^\mu \rho_\nu + \gamma_\nu \rho^\mu) T_3^{3/2} \Delta^\nu + \frac{g}{3} \bar{\Delta}_\mu \gamma^\mu \not{\rho} T_3^{3/2} \gamma_\nu \Delta^\nu \quad (3.6)$$

$$\mathcal{L}_{\rho\pi N\Delta} = -i g \frac{f_\Delta}{m_\pi} \bar{N} \vec{T}^\dagger \Delta_\mu \rho^\mu \cdot M_3 \vec{\pi} + h.c. \quad (3.7)$$

Dabei ist  $T_3^{3/2}$  die dritte Komponente des Isospinoperators in der vierdimensionalen regulären Darstellung. Auch hier werden in einer nichtrelativistischen Entwicklung der Vertizes nur die führenden Terme berücksichtigt. Anschließend lassen sich dann mit dieser Näherung aus der Ward-Identität die jeweiligen Vertexkorrekturen berechnen.

Die Einbeziehung der kurzreichweitigen Migdal-Wechselwirkung und des Formfaktors führt auf eine Vielzahl weiterer Diagramme die u.a. aus Gründen der Eichinvarianz berechnet werden müssen. Details hierzu findet man wieder in Referenz [24]. Im folgenden Bild sind dann die beiden Diagramme gezeigt, die zur Beschreibung der  $\rho$ -Selbstenergie berücksichtigt wurden.

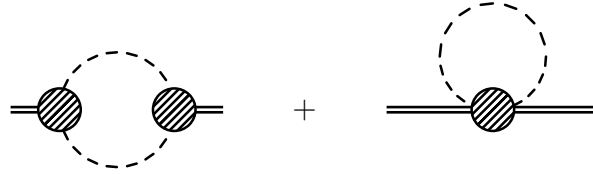


Abbildung 3.2:  $\rho$ -Meson Selbstenergie in Kernmaterie

Dabei kennzeichnet der schraffierte Vertex dann alle aus der Ward-Identität folgenden Beiträge und die gestrichelte Linie symbolisiert jetzt den angezogenen  $\pi$ -Propagator. Diese Selbstenergiebeiträge lassen sich folgendermaßen schreiben [24]:

$$\begin{aligned} -i \Sigma_{\mu\nu}(q) &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} i \mathcal{D}_\pi(k) \Gamma'_{\mu ab}{}^{(3)}(k, q) i \mathcal{D}_\pi(k+q) \Gamma'_{\nu ba}{}^{(3)}(k+q, -q) \\ &+ \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} i \mathcal{D}_\pi(k) \Gamma'_{\mu\nu aa}{}^{(4)}(k, k, q). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Der jeweilige Vertex wurde mit  $\Gamma'_{\mu ab}{}^{(3)}$  bzw. mit  $\Gamma'_{\mu\nu aa}{}^{(4)}$  bezeichnet. Dabei wird die Selbstenergie wieder mit dem Pauli-Villars-Verfahren regularisiert.

Die Transversalität der Selbstenergie erlaubt die folgende Zerlegung [43]

$$\Sigma_{\mu\nu}(q) = \Sigma_T(q) (P_T)_{\mu\nu} + \Sigma_L(q) (P_L)_{\mu\nu}. \quad (3.9)$$

Dabei sind

$$P_T^{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \mu \text{ oder } \nu = 0 \\ \delta^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{\vec{q}^2} & \mu, \nu \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (3.10)$$

und

$$P_L^{\mu\nu} = \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} - g^{\mu\nu} - P_T^{\mu\nu} \quad (3.11)$$

die Projektionsoperatoren auf die dreidimensional transversale und longitudinale Richtung der Impulsachse. Beide Beiträge sind selbst vierdimensional transversal, doch geht durch die Wahl des Ruhesystems der Kernmaterie die manifest lorentzinvariante Formulierung verloren.

In vollkommener Analogie läßt sich der  $\rho$ -Propagator  $\mathcal{D}_\rho^{\mu\nu}$  durch die Anwendung der Projektionsoperatoren in seinen transversalen und longitudinalen Teil zerlegen.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\rho^{\mu\nu}(q) &= \mathcal{D}_{\rho T}(q) P_T^{\mu\nu} + \mathcal{D}_{\rho L}(q) P_L^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{m_\rho^2 q^2} \\ &= \frac{P_T^{\mu\nu}}{q^2 - m_\rho^2 - \Sigma_T(q)} + \frac{P_L^{\mu\nu}}{q^2 - m_\rho^2 - \Sigma_L(q)} + \frac{q^\mu q^\nu}{m_\rho^2 q^2} \end{aligned} \quad (3.12)$$

In Abb. 3.3 sind  $-\Im m \mathcal{D}_{\rho L}(q)$  und  $-\Im m \mathcal{D}_{\rho T}(q)$  bei einfacher Kerndichte  $\rho_0$  (durchgezogen) und einem Dreierimpuls von  $|\vec{q}| = 0$  und  $|\vec{q}| = 0.3 \text{ GeV}$  aufgetragen. Zum Vergleich wurde auch der  $\rho$ -Propagator des Vakuums (gepunktet) mit in das Bild aufgenommen. Man erkennt praktisch keine Abhängigkeit der  $\rho$ -Spektralfunktion in Kernmaterie vom Dreierimpuls. Da diese Ausdrücke nicht mehr analytisch darstellbar sind, werden die Spektralfunktionen für die folgenden Rechnungen auf ein Gitter gelegt, von dem sie abgerufen werden.

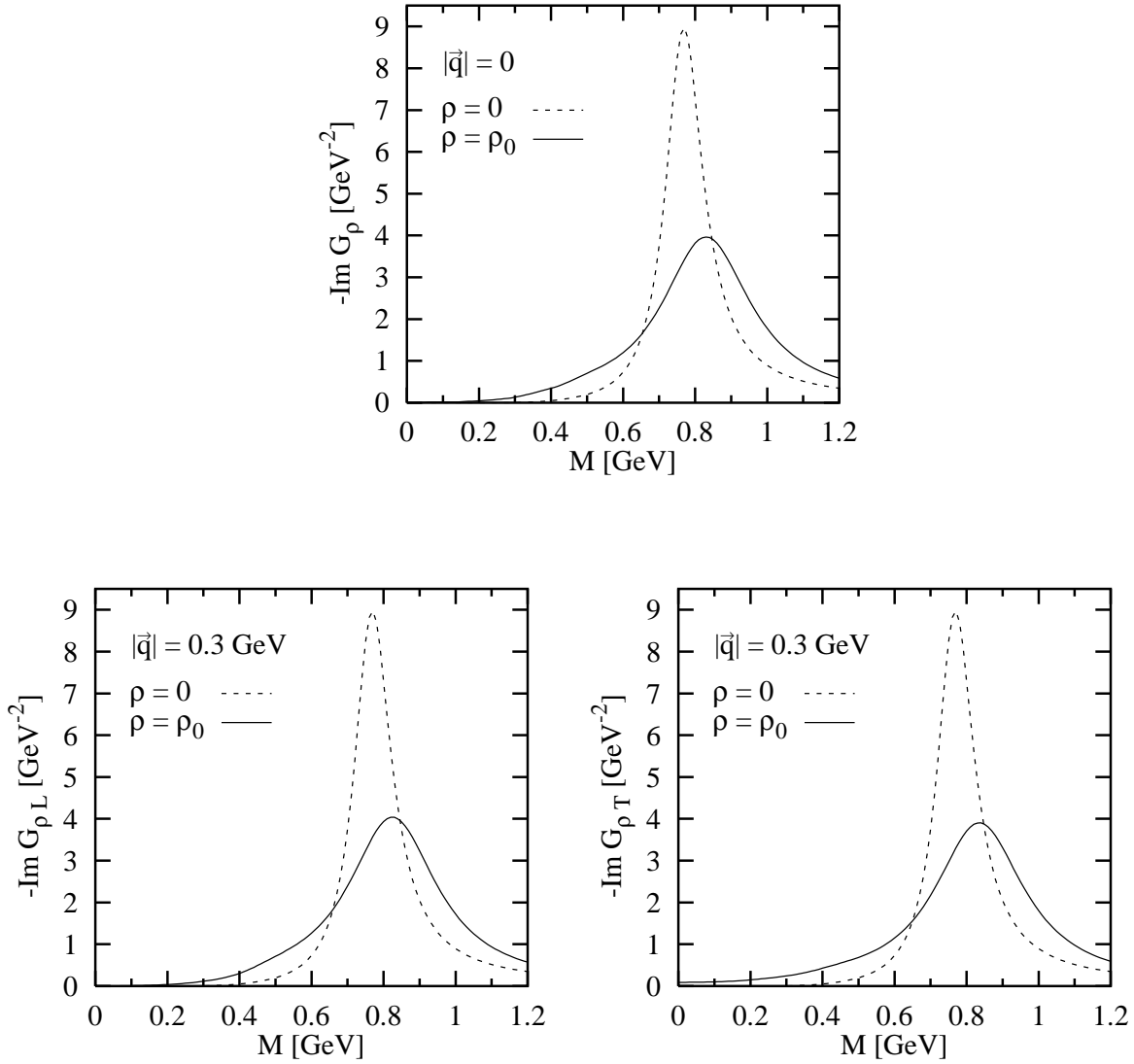


Abbildung 3.3: Oberes Bild:  $\mathcal{D}_\rho$  für  $|\vec{q}| = 0$  bei einfacher Kerndichte (durchgezogen) und für das Vakuum (gestrichelt) als Funktion der invarianten  $\rho$ -Masse  $M$ . Untere Bilder: Imaginärteil von  $\mathcal{D}_{\rho L}$  (links) und  $\mathcal{D}_{\rho T}$  (rechts) bei  $|\vec{q}| = 0.3 \text{ GeV}$  und einfacher Kerndichte (durchgezogen) und für das Vakuum (gestrichelt). Es wurde für den Formfaktor ein Cut-off von  $550 \text{ MeV}$  gewählt. Die Migdal-Parameter sind  $g'_{11} = 0.6$  und  $g'_{12} = g'_{22} = 0.25$ .

## 3.2 Einfaches Diagramm in Kernmaterie

In diesem Kapitel werden wir uns auf das einfache Diagramm beschränken. Hier werden die jeweiligen Propagatoren durch ihre mediummodifizierte Version, wie sie im vorangehenden Abschnitt erläutert wurden, ersetzt. Da der Ursprung der  $\omega\rho\pi$ -Kopplung in der chiralen Anomalie liegt, ist die Selbstenergie per Konstruktion vierdimensional transversal. Es existiert hier im Gegensatz zum  $\rho$ -Meson kein durch die Ward-Identitäten vorgegebenes Schema, mit dem eine Klasse von Diagrammen ausgewählt wird (vgl.[24]).

Wir werden uns bei der Berechnung der Selbstenergie auf den Imaginärteil beschränken. Der Grund liegt darin, daß man auf keinen aus dem Vakuum-Modell des  $\omega$ -Mesons festgelegten Regulator zurückgreifen kann. Hierzu wäre die vollständige Beschreibung der  $\omega$ -Breite im Vakuum die Voraussetzung.

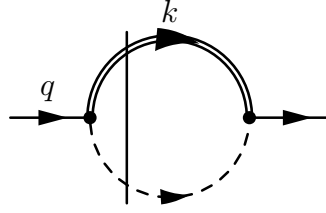


Abbildung 3.4: Der einfache Beitrag zur  $\omega$ -Selbstenergie in Kernmaterie

Nach Anwendung der Feynmanregeln und Projektion von longitudinaler- ( $\Sigma_L$ ) und transversaler ( $\Sigma_T$ ) Komponente der  $\omega$ -Selbstenergie erhält man folgende Ausdrücke:

$$\Sigma_L(q_0, \vec{q}) = 3 i q^2 \left( \frac{g_{\omega\rho\pi}}{m_\omega} \right)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[ \vec{k}^2 - \frac{(\vec{k} \cdot \vec{q})^2}{q^2} \right] \mathcal{D}_{\rho T}(k) \mathcal{D}_\pi(q - k) \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_T(q_0, \vec{q}) = & -\frac{1}{2} \Sigma_L(q_0, \vec{q}) + \frac{3}{2} i \left( \frac{g_{\omega\rho\pi}}{m_\omega} \right)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \mathcal{D}_\pi(q - k) \times \\ & \left[ \{ \mathcal{D}_{\rho L}(k) - \mathcal{D}_{\rho T}(k) \} k^2 \left( \vec{q}^2 - \frac{(\vec{k} \cdot \vec{q})^2}{k^2} \right) + 2 \mathcal{D}_{\rho T}(k) \{ (q \cdot k)^2 - q^2 k^2 \} \right]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Zur longitudinalen Komponente der  $\omega$ -Selbstenergie trägt nur der transversale Anteil des  $\rho$ -Propagators bei. Bei der Auswertung des Imaginärteils werden wieder die entsprechenden Spektralfunktionen von  $\rho$ -Meson und Pion miteinander gefaltet.

$$\begin{aligned} \Im m \Sigma_L(q_0, \vec{q}) = & -3 \left( \frac{g_{\omega\rho\pi}}{m_\omega} \right)^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[ \vec{k}^2 - \frac{(\vec{k} \cdot \vec{q})^2}{q^2} \right] \\ & \int_0^{q^0} \frac{dw}{4\pi} \mathcal{A}_{\rho T}(w, k) \mathcal{A}_\pi(q^0 - w, |\vec{q} - \vec{k}|) \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \Im m \Sigma_T(q_0, \vec{q}) = & -\frac{1}{2} \Im m \Sigma_L(q_0, \vec{q}) - \frac{3}{2} \left( \frac{g_{\omega\rho\pi}}{m_\omega} \right)^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int_0^{q^0} \frac{dw}{4\pi} \mathcal{A}_\pi(q^0 - w, |\vec{q} - \vec{k}|) \times \\ & \left[ \{ \mathcal{A}_{\rho L}(w, |\vec{k}|) - \mathcal{A}_{\rho T}(w, |\vec{k}|) \} \{ w^2 - \vec{k}^2 \} \left( \vec{q}^2 - \frac{(\vec{k} \cdot \vec{q})^2}{\vec{k}^2} \right) \right. \\ & \left. + 2 \mathcal{A}_{\rho T}(w, |\vec{k}|) \{ (q^0 w - \vec{q} \cdot \vec{k})^2 - q^2 (w^2 - \vec{k}^2) \} \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

Von den Integrationen in Gl. (3.15) und (3.16) kann noch eine Winkelintegration analytisch ausgeführt werden, die verbleibenden drei Integrationen werden numerisch mit einem adaptiven Integrationsverfahren ausgewertet.

Tabelle 3.1 und Abb. 3.5 zeigen einige Ergebnisse dieser Rechnungen für Kernmaterie, nämlich den transversalen und longitudinalen Teil der Selbstenergie als Funktion der invarianten  $\omega$ -Masse und die entsprechenden Breiten für verschiedene Dreierimpulse  $|\vec{q}|$  und verschiedene Dichten  $\rho$ . Dabei wird davon ausgegangen, daß die effektive  $\omega$ -Masse im Medium mit der des Vakuums identisch ist.

$\rho/\rho_0$	$ \vec{q} $ [MeV]	$\Gamma_L$ [MeV]	$\Gamma_T$ [MeV]
0.5	0	43.4	43.4
	250	45.9	38.2
1.0	0	59.2	59.2
	250	62.1	52.5
1.5	0	69.1	69.1
	250	72.7	63.2
2.0	0	77.1	77.1
	250	80.7	70.2

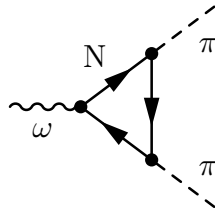
Tabelle 3.1: Die longitudinale( $\Gamma_L$ )- und transversale( $\Gamma_T$ ) Breite des  $\omega$ -Mesons für verschiedene Dichten  $\rho$  und Dreierimpulse  $\vec{q}$ .

Demnach führt dieses einfache Diagramm schon zu einer Breite des  $\omega$ -Mesons, die bei einfacher Kerndichte näherungsweise dem Neunfachen des Vakuumwertes entspricht. Außerdem ergibt sich ein Anwachsen der longitudinalen Breite bei Vergrößerung der Dichte. So steigt der Wert um jeweils  $\approx 10$  MeV bei Anhebung um die halbe Kerndichte. Die Dreierimpulsabhängigkeit der Breite ist relativ gering. So erhält man im Vergleich zum ruhenden  $\omega$ -Meson, einen um  $\approx 3$  MeV größeren Wert der longitudinalen Breite für den Dreierimpuls  $|\vec{q}| = 250$  MeV des  $\omega$ -Mesons.

Für die transversale Breite gilt analoges. Hierbei sollte darauf hingewiesen werden, daß der leichte Abfall der Breite mit Anwachsen des Dreierimpulses ein Effekt ist, der sich in unserem Modell wahrscheinlich aus der Annahme einer konstanten  $\Delta$ -Breite ergibt. Setzt man nämlich den Wert der  $\Delta$ -Breite und der  $\Delta$ -Masse auf einen effektiven Wert von 70% des Vakuumwertes, so ist die transversale  $\omega$ -Breite in guter Näherung mit der bei verschwindendem Dreierimpuls identisch.

Ersetzt man in Gl. (3.15) und (3.16) die  $\pi$ -Spektralfunktion des drei Niveau-Modells durch die des Vakuums, so werden die Breiten in Tab. 3.1 um  $\approx 20\%$  verkleinert. Das bedeutet also, daß der Hauptbeitrag aus der Verbreiterung der  $\rho$ -Spektralfunktion (vgl. Abb. 3.3) resultiert. Da die longitudinale  $\omega$ -Breite durch die transversale  $\rho$ -Spektralfunktion im Bereich invarianter Massen unterhalb der  $\omega$ -Masse bestimmt wird, sind Zerfälle wie  $\rho \rightarrow \pi(\Delta h)_T$  für die Verbreiterung des  $\omega$ -Mesons letztlich entscheidend. Es ist aber unmöglich anhand der Struktur von Gl. (3.16) zu entscheiden welche Beiträge des  $\rho$ -Mesons hier im einzelnen zur Verbreiterung des  $\omega$ -Mesons beitragen.

Die hier angegebene  $\omega$ -Breite sollte immer als Mindestbeitrag verstanden werden. Einerseits müssen, wie die Diskussion im Vakuum deutlich gezeigt hat, weitere Beiträge von Zwei-Loop-Diagrammen berücksichtigt werden und andererseits sind in dieser Rechnung Beiträge baryonischer Resonanzen wie  $\rho \rightarrow N^*(1520)h$ ,  $\rho \rightarrow N^*(1720)h$  oder  $\rho \rightarrow \Delta^*(1905)h$  noch nicht in der  $\rho$ -Selbstenergie enthalten [56], diese führen jedoch zu einer weiteren Verbreiterung der  $\rho$ -Spektralfunktion in Abb. 3.3 und müssen bei der Berechnung der  $\omega$ -Selbstenergie berücksichtigt werden. Weitere Beiträge zum raumartigen Bereich der  $\omega$ -Selbstenergie, folgen aus Diagrammen, die Kopplungen des  $\omega$ -Mesons an  $(Nh)$ -Beiträge enthalten. Außerdem sind baryonische Resonanzen  $\omega \rightarrow N(1520)^*h \rightarrow \omega$  oder  $\Delta$ -Resonanzen  $\omega \rightarrow \Delta(1232)\pi h \rightarrow \omega$  im zeitartigen Bereich der Selbstenergie zu berücksichtigen. Da ein Dreierimpuls des  $\omega$ -Mesons die Rotationssymmetrie bricht, kommt es außerdem zu weiteren Mischungen mit verschiedenen Partialwellen. Wichtig sind breite Resonanzen mit Massen in der Größenordnung der  $\omega$ -Masse. So zeigen Rechnungen [57] zum Kanal  $\omega \rightarrow Nh \rightarrow \sigma \rightarrow \pi\pi$  bei einfacher Kerndichte für  $|\vec{q}| = 0.5$  GeV Beiträge zur longitudinalen  $\omega$ -Breite von 27 MeV. Weitere Untersuchungen zum in Kernmaterie induzierten Zerfall von  $\omega \rightarrow \pi\pi$  sind in Ref.[58] dargestellt. Im folgenden Bild ist ein Beispiel eines in dieser Arbeit [58] berechneten Beitrags gezeigt, weitere ergeben sich aus der Einbeziehung von  $\Delta$ -Resonanzen.



Man erhält bei einfacher Kerndichte für Dreierimpulse von  $|\vec{q}| = 500$  MeV Beiträge zur longitudinalen Breite von  $\approx 250$  MeV, während die transversale Breite mit einigen MeV klein bleibt. Diese Ergebnisse sind sehr sensitiv auf die effektive  $\omega$ -Masse. Wird eine effektive  $\omega$ -Masse von 70% des Vakuumwertes angenommen, so wird die longitudinale  $\omega$ -Breite um den Faktor 2 verkleinert [58].

Bei der Auswertung der Loop-Integration in Gl. (3.15) ist auch der raumartige Bereich des  $\rho$ -Propagators wegen des  $k^4$ -Faktors aus Phasenraum und Vertex wichtig. Dieser wichtet Beiträge kleinerer invarianter  $\rho$ -Massen stärker zur  $\omega$ -Selbstenergie. Mit anderen Worten: Zur Berechnung der longitudinalen  $\omega$ -Breite ist die genaue Kenntnis des invarianten Massenbereiches  $\sqrt{q^2} < 0.8$  GeV der  $\rho$ -Spektralfunktion eine wichtige Voraussetzung. Die  $k^4$ -Abhängigkeit ist auch dafür verantwortlich, daß Substrukturen in der  $\rho$ -Spektralfunktion, wie z.B.  $\pi(\Delta h)_T$ -Äste bei der Integration 'ausgeschmiert' werden.

Weiterhin hat sich gezeigt, daß die  $\omega$ -Breite stark von dem Cut-off Wert des verwendeten Formfaktors  $\Gamma_\pi$  abhängt (vgl. Gl. (3.2)). So führt eine Erhöhung des Wertes  $\sqrt{\Lambda}$  auf 1.2 GeV zu einer näherungsweise Verdopplung der  $\omega$ -Breite. Der hier verwendete Wert von  $\Gamma_\pi = 550$  MeV ergibt sich aus der Anpassung an Daten des Photoabsorptionsquerschnittes am Nukleon [24].

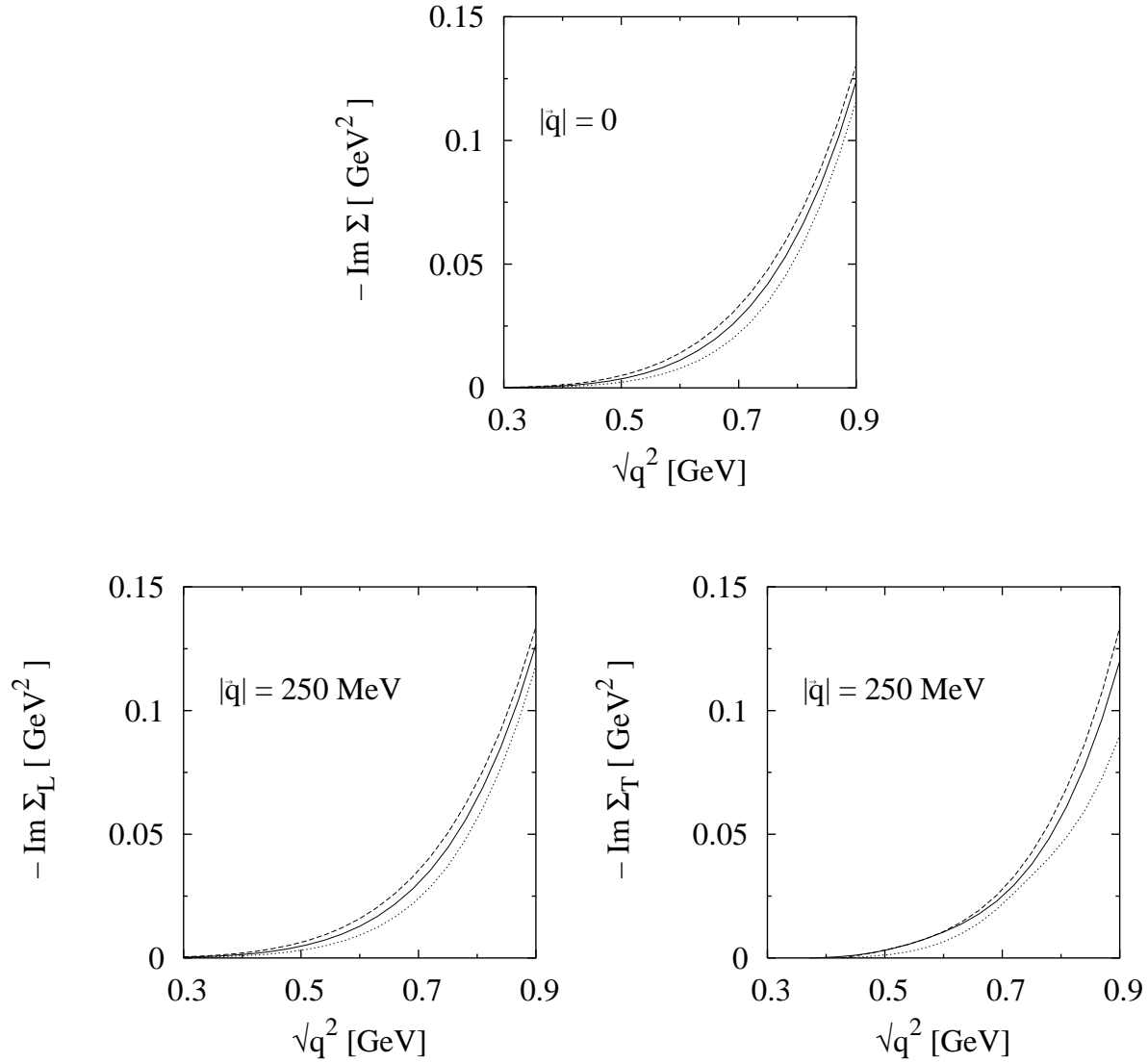


Abbildung 3.5: Die Beiträge zum Imaginärteil der  $\omega$ -Selbstenergie aus dem Diagramm in Abb. 3.4. Oberes Bild:  $\Sigma = \Sigma_T = \Sigma_L$  für  $\rho = \rho_0$  (gepunktet), für  $\rho_1 = 1.5 \rho_0$  (durchgezogen) und für  $\rho_2 = 2 \rho_0$  (gestrichelt). Untere Bilder:  $\Sigma_L$  (links) und  $\Sigma_T$  (rechts) für  $\rho_0$  (gepunktet), für  $\rho_1$  (durchgezogen) und für  $\rho_2$  (gestrichelt).



# Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde die Selbstenergie des  $\omega$ -Mesons im Vakuum und in Kernmaterie im Rahmen eines hadronischen Modells untersucht. Die dabei im Vakuum zu betrachtenden Freiheitsgrade, die zur Modellierung der  $\omega$ -Selbstenergie benötigt werden, sind das mit Pionen angezogene  $\rho$ -Meson und das Pion. Die Wechselwirkungen der Vektormesonen, Pionen und Photonen wurde im Rahmen eines Eichkonzeptes eingeführt. Zur Beschreibung der Kopplung Vektormeson-Photon wurde das Sakurai'sche-Vektordominanzmodell (VDM) benutzt [17]. Im ersten Kapitel wurde das VDM-Modell aus der Eichung des nichtlinearen  $\sigma$ -Modells motiviert. Dabei sind  $\rho$ - und  $\omega$ -Meson massive Eichfreiheitsgrade die aus der impliziten  $SU(2)$ -Eichung dieses Modells folgen. Das Photon wurde durch die explizite  $U(1)$ -Eichung in das Modell eingeführt. Abgesehen von diesen Standard Wechselwirkungen ergibt sich eine Kopplung des  $\omega$ -Mesons an ein  $\rho$ - und  $\pi$ -Feld bzw. an drei  $\pi$ -Felder, die aus der chiralen Anomalie folgt. Die anomale Brechung der chiralen Symmetrie führt überhaupt erst zu Selbstenergiebeiträgen für das  $\omega$ -Meson.

Den Zerfall des  $\omega$ -Mesons im Vakuum dominiert der  $3\pi$ -Kanal, ein Prozeß der entweder direkt oder über ein intermediäres  $\rho$ -Meson ablaufen kann [13]. Dabei wurden  $\delta_1^1$ -Streudaten und Daten des elektromagnetischen Pionformfaktors zur Anpassung der Parameter des  $\rho$ -Mesons benutzt [24]. Die direkte Kopplung des  $\omega$ -Mesons an die 3 Pionen ist experimentell nicht zugänglich und wurde auf der Basis von Überlegungen zur chiralen Symmetrie festgelegt [47]. Die  $\omega\rho\pi$ -Kopplungskonstante kann, wie im zweiten Kapitel gezeigt wurde, im Rahmen der Vektordominanz aus der Partialbreite des Zerfalls  $\omega \rightarrow \pi^0\gamma$  bestimmt werden.

Die in dieser Arbeit berechneten Selbstenergiediagramme sind in Abschnitt 2.2.1 in Abb. 2.3 dargestellt. Mit dieser Vielzahl an Diagrammen konnten 57% des experimentellen Wertes der Breite erklärt werden. Es hat sich im nachhinein gezeigt, daß man vermutlich alle weiteren höheren Diagramme aufsummieren muß, um die  $\omega$ -Breite zu reproduzieren. Das ist freilich unmöglich. Allein schon für die Auswertung von Zwei-Loop-Diagrammen mit impulsabhängigen Selbstenergien in den jeweiligen Propagatoren mußten aufwendige Techniken (vgl. Anhang) entwickelt werden. Diese Techniken erlauben die direkte Berechnung des mikroskopischen Formfaktors am  $\omega\rho\pi$ -Vertex und damit experimentelle Vergleiche. Aus den Daten des Formfaktors, kann mit Hilfe von Hilbert-Transformationen [41, 42] auf fehlende Beiträge höherer Diagramme geschlossen werden.

Wie die Rechnungen (vgl. Abschnitt 2.2.5 und 2.5.2) zeigen, kann der Formfaktor für den Dalitz-Zerfall  $\omega \rightarrow \pi^0 l^+ l^-$  in den aus dem VDM-Modell folgenden elektromagnetischen Pionformfaktor und den Korrekturfaktor aus dem Vertex zerlegt werden. Dieser

Korrekturfaktor ist der Formfaktor des Zerfalls  $\omega \rightarrow \rho\pi \rightarrow 3\pi$  (vgl. Abb. 2.14). Er beschreibt die Impulsabhängigkeit der Kopplungskonstante  $g_{\omega\rho\pi}$ . Wie auch Messungen [49] zur differentiellen Zerfallsbreite im Kanal  $\omega \rightarrow \pi^0\mu^+\mu^-$  im Vakuum gezeigt haben, ist die Annahme einer impulsunabhängigen Kopplungskonstante  $g_{\omega\rho\pi}$  eine schlechte Näherung. Mit ihr kann die  $\omega$ -Partialbreite im  $3\pi$ - und im  $\pi^0\gamma$ -Kanal nicht gleichzeitig erklärt werden.

Zur Modellierung der Impulsabhängigkeit der  $\omega\rho\pi$ -Kopplungskonstante wird auf die Freiheitsgrade der hier verwendeten Theorie zurückgegriffen. Im Gegensatz zum raumartigen Bereich können im zeitartigen Bereich des Formfaktors Resonanzen angeregt werden. Es hat sich gezeigt, (vgl. Abschnitt 2.2.6) daß Schwellen im Imaginärteil von Vertexkorrekturen zu signifikanten Änderungen der  $\omega\rho\pi$ -Kopplungskonstante führen. Der jeweils betrachtete kinematische Bereich entscheidet letztlich, welche Vertexkorrekturen im einzelnen zu einer signifikanten Änderung der Kopplungskonstante beitragen.

Wegen der vergleichsweise geringen Masse des Pions gegenüber den  $\rho$ - und  $\omega$ -Freiheitsgraden, wird die Piondynamik die Impulsabhängigkeit der  $\omega\rho\pi$ -Kopplungskonstante im invarianten Massenbereich bis zu  $\sqrt{s} \leq m_\omega - m_\pi \approx 640$  MeV bestimmen. Zur Beschreibung des Bereiches  $\sqrt{s} \geq m_\omega + m_\pi \approx 920$  MeV, wie er im Wirkungsquerschnitt der Reaktion  $e^-e^+ \rightarrow \omega\pi^0$  auftritt, müssen dann auch höher liegende Resonanzen wie  $\omega, \rho, a_1$  berücksichtigt werden [49].

Bei den hier berücksichtigten Selbstenergiediagrammen sind nur Vertexkorrekturen mit einer Schwelle bei 2 Pionmassen eingeschlossen. Damit läßt sich der gemessene Formfaktor [49] im unteren Bereich von  $\sqrt{s}$  bis zu näherungsweise zweieinhalb Pionmassen erklären. Dazu gehören Dreierimpulse eines Pions bis zu 320 MeV aus der Formationszone des  $\omega$ -Zerfalls. Das bedeutet eine Auflösung der Pionwolke des  $\omega$ -Mesons bis zu  $\Delta x \leq 0.63$  fm.

Für den  $3\pi$ -Zerfall eines  $\omega$ -Mesons wird der Formfaktor allerdings erst bei invarianten Massen über der doppelten Pionmasse aufintegriert. Dann erklärt sich ein fehlender Beitrag zur  $\omega$ -Breite im  $3\pi$ -Kanal aus der Impulsabhängigkeit des Formfaktors bzw. der  $g_{\omega\rho\pi}$ -Kopplungskonstante im oberen Massenbereich von  $3m_\pi \leq \sqrt{s} \leq m_\omega - m_\pi$ . Hierzu müßten, wie schon angesprochen, mindestens Drei-Loop-Selbstenergiediagramme ausgewertet werden, nicht nur ein numerisch extrem aufwendiges Verfahren.

Diese Diskussion zeigt, daß die Erklärung der Daten des Formfaktors vom Dalitz-Zerfall  $\omega \rightarrow \mu^+\mu^-\pi$  mit der Erklärung der  $\omega$ -Breite einher geht. In den letzten 15 Jahren ist es nicht gelungen diese Daten zum Formfaktor in der Sakurai'schen [17]- oder in der Kroll-Lee-Zumino Version von VDM [20] zu verstehen [59].

Bevor weitere theoretische Untersuchungen angestellt werden können, sind Daten mit besserer Statistik notwendig. Im nächsten Jahr sollen von der HADES-Kollaboration neue Messungen zur differentiellen Breite von  $\omega \rightarrow \pi^0e^+e^-$  durchgeführt werden [60]. Es bleibt abzuwarten, inwiefern die alten Daten von Dzhelyadin bestätigt werden. Man kann aber an dieser Stelle die weitere Entwicklung schon auf zwei Möglichkeiten beschränken:

- Die Daten reproduzieren den in Abb. 2.30 angegebenen Verlauf von Ref.[49] und es existiert eine Abweichung vom elektromagnetischen Pionformfaktor. Dann ist die Impulsabhängigkeit der  $g_{\omega\rho\pi}$ -Kopplung ausschlaggebend zur Erklärung der  $\omega$ -Breite und man müßte höhere Diagramme bei der Berechnung der  $\omega$ -Selbstenergie

berücksichtigen. Bis zu welcher Ordnung entscheidet letztlich die Größe der Abweichungen vom elektromagnetischen Pionformfaktor.

- Die Daten reproduzieren den Verlauf des elektromagnetischen Pionformfaktor. Dann wäre die Impulsabhängigkeit der  $g_{\omega\rho\pi}$ -Kopplung vernachlässigbar bei der Erklärung der  $\omega \rightarrow 3\pi$ -Breite. Hierzu müßte andererseits die an  $\Gamma_{\omega \rightarrow \pi^0\gamma}$  angepaßte Kopplungskonstante  $g_{\omega\rho\pi}$  weiter vergrößert werden. Damit würde dann der in Abb. 2.30 gezeigte berechnete Formfaktor noch stärker anwachsen und den genau gegenteiligen Effekt verursachen. Analoges gilt bei Vergrößerung der Kopplungskonstante  $g_{\rho\pi\pi}$ . Auch mit Veränderung der  $\omega\pi\pi\pi$ -Kopplungskonstante  $h$  können die Daten nicht erklärt werden. Da eine Vergrößerung von  $h$ , wegen des destruktiven Beitrags vom Interferenzterm zu einer Verringerung der Breite des  $3\pi$ -Kanals führt, muß  $g_{\omega\rho\pi}$  entsprechend vergrößert werden, was wieder im Anwachsen des Formfaktors endet. Im anderen Grenzfall  $h = 0$  gilt analoges. Da andere hadronische Freiheitsgrade keine zusätzlichen Beiträge zur Vakuumbreite des  $\omega$ -Mesons liefern, muß letztlich auf eine Modellierung der  $\omega$ -Selbstenergie im Quarkbild zurückgegriffen werden.

Beim Übergang zu Kernmaterie werden die Eigenschaften der hadronischen Freiheitsgrade, die zur Modellierung der  $\omega$ -Selbstenergie notwendig sind, geändert. Grundlage für das hier benutzte Modell ist die Arbeit von M. Urban [24].

Das Pion erhält in Kernmaterie einen Beitrag zur Selbstenergie durch  $(Nh)$ - und  $(\Delta h)$ -Anregungen. In der weiteren Verwendung des Pionpropagators wurde auf das Drei-Niveau-Modell zurückgegriffen. Dabei handelt es sich um eine Näherung der  $\pi$ -Selbstenergie, die aus der Vernachlässigung der Dreierimpulse der Löcher im Fermisee gegenüber dem Pionimpuls entsteht.

Darauf aufbauend wurde die  $\rho$ -Selbstenergie berechnet. Diese enthält, wie im Detail in Ref.[24] dargestellt ist, Wechselwirkungsbeiträge aus der  $\rho N$ ,  $\rho\pi N$ ,  $\rho\Delta$  und  $\rho\pi N\Delta$ -Wechselwirkung.

Mit den so modifizierten Propagatoren wurde der Imaginärteil des einfachen Diagramms berechnet. Man erhält schon unter Einbeziehung des einfachen Beitrags eine deutliche Verbreiterung des  $\omega$ -Mesons. Bei einfacher Dichte erhöht sich die Breite des  $\omega$ -Mesons für den Fall verschwindenden Dreierimpulses auf ca. 60 MeV. Es ergibt sich ein Anwachsen des longitudinalen Wertes der Breite um ungefähr 10 MeV pro Erhöhung um die halbe normale Kerndichte. Der Hauptbeitrag von immerhin 80% kommt aus der Verbreiterung des  $\rho$ -Mesons und hier, insbesondere aus den  $\pi(\Delta h)_T$ -Ästen. Ursache hierfür ist die stärkere Wichtung von Beiträgen kleiner invarianter  $\rho$ -Massen durch den Vertex und den Phasenraum. Außerdem setzt das die genaue Kenntnis über den longitudinalen  $\rho$ -Propagator für kleine invariante Massen bis in den raumartigen Bereich voraus. Die longitudinale Breite für einen Dreierimpuls von  $|\vec{q}| = 250$  MeV ist lediglich um 3 MeV größer als für ein ruhendes  $\omega$ -Meson.

Die transversale  $\omega$ -Breite bei  $|\vec{q}| = 250$  MeV fällt dagegen um 6 MeV ab, hierbei handelt es sich wahrscheinlich um einen Effekt, der aus der Näherung einer konstanten  $\Delta$ -Breite in unserem Modell folgt.

In der bisher verwendeten  $\rho$ -Selbstenergie sind schwerere nukleonische Resonanzen wie  $\rho \rightarrow N^*(1520)h$  oder  $\rho \rightarrow N^*(1720)h$  noch nicht einbezogen. Diese führen zu ei-

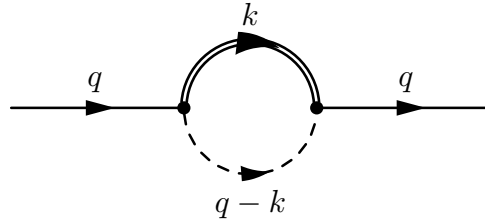
ner weiteren Verbreiterung der  $\rho$ -Spektralfunktion, die dann bei der Berechnung der  $\omega$ -Selbstenergie berücksichtigt werden muß.

Weitere Beiträge, einmal von den Zwei-Loop-Diagrammen abgesehen, ergeben sich aus der Ankopplung des  $\omega$ -Mesons an baryonische Resonanzen. Folgende Kanäle sind für das  $\omega$ -Meson in Kernmaterie beispielsweise möglich:  $\omega \rightarrow N^*(1520)h \rightarrow \omega$  oder  $\omega \rightarrow \Delta(1232)\pi h \rightarrow \omega$ . Somit sollte die mit 60 MeV angegebene  $\omega$ -Breite als Mindestbeitrag verstanden werden.

Weitere Kanäle die aus der Mischung einzelner Partialwellen folgen, z.B. der durch Kernmaterie induzierte Zerfall  $\omega \rightarrow \pi\pi$  [57, 58] sind möglich. Letztlich sollte noch die dynamische Verbreiterung des  $\omega$ -Mesons wegen des relativ großen Wirkungsquerschnittes von  $\omega N \rightarrow \pi N$  erwähnt werden [57].

# Anhang

## Selbstenergie von 1-loop Diagrammen



Die Berechnung der Selbstenergiebeiträge von 1-loop Diagrammen des oben dargestellten Typs geschieht am einfachsten in einer in Imaginär - und Realteil separierten Form. Dabei werden insbesondere numerische Probleme von der bis zu  $k_0 = \pm\infty$  reichenden Integration, die für  $q^0 \rightarrow 0$  zu signifikanten Ungenauigkeiten führen können, vermieden. Die Berechnung soll im Rahmen des allgemeinen Falles zweier beliebiger Propagatoren und Vertizes angegeben werden. Dabei bezeichne  $B$  das durch die Vertizes entstehende Polynom von externen Impuls  $q$  und Loopimpuls  $k$  und  $D$  die Propagatoren. In der folgenden Notation wird nur die funktionale Abhängigkeit  $B(k^0)$  angegeben und die Dreierimpulse werden unterdrückt. In einem ersten Schritt werden die Propagatoren durch ihre Spektraldarstellung ersetzt.

$$\begin{aligned} \Im m \mathcal{G}(q, \vec{k}) &= \Im m i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk^0}{2\pi} B(k^0) D_1(k) D_2(q-k) \\ &= \Im m \int_0^{\infty} \frac{dw_1^2}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{dw_2^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk^0}{2\pi} B(k^0) \frac{\mathcal{A}_1(w_1, |\vec{k}|)}{w_1^2 - k^0{}^2 - i\epsilon} \frac{\mathcal{A}_2(w_2, |\vec{q} - \vec{k}|)}{w_2^2 - (q^0 - k^0)^2 - i\epsilon} \end{aligned}$$

Die Spektralfunktion ist bei spezieller Wahl eines Bezugssystems explizit von Energie  $w$  und Dreierimpuls  $|\vec{k}|$  abhängig und gegeben durch

$$\mathcal{A}(w, |\vec{k}|) = -2 \Im m D^+(w, |\vec{k}|).$$

Bei der Auswertung der  $k^0$ -Integration tragen zum Imaginärteil von  $\mathcal{G}(q, \vec{k})$  nur die beiden Terme bei, bei denen die Faktoren jeweils einen Pol in der oberen und unteren komplexen  $k^0$ -Ebene besitzen. Damit ergibt sich schließlich

$$\Im \mathcal{G}(q, \vec{k}) = \Im \int_0^\infty \frac{dw_1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{dw_2}{2\pi} \mathcal{A}_1(w_1, |\vec{k}|) \mathcal{A}_2(w_2, |\vec{q} - \vec{k}|) \left\{ \frac{B(q^0 - w_2)}{q^0 - w_1 - w_2 + i\epsilon} - \frac{B(-w_1)}{q^0 + w_1 + w_2 - i\epsilon} \right\}.$$

Der Imaginärteil der in der Klammer stehenden Terme führt unter Benutzung des unter dem Integralzeichen zu lesenden Ausdrucks

$$\frac{1}{x - x_0 \pm i\epsilon} = \wp \frac{1}{x - x_0} \mp i\pi \delta(x - x_0)$$

zu zwei  $\delta$ -Funktionen, von denen unter Beschränkung auf  $q^0 > 0$  nur die sich aus dem ersten Term ergebende  $\delta$ -Funktion beiträgt.

$$\begin{aligned} \Im \mathcal{G}(q, \vec{k}) &= - \int_0^\infty \frac{dw_1}{4\pi} \int_0^\infty dw_2 B(q^0 - w_2) \mathcal{A}_1(w_1, |\vec{k}|) \mathcal{A}_2(w_2, |\vec{q} - \vec{k}|) \delta(q^0 - w_1 - w_2) \\ &= - \int_0^\infty \frac{dw_1}{4\pi} B(w_1) \mathcal{A}_1(w_1, |\vec{k}|) \mathcal{A}_2(q^0 - w_1, |\vec{q} - \vec{k}|) \Theta(q^0 - w_1) \\ &= - \int_0^{q^0} \frac{dw}{4\pi} B(w) \mathcal{A}_1(w, |\vec{k}|) \mathcal{A}_2(q^0 - w, |\vec{q} - \vec{k}|) \end{aligned} \quad (17)$$

Die Spektralfunktion  $\mathcal{A}(k)$  ist dem Produkt aus Imaginärteil der Selbstenergie und dem Betragsquadrat des Propagators  $D$  proportional und kann im Falle verschwindenden Imaginärteils der Selbstenergie im raumartigen Bereich, auch keine Beiträge besitzen. Insbesondere folgt hieraus, daß auch  $\Im \mathcal{G}(q, \vec{k})$  für  $q^2 < 0$  bei beliebigen  $\vec{k}$  verschwinden muß, da man nur im Falle zeitartiger  $q$  die Argumente beider Spektralfunktionen  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  innerhalb des Integrationsintervalls von  $w$  in den zeitartigen Bereich bringen kann. Oder anders formuliert, solange der externe Viererimpuls  $q$  im raumartigen Bereich liegt, können bei der  $w$ -Integration nie simultan die zeitartigen Bereiche beider Propagatoren  $D_1$  und  $D_2$  durchlaufen werden, was dazu führt, daß  $\mathcal{G}(q, \vec{k})$  reell bleibt [61].

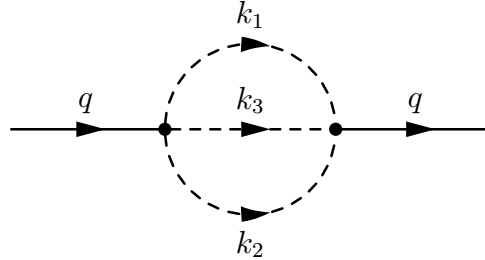
Da  $\mathcal{G}(q, \vec{k})$  im allgemeinen Fall für  $q^0 \rightarrow \infty$  nicht verschwindet, müssen subtrahierte Dispersionsintegrale zur Berechnung des Realteils von  $\mathcal{G}(q, \vec{k})$  verwendet werden. Das Unstetigkeitsproblem einer in der oberen komplexen Ebene analytischen Funktion ist in diesem Fall nur bis auf ein Polynom eindeutig bestimmt [42]. Beispielsweise ergibt sich im Falle  $\mathcal{G}(q, \vec{k}) \rightarrow konst$  für  $q \rightarrow \infty$

$$\Re \mathcal{G}(q, \vec{k}) = \Re \mathcal{G}(q_0=0, \vec{q}, \vec{k}) + q_0^2 \wp \int_0^\infty \frac{dw^2}{\pi} \frac{\Im \mathcal{G}(w, \vec{q}, \vec{k})}{w^2(w^2 - q_0^2)}.$$

Die Fortsetzung dieser Taylorentwicklung bis zur Ordnung  $q_0^{2n}$ , die zu mehrfach subtrahierten Dispersionsintegralen führt, ist im Falle des asymptotischen Verhaltens von  $\mathcal{G}(q, \vec{k}) \rightarrow q_0^{2n-2}$  notwendig. Entsprechend sind  $\Re e \mathcal{G}(q_0 = 0, \vec{q}, \vec{k})$  als auch die  $n - 1$  Ableitungen bezüglich  $q_0^2$  frei [42].

## Selbstenergie von 2-loop Diagrammen

Das Verfahren der getrennten Berechnung von Imaginär- und Realteil der Selbstenergie soll auch in höherer Ordnung Störungstheorie angewendet werden. Von den in dieser Arbeit verwendeten 2-loop Diagrammen gestaltet sich die Auswertung des folgenden am einfachsten.



Auch hier soll der allgemeine Fall dreier verschiedener Propagatoren  $D$  betrachtet werden. In Analogie zum vorherigen Abschnitt bezeichne  $B(k_1^0, k_2^0)$  das sich aus den Vertizes ergebende Polynom von externem Viererimpuls  $q$  und Loopimpulsen  $k_1, k_2$ .

$$\begin{aligned} \Im m \mathcal{G}(q, \vec{k}_1, \vec{k}_2) &= \Im m i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_1^0}{2\pi} i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_2^0}{2\pi} B(k_1^0, k_2^0) D_1(k_1) D_2(k_2) D_3(q - k_1 - k_2) \\ &= \Im m \int_0^{\infty} \frac{dw_1^2}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{dw_2^2}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{dw_3^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{idk_1^0}{2\pi} \frac{-\mathcal{A}_1(w_1, |\vec{k}_1|)}{w_1^2 - k_1^{02} - i\epsilon} \\ &\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{idk_2^0}{2\pi} B(k_1^0, k_2^0) \frac{\mathcal{A}_2(w_2, |\vec{k}_2|)}{w_2^2 - k_2^{02} - i\epsilon} \frac{\mathcal{A}_3(w_3, |\vec{q} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2|)}{w_3^2 - (q^0 - k_1^0 - k_2^0)^2 - i\epsilon} \end{aligned}$$

Zum  $k_2^0$ -Integral in der letzten Zeile tragen sowohl Terme, mit je einem Pol in der unteren und oberen komplexen  $k_2^0$ -Ebene, als auch ein Term mit beiden Polen auf einer der Seiten bei. Jedoch wird nach Ausführung der  $k_1^0$ -Integration der Term, bei dem beide Pole auf einer Seite der  $k_2^0$ -Ebene gelegen haben, reell und fällt mit Bildung des Imaginärteils von  $\mathcal{G}$  wieder heraus. Unter Beschränkung auf  $q^0 > 0$  erhält man :

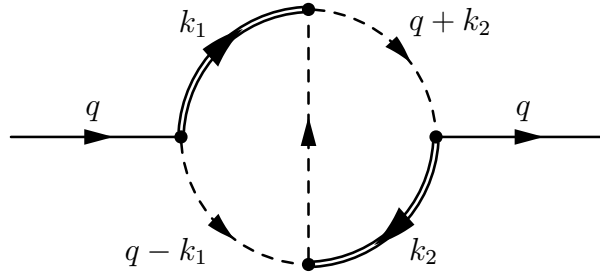
$$\begin{aligned} \Im m \mathcal{G}(q, \vec{k}_1, \vec{k}_2) &= - \int_0^{\infty} \frac{dw_1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{dw_2}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{dw_3}{2\pi} B(w_1, w_2) \mathcal{A}_1(w_1, |\vec{k}_1|) \mathcal{A}_2(w_2, |\vec{k}_2|) \mathcal{A}_3(w_3, |\vec{k}_3|) \\ &\quad \pi \delta(q^0 - w_1 - w_2 - w_3) \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
&= -\int_0^{q_0} \frac{dw_1}{4\pi} \int_0^{q_0-w_1} \frac{dw_2}{2\pi} B(w_1, w_2) \mathcal{A}_1(w_1, |\vec{k}_1|) \mathcal{A}_2(w_2, |\vec{k}_2|) \\
&\quad \mathcal{A}_3(q_0 - w_1 - w_2, |\vec{q} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2|). \tag{19}
\end{aligned}$$

Auch hier ergibt sich der Imaginärteil von  $\mathcal{G}$  wieder aus einer Faltung der Imaginärteile der einzelnen Propagatoren. Deswegen kann es in völliger Analogie zu dem 1-loop Diagramm keine Beiträge zum Imaginärteil von  $\mathcal{G}$  bei raumartigen  $q$  geben wenn die Selbstenergie in den Zwischenzuständen nur im zeitartigen Bereich komplex wird [61]. Für Diagramme mit  $n$  Zwischenzuständen und zwei Vertizes deutet sich hier die Darstellung von  $\Im m \mathcal{G}$  als Faltung der Imaginärteile der Propagatoren an. Das läßt sich beweisen indem Gl. (17) als Iterationsgleichung für  $\Im m \mathcal{G}$  benutzt wird. Der Index  $n$  bezeichne dabei die Anzahl der Zwischenzustände und  $i = 1, \dots, n-1$  die Iteration.

$$\begin{aligned}
\Im m \mathcal{G}_{n+1-i}(q^0, \vec{k}_i, \dots, \vec{k}_n) &= \int_0^{q^0} \frac{dw}{2\pi} \mathcal{A}_i(w, |\vec{k}_i|) \Im m \mathcal{G}_{n-i}(q^0 - w, \vec{k}_{i+1}, \dots, \vec{k}_n) \\
\mathcal{G}_1(q^0 - w, \vec{k}_n) &= D_n(q^0 - w, |\vec{k}_n|).
\end{aligned}$$

Die für die bisher diskutierten Diagramme erhaltenen Ausdrücke sind nur Spezialfälle der allgemeineren Cutkosky-Regel [48]. Wie sich im weiteren zeigen wird, bestehen die Integranden in Gl. (17) und (19) nur deshalb aus den Imaginärteilen der Propagatoren  $D$ , weil die einzige Möglichkeit, in der diese Diagramme aufgeschnitten werden können, darin besteht, den Schnitt gleichzeitig durch alle Zwischenzustände zu legen. Wie sich diese Ausdrücke ändern, wenn es mehrere Schnitte und damit auch mehr als zwei Vertizes gibt, soll anhand des folgenden Diagramms erläutert werden.



Die Auswertung dieses Diagramms wird in zwei Schritten vorgenommen. Im ersten Teil wird die Vertexkorrektur  $\Gamma$ , das heißt eine der  $k_0$ -Integrationen, ausgewertet. Der so erhaltene Ausdruck für  $\Gamma$  wird anschließend in Real- und Imaginärteil zerlegt. Im zweiten Teil wird dann die noch verbleibende zweite  $k^0$ -Integration ausgeführt und wie üblich der Imaginärteil von  $\mathcal{G}$  berechnet. Abschließend werden die einzelnen Schnitte dieses Diagramms über Real- und Imaginärteil der Vertexkorrektur  $\Gamma$  formuliert.

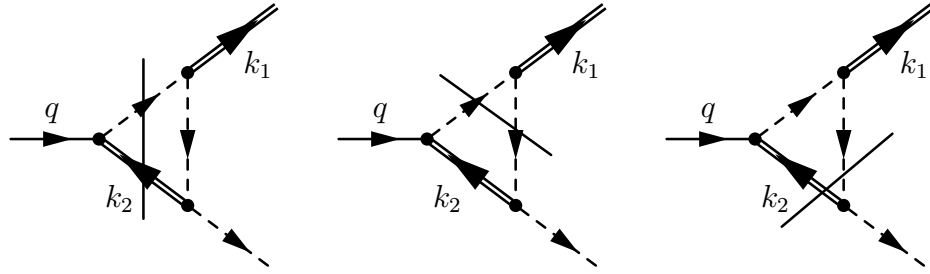


$$\mathcal{G}(q, \vec{k}_1, \vec{k}_2) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_1^0}{2\pi} \Gamma(q, k_1, \vec{k}_2) D_1(k_1) D_2(q - k_1)$$

$$\Gamma(q, k_1, \vec{k}_2) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_2^0}{2\pi} B(k_1, k_2) D_3(k_2) D_4(q + k_2) D_5(q + k_2 - k_1)$$

Die Propagatoren werden wieder über die Dispersionsintegrale durch ihre Spektralfunktionen ersetzt. Zum Imaginärteil von  $\Gamma(q, k_1, \vec{k}_2)$  tragen nur die Terme bei, bei denen nie alle drei Pole gleichzeitig auf einer der Seiten der komplexen  $k_2^0$ -Ebene liegen. Entsprechend der drei möglichen Schnitte erhält man für den Imaginärteil der Vertexkorrektur

$$\Im m \Gamma(q, k_1, \vec{k}_2) = \Im m \{ \Gamma_1(q, k_1, \vec{k}_2) + \Gamma_2(q, k_1, \vec{k}_2) + \Gamma_3(q, k_1, \vec{k}_2) \}$$



$$\Im m \Gamma_1(q, k_1, \vec{k}_2) = - \int_0^\infty \frac{dw_3}{2\pi} \int_0^\infty \frac{dw_4}{2\pi} \mathcal{A}_3(w_3, |\vec{k}_2|) \mathcal{A}_4(w_4, |\vec{q} + \vec{k}_2|)$$

$$\{ B(k_1^0, -w_3) \Re e D_5(k_1^0 - w_4, |\vec{q} - \vec{k}_1 + \vec{k}_2|) \pi \delta(q^0 - w_3 - w_4) +$$

$$B(k_1^0, +w_3) \Re e D_5(k_1^0 + w_4, |\vec{q} - \vec{k}_1 + \vec{k}_2|) \pi \delta(q^0 + w_3 + w_4) \} \quad (20)$$

$$\Im m \Gamma_2(q, k_1, \vec{k}_2) = - \int_0^\infty \frac{dw_4}{2\pi} \int_0^\infty \frac{dw_5}{2\pi} \mathcal{A}_4(w_4, |\vec{q} + \vec{k}_2|) \mathcal{A}_5(w_5, |\vec{q} - \vec{k}_1 + \vec{k}_2|)$$

$$\{ B(k_1^0, -q^0 + w_4) \Re e D_3(q^0 - w_4, |\vec{k}_2|) \pi \delta(k_1^0 - w_4 - w_5) +$$

$$B(k_1^0, -q^0 - w_4) \Re e D_3(q^0 + w_4, |\vec{k}_2|) \pi \delta(k_1^0 + w_4 + w_5) \} \quad (21)$$

$$\Im m \Gamma_3(q, k_1, \vec{k}_2) = - \int_0^\infty \frac{dw_3}{2\pi} \int_0^\infty \frac{dw_5}{2\pi} \mathcal{A}_3(w_3, |\vec{k}_2|) \mathcal{A}_5(w_5, |\vec{q} - \vec{k}_1 + \vec{k}_2|)$$

$$\{ B(k_1^0, -w_3) \Re e D_4(q^0 - w_3, |\vec{q} + \vec{k}_2|) \pi \delta(q^0 - k_1^0 - w_3 - w_5) +$$

$$B(k_1^0, +w_3) \Re e D_4(q^0 + w_3, |\vec{q} + \vec{k}_2|) \pi \delta(q^0 - k_1^0 + w_3 + w_5) \}. \quad (22)$$

Wie den Ausdrücken zu entnehmen ist, bekommt jeder aufgeschnittene Zwischenzustand den Imaginärteil und jeder nicht geschnittene Zustand den Realteil seines Propagators zugeordnet [48]. Weiterhin ist zu erkennen, daß es zwei Terme pro Schnitt gibt. Die zweite  $\delta$ -Funktion kommt jeweils über die gleichzeitige Umkehr der externen Impulse

$q, k_1$  herein. Beschränkt man sich auf  $k_1^0 > 0$  und  $q^0 > 0$  so gibt es nur Beiträge von dem jeweils ersten Term aus Schnitt 1 und 2, während für den 3. Schnitt im Fall von  $k_1^0 < q^0$  der erste und im Fall von  $k_1^0 > q^0$  der zweite Term beiträgt. Berücksichtigt man die noch verbleibende  $\vec{k}_2$ -Integration und setzt Symmetrie des Polynoms  $B(k_1, k_2, q)$  unter  $k_2 \leftrightarrow -k_2$  und  $k_1 \leftrightarrow -k_1, q \leftrightarrow -q$  voraus, so erhält man erwartungsgemäß

$$\Im \Gamma(q, k_1) = \Im \Gamma(-q, -k_1) .$$

Der Realteil der Vertexkorrektur  $\Gamma(q, k_1, \vec{k}_2)$  wird im folgenden in drei Summanden zerlegt, die durch das Ordnen des  $k_2^0$ -Arguments in  $B$  entstehen. Diese Darstellung ist willkürlich und steht in keinen Zusammenhang mit den einzelnen Schnitten der Vertexkorrektur. Das wird sich auch im Falle des zuletzt diskutierten 2-loop Diagramms deutlich zeigen. Andererseits läßt sich der Realteil von  $\Gamma(q, k_1)$  unter Verwendung der Hilbert-Transformation über die Summe der drei Schnitte der retadierten Vertexkorrektur  $\Gamma^+(q, \vec{k}_1)$  berechnen [41].

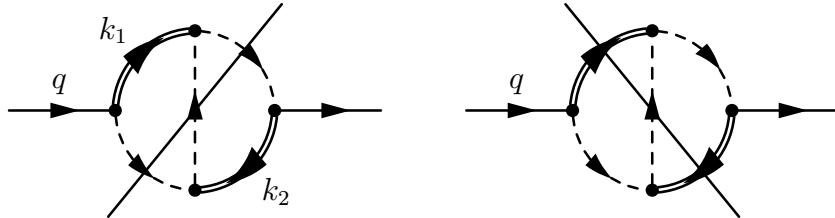
$$\begin{aligned} \Re \Gamma_1(q, k_1, \vec{k}_2) &= \int_0^\infty \frac{dw_3}{2\pi} B(k_1^0, -w_3) \mathcal{A}_3(w_3, |\vec{k}_2|) \\ &\quad \Re D_4(q^0 - w_3, |\vec{q} + \vec{k}_2|) \Re D_5(q^0 - k_1^0 - w_3, |\vec{q} - \vec{k}_1 + \vec{k}_2|) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Re \Gamma_2(q, k_1, \vec{k}_2) &= \int_0^\infty \frac{dw_4}{2\pi} B(k_1^0, -q^0 - w_4) \mathcal{A}_4(w_4, |\vec{q} + \vec{k}_2|) \\ &\quad \Re D_3(q^0 + w_4, |\vec{k}_2|) \Re D_5(k_1^0 + w_4, |\vec{q} - \vec{k}_1 + \vec{k}_2|) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Re \Gamma_3(q, k_1, \vec{k}_2) &= \int_0^\infty \frac{dw_5}{2\pi} B(k_1^0, k_1^0 - q^0 - w_5) \mathcal{A}_5(w_5, |\vec{q} - \vec{k}_1 + \vec{k}_2|) \\ &\quad \Re D_3(k_1^0 - q^0 - w_5, |\vec{k}_2|) \Re D_4(k_1^0 - w_5, |\vec{q} + \vec{k}_2|) \end{aligned}$$

Für den Realteil von  $\Gamma(q, k_1)$  ergibt sich die gleiche Symmetrie unter Umkehr der beiden externen Impulse, wie man nach Zusammenfassen der drei oberen Terme zeigen kann. Ein systematischer Zugang zur Darstellung der vier Schnitte in dem Selbstenergiendiagramm wird durch Ordnen nach der Anzahl der jeweils aufgeschnittenen Loops erreicht. Der Beitrag zu  $\Im \mathcal{G}$ , in den beide Loops aufgeschnitten werden, ist mit dem Index a und der bei dem nur ein Loop aufgeschnitten wird mit Index b bezeichnet.

$$\Im \mathcal{G}_a(q, \vec{k}_1, \vec{k}_2) = \Im \{ \mathcal{G}_1(q, \vec{k}_1, \vec{k}_2) + \mathcal{G}_2(q, \vec{k}_1, \vec{k}_2) \}$$



$$\Im m \mathcal{G}_1(q, \vec{k}_1, \vec{k}_2) = \int_0^{q^0} \frac{dw}{2\pi} \Re e D_1(q^0 - w, |\vec{k}_1|) \mathcal{A}_2(w, |\vec{q} - \vec{k}_1|) \Im m \Gamma_2(q, q^0 - w, \vec{k}_1, \vec{k}_2) \quad (23)$$

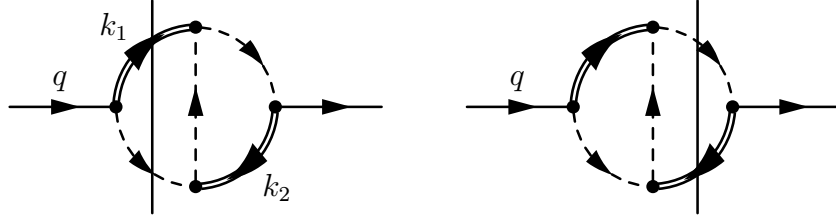
$$\Im m \mathcal{G}_2(q, \vec{k}_1, \vec{k}_2) = \int_0^{q^0} \frac{dw}{2\pi} \Re e D_2(q^0 - w, |\vec{q} - \vec{k}_1|) \mathcal{A}_1(w, |\vec{k}_1|) \Im m \Gamma_3(q, w, \vec{k}_1, \vec{k}_2) \quad (24)$$

Die aufgeschnittenen Zwischenzustände bekommen wieder den Imaginärteil und die nicht geschnittenen Zustände den Realteil ihres Propagators zugeordnet [48]. Unter Benutzung der Beiträge zum Imaginärteil des Vertex kann man zu einer kompakteren Notation übergehen, da beide Schnitte im Selbstenergiendiagramm auch durch den Vertex verlaufen. Von den hierbei relevanten Gleichungen (21) und (22) läßt sich jeweils nur die  $\delta$ -Funktion in der ersten Zeile erfüllen. Für die systematische Darstellung der beiden verbleibenden Schnitte ist folgende alternative Definition der Vertexkorrektur nützlich.

$$\Gamma'(q, \vec{k}_1, k_2) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_1^0}{2\pi} B(k_1, k_2) D_1(k_1) D_2(q - k_1) D_5(q + k_2 - k_1)$$

Der Ausdruck für  $\mathcal{G}$  ergibt sich anschließend durch Multiplikation von  $\Gamma'$  mit dem Produkt der Propagatoren  $D_3(k_2)$  und  $D_4(q + k_2)$  und Integration in  $k_2^0$ .

$$\Im m \mathcal{G}_b(q, \vec{k}_1, \vec{k}_2) = \Im m \left\{ \mathcal{G}_3(q, \vec{k}_1, \vec{k}_2) + \mathcal{G}_4(q, \vec{k}_1, \vec{k}_2) \right\}$$

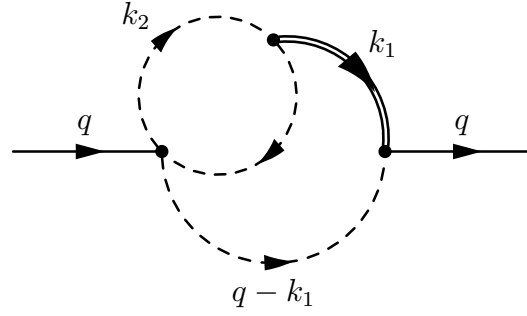


$$\Im m \mathcal{G}_3(q, \vec{k}_1, \vec{k}_2) = - \int_0^{q^0} \frac{dw}{4\pi} \mathcal{A}_1(w, |\vec{k}_1|) \mathcal{A}_2(q^0 - w, |\vec{q} - \vec{k}_1|) \Re e \Gamma(q, w, \vec{k}_1, \vec{k}_2) \quad (25)$$

$$\Im m \mathcal{G}_4(q, \vec{k}_1, \vec{k}_2) = - \int_0^{q^0} \frac{dw}{4\pi} \mathcal{A}_3(w, |\vec{k}_2|) \mathcal{A}_4(q^0 - w, |\vec{q} + \vec{k}_2|) \Re e \Gamma'(q, \vec{k}_1, -w, \vec{k}_2) \quad (26)$$

Diese Beiträge zum Imaginärteil der Selbstenergie lassen sich als Faltung des Realteils der jeweils nicht geschnittenen Vertexkorrektur und der beiden zu den aufgeschnittenen Zwischenzuständen gehörenden Spektralfunktionen darstellen. Das negative Vorzeichen von  $w$  in  $\Gamma'$  gegenüber  $\Gamma$  ist durch die Definition der  $k_2$ -Richtung bedingt.

Das nun noch verbleibende 2-loop Diagramm läßt sich ganz analog mit Hilfe des gerade diskutierten Vorgehens auswerten. Es wird ebenfalls der allgemeine Fall von vier verschiedenen Propagatoren berücksichtigt. Da sich dieses Selbstenergiendiagramm aus der Kontraktion des vorherigen gekreuzten Diagramms ergibt, sind die folgenden Gleichungen Spezialfälle der eben dargestellten Beziehungen [62].

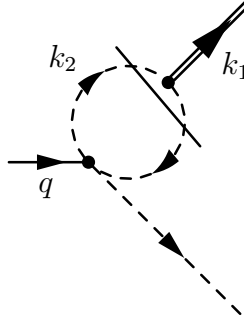


Hierbei bezeichne  $\Gamma(q, k_1, \vec{k}_2)$  wie üblich die Vertexkorrektur, so daß man wieder von der folgenden Notation ausgehen kann.

$$\mathcal{G}(q, \vec{k}_1, \vec{k}_2) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_1^0}{2\pi} \Gamma(q, k_1, \vec{k}_2) D_1(k_1) D_2(q - k_1)$$

$$\Gamma(q, k_1, \vec{k}_2) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_2^0}{2\pi} B(k_1, k_2) D_3(k_2) D_4(k_2 - k_1)$$

Bei Auswertung des Imaginärteils der Vertexkorrektur gibt es ebenfalls nur Beiträge von Termen mit je einem Pol in der oberen und unteren komplexen  $k_2^0$ -Ebene. Beschränkt man sich auf  $k_1^0 > 0$  so findet man



$$\Im \Gamma(q, k_1, \vec{k}_2) = - \int_0^{k_1^0} \frac{dw}{4\pi} B(k_1^0, w) \mathcal{A}_3(w, |\vec{k}_2|) \mathcal{A}_4(k_1^0 - w, |\vec{k}_2 - \vec{k}_1|). \quad (27)$$

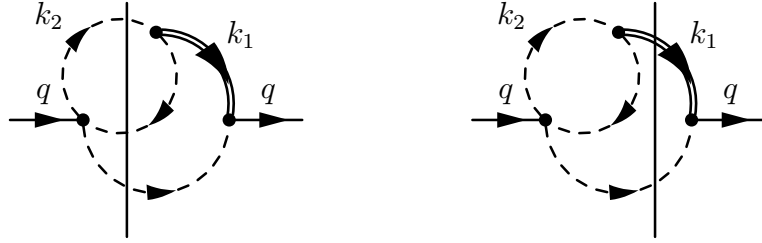
Der obige Ausdruck entspricht erwartungsgemäß der im 1-loop Diagramm gefundenen Faltung der Imaginärteile der Propagatoren, hierzu vergleiche man mit Gl. (17). Alternativ läßt sich Gl. (27) auch aus der Kontraktion  $D_3 \rightarrow 1$  des vorherigen gekreuzten Diagramms ableiten. Dabei bleibt von den dort angegebenen Imaginärteilen zur Vertexkorrektur unter Beschränkung auf  $k_1^0 > 0$  nur die erste Zeile von Term (21) übrig. Analoges gilt für den Realteil der Vertexkorrektur, hier bleiben bei Kontraktion  $D_3 \rightarrow 1$  des gekreuzten Diagramms die Terme  $\Re \Gamma_2$  und  $\Re \Gamma_3$  übrig.

$$\Re \Gamma(q, k_1, \vec{k}_2) = \int_0^{\infty} \frac{dw}{2\pi} \{ B(k_1^0, -w) \mathcal{A}_3(w, |\vec{k}_2|) \Re D_4(k_1^0 + w, |\vec{k}_2 - \vec{k}_1|) +$$

$$B(k_1^0, k_1^0 - w) \Re D_3(k_1^0 - w, |\vec{k}_2|) \mathcal{A}_4(w, |\vec{k}_2 - \vec{k}_1|) \}$$

Wie sich deutlich zeigt, steht die Aufteilung des Realteils von  $\Gamma$  bei dem vorherigen Graphen in keinem Zusammenhang mit dem einzelnen Schnitt im Vertex. Die mathematische Formulierung der beiden Schnitte in diesem Selbstenergiendiagramm ist wieder unter Benutzung von Real- und Imaginärteil der Vertexkorrektur angegeben. In völliger Analogie zu dem vorherigen Diagramm ist dabei zu unterscheiden, ob die Vertexkorrektur jeweils aufgeschnitten wird oder nicht. Folglich geht bei der Kontraktion  $D_3 \rightarrow 1$  im gekreuzten Diagramm die Gleichung (23) in (28) und die Gleichung (25) in (29) über.

$$\Im m \mathcal{G}(q, \vec{k}_1, \vec{k}_2) = \Im m \left\{ \mathcal{G}_1(q, \vec{k}_1, \vec{k}_2) + \mathcal{G}_2(q, \vec{k}_1, \vec{k}_2) \right\}$$



$$\Im m \mathcal{G}_1(q, \vec{k}_1, \vec{k}_2) = \int_0^{q^0} \frac{dw}{2\pi} \Re e D_1(q^0 - w, |\vec{k}_1|) \mathcal{A}_2(w, |\vec{q} - \vec{k}_1|) \Im m \Gamma(q, q^0 - w, \vec{k}_1, \vec{k}_2) \quad (28)$$

$$\Im m \mathcal{G}_2(q, \vec{k}_1, \vec{k}_2) = \int_0^{q^0} \frac{dw}{2\pi} \Im m D_1(w, |\vec{k}_1|) \mathcal{A}_2(q^0 - w, |\vec{q} - \vec{k}_1|) \Re e \Gamma(q, w, \vec{k}_1, \vec{k}_2) \quad (29)$$

Die im Falle der beiden letzten Diagramme erhaltene Darstellung für den nicht durch die Vertexkorrektur verlaufenden Schnitt, ist auch durch Vergleich mit dem 1-loop Diagramm zu verstehen. Hierzu muß am Anfang der Ableitung von Gleichung (17) einfach  $B(k) \rightarrow \Re e \Gamma(k)$  ersetzt werden, da  $B(k)$  per Voraussetzung nur reellwertig und analytisch war. In den meisten praktischen Fällen wird der Realteil der Vertexkorrektur durch einen phänomenologischen Formfaktor ersetzt mit dem die punktförmige Wechselwirkung 'ausgeschmiert' wird. Da Real- und Imaginärteil der Vertexfunktion über die Kausalitätsforderung miteinander verknüpft werden, sind Schnitte durch den Formfaktor a priori mit zu berücksichtigen. Oder anders formuliert, ob Schnitte, die durch die Vertexkorrektur verlaufen, vernachlässigbar sind, muß im Einzelfall untersucht werden. Der Zusammenhang von Real- und Imaginärteil komplexer Größen, wie er durch die Kausalität vorgegeben ist, wird mathematisch durch die Hilbert-Transformation beschrieben [41, 42].

$$\Re e \Gamma(q, k) = \wp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dw}{\pi} \frac{\Im m \Gamma^+(q, w, \vec{k})}{w - k^0} \quad (30)$$

$$\Im m \Gamma^+(q, k) = -\wp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dw}{\pi} \frac{\Re e \Gamma(q, w, \vec{k})}{w - k^0} \quad (31)$$

Die Anwendung des Verfahrens, mit dem multidimensionale Diagramme sukzessive aus einfacheren Diagrammstrukturen aufgebaut werden, ist auch auf n-Punkt Greensfunktionen möglich.

# Literaturverzeichnis

- [1] A. Chodos und C. B. Thorn, Phys. Rev. D**12**, (1975) 2733.
- [2] P. Wurm *für die CERES-Kollaboration*, Nucl. Phys. A **590** (1995) 103c. G. Agakichiev et. al., CERES-Kollaboration, Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 1272.
- [3] M. Gell–Mann, M. Levy, Nuovo Cim. **16**, (1960) 53.
- [4] Y. Nambu, G. Jona–Lasinio, Phys. Rev. **122**, (1961) 345.
- [5] G. E. Brown und M. Rho , Phys. Rev. Lett. **66**, (1991) 2720.
- [6] R. Rapp und J. Wambach, hep-ph/9909229.
- [7] R. Rapp, G. Chanfray und J. Wambach, Nucl. Phys. A **617**, (1997) 617.
- [8] B. Friman, nucl-th/9808071.
- [9] W. Cassing, W. Ehehalt und C. M. Ko, Phys. Lett. B**363**, (1995) 35.
- [10] E. L. Bratkovskaya und C. M. Ko, Phys. Lett. B**445**, (1999) 265.
- [11] S. Leupold, W. Peters und U. Mosel, Nucl. Phys. A**628**, (1998) 311.
- [12] Particle Data Group, C. Caso et al., Eur. Phys. J. **C3** (1998) 1.
- [13] M. Gell–Mann, D. Sharp, W. G. Wagner, Phys. Rev. Lett. **8** (1962) 261.
- [14] M. Gell–Mann, Phys. Rev. **92**, (1953) 833; Phys. Rev. **125**, (1962) 1067; Phys. Lett. **8**, (1964) 214.
- [15] Y. Ne’eman, Nucl. Phys. **26** (1961) 222.
- [16] G. Zweig, CERN report no. 8182/TH 401.
- [17] J. J. Sakurai, *Currents and Mesons*, University of Chicago Press., Chicago 1969, Ann. Phys. **11**, 1 (1960).
- [18] J. Schwinger, *Particle and Sources*, Gordon and Breach N.Y., 1969.
- [19] R. K. Bhaduri, *Models of the Nucleon*, Addison–Wesley, 1988.
- [20] N. M. Kroll, T. D. Lee und B. Zumino, Phys. Rev. **157**, (1967) 1376.

- [21] G. E. Brown, Nucl. Phys. A **446** , (1985) 12c.
- [22] L. M. Barkov et al., Nucl. Phys. B **256** (1985) 365.  
L. M. Barkov et al., Phys. Lett. B **138** (1984) 452.  
Amendolia et. al. , Phys. Lett. B **138** (1984) 454.  
Amendolia et. al. , Phys. Lett. B **146** (1984) 116.  
Froggat, Petersen , Nucl. Phys. B **129** (1977) 89.
- [23] R. Rapp, M. Urban, M. Buballa and J. Wambach, Phys. Lett. B **417** (1998) 1.
- [24] M. Urban, M. Buballa, R. Rapp, J. Wambach, Nucl. Phys. A **641**, (1998) 443.
- [25] T. Feuster, U. Mosel, Phys. Rev. C **58** (1998) 457.
- [26] T. Roth, *Die Reaktion  $\pi N \rightarrow \rho N$  und der  $\pi N$ -Formfaktor*, Diplomarbeit 99, TU Darmstadt.
- [27] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B **72**, (1974) 461.
- [28] E. Witten, Nucl. Phys. B **160**, (1979) 57.
- [29] I. Ya. Aref'eva und S. Azakov, Nucl. Phys. B **162**, (1980) 298.
- [30] K. Kawarabayashi, M. Suzuki, Phys. Rev. Lett. **16**, (1966) 255.
- [31] M. Bando, T. Kugo, S. Uehara, K. Yamawaki und T. Yanagida, Phys. Rev. Lett. **54**, (1985) 1215.
- [32] M. Bando, T. Kugo und K. Yamawaki, Nucl. Phys. B **259**, (1985) 493.
- [33] G. E. Brown, M. Rho und W. Weise, Nucl. Phys. A **454** , (1986) 669.
- [34] M. Gell–Mann, F. Zachariasen, Phys. Rev. **124**, (1961) 953.
- [35] J. S. Bell and R. Jackiw, Nuovo Cimento **60A**, (1969) 47.
- [36] S. Adler, Phys. Rev. **177**, (1969) 2426.
- [37] S. Weinberg, *The Quantum Theory of fields II*, Cambridge University Press, 1996.
- [38] T. P. Cheng, L. F. Li, *Gauge theory of elementary particle physics*, Clarendon Press Oxford 1994.
- [39] J. F. Donoghue, E. Golowich, B. R. Holstein, *Dynamics of the Standard Model*, Cambridge University Press 1992.
- [40] S. Gasiorowicz, D. A. Geffen, Rev. mod. Phys. **41**, (1969) 531.
- [41] Titchmarsh ,E. C., *Theory of Fourier Integrals*, Clarendon Press Oxford 1948.  
Gell–Mann M., Goldberger L. M., Thirring W. E., Phys. Rev. **95**, (1954) 1612.  
Goldberger M. L., Phys. Rev. **97**, (1955) 508 ; **99** (1955), 979.

- [42] Wyld H. W., *Mathematical methods for physics*, chap. 12, Reading Massachusetts 1961.  
Wu, Ohmura, *Quantum theory of scattering*, chap. 7, Prentice–Hall 1962.
- [43] C. Itzykson, J. B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw–Hill , N.Y. 1985.
- [44] V. Theileis, *Selbstenergie von  $\omega$ -Mesonen* , Diplomarbeit 95, TH Darmstadt.
- [45] Bjorken J. D., Drell S. D., *Relativistische Quantenmechanik*, B. I. Hochschultaschenbuch, Bd. 98. ,  
Bjorken J. D., Drell S. D., *Relativistische Quantenfeldtheorie*, B. I. Hochschultaschenbuch, Bd. 101.
- [46] P. Lichard, *Three-Pion Reaction in Dilepton Production from Hadron Gas*, Preprint , **TPI–Minn92/51–T**, Minneapolis.
- [47] U. G. Meißner, Phys. Rep. **161** (1988) 213.
- [48] R. E. Cutkosky, J. Math. Phys. **1** (1960) 429.
- [49] L. G. Landsberg, Phys. Rep. **128**, (1985) 301.
- [50] L.M. Barkov et al., JETP Lett. **46**, (1987) 164.
- [51] Dolinsky et al., Phys.Rep. B **202**, (1991) 99.
- [52] A. Cordier et.al., Nucl. Phys. B **172**, (1980) 13.
- [53] M. Cubero, Doktorarbeit, GSI–Report (1990) 90–17.
- [54] W. Rarita und J. Schwinger, Phys. Rev. **60** (1941) 61.
- [55] M. Urban, *private Mitteilung*.
- [56] B. Friman und H. J. Pirner, Nucl. Phys. A **617** (1997) 496.
- [57] G. Wolf, B. Friman und M. Soyeur, nucl-th/9707055.
- [58] W. Broniowski, W. Florkowski und B. Hiller, nucl-th/9905040.
- [59] F. Klingl, N. Kaiser, W. Weise, Zeitschrift für Physik **A 356** (1996) 193.
- [60] V. Metag, Acta Phys. Polonica, **B27**, (1996) 3175.
- [61] L. D. Landau, Nucl. Phys. **13** (1959) 181.
- [62] F. R. Halpern und W. Wilson, J. Math. Phys. **6** (1964) 463.  
F. R. Halpern, Phys. Rev. Lett. **10** (1963) 516.



## Erklärung

Ich versichere, daß ich diese Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Es gab keinen vorherigen Versuch einer Promotion.

Darmstadt, den 18. 04. 2000

## Danksagung

Zunächst möchte ich mich bei Prof. J. Wambach für die Möglichkeit des Verfassens dieser Arbeit und seine wohlwollende Unterstützung bedanken. Seine konstante Bereitschaft, physikalische Probleme zu diskutieren, war zu jedem Zeitpunkt der Arbeit sehr hilfreich und informativ für mich.

Desweiteren danke ich Prof. A. Richter für sein Interesse an der Arbeit und die Bereitschaft zur Übernahme des Korreferats.

Mein besonderer Dank gilt Dr. M. Buballa, der jederzeit, auch bei längeren physikalischen Diskussionen, geduldig den Ausführungen folgte und mir mit seiner Hilfsbereitschaft zur Seite gestanden hat.

Weiteren Dank schulde ich allen Mitarbeitern der NHC-Gruppe, die mich unterstützt haben. Die aufgeschlossene und hilfsbereite Arbeitsatmosphäre und viele interessante Diskussionen bleiben unvergessen.

Schließlich danke ich meiner Verlobten Jana Correus und unseren Familien für die persönliche Unterstützung und viel Geduld.

# Lebenslauf

## Angaben zur Person

Name: Mirko Wachs  
Geburtsdatum: 24. 08. 1966  
Geburtsort: Elsterwerda  
Familienstand: ledig

## Bildungsweg

September 1973 - Juni 1981	Besuch der Oberschule, Plessa
Juni 1981 - August 1983	Besuch der Oberschule, Doberlug-Kirchhain
September 1983 - Oktober 1986	Berufsausbildung mit Abitur, CFK Guben
November 1986 - August 1989	Wehrdienst
September 1989 - Juli 1991	Studium der Physik an der Universität Greifswald
Juli 1991	Vordiplom
September 1991 - Februar 1996	Studium der Physik an der Universität Heidelberg
Februar 1996	Diplom
seit November 1996	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Kernphysik der TU - Darmstadt im Bereich Theorie