

# Das Einbettungsproblem für periodische Flächen in $\mathbb{R}^n$

Vom Fachbereich Mathematik  
der Technischen Universität Darmstadt  
zur Erlangung des Grades eines  
Doktors der Naturwissenschaften  
(Dr. rer. nat.)  
**genehmigte Dissertation**

von

**Dipl.-Math. Susanne Kürsten**

aus Leipzig

Referent:	Prof. Dr. Karsten Große-Brauckmann
Korreferenten:	Prof. Dr. Steffen Fröhlich Prof. Dr. Michael Joswig
Tag der Einreichung:	02. September 2014
Tag der mündlichen Prüfung:	07. November 2014



# Danksagung

Ich möchte mich bei allen bedanken, die durch ihre Unterstützung zum Entstehen dieser Arbeit beigetragen haben.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Karsten Große-Brauckmann für die Betreuung dieser Arbeit. Vielen Dank für die zahlreichen Gespräche über mein Thema, in denen ich viel gelernt habe und aus denen ich sehr oft neue Ideen mitnehmen konnte. Die richtigen Fragen nach tiefer liegenden Gründen für meine Behauptungen haben ebenfalls zum Verständnis der Zusammenhänge beigetragen. Danke auch für das intensive Lesen der Arbeit vor der Abgabe und die vielen Anmerkungen, die zur vorliegenden Fassung geführt haben.

Herrn Prof. Dr. Steffen Fröhlich möchte ich für die Konkretisierung meines Themas, zahlreiche Gespräche und Hinweise auf Quellen danken. Die Möglichkeit, ihm meine Ergebnisse ab und an vorzutragen, hat mir geholfen, diese richtig einzuordnen. Außerdem möchte ich mich bei ihm für die Übernahme des Korreferats bedanken.

Herrn Prof. Dr. Michael Joswig gilt mein Dank für die Beschäftigung mit meiner Arbeit, den Austausch von Ideen und für seine Bereitschaft, diese Arbeit zu begutachten.

Danke auch an alle Mitglieder meiner Arbeitsgruppe für die tolle Arbeitsatmosphäre. Es war immer jemand da, mit dem ich über Fragen und Probleme (oder einfach mal nur so) reden konnte.

Zum Schluss möchte ich noch allen danken, die Teile dieser Arbeit Korrektur gelesen haben. Vielen Dank für die Anmerkungen und Korrekturen.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Motivation: Die Schwarz-D-Fläche</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>Jordankurven entlang der Kanten eines <math>n</math>-dimensionalen Würfels</b>	<b>15</b>
3.1	Eine erste Notation für Jordankurven . . . . .	15
3.2	Verschiedene Darstellungen einer Jordankurve . . . . .	19
3.3	Symmetriegruppe des $n$ -dimensionalen Würfels . . . . .	20
3.4	Bis auf Symmetrie gleiche Jordankurven . . . . .	22
3.5	Verbesserte Notation für Jordankurven . . . . .	27
3.6	Beispiele: Alle Jordankurven in $\mathbb{R}^3$ . . . . .	29
3.7	Hinreichendes Kriterium für die Verschiedenheit von Jordankurven . . . . .	31
3.8	Beispiele: Jordankurven mit acht Kanten in $\mathbb{R}^4$ . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Das Einbettungsproblem</b>	<b>39</b>
4.1	Definitionen . . . . .	39
4.2	Die allgemeine Situation . . . . .	41
4.3	Struktur einer Schwarz-Spiegelung . . . . .	43
4.4	Einbettung von $f$ und $F$ . . . . .	46
4.5	Gefüllte Würfel und die zugehörige Gruppenstruktur . . . . .	52
4.5.1	Einbettung von Flächen $F$ in Dimension drei . . . . .	61
4.6	Das Gitter $\Lambda(F)$ der Fläche $F$ . . . . .	66
4.6.1	$(4\mathbb{Z})^n$ ist im Gitter $\Lambda(F)$ der Fläche $F$ enthalten . . . . .	69
4.7	Übergang zu Faktorgruppen . . . . .	71
4.8	Die Anzahl gefüllter Würfel und die Einbettungsfrage für $F$ . . . . .	76
4.9	Beziehung zwischen der Anzahl gefüllter Würfel und dem Gitter von $F$ . . . . .	86
4.9.1	Berechnung relevanter Gitterelemente . . . . .	88
4.9.2	Beispiele . . . . .	92
4.10	Kriterium für die Einbettung von $F$ . . . . .	96
4.10.1	Beispiele: Jordankurven mit acht Kanten in $\mathbb{R}^4$ . . . . .	97
4.11	Beispiele in beliebigen Dimensionen . . . . .	101
4.12	Notwendiges Kriterium für die Einbettung von $F$ . . . . .	104
4.13	Charakterisierung eingebetteter Flächen $F$ in $\mathbb{R}^4$ . . . . .	106
4.14	Zwischenfazit . . . . .	110
<b>5</b>	<b>Bemerkungen zur Konstruktion periodischer Minimalflächen in <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>111</b>
5.1	Entstehung $n$ -fach periodischer, eingebetteter Minimalflächen aus einer gegebenen Jordankurve $J$ . . . . .	122
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>125</b>



# 1 Einleitung

In dieser Arbeit werden  $n$ -fach periodische, eingebettete Flächen in  $\mathbb{R}^n$  (mit  $n \geq 3$ ) konstruiert. Die ursprüngliche Problemstellung betraf die Existenz  $n$ -fach periodischer Minimalflächen in  $\mathbb{R}^n$ . Die Hauptergebnisse dieser Arbeit lassen sich aber nicht nur auf Minimalflächen, sondern auch auf allgemeinere Flächentypen (z. B. diskrete Flächen) anwenden.

Die in dieser Arbeit verwendete Konstruktion periodischer Flächen ist von der Entstehung der Schwarz-D-Fläche in  $\mathbb{R}^3$  inspiriert. Diese Fläche erhält man auf folgende Weise. Zunächst wird eine spezielle Jordankurve  $J$  entlang der Kanten eines dreidimensionalen Würfels  $W$  gewählt. Weiter betrachtet man die zugehörige Plateau-Lösung  $f$ . Eine solche Plateau-Lösung ist eine verallgemeinerte Minimalfläche  $f$  vom Kreisscheibentyp mit Rand  $J$ . Das heißt,  $f$  ist durch eine Abbildung  $f: \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrisiert, die im Inneren harmonisch und schwach konform ist, und für die  $f|_{\partial D}$  die Jordankurven  $J$  bijektiv parametrisiert. Die Existenz einer solchen Plateau-Lösung ist bekannt (siehe z. B. [Oss86, S. 55ff.]). Das Schwarz-Spiegelungsprinzip liefert die Aussage, dass durch eine Schwarz-Spiegelung von  $f$  an einer Kante aus  $J$  wiederum eine verallgemeinerte Minimalfläche entsteht. Diese Fläche ist sogar regulär. Durch wiederholtes Schwarz-Spiegeln an Randkanten der bisher konstruierten Fläche erhält man eine vollständige Minimalfläche in  $\mathbb{R}^3$ , die Schwarz-D-Fläche. Sie ist eine dreifach periodische und eingebettete Fläche.

Zur Diskussion der Einbettungsfrage wird diese Konstruktion wie folgt in den  $\mathbb{R}^n$  übertragen. Man wählt eine Jordankurve  $J$  entlang der Kanten eines  $n$ -dimensionalen Würfels  $W$ , die in jede Koordinatenrichtung mindestens eine Kante durchläuft. Weiter betrachtet man eine eingebettete Fläche  $f$ , deren Inneres im Inneren von  $W$  liegt, und deren Rand die Jordankurve  $J$  ist. Dabei wird nicht vorausgesetzt, dass  $f$  eine Minimalfläche ist. Durch wiederholtes Schwarz-Spiegeln an Randkanten der bisher konstruierten Fläche, erhält man aus  $f$  wiederum eine Fläche  $F$ , wobei  $F$  keinen Rand besitzt. Die Flächen  $f$  und  $F$  sind dabei zweidimensional, d. h. mit steigendem  $n$  wird die Kodimension erhöht.

Die vorliegende Arbeit beantwortet die Frage, unter welchen Bedingungen die so konstruierte Fläche  $F$  eingebettet ist. Bei der Diskussion der Einbettungsfrage in höheren Dimensionen treten Effekte auf, die es im dreidimensionalen Fall nicht gibt. So ist es möglich, dass die Fläche  $f$  eingebettet ist, durch die Schwarz-Spiegelungen aber dennoch Selbstschnitte von  $F$  entstehen. Als Hauptresultat dieser Arbeit wird charakterisiert, unter welchen Bedingungen an  $J$  dieser Effekt auftritt (vgl. Theorem 4.85).

Um zu dieser Charakterisierung zu gelangen geht man wie folgt vor. Es wird die zu  $W$  gehörige Würfelpflasterung des  $\mathbb{R}^n$  betrachtet. Ein Würfel  $W^v$  dieser Pflasterung entsteht aus  $W$  durch Verschiebung um einen Vektor  $v \in \mathbb{Z}^n$ . Weiter wird die Gruppe  $U$  der gefüllten Würfel eingeführt. Jedes Gruppenelement von  $U$  steht für ein Flächenstück von  $F$ , welches bis auf Bewegungen in  $\mathbb{R}^n$  eine Kopie von  $f$  ist. Dabei kodiert

das Gruppenelement den Würfel  $W^v$ , in dem das Flächenstück liegt, und die Lage des Flächenstücks in diesem Würfel. Nach Einführung der Gruppenstruktur erkennt man, dass die Lage eines solchen Flächenstücks durch die Lage des Würfels  $W^v$  bereits eindeutig bestimmt ist. Also kann in einem Würfel  $W^v$  höchstens ein Flächenstück von  $F$  liegen. Enthält  $W^v$  ein solches Flächenstück, so heißt der Würfel  $W^v$  gefüllt. Es folgt, dass Selbstschnitte von  $F$  nicht im Inneren der Würfel  $W^v$  mit  $v \in \mathbb{Z}^n$  liegen können.

Außerdem wird das Gitter  $\Lambda(F)$  der Fläche  $F$  betrachtet. Die additive Gruppe  $\Lambda(F)$  besteht aus allen Vektoren  $v \in \mathbb{Z}^n$ , sodass eine Verschiebung um  $v$  die Fläche  $F$  auf sich selbst abbildet. In dieser Arbeit wird die Relation  $(4\mathbb{Z})^n \subseteq \Lambda(F)$  gezeigt (siehe Theorem 4.53). Hierbei spielt die Tatsache, dass  $J$  in jede Koordinatenrichtung mindestens eine Kante durchläuft, eine zentrale Rolle. Aus  $(4\mathbb{Z})^n \subseteq \Lambda(F)$  folgt weiter, dass  $F$  eine  $n$ -fach periodische Fläche ist.

Wegen  $(4\mathbb{Z})^n \subseteq \Lambda(F)$  kann man Faktorgruppen  $\Lambda'(F)$  von  $\Lambda(F)$  und  $U'$  von  $U$  betrachten. Sowohl  $\Lambda'(F)$ , also auch  $U'$  sind dabei endliche Gruppen. Als Hauptresultat der Arbeit wird gezeigt:

**Theorem 4.85.** *In geraden Dimensionen  $n$  gilt:*

- $F$  ist eingebettet  $\iff |U'| = 2^{n+2} \iff |\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n| = 2^2 = 4$  und
- $F$  ist nicht eingebettet  $\iff |U'| \geq 2^{n+3} \iff |\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n| \geq 2^3 = 8$ .

*In ungeraden Dimensionen  $n$  gilt:*

- $F$  ist eingebettet  $\iff |U'| = 2^{n+2} \iff |\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n| = 2^3 = 8$  und
- $F$  ist nicht eingebettet  $\iff |U'| \geq 2^{n+3} \iff |\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n| \geq 2^4 = 16$ .

Dieses Theorem stellt einen Zusammenhang zwischen der Einbettung von  $F$ , der Dichte der gefüllten Würfel und dem Gitter von  $F$  her. Zum Beweis wird unter anderem verwendet: Ein Selbstschnitt in einer Ecke der Würfelpflasterung entsteht genau dann, wenn mindestens acht Nachbarwürfel dieser Ecke gefüllt sind. Aus dieser Tatsache wird ein Zusammenhang zwischen der Einbettung von  $F$  und der Dichte der gefüllten Würfel hergeleitet.

Die Gruppe  $\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n$  lässt sich für eine gegebene Jordankurve  $J$  leicht berechnen. Ein Algorithmus hierfür wird in dieser Arbeit angegeben. Die Gruppe  $\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n$  hängt dabei nicht von der Wahl der Fläche  $f$  mit Rand  $J$ , sondern nur von der Jordankurve  $J$  ab. Mit Hilfe von Theorem 4.85 kann man also für eine beliebige gegebene Jordankurve  $J$  algorithmisch entscheiden, ob eine zugehörige Fläche  $F$  eingebettet ist oder nicht.

Auch die Frage nach der Entstehung  $n$ -fach periodischer, eingebetteter Minimalflächen in  $\mathbb{R}^n$  wird in der vorgelegten Arbeit beantwortet. Die Konstruktion dieser Minimalflächen  $F$  funktioniert wie im gerade erläuterten Fall allgemeiner Flächen, nur dass  $f$



(wie bei der Schwarz-D-Fläche) als eine zu  $J$  gehörige Plateau-Lösung gewählt wird. Unter einer schwachen Bedingung an die Jordankurve  $J$  wird gezeigt, dass die so entstandenen Flächen  $F$  Minimalflächen sind. Die Einbettungsfrage kann auch hier mit Hilfe von Theorem 4.85 und einer weiteren leicht zu prüfenden Bedingung beantwortet werden.

Die entstandenen Minimalflächen  $F$  sind  $n$ -fach periodisch und vollständig. Durch Faktorisierung mit dem Gitter  $\Lambda(F)$  ergeben sich somit auch kompakte Minimalfläche im flachen Torus  $\mathbb{R}^n/\Lambda(F)$ .

Diese Arbeit beantwortet die Einbettungsfrage ausschließlich in dem Fall, dass die Jordankurve  $J$  entlang der Kanten eines  $n$ -dimensionalen Würfels verläuft. Die Methoden der Arbeit können auch dann noch angewendet werden, wenn  $J$  die Kanten eines  $n$ -dimensionalen Quaders durchläuft. Anstelle der Würfelpflasterung wird in diesem Fall eine Pflasterung mit Quadern betrachtet. Dabei bildet eine Schwarz-Spiegelung an Randkanten der Pflasterung jeden Quader dieser Pflasterung auf einen Quader dieser Pflasterung ab. Analog zu dem in dieser Arbeit beschriebenen Vorgehen kann dann für eine konkrete Jordankurve  $J$  bestimmt werden, ob die zugehörigen periodischen Flächen  $F$  eingebettet sind oder nicht.

Die vorgelegte Arbeit verwendet die spezielle Struktur von Schwarz-Spiegelungen an Kanten in Koordinatenrichtungen. Das ist der Grund weswegen die hier beschriebenen Methoden in anderen interessanten Situationen nicht anwendbar sind. Zwei Beispiele hierfür sollen kurz erläutert werden.

Wenn man zulässt, dass die Jordankurve  $J$  auf Kanten und Diagonalen des Randes von  $W$  verläuft, so ist das Einbettungsproblem schwieriger zu behandeln. In diesem Fall wird eine Gerade in  $x_i$ -Richtung von der Spiegelung an einer Kante von  $J$  nicht mehr zwingend auf eine Gerade in  $x_i$ -Richtung abgebildet. Aus diesem Grund überträgt sich das Vorgehen dieser Arbeit nicht auf die beschriebene allgemeinere Situation.

Als zweites Beispiel kann man den Raum  $S^n$  anstelle von  $\mathbb{R}^n$  betrachtet. Dieser wird durch geodätische Tetraeder gepflastert, wobei die Schwarz-Spiegelung an Rändern der Tetraeder einen Tetraeder der Pflasterung wieder auf einen Tetraeder der Pflasterung abbildet. Auch in dieser Situation kann eine Jordankurve  $J$  entlang der Kanten eines geodätischen Tetraeders betrachtet werden. Wie in dieser Arbeit stellt sich die Frage, ob durch Schwarz-Spiegeln (an Geodäten) einer zugehörigen Plateau-Lösung  $f$  eine eingebettete Minimalfläche  $F$  entsteht. Diese Fläche  $F$  wäre dann sogar kompakt. Tatsächlich war die Frage nach diesen Minimalflächen in  $S^n$  der Ausgangspunkt für diese Dissertation. Das Problem wurde nun zunächst für den  $\mathbb{R}^n$  mit der Würfelpflasterung behandelt.

Die vorliegende Arbeit ist im Einzelnen wie folgt aufgebaut.

In Kapitel 2 wird das Vorgehen zur Konstruktion der Schwarz-D-Fläche erläutert. Es wird dargestellt, welche Schritte bei der Verallgemeinerung problematisch sind.

Es folgt das technische Kapitel 3. Dort wird eine Notation der Jordankurven entlang von Kanten eines  $n$ -dimensionalen Würfels eingeführt und festgestellt, wann zwei dieser Jordankurven in  $\mathbb{R}^n$  bis auf Symmetrie gleich sind. Dieses Kapitel stellt auch verschiedene Beispiele zur Verfügung, die im weiteren Verlauf der Arbeit wieder aufgegriffen werden. Eine wichtige Aussage aus Kapitel 3 (für den Spezialfall  $n = 4$ ) ist:

Sei  $J$  eine Jordankurve entlang der Kanten eines 4-dimensionalen Würfels. Weiter durchlaufe  $J$  genau acht Kanten, davon in jede Koordinatenrichtung mindestens eine. Dann ist  $J$  bis auf Symmetrie eine der sechs Jordankurven aus Abb. 1.

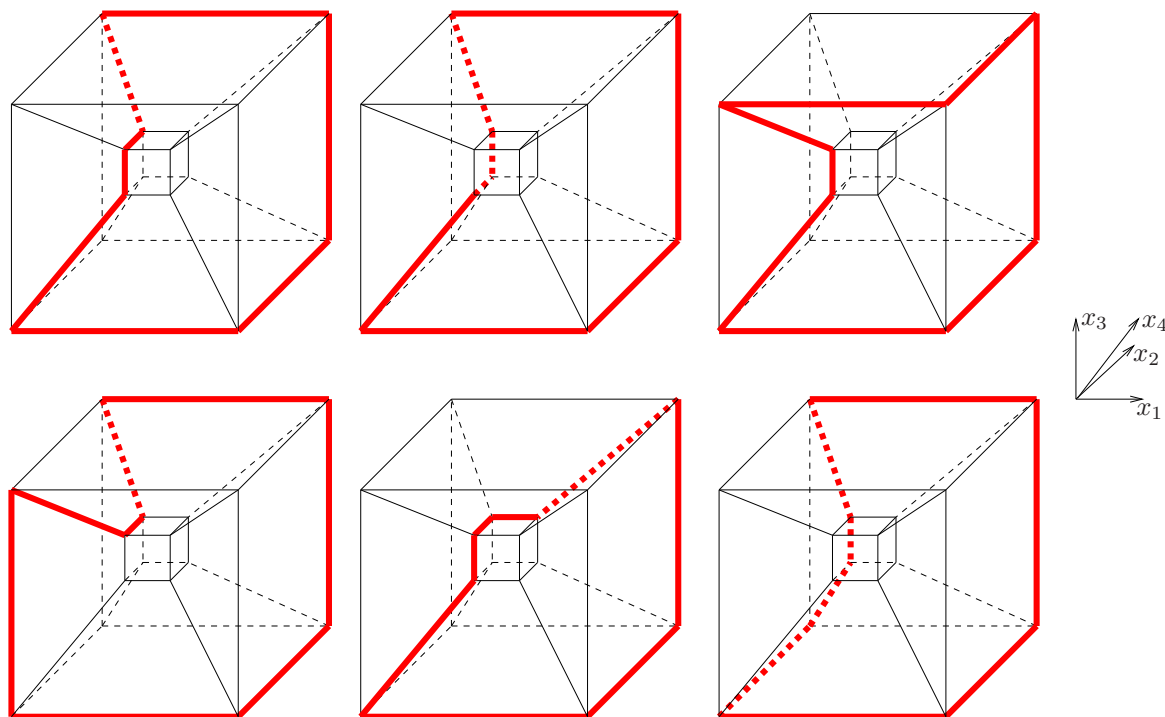


Abbildung 1: Jordankurven mit genau acht Kanten in  $\mathbb{R}^4$ , die in jede Koordinatenrichtung mindestens eine Kante durchlaufen.

In Kapitel 4 wird wie bereits erläutert das Theorem 4.85 über die Einbettung der gespiegelten Fläche  $F$  gezeigt. Außerdem werden alle Jordankurven  $J \subset \mathbb{R}^4$  charakterisiert, welche zu eingebetteten, periodischen Flächen  $F$  führen. Bis auf Symmetrie sind das die drei in der ersten Zeile von Abb. 1 dargestellten Jordankurven, sowie die beiden Jordankurven aus Abb. 2.

Im Vergleich zu der Gesamtzahl an Jordankurven in  $\mathbb{R}^4$ , führen also sehr wenige Kurven zu eingebetteten Flächen  $F$ . Es ist zu vermuten, dass dies in höheren Raumdimensionen ebenfalls gilt. Dennoch werden in Kapitel 4 Jordankurven in beliebigen Dimensionen angegeben, die zu eingebetteten Flächen  $F$  führen. Die Anzahl der angegebenen Beispiele wächst dabei quadratisch mit der Dimension  $n$ .

Zum Abschluss geht Kapitel 5 auf die Konstruktion von Minimalflächen ein. Dabei werden die Ergebnisse aus Kapitel 4 verwendet, um zu erläutern unter welchen Bedingungen aus einer Jordankurve  $J$  mindestens eine eingebettete,  $n$ -fach periodische

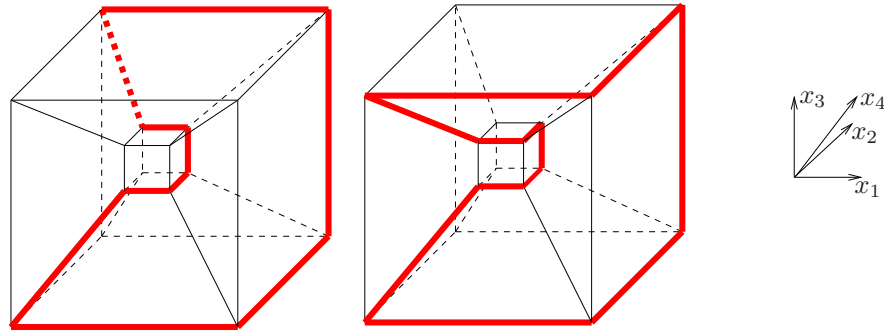


Abbildung 2: Alle Jordankurven in  $\mathbb{R}^4$  mit mehr als acht Kanten, die zu eingebetteten Flächen  $F$  führen. Die beiden Kurven haben 10 bzw. 12 Kanten.

Minimalfläche entsteht. Neben der Bedingung für Einbettung aus Theorem 4.85 tritt dabei eine weitere Bedingung an  $J$  auf, die dafür sorgt, dass jede Plateau-Lösung  $f$  zur Jordankurve  $J$  eingebettet ist. Man beachte, dass in höheren Dimensionen nicht klar ist, ob die Plateau-Lösung  $f$  durch  $J$  eindeutig bestimmt ist.

Insbesondere wird in Kapitel 5 gezeigt, dass es in jeder Dimension  $n \geq 3$  Jordankurven  $J$  gibt, für die man durch wiederholtes Schwarz-Spiegeln einer Plateau-Lösung  $f$  mindestens eine  $n$ -fach periodische, eingebettete, reguläre Minimalfläche  $F$  erhält.

Stellt man keine Bedingung an  $J$ , so ergibt sich durch Schwarz-Spiegeln einer Plateau-Lösung  $f$  eine verallgemeinerte Minimalfläche  $F$ . Da die Anzahl der möglichen Jordankurven  $J$  mit  $n$  stark wächst, findet man auf diese Weise in großen Dimensionen sehr viele periodische, verallgemeinerte Minimalflächen  $F$ . Allerdings sind nur wenige dieser Flächen  $F$  eingebettet. Um zu erreichen, dass die Fläche  $F$  eine (nicht notwendigerweise eingebettete) reguläre Minimalfläche ist, muss nur eine schwache Bedingung an  $J$  gestellt werden. Diese ist für viele Jordankurven erfüllt, was eine große Anzahl von Beispielen für  $n$ -fach periodische Minimalflächen in  $\mathbb{R}^n$  liefert.



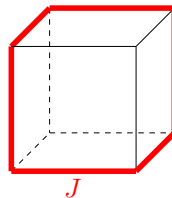
## 2 Motivation: Die Schwarz-D-Fläche

In diesem Kapitel wird erläutert, wie die Schwarz-D-Fläche entsteht. Insbesondere wird darauf eingegangen, welche Schritte für den Existenzbeweis benötigt werden, und warum diese Fläche eingebettet ist.

In den nächsten Kapiteln geht es darum, die Konstruktion der Schwarz-D-Fläche zu verallgemeinern. Insbesondere muss überprüft werden, welche Schritte aus diesem Kapitel in allgemeineren Situationen analog durchführbar sind.

Die Konstruktion der Schwarz-D-Fläche funktioniert wie folgt:

- Als Ausgangspunkt wählt man einen Würfel  $W$  in  $\mathbb{R}^3$  und folgende geschlossene Jordankurve  $J$  (d. h. eine stetige, injektive Abbildung  $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , wobei meist nur das Bild von Interesse ist) entlang der Kanten dieses Würfels:



- Man betrachtet die zugehörige *Plateau-Lösung*, d. h. eine parametrisierte, verallgemeinerte Minimalfläche  $f$  vom Kreisscheibentyp, die von  $J$  berandet wird.
- Durch wiederholtes Schwarz-Spiegeln an Randkanten wird die Fläche  $f$  zu einer vollständigen Fläche  $F$  fortgesetzt. Dabei ist  $F$  ebenfalls eine parametrisierte Fläche.

Im Bildraum  $\mathbb{R}^3$  ist die Schwarz-Spiegelung an der Randkante  $k$  eine  $180^\circ$ -Drehung um  $k$ . Abb. 3 zeigt das Bild von  $J$  unter der Schwarz-Spiegelung an einer Kante.

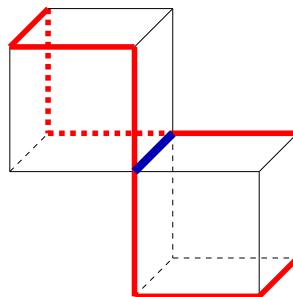


Abbildung 3: Schwarz-Spiegelung von  $J$  an der blau markierten Kante.

Es stellt sich heraus, dass auf diese Weise genau eine Fläche  $F$  entsteht. Dieses  $F$  ist eine reguläre Fläche, welche *Schwarz-D-Fläche* heißt. Außerdem ist  $F$  eine eingebettete Minimalfläche.

Um das einzusehen, muss man sich zunächst überlegen, dass durch die beschriebene Konstruktion mindestens eine Fläche  $F$  entsteht, und dass jedes so entstandene  $F$  eine Minimalfläche (und damit regulär) ist. Dazu sind folgende Aussagen notwendig:

(i) **Die Existenz der Plateau-Lösung**

Es muss die Existenz einer Fläche  $f: \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit den Eigenschaften

- $f \in C^2(D, \mathbb{R}^3) \cap C^0(\overline{D}, \mathbb{R}^3)$ ,
- $f$  ist *harmonisch* in  $D$  (d. h. alle Komponentenfunktionen  $f_i$  sind *harmonisch* in  $D$ , also gilt  $\Delta f_i(x) = 0$  für alle  $x \in D$ ),
- $f$  ist *schwach konform* in  $D$  (d. h.  $\|f_x\| = \|f_y\|$  und  $\langle f_x, f_y \rangle = 0$  in  $D$ ) und
- $f|_{\partial D}$  parametrisiert  $J$  bijektiv

gezeigt werden. Eine solche Fläche  $f$  heißt *Plateau-Lösung* zur Jordankurve  $J$ . Dabei bezeichnet  $D$  die offene Einheitskreisscheibe und  $\overline{D}$  die abgeschlossene Einheitskreisscheibe in  $\mathbb{R}^2$ .

Die Existenz von mindestens einem  $f$  mit diesen Eigenschaften ist ein bekanntes Resultat, welches von Douglas und Radó bewiesen wurde und auch für höhere Bild-Dimensionen gilt. Einen Beweis der Existenzaussage findet man z. B. in [Oss86, S. 55ff.] oder [Str88, S. 1ff.].

Eine schwach konforme und harmonische Fläche  $f$  nennt man *verallgemeinerte Minimalfläche*. Dieser Begriff lässt Punkte  $p$  zu, in denen  $df|_p$  keinen vollen Rang hat. Solche Punkte heißen *Verzweigungspunkte*. Somit muss die hier betrachtete Plateau-Lösung  $f$  zunächst keine Immersion sein.

(ii) **Die Plateau-Lösung  $f$  hat keine inneren Verzweigungspunkte**

Es soll nun gezeigt werden, dass  $f$  eine *Minimalfläche*, also harmonisch und konform in  $D$ , ist. Das bedeutet, es muss die Existenz von Punkten  $p \in D$  mit  $df|_p = 0$  ausgeschlossen werden. Diese Punkte sind wegen der schwachen Konformität von  $f$  genau die inneren Verzweigungspunkte.

Die zu zeigende Aussage  $df|_p \neq 0$  für alle  $p \in D$  folgt aus einem Lemma von Radó, siehe z. B. [Oss86, S. 59ff.].

Somit ist  $f$  eine Minimalfläche und insbesondere eine Immersion.

**(iii) Schwarz-Spiegelungsprinzip**

Hierbei muss gezeigt werden, dass durch die Schwarz-Spiegelung einer verallgemeinerten Minimalfläche an einer ihrer Randkanten wieder eine verallgemeinerte Minimalfläche entsteht. Einen Beweis dieser Tatsache findet man u. a. in [DHS10, S. 289ff.]. In diesem Beweis wird ein Spiegelungsprinzip für harmonische Funktionen verwendet.

Damit ist auch die Fläche  $F$  eine verallgemeinerte Minimalfläche.

**(iv) Die Fläche  $F$  besitzt keine Verzweigungspunkte**

Wegen (ii) können eventuell vorhandene Verzweigungspunkte der gespiegelten Fläche  $F$  nur auf den Kanten der zu  $W$  gehörigen Würfelpflasterung liegen. Weiter stellt man fest, dass Verzweigungspunkte von  $F$  nur existieren können, wenn bereits Punkte der Jordankurve  $J$  Verzweigungspunkte von  $F$  sind.

Um das auszuschließen wird gezeigt, dass eine Richtungsableitung von  $F$  in den Punkten von  $J = f|_{\partial D}$  nicht Null ist. Dazu wird ein Barriere-Argument und das Hopf-Randpunkt-Lemma verwendet. Dieses Lemma findet man unter anderem in [Jos98, S. 37]

Also ist  $F$  eine verallgemeinerte Minimalfläche ohne Verzweigungspunkte, und somit eine Minimalfläche.

Alle bisherigen Schritte funktionieren für viele Jordankurven in beliebigen Dimensionen. Darauf wird in Kapitel 5 näher eingegangen.

Weiterhin besitzt die durch Spiegelung entstandenen Fläche  $F$  die wichtige Eigenschaft, eingebettet zu sein. Um das zu zeigen, geht man wie folgt vor:

**(v) Die Plateau-Lösung  $f$  ist eingebettet**

Diese Aussage ergibt sich aus folgender Tatsache: Das Bild  $f(D)$  ist als Graph über der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene darstellbar.

Um das zu beweisen, wird zunächst festgestellt, dass  $f$  keine vertikalen Tangentialräume besitzt. Dazu kann man das bereits erwähnte Lemma von Radó verwenden. Unter Verwendung von Überlagerungen oder dem Abbildungsgrad ergibt sich daraus die Graph-Eigenschaft.

**(vi) Die Fläche  $f|_D$  liegt im Inneren des gegebenen Würfels  $W$** 

Mit Hilfe des Maximumprinzips zeigt man, dass die Fläche  $f$  im gegebenen Würfel  $W$  (der im Folgenden auch *Ausgangswürfel* genannt wird) liegt und den Rand dieses Würfels nur in der Jordankurve  $J$  berührt.

Spiegelt man das Flächenstück  $f$  mehrfach, so liegt es in einem Würfel, der aus  $W$  durch entsprechendes Spiegeln entsteht. Insbesondere können sich zwei Flächenstücke, die in verschiedenen Würfeln liegen, nur in Kanten der (evtl. mehrfach gespiegelten) Jordankurve  $J$  schneiden.

- (vii) **Es gibt keine Selbstschnitte von  $F$  im Inneren von Würfeln der zu  $W$  gehörigen Würfelplasterung**

Schnitte im Inneren dieser Würfel können wegen Punkt (vi) nur entstehen, wenn durch wiederholtes Spiegeln an Randkanten ein Würfel in sich abgebildet wird, während das zugehörige Flächenstück nicht auf sich abgebildet wird.

In Abschnitt 4.5 wird gezeigt, dass diese Situation nie auftritt. Der dortige Beweis funktioniert sogar in beliebigen Dimensionen.

- (viii) **Es gibt keine Selbstschnitte von  $F$  auf Kanten von Würfeln der zu  $W$  gehörigen Würfelplasterung**

Dazu färbt man die Würfel der Würfelplasterung schachbrettartig schwarz oder weiß. Das bedeutet, alle Nachbarwürfel eines weißen Würfels sind schwarz und alle Nachbarwürfel eines schwarzen Würfels sind weiß. Dabei heißen zwei Würfel *benachbart*, wenn sie genau eine Seitenfläche gemeinsam haben.

Wie man leicht sieht, ist das Bild eines weißen Würfels unter einer Schwarz-Spiegelung wieder ein weißer Würfel. Die analoge Aussage gilt für schwarze Würfel. Da sich  $f|_D$  im Inneren eines Würfels befindet (siehe (vi)) und die Fläche  $F$  durch Schwarz-Spiegelung aus  $f$  entsteht, kann man o. B. d. A. annehmen, dass die Fläche  $F$  nur durch weiße Würfel verläuft. Insbesondere liegt kein Bildpunkt von  $F$  im Inneren eines schwarzen Würfels.

Wenn die Fläche  $F$  einen Selbstschnitt  $p$  im Inneren der blauen Kante hat (siehe Abb. 4), dann muss der Schnitt mit einer vertikalen Ebene durch  $p$  die Gestalt wie in Abb. 4 rechts haben (die roten Linien gehören dabei zu  $F$ ).

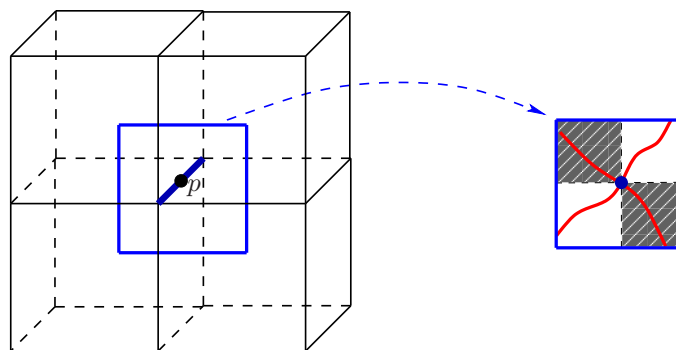


Abbildung 4: Darstellung eines Selbstschnitts  $p$  von  $F$  auf einer Würfelkante.

Diese Situation kann nur eintreten, wenn  $p$  Randpunkt von mindestens vier verschiedenen Flächenstücken von  $F$  ist. Wegen Schritt (vii) liegen diese vier Flächenstücke in verschiedenen Würfeln. Also muss die Fläche  $F$  durch mindestens vier Nachbarwürfel der blauen Kante gehen (Nachbarwürfel sind hier Würfel, welche die blaue Kante als Randkante enthalten). Diese Kante hat aber nur vier Nachbarwürfel, von denen genau zwei schwarz sind (und damit kein Flächenstück von  $F$  enthalten). Es folgt, dass  $F$  keinen solchen Selbstschnitt  $p$  haben kann.



Besäße die Fläche  $F$  einen Selbstschnitt  $p$  in einer Ecke eines Würfels der Würfelpflasterung, so muss  $F$  durch acht Nachbarwürfel von  $p$  verlaufen. Wiederum hat  $p$  genau acht Nachbarwürfel, von denen vier schwarz sind. Also kann auch ein solcher Selbstschnitt  $p$  nicht existieren.

Insgesamt ergibt sich die Aussage, dass  $F$  keine Selbstschnitte auf Kanten von Würfeln der zu  $W$  gehörigen Würfelpflasterung besitzt.

Unter Verwendung von Schritt (vii) erhält man damit, dass  $F$  keine Selbstschnitte hat. Daraus folgt, dass die Fläche  $F$  eingebettet ist.

Verallgemeinert man dieses Vorgehen auf Jordankurven in  $\mathbb{R}^n$ , so funktionieren die Schritte (vi) und (vii) analog zum hier beschriebenen Fall. Um Schritt (v) in beliebigen Dimensionen analog durchzuführen, benötigt man eine zusätzliche Bedingung an  $J$ . Die Argumentation aus Schritt (viii) lässt sich allerdings in dieser Form nicht auf den  $\mathbb{R}^n$  verallgemeinern. Das sieht man wie folgt:

In geraden Dimensionen bildet die Schwarz-Spiegelung schwarze Würfel auf Weiße ab (und umgekehrt). Das bedeutet, die Fläche  $F$  kann auch durch schwarze Würfel verlaufen. Außerdem hat eine Kante/Ecke in  $\mathbb{R}^n$  (mit  $n > 3$ ) mehr Nachbarwürfel als im dreidimensionalen Fall. In Dimension vier liegen an einer Kante bereits acht Würfel, die alle einen Teil der Fläche  $F$  enthalten können. Die obige Argumentation führt also nicht zu einem Widerspruch.

Das ist der Grund, warum die Frage nach der Einbettung periodischer Flächen in höheren Dimensionen deutlich schwieriger zu behandeln ist als in  $\mathbb{R}^3$ . In den folgenden Kapiteln wird erläutert, bei welchen Jordankurven in höherer Dimension dennoch eine eingebettete Fläche entsteht.

In dem hier beschriebenen dreidimensionalen Beispiel bleibt die Frage, ob die Fläche  $F$  durch  $J$  eindeutig bestimmt ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Plateau-Lösung zur gegebenen Jordankurve  $J$  eindeutig ist.

Unter Verwendung der Eigenschaft, dass  $f|_D$  ein Graph über der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene ist (siehe (v)), ergibt sich die Eindeutigkeit aus folgender Tatsache:

**(ix) Graphen mit festen Randwerten sind eindeutig**

Wenn es zu den durch  $J$  gegebenen Randwerten zwei verschiedene minimale Graphen  $u$  und  $v$  gibt, dann kann man  $u$  so in die vertikale Richtung (das ist hier die  $x_3$ -Richtung) verschieben, dass der verschobene minimale Graph  $\tilde{u}$  den Graph  $v$  im Inneren einseitig berührt. Aus einer Version des Maximumprinzips für minimale Graphen folgt dann  $\tilde{u} = v$ . Wegen der gleichen Randwerte muss sogar  $u = \tilde{u} = v$  gelten. Das verwendete Maximumprinzip für minimale Graphen findet man z. B. in [Jos94, S. 78f.] Diese Argumentation funktioniert in höherer Kodimension leider nicht mehr.

Insgesamt wurde erläutert, warum die Schwarz-D-Fläche  $F$  eine eingebettete Minimalfläche ist, welche durch die Wahl der Jordankurve  $J$  eindeutig bestimmt ist.

Im Folgenden soll eine beliebige Jordankurve  $J$  entlang der Kanten eines  $n$ -dimensionalen Würfels als Ausgangspunkt gewählt werden. Aus dieser wird analog zum hier beschriebenen Vorgehen eine Fläche  $F$  konstruiert. Dabei soll die Frage beantwortet werden, unter welchen Bedingungen an  $J$  die entstehende Fläche  $F$  eine eingebettete Minimalfläche ist.

An dieser Stelle soll auf eine weitere Eigenschaft der Schwarz-D-Fläche eingegangen werden, die auch für die angestrebte Verallgemeinerung von Interesse ist. Die Schwarz-D-Fläche entsteht auch, indem man vier gespiegelte Flächen  $f$  nimmt und diese verschiebt.

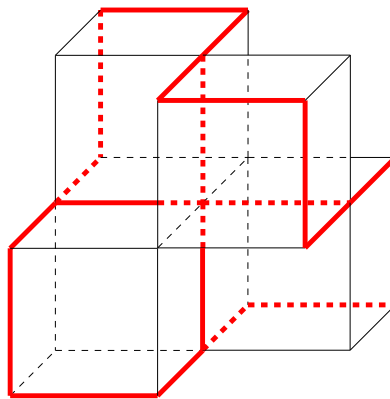


Abbildung 5: Vier Kopien von  $f$ , die in  $F$  enthalten sind. Im Bild sind die Randkanten der vier Kopien von  $f$  rot markiert.

Verschiebt man den Teil der Schwarz-D-Fläche  $F$  aus Abb. 5 um die Elemente aus

$$(2\mathbb{Z})^3 := \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in 2\mathbb{Z}\},$$

so ergeben alle diese verschobenen Flächen zusammen genau die Schwarz-D-Fläche. Deswegen nennt man den abgebildeten Teil von  $F$  auch *Translationsfundamentalbereich*.

Diese Struktur ist eng verknüpft mit dem Begriff des *Gitters*  $\Lambda(F)$  einer Fläche  $F$ . Dieses Gitter ist definiert durch

$$\Lambda(F) := \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \text{die Verschiebung um } v \text{ überführt das Bild von } F \text{ in sich selbst}\}.$$

Dabei wird die Orientierung von  $F$  nicht beachtet, d. h. wenn die Verschiebung um  $v$  die Fläche  $F$  auf sich abbildet, gilt  $v \in \Lambda(F)$ , egal was bei der Verschiebung mit den Normalen von  $F$  passiert.

Für das Gitter der Schwarz-D-Fläche ergibt sich damit  $\Lambda(F) = (2\mathbb{Z})^3$ . Per Definition nennt man eine Fläche *n-fach periodisch*, wenn ihr Gitter den *Rang*  $n$  hat, d. h. wenn  $\Lambda(F)$  als additive Gruppe von  $n$  linear unabhängigen Vektoren erzeugt wird. Die Schwarz-D-Fläche ist also eine 3-fach periodische Minimalfläche. Das Gitter wird später bei der Argumentation für Flächen in  $\mathbb{R}^n$  eine zentrale Rolle spielen.

Bevor auf die Existenz analoger Minimalflächen in  $\mathbb{R}^n$  eingegangen wird, soll das Einbettungsproblem diskutiert werden. Dabei geht es um die Verallgemeinerung der Aussagen (vii) und (viii) auf höhere Dimensionen. Die entstehenden Aussagen über die

Einbettung von  $F$  lassen sich nicht nur auf Minimalflächen, sondern auch auf andere Typen von Flächen anwenden.

Um in späteren Kapiteln sinnvolle Bezeichnungen und eine genügende Anzahl an Beispielen zur Verfügung zu haben, beschäftigt sich Kapitel 3 etwas genauer mit Jordankurven entlang der Kanten eines  $n$ -dimensionalen Würfels.



### 3 Jordankurven entlang der Kanten eines $n$ -dimensionalen Würfels

In diesem Kapitel geht es zunächst darum eine Notation für geschlossene Jordankurven entlang der Kanten eines  $n$ -dimensionalen Würfels einzuführen. Außerdem sollen sinnvolle Klassen von Beispielkurven für die folgenden Kapitel zur Verfügung gestellt werden. Dies geschieht für Dimension drei und vier.

Eine Symmetrie des Ausgangswürfels  $W$  ist eine Isometrie des  $\mathbb{R}^n$ , welche  $W$  bijektiv auf sich selbst abbildet. Wenn zwei Jordankurven bis auf eine Symmetrie (von  $W$ ) gleich sind, so sind die durch Spiegelung entstehenden Strukturen bzw. Flächen bis auf eine Isometrie gleich. Aus diesem Grund werden in dieser Arbeit wie gewöhnlich nur bis auf Symmetrie verschiedene Kurven wirklich als verschiedene Kurven behandelt. Deswegen wird sich dieses Kapitel unter anderem damit beschäftigen, wann zwei Jordankurven bis auf Symmetrie übereinstimmen.

Einige Aussagen und Beweise dieses Kapitels sind sehr technisch, weswegen hier herausgestellt werden soll, was für die folgende Arbeit besonders wichtig ist.

Die wichtigsten Ergebnisse dieses Kapitels sind:

- die Darstellung der Symmetriegruppe des Würfels  $W$ ,
- die Notation für Jordankurven (insbesondere die zweite ohne Startpunkt) und
- die Beispiele in  $\mathbb{R}^3$  und  $\mathbb{R}^4$  (jedoch nicht unbedingt die zugehörigen Beweise).

#### 3.1 Eine erste Notation für Jordankurven

Als Ausgangswürfel wird in der gesamten Arbeit der Würfel  $W$  mit Kantenlänge eins in  $\mathbb{R}^n$  betrachtet, dessen Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt. Dabei ist die Dimension  $n$  größer oder gleich drei und  $W$  hat die Gestalt

$$W := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid -\frac{1}{2} \leq x_i \leq \frac{1}{2} \forall 1 \leq i \leq n \right\}.$$

Die Koordinaten der Ecken von  $W$  sind somit  $-\frac{1}{2}$  oder  $\frac{1}{2}$ .

In diesem Kapitel werden geschlossene Jordankurven entlang der Kanten von  $W$  betrachtet. Die gewählte Lage des Würfels ist dabei besonders gut geeignet, da die Würfelsymmetrien von  $W$  in dieser Lage eine einfache Gestalt haben.

Zunächst wird eine Definition von geschlossenen Jordankurven benötigt.

**Definition 3.1.** Eine geschlossene Jordankurve  $J$  ist eine stetige, injektive Abbildung  $J: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Im Folgenden werden immer stückweise stetig differenzierbare geschlossene Jordankurven  $J$  betrachtet. Weiterhin wird die Jordankurve  $J$  meist mit ihrem Bild identifiziert.

Wenn also im Folgenden von einer Jordankurve gesprochen wird, so ist damit eine stückweise stetig differenzierbare, geschlossene Jordankurve (bzw. ihr Bild in  $\mathbb{R}^n$ ) gemeint.

Als Vorstufe der Notation für Jordankurven wird eine Notation für bestimmte Kurven entlang der Kanten von  $W$  betrachtet.

**Definition 3.2.** Ein Tupel

$$(q, (c_i)_{1 \leq i \leq m}) \text{ mit } q \in \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}^n \text{ und } c_i \in \{1, \dots, n\} \quad \forall 1 \leq i \leq m$$

soll für eine Kurve entlang der Kanten von  $W$  stehen, welche

- im Punkt  $q$  startet und
- von  $q$  aus die Kante von  $W$  in die  $c_1$ -te Koordinatenrichtung vollständig durchläuft, danach
- die Kante von  $W$  in die  $c_2$ -te Koordinatenrichtung vollständig durchläuft usw.

Die Kurve endet, nachdem  $m$  Kanten, die nicht verschieden sein müssen, vollständig durchlaufen wurden. Die letzte durchlaufene Kante ist dabei eine in die  $c_m$ -te Koordinatenrichtung. Die Zahl  $m$  heißt Länge der Kurve.

Im Folgenden wird der Punkt  $q$  als Startpunkt der Kurve bezeichnet. Außerdem sei mit der  $x_i$ -Richtung immer die  $i$ -te Koordinatenrichtung gemeint.

Diese Definition verwendet, dass in jeder Ecke von  $W$  genau eine Kante in jede Koordinatenrichtung startet. Dadurch ist die Beschreibung der Kurve eindeutig.

**Beispiel 3.3.** Zur Veranschaulichung dieser Schreibweise zeigt Abb. 6 drei Beispielkurven in  $\mathbb{R}^3$  und drei Beispiele von Kurven in  $\mathbb{R}^4$ .

An diesen Beispielen erkennt man bereits, dass nicht jede Kurve der Gestalt  $(q, (c_i)_{1 \leq i \leq m})$  eine Jordankurve ist. In Abb. 6 sind  $J_2$  und  $J_4$  nicht injektiv (d. h. die Kurven schneiden sich mindestens einmal selbst), und  $J_2$  und  $J_5$  nicht geschlossen. Nur die Kurven  $J_1$ ,  $J_3$  und  $J_6$  sind Jordankurven.

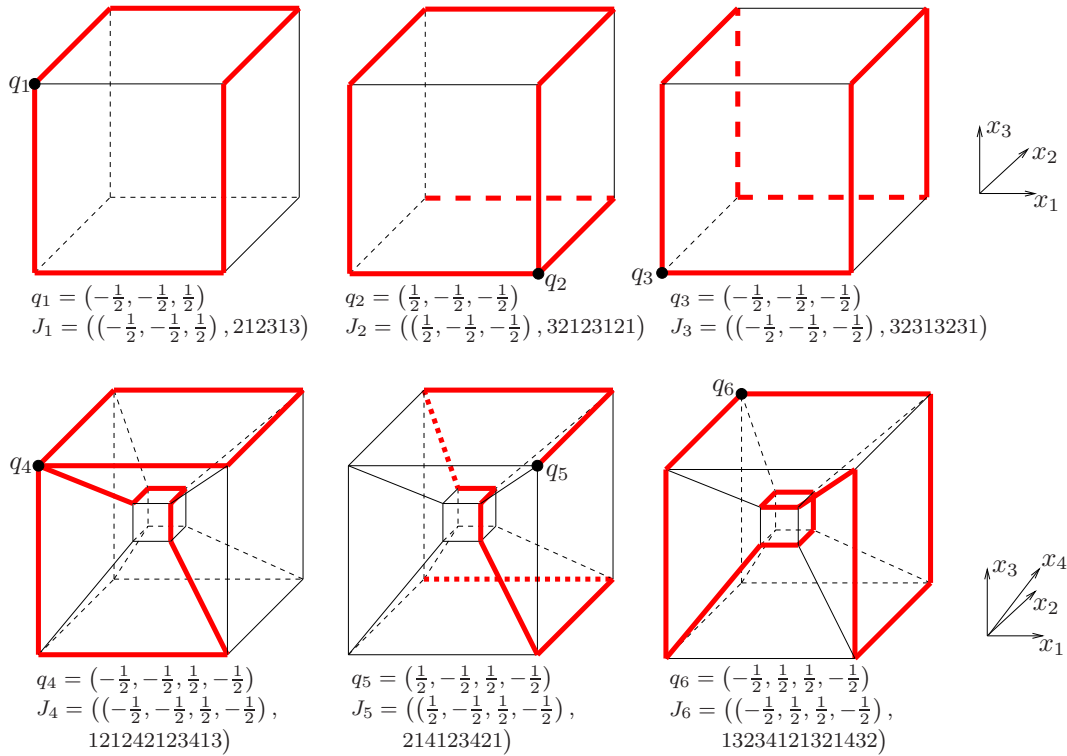


Abbildung 6: Beispielkurven in  $\mathbb{R}^3$  und  $\mathbb{R}^4$ . In der unteren Zeile ist der vierdimensionale Würfel  $W$  kombinatorisch dargestellt. Dabei sind die Eckpunkte von  $W$  mit  $x_4 = \frac{1}{2}$  im Inneren abgebildet, während Eckpunkte vom  $W$  mit  $x_4 = -\frac{1}{2}$  auf dem Rand der Skizze liegen.

Um sicherzustellen, dass ein Tupel  $(q, (c_i)_{1 \leq i \leq m})$  eine geschlossene Jordankurve beschreibt, müssen also weitere Bedingungen erfüllt sein.

**Lemma 3.4.** *Es sei  $\Gamma$  die Kurve entlang der Kanten von  $W$ , welche durch  $(q, (c_i)_{1 \leq i \leq m})$  beschrieben wird. Dann gilt:*

- $\Gamma$  ist genau dann geschlossen, wenn  $\Gamma$  in jede Koordinatenrichtung eine gerade Anzahl von Kanten durchläuft.
- $\Gamma$  ist genau dann injektiv, wenn keine echte Teilmenge von  $\Gamma$  eine geschlossene Kurve ist.

**Beweis.** Wenn  $\Gamma$  eine Kante von  $W$  in  $x_i$ -Richtung durchläuft, verändert sich dadurch die  $i$ -te Koordinate von  $-\frac{1}{2}$  auf  $\frac{1}{2}$  oder umgekehrt und alle anderen Koordinaten bleiben gleich. Die Kurve  $\Gamma$  ist genau dann geschlossen, wenn sie an ihren Ausgangspunkt zurückkehrt, d. h. wenn es in jeder Koordinatenrichtung eine gerade Anzahl der beschriebenen Wechsel von  $-\frac{1}{2}$  zu  $\frac{1}{2}$  oder umgekehrt gibt. Das zeigt die erste Aussage des Lemmas.

Wenn  $\Gamma$  einen Punkt  $p$  zweimal durchläuft, so ist der Teil von  $\Gamma$  zwischen dem ersten und dem zweiten Durchlauf von  $p$  eine geschlossene Kurve. Daraus folgt, dass sich  $\Gamma$  genau dann selbst schneidet, wenn eine echte Teilmenge von  $\Gamma$  eine geschlossene Kurve ist. Das zeigt die zweite Aussage des Lemmas. **w. z. b. w.**

Formuliert man die Bedingungen für geschlossene Jordankurven aus Lemma 3.4 als Aussagen über die Zahlenfolge  $(c_i)_{1 \leq i \leq m}$ , so erhält man:

**Lemma 3.5.** *Es sei  $J$  die Kurve entlang der Kanten von  $W$ , welche durch  $(q, (c_i)_{1 \leq i \leq m})$  beschrieben wird. Die Kurve  $J$  ist genau dann eine geschlossene Jordankurve, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.*

- Für alle  $j \in \{1, \dots, n\}$  gilt  $c_i = j$  für eine gerade Anzahl von Elementen  $i$  mit  $1 \leq i \leq m$ .
- Es gibt keine natürlichen Zahlen  $m_1$  und  $m_2$  mit  $1 \leq m_1 < m_2 \leq m$  und  $(m_1, m_2) \neq (1, m)$ , so dass für alle  $j \in \{1, \dots, n\}$  die Identität  $c_i = j$  für eine gerade Anzahl von Elementen  $i$  mit  $m_1 \leq i \leq m_2$  gilt.
- $m \neq 2$

Aus diesen Eigenschaften folgt insbesondere:

- $c_i \neq c_{i+1} \forall 1 \leq i \leq m - 1$  und  $c_m \neq c_1$ , d. h. zwei Kanten, die von  $J$  direkt hintereinander durchlaufen werden, dürfen nicht gleich sein.
- Die Länge  $m$  der geschlossenen Jordankurve  $J$  ist gerade.

**Beweis.** Wegen Lemma 3.4 ist die erste Bedingung genau dann erfüllt, wenn  $J$  geschlossen ist. Die zweite Bedingung sagt aus, dass keine echte Teilmenge von  $J$ , die in einer Ecke von  $W$  beginnt, geschlossen ist. Der einzige weitere Fall, in dem eine echte Teilmenge von  $J$  geschlossen sein kann, tritt für  $m = 2$  auf, wenn  $J$  nur eine Kante hin und dieselbe Kante wieder zurück läuft. Also folgt aus den Bedingungen zwei und drei, dass keine echte Teilmenge von  $J$  eine geschlossene Kurve ist, womit  $J$  (wegen Lemma 3.4) injektiv ist. Außerdem erfüllt jede injektive, geschlossene Jordankurve  $J$  die Bedingungen zwei und drei. Insgesamt ergibt sich, dass  $J$  genau dann eine geschlossene Jordankurve ist, wenn die drei im Lemma angegebenen Bedingungen erfüllt sind.

Die erste zusätzliche Aussage folgt aus Bedingung zwei im Spezialfall  $m_2 - m_1 = 1$  bzw. aus allen drei Bedingungen mit  $m_1 = 2$  und  $m_2 = m - 1$ . Die zweite zusätzliche Aussage ergibt sich aus Bedingung eins. **w. z. b. w.**

Im Folgenden wird jedes Tupel  $(q, (c_i)_{1 \leq i \leq m})$ , welches die Bedingungen des Lemmas 3.5 erfüllt, als geschlossene Jordankurve  $J$  bezeichnet. Weiter wird für diese Jordankurven die Schreibweise

$$J = (q, (c_i)_{1 \leq i \leq m})$$

verwendet. Das ist eine erste Notation für Jordankurven. Später wird diese noch vereinfacht.



### 3.2 Verschiedene Darstellungen einer Jordankurve

Die eingeführte Notation bietet zwar eine Darstellung für jede Jordankurve, diese Darstellung ist allerdings nicht eindeutig. In diesem Abschnitt soll erläutert werden, wann zwei Tupel für dieselbe Jordankurve stehen.

**Beispiel 3.6.** In  $\mathbb{R}^4$  beschreiben die drei Tupel

$$\left( \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right), 3212423412 \right), \left( \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right), 2143242123 \right) \text{ und}$$

$$\left( \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right), 4234123212 \right)$$

die gleiche geschlossene Jordankurve  $J$ . Diese ist in Abb. 7 dargestellt.

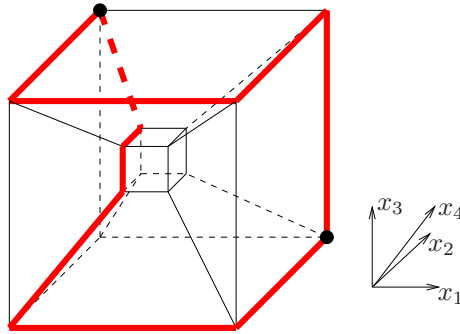


Abbildung 7: Jordankurve  $J$  aus Beispiel 3.6. Die verschiedenen Startpunkte sind in der Abbildung gekennzeichnet.

**Lemma 3.7.** *Es seien  $J = (q, (c_i)_{1 \leq i \leq m})$  und  $\tilde{J} = (\tilde{q}, (\tilde{c}_i)_{1 \leq i \leq m})$  zwei geschlossene Jordankurven mit  $(q, (c_i)_{1 \leq i \leq m}) \neq (\tilde{q}, (\tilde{c}_i)_{1 \leq i \leq m})$ . Die Kurven  $J$  und  $\tilde{J}$  sind genau dann dieselben Jordankurven, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist.*

- $q = \tilde{q}$  und  $\tilde{c}_i = c_{m+1-i}$
- $\tilde{q}$  ist der Punkt auf der Jordankurve  $J$ , welcher erreicht wird, wenn man von  $q$  aus genau  $l \geq 1$  Kanten von  $J$  durchläuft (in die Richtungen, welche durch die Folge  $(c_i)_{1 \leq i \leq m}$  vorgegeben sind) und  $\tilde{c}_i = c_{1+((i+l-1) \bmod m)}$ .
- $\tilde{q}$  ist der Punkt auf der Jordankurve  $J$ , welcher erreicht wird, wenn man von  $q$  aus genau  $l \geq 1$  Kanten von  $J$  durchläuft (in die Richtungen, welche durch die Folge  $(c_i)_{1 \leq i \leq m}$  vorgegeben sind) und  $\tilde{c}_i = c_{1+((l-i) \bmod m)}$ .

Dabei bezeichnet wie gewöhnlich  $a \bmod m$  für jedes  $a \in \mathbb{Z}$  den Rest von  $a$  bei der Division durch  $m$ .

**Beweis.** Wir betrachten die geschlossene Jordankurve  $J = (q, (c_i)_{1 \leq i \leq m})$ . Es ergibt sich dieselbe Jordankurve, wenn

- man  $J$  in der anderen Richtung durchläuft (das entspricht der ersten Bedingung des Lemmas) oder
- wenn man als Startpunkt einen beliebigen Punkt von  $J$  wählt und von dort aus die Kanten von  $J$  durchläuft (das entspricht der zweiten Bedingung des Lemmas) oder
- wenn man die beiden ersten Punkte nacheinander durchführt (das entspricht der dritten Bedingung des Lemmas).

Offensichtlich gibt es keine weiteren Möglichkeiten dieselbe Jordankurve zu erhalten.

**w. z. b. w.**

An dieser Stelle ist geklärt, wann zwei Jordankurven gleich sind. Später sollen zwei Jordankurven aber auch dann als gleich angesehen werden, wenn sie durch eine Symmetrie des Würfels  $W$  auseinander hervorgehen. Dies ist sinnvoll, weil dann die beiden zugehörigen Flächen, welche analog zur Schwarz-D-Fläche entstehen, bis auf eine Isometrie des  $\mathbb{R}^n$  übereinstimmen, also keine geometrischen Unterschiede aufweisen.

Um später etwas über bis auf Symmetrie verschiedene bzw. gleiche Jordankurven aussagen zu können, muss zunächst die Symmetriegruppe des Würfels  $W$  eingeführt werden.

### 3.3 Symmetriegruppe des $n$ -dimensionalen Würfels

Diese Symmetriegruppe ist nicht nur hier für die Klassifizierung von Jordankurven wichtig. Sie wird auch bei der Einbettungsfrage eine zentrale Rolle spielen. Dort verwendet man eine Teilmenge der Symmetriegruppe von  $W$ , um eine geeignete Gruppenstruktur zu definieren. Die Beschreibung der Symmetriegruppe, welche in diesem Abschnitt gegeben wird, ist an die spätere Anwendung angepasst.

Wie bereits erwähnt soll eine Symmetrie des Würfels  $W$  eine Isometrie des  $\mathbb{R}^n$  sein, die  $W$  bijektiv auf sich selbst abbildet. Jede Isometrie des  $\mathbb{R}^n$  hat die Gestalt  $d: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto Ax + b$  mit  $A \in O(n)$  und  $b \in \mathbb{R}^n$ . Eine solche Isometrie  $d$  kann den Würfel  $W$  nur auf sich selbst abbilden, wenn  $b = 0$  gilt. Das führt zu folgender Definition.

**Definition 3.8.** Die Symmetriegruppe  $S$  des Würfels  $W$  ist definiert als

$$S := \{d: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \mid d(x) = Ax, A \in O(n), d \text{ bildet } W \text{ bijektiv auf } W \text{ ab.}\}$$

mit der Verkettung von Abbildungen als Gruppenoperation. Ein Element  $d \in S$  heißt Würfelsymmetrie.

Man kann diese Symmetriegruppe  $S$  als Untergruppe der Matrizen­gruppe  $O(n)$  auf­fassen, und sie als semidirektes Produkt aus der Menge der Diagonalmatrizen und der Menge der Permutationsmatrizen schreiben.

Die folgende Darstellung entspricht dieser Schreibweise, allerdings wird die Gruppe  $\mathbb{Z}_2^n$  anstelle der Diagonalmatrizen und die Permutationsgruppe  $S_n$  anstelle von Permutati­onsmatrizen verwendet. Dabei entspricht ein Element  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}_2^n$  der Matrix  $\text{diag}((-1)^{a_1}, \dots, (-1)^{a_n})$ . Diese Umbenennung der Gruppen vereinfacht die Darstellung in den folgenden Kapiteln.

**Satz 3.9.** *Die Abbildung*

$$\Phi: \mathbb{Z}_2^n \rtimes_{\theta} S_n \rightarrow S, \quad (a, \sigma) \mapsto d \quad \text{mit} \quad d(e_i) = (-1)^{a_{\sigma(i)}} \cdot e_{\sigma(i)} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

ist ein Gruppenisomorphismus. Dabei ist  $\theta$  gegeben als

$$\theta: S_n \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}_2^n), \quad \sigma \mapsto (a \mapsto (a_{\sigma^{-1}(i)})_{1 \leq i \leq n}),$$

wobei die Gruppenoperation von  $\text{Aut}(\mathbb{Z}_2^n)$  wie gewöhnlich die Verkettung von Abbildun­gen ist.

Die Gruppenoperation des semidirekten Produkts  $\mathbb{Z}_2^n \rtimes_{\theta} S_n$  ist standardmäßig definiert durch

$$(3.1) \quad (a, \sigma) \circ_{\mathbb{Z}_2^n \rtimes_{\theta} S_n} (b, \mu) := (a +_{\mathbb{Z}_2^n} \theta(\sigma)(b), \sigma \circ_{S_n} \mu) \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}_2^n, \sigma, \mu \in S_n.$$

Zu den Bezeichnungen: Wie gewöhnlich ist  $e_i$  der  $i$ -te Einheitsvektor. Außerdem wer­den Elemente aus  $\mathbb{Z}_2$  durch Null bzw. Eins repräsentiert und  $a \in \mathbb{Z}_2^n$  steht für den Vektor  $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$  mit  $a_i \in \mathbb{Z}_2$ . Beim Potenzieren mit  $a_i$  wird entsprechend mit Null oder Eins potenziert. Die Addition in  $\mathbb{Z}_2^n$  ist natürlich die komponentenweise Addition in  $\mathbb{Z}_2$ .

Satz 3.9 ermöglicht es von jetzt an  $S = \mathbb{Z}_2^n \rtimes_{\theta} S_n$  zu setzen. Die Elemente von  $S$  werden also wahlweise als Elemente der Gruppe  $\mathbb{Z}_2^n \rtimes_{\theta} S_n$  oder als die entsprechenden Abbil­dungen des  $\mathbb{R}^n$  betrachtet. Meist ist es dabei nützlich zwischen beiden Standpunkten hin und her zu wechseln.

**Beweis von Satz 3.9.** Um die Schreibweise  $\mathbb{Z}_2^n \rtimes_{\theta} S_n$  als semidirektes Produkt zu rechtfertigen, muss zunächst gezeigt werden, dass  $\theta$  ein wohldefinierter Gruppenhomo­morphismus ist. Offensichtlich ist  $\theta(\sigma)$  für jedes  $\sigma \in S_n$  ein bijektiver Gruppenhomo­morphismus. Also ist  $\theta$  wohldefiniert.

Außerdem gilt für alle  $\sigma, \mu \in S_n$  und  $a \in \mathbb{Z}_2^n$

$$\begin{aligned} \theta(\sigma \circ \mu)(a) &= (a_{(\sigma \circ \mu)^{-1}(i)})_{1 \leq i \leq n} = (a_{\mu^{-1}(\sigma^{-1}(i))})_{1 \leq i \leq n} = \theta(\sigma) \left( (a_{\mu^{-1}(i)})_{1 \leq i \leq n} \right) \\ &= \theta(\sigma) (\theta(\mu)(a)). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\theta(\sigma \circ_{S_n} \mu) = \theta(\sigma) \circ_{\text{Aut}(\mathbb{Z}_2^n)} \theta(\mu) \quad \forall \sigma, \mu \in S_n.$$

Damit ist  $\theta$  ein Gruppenhomomorphismus.

Als nächstes soll die Bijektivität von  $\Phi$  gezeigt werden. Die Injektivität von  $\Phi$  ergibt sich direkt aus der Definition dieser Abbildung. Man beachte, dass  $\Phi((a, \sigma))$  wegen der Linearität von  $d$  durch die im Satz angegebene Beschreibung eindeutig bestimmt ist. Weiter gilt für jede Isometrie  $d \in S$  sowohl  $d(e_i) \in \{\pm e_l \mid 1 \leq l \leq n\}$  als auch  $d(e_i) \neq \pm d(e_j)$  für  $i \neq j$ . Diese Eigenschaften bedeuten, dass es für jedes  $d \in S$  ein  $a \in \mathbb{Z}_2^n$  und ein  $\sigma \in S_n$  gibt, sodass  $d(e_i) = (-1)^{a_{\sigma(i)}} \cdot e_{\sigma(i)}$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  gilt. Damit ist  $\Phi$  auch surjektiv.

Zum Abschluss des Beweises wird nachgerechnet, dass  $\Phi$  ein Gruppenhomomorphismus ist. Für alle  $a, b \in \mathbb{Z}_2^n$  und  $\sigma, \mu \in S_n$  sowie  $i \in \{1, \dots, n\}$  gilt

$$\begin{aligned} (\Phi((a, \sigma) \circ_{\mathbb{Z}_2^n \rtimes_{\theta} S_n} (b, \mu))) (e_i) &= (\Phi((a + \theta(\sigma)(b), \sigma \circ \mu))) (e_i) \\ &= (-1)^{a_{(\sigma\mu)(i)} + b_{\sigma^{-1}(\sigma\mu(i))}} \cdot e_{(\sigma\mu)(i)} \\ &= (-1)^{a_{(\sigma\mu)(i)} + b_{\mu(i)}} \cdot e_{(\sigma\mu)(i)} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \Phi((a, \sigma))(\Phi((b, \mu)) (e_i)) &= \Phi((a, \sigma))((-1)^{b_{\mu(i)}} \cdot e_{\mu(i)}) = (-1)^{b_{\mu(i)}} \cdot \Phi((a, \sigma))(e_{\mu(i)}) \\ &= (-1)^{b_{\mu(i)}} \cdot (-1)^{a_{(\sigma\mu)(i)}} \cdot e_{(\sigma\mu)(i)} \\ &= (-1)^{a_{(\sigma\mu)(i)} + b_{\mu(i)}} \cdot e_{(\sigma\mu)(i)}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\Phi((a, \sigma) \circ_{\mathbb{Z}_2^n \rtimes_{\theta} S_n} (b, \mu)) = \Phi((a, \sigma)) \circ_S \Phi((b, \mu)).$$

**w. z. b. w.**

Mit Hilfe dieser Beschreibung der Symmetriegruppe  $S$  wird im nächsten Abschnitt gezeigt, wann zwei Jordankurven durch die Anwendung einer Symmetrie auseinander hervorgehen.

### 3.4 Bis auf Symmetrie gleiche Jordankurven

In diesem Abschnitt wird zunächst das Bild einzelner Kanten von  $W$  unter einer Würfelsymmetrie  $d \in S$  betrachtet, um als nächstes das Bild einer geschlossenen Jordankurve  $(q, (c_i)_{1 \leq i \leq m})$  unter  $d$  angeben zu können. Daraus lässt sich dann ableiten, wann zwei gegebene Jordankurven bis auf Symmetrie übereinstimmen.

**Lemma 3.10.** *Eine Kante von  $W$  in  $x_i$ -Richtung wird durch ein Element  $d = (a, \sigma) \in S$  auf eine Kante von  $W$  in  $x_{\sigma(i)}$ -Richtung abgebildet.*

*Insbesondere werden parallele Kanten von  $W$  durch jede Symmetrie aus  $S$  wieder auf parallele Kanten von  $W$  abgebildet (aber eventuell in eine andere Koordinatenrichtung).*

**Beweis.** O. b. d. A. sei  $i = 1$ . Eine Kante  $k$  von  $W$  in  $x_1$ -Richtung hat die Gestalt

$$\begin{aligned} k &= \left\{ (t, q_2, \dots, q_n) \mid t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \right\} \\ &= \left\{ t \cdot e_1 + q_2 \cdot e_2 + \dots + q_n \cdot e_n \mid t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \right\} \text{ mit } q_i \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \forall 2 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Das Bild von  $k$  unter  $d$  ist gleich

$$\begin{aligned} &\left\{ d(t \cdot e_1 + q_2 \cdot e_2 + \dots + q_n \cdot e_n) \mid t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \right\} \\ \stackrel{d \text{ ist linear}}{=} &\left\{ t \cdot d(e_1) + q_2 \cdot d(e_2) + \dots + q_n \cdot d(e_n) \mid t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \right\} \\ &= \left\{ (-1)^{a_{\sigma(1)}} t \cdot e_{\sigma(1)} + (-1)^{a_{\sigma(2)}} q_2 \cdot e_{\sigma(2)} + \dots + (-1)^{a_{\sigma(n)}} q_n \cdot e_{\sigma(n)} \mid t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \right\}. \end{aligned}$$

Dies ist eine Kante von  $W$  in  $x_{\sigma(1)}$ -Richtung.

**w. z. b. w.**

**Lemma 3.11.** Eine geschlossene Jordankurve  $J = (q, (c_i)_{1 \leq i \leq m})$  wird durch eine Symmetrie  $d = (a, \sigma) \in S$  auf die geschlossene Jordankurve

$$d(J) = (d(q), (\sigma(c_i))_{1 \leq i \leq m})$$

abgebildet.

**Beweis.** Der Startpunkt  $q$  von  $J$  wird durch  $d$  auf  $d(q)$  abgebildet, während jede Kante in  $x_{c_i}$ -Richtung auf eine Kante in  $x_{\sigma(c_i)}$ -Richtung abgebildet wird (siehe Lemma 3.10). Beachtet man die verwendete Notation für Jordankurven, so folgt die Behauptung von Lemma 3.11. **w. z. b. w.**

In Lemma 3.11 erkennt man zum ersten Mal, dass die gewählte Notation für Jordankurven sinnvoll ist, denn das Bild einer Jordankurve  $J$  unter einer Würfelsymmetrie  $d$  lässt sich mit dieser Notation leicht angeben. In  $\mathbb{R}^3$  wird die formale Schreibweise für Jordankurven in der Regel nicht benötigt, da man den Kurven die meisten Eigenschaften direkt ansieht. In höheren Dimensionen ist es hilfreich auf diese Schreibweise zurückgreifen zu können, denn dort ist es schwerer Kurven und Symmetrien anschaulich darzustellen.

**Beispiel 3.12.** Mit Hilfe von Lemma 3.11 kann man das Bild einer Jordankurve  $J$  unter einer Würfelsymmetrie  $d = (a, \sigma)$  auch graphisch darstellen. Betrachtet man zum Beispiel die Kurve

$$J = \left( \left( \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right), 1234321242 \right) \in \mathbb{R}^4,$$

so ergibt sich  $J$ , indem man im Punkt  $q = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$  startet und nacheinander Kanten in die Richtungen  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_3, x_2, x_1, x_2, x_4$  und  $x_2$  durchläuft. Diese Jordankurve  $J$  ist in Abb. 8 dargestellt.

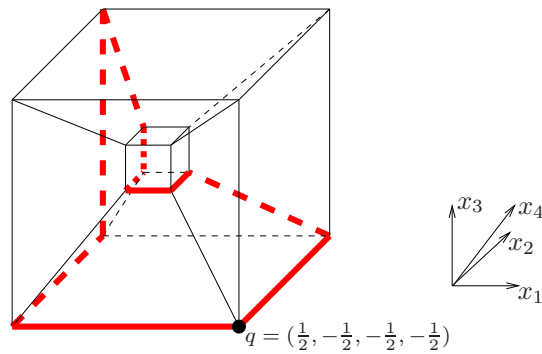


Abbildung 8: Jordankurve  $J = \left( \left( \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right), 1234321242 \right)$

Wendet man auf diese Jordankurve  $J$  die Würfelsymmetrie

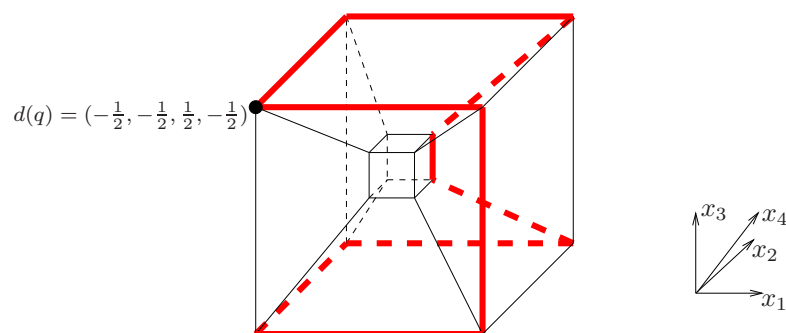
$$d = ((0, 1, 1, 0), \sigma) \text{ mit } \sigma(1) = 2, \sigma(2) = 1, \sigma(3) = 4 \text{ und } \sigma(4) = 3$$

an, so folgt mit Hilfe von Lemma 3.11

$$\begin{aligned} d(J) &= \left( d \left( \left( \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \right), 2143412131 \right) \\ &= \left( \frac{1}{2}(-1)^1 e_2 + \left( -\frac{1}{2} \right) (-1)^0 e_1 + \left( -\frac{1}{2} \right) (-1)^0 e_4 + \left( -\frac{1}{2} \right) (-1)^1 e_3, 2143412131 \right) \\ &= \left( \left( -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right), 2143412131 \right). \end{aligned}$$

An dieser Rechnung erkennt man beispielhaft, dass sich der Punkt  $d(q) = (a, \sigma)(q)$  ergibt, wenn man zuerst die Koordinaten von  $q$  entsprechend  $\sigma$  permutiert und danach die Vorzeichen in allen Richtungen ändert, in denen  $a_i = 1$  gilt.

Für  $d(J)$  ergibt sich im angegebenen Beispiel die folgende graphische Darstellung:



Jetzt wollen wir uns mit Jordankurven beschäftigen, die bis auf Symmetrie übereinstimmen.

**Definition 3.13.** Zwei Jordankurven  $J_1$  und  $J_2$  entlang der Kanten von  $W$  heißen (bis auf Symmetrie) gleich, wenn es eine Würfelsymmetrie  $d \in S$  mit

$$d(J_1) = J_2$$

gibt. (Hier ist die Gleichheit der Kurven als Mengen gemeint und nicht die Gleichheit der zugehörigen Tupel).

Wenn im Folgenden von gleichen Jordankurven gesprochen wird, so sind Jordankurven gemeint, die bis auf Symmetrie übereinstimmen.

Als nächstes soll gezeigt werden, dass sich eine Jordankurve durch die Veränderung des Startpunktes nicht ändert. Genauso bleibt eine Jordankurve gleich, wenn man die Koordinatenrichtungen der Kanten permutiert. Tatsächlich sind das im Wesentlichen alle Möglichkeiten eine (bis auf Symmetrie) gleiche Jordankurve zu erhalten.

**Lemma 3.14.** Für je zwei Eckpunkte  $p$  und  $q$  von  $W$  und jede Folge  $(c_i)_{1 \leq i \leq m}$ , welche die Bedingungen aus Lemma 3.5 erfüllt, sind die beiden Jordankurven

$$J_1 = (p, (c_i)_{1 \leq i \leq m}) \text{ und } J_2 = (q, (c_i)_{1 \leq i \leq m})$$

gleich.

Zur Erinnerung: Aus Lemma 3.5 folgt, dass die hier betrachteten Kurven  $J_1$  und  $J_2$  tatsächlich geschlossene Jordankurve sind.

**Beweis von Lemma 3.14.** Im Folgenden wird ein  $d = (a, \sigma) \in S$  mit  $d(J_1) = J_2$  angeben. Da sich  $J_1$  und  $J_2$  nur im Startpunkt unterscheiden, wird  $\sigma = \text{id}$  gewählt. Der Vektor  $a$  wird so bestimmt, dass  $d(p) = q$  gilt. Dazu setzen wir

$$S \ni d = (a, \text{id}) \text{ mit } a_i = \begin{cases} 0 & \text{falls } p_i = q_i, \\ 1 & \text{falls } p_i \neq q_i (\Leftrightarrow -p_i = q_i). \end{cases}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} d(J_1) &\stackrel{\text{Lemma 3.11}}{=} (d(p), (\text{id}(c_i))_{1 \leq i \leq m}) = (((-1)^{a_1} p_1, \dots, (-1)^{a_n} p_n), (c_i)_{1 \leq i \leq m}) \\ &\stackrel{\text{Wahl von } a}{=} (q, (c_i)_{1 \leq i \leq m}) = J_2. \end{aligned}$$

**w. z. b. w.**

**Lemma 3.15.** Für jeden Eckpunkt  $q$  von  $W$ , jede Folge  $(c_i)_{1 \leq i \leq m}$ , welche die Bedingungen aus Lemma 3.5 erfüllt, und jede Permutation  $\sigma \in S_n$  sind die beiden Jordankurven

$$J_1 = (q, (c_i)_{1 \leq i \leq m}) \text{ und } J_2 = (q, (\sigma(c_i))_{1 \leq i \leq m})$$

gleich.

In der Situation von Lemma 3.15 folgt aus Lemma 3.5, dass  $J_1$  eine geschlossene Jordankurve ist. Sobald gezeigt wurde, dass  $J_1$  und  $J_2$  bis auf Symmetrie übereinstimmen, ist somit auch bewiesen, dass es sich bei  $J_2$  um eine geschlossene Jordankurve handelt.

**Beweis von Lemma 3.15.** Es gilt

$$(0, \sigma)(J_1) \stackrel{\text{Lemma 3.11}}{=} ((0, \sigma)(q), (\sigma(c_i))_{1 \leq i \leq m}) .$$

Also ist  $J_1$  dieselbe Jordankurve wie  $((0, \sigma)(q), (\sigma(c_i))_{1 \leq i \leq m})$ . Diese wiederum ist nach Lemma 3.14 gleich  $(q, (\sigma(c_i))_{1 \leq i \leq m}) = J_2$ . Insgesamt folgt, dass  $J_1$  und  $J_2$  dieselben Kurven sind. **w. z. b. w.**

Nach dieser Vorarbeit kann angegeben werden, wann zwei Tupel dieselbe geschlossene Jordankurve beschreiben.

**Satz 3.16.** *Zwei geschlossene Jordankurven  $J = (q, (c_i)_{1 \leq i \leq m})$  und  $\tilde{J} = (\tilde{q}, (\tilde{c}_i)_{1 \leq i \leq \tilde{m}})$  sind genau dann (bis auf Symmetrie) gleich, wenn man durch das Anwenden einer oder die Hintereinanderausführung mehrerer der folgenden Operationen die Zahlenfolge  $(c_i)_{1 \leq i \leq m}$  in die Zahlenfolge  $(\tilde{c}_i)_{1 \leq i \leq \tilde{m}}$  überführen kann.*

- Umkehren der Reihenfolge, d. h. aus einer Zahlenfolge  $(a_i)_{1 \leq i \leq m}$  wird die Zahlenfolge  $(b_i)_{1 \leq i \leq m}$  mit

$$b_i = a_{m+1-i} .$$

- Zyklisches Verschieben, d. h. aus einer Zahlenfolge  $(a_i)_{1 \leq i \leq m}$  wird die Zahlenfolge  $(b_i)_{1 \leq i \leq m}$  mit

$$b_i = a_{1+((i+l-1) \bmod m)}, \text{ wobei } l \text{ eine beliebige fest gewählte natürliche Zahl ist.}$$

- Permutieren der Koordinatenrichtungen, d. h. aus einer Zahlenfolge  $(a_i)_{1 \leq i \leq m}$  wird die Zahlenfolge  $(b_i)_{1 \leq i \leq m}$  mit

$$b_i = \sigma(a_i) \text{ wobei } \sigma \in S_n \text{ eine beliebige fest gewählte Permutation ist.}$$

*Insbesondere muss für gleiche Jordankurven  $m = \tilde{m}$  gelten, was bedeutet, dass  $J$  und  $\tilde{J}$  dieselbe Länge haben.*

Die ersten beiden Operationen verändern die Jordankurve gar nicht (siehe Lemma 3.7). Die dritte Operation und die Tatsache, dass der Startpunkt egal ist, resultieren aus den Lemmata 3.14 und 3.15. Also ist Satz 3.16 im Wesentlichen eine Zusammenfassung der bisherigen Feststellungen. Man kann diesen Satz verwenden, um zu zeigen, dass zwei Jordankurven gleich sind. Dies geschieht allerdings auf eine sehr formale und somit wenig anschauliche Weise. In höheren Dimensionen ist dieses Vorgehen sehr gut geeignet, denn dort fehlt oft die Anschauung.



Natürlich ist es auch von Interesse zu zeigen, dass zwei gegebene Jordankurven verschieden sind. Dabei ist Satz 3.16 nicht sehr hilfreich. Dieses Problem wird später mit einem anderen Ansatz behandelt.

**Beweis von Satz 3.16.** Wenn sich  $(c_i)_{1 \leq i \leq m}$  durch die im Satz beschriebenen Operationen in  $(\tilde{c}_i)_{1 \leq i \leq \tilde{m}}$  überführen lässt, so folgt, wie bereits erläutert, aus den Lemmata 3.7, 3.14 und 3.15, dass  $J$  und  $\tilde{J}$  gleich sind.

Wenn andererseits  $J$  und  $\tilde{J}$  gleich sind, so gibt es ein  $d = (a, \sigma) \in S$  mit

$$\tilde{J} = (\tilde{q}, (\tilde{c}_i)_{1 \leq i \leq \tilde{m}}) = d(J) \stackrel{\text{Lemma 3.11}}{=} (d(q), (\sigma(c_i))_{1 \leq i \leq m}) .$$

Hierbei ist die Gleichheit als Kurve gemeint, welche in Lemma 3.7 behandelt wurde. Das heißt, wenn man auf die Zahlenfolge  $(c_i)_{1 \leq i \leq m}$  einmal die dritte Operation aus Satz 3.16 anwendet, unterscheidet sich die entstehende Zahlenfolge von der Folge  $(\tilde{c}_i)_{1 \leq i \leq \tilde{m}}$  nur durch eine der Operationen aus Lemma 3.7. Die dortigen Operationen ändern die Zahlenfolge aber nur durch Anwendung der ersten beiden Operationen aus Satz 3.16. Insgesamt bedeutet dies, dass man  $(c_i)_{1 \leq i \leq m}$  durch die im Satz aufgelisteten Operationen in die Zahlenfolge  $(\tilde{c}_i)_{1 \leq i \leq \tilde{m}}$  überführen kann.

Die Aussage  $m = \tilde{m}$  folgt, da keine der in Satz 3.16 angegebenen Operationen die Länge der Zahlenfolge ändert. **w. z. b. w.**

### 3.5 Verbesserte Notation für Jordankurven

Bisher wurden Jordankurven durch Tupel  $(q, (c_i)_{1 \leq i \leq m})$  beschrieben, wobei die Zahlenfolge  $(c_i)_{1 \leq i \leq m}$  alle Bedingungen aus Lemma 3.5 erfüllen musste. Aus dem letzten Abschnitt (siehe Lemma 3.14 oder Satz 3.16) ergibt sich, dass der Startpunkt  $q$  dabei überhaupt keine Rolle spielt. Wird er geändert, so ändert sich die zugehörige Jordankurve (bis auf Symmetrie) nicht. Es ist also sinnvoll nur die Zahlenfolge  $(c_i)_{1 \leq i \leq m}$  zur Beschreibung einer Jordankurve heranzuziehen. Diese Überlegung führt zu folgender Notation für Jordankurven:

**Definition 3.17.** Eine Zahlenfolge  $(c_i)_{1 \leq i \leq m}$  mit  $c_i \in \{1, \dots, n\}$  heißt Jordankurve, wenn sie die Bedingungen aus Lemma 3.5 erfüllt.

Diese Definition ist sinnvoll, da jede solche Zahlenfolge tatsächlich eine (bis auf Symmetrie) eindeutige Jordankurve beschreibt. Allerdings stehen zwei verschiedene Zahlenfolgen nicht unbedingt für zwei verschiedene Jordankurven.

Die Interpretation einer solchen Zahlenfolge als Jordankurve im Sinne der Definition 3.1 erfolgt wie bisher, nur dass man nun den Startpunkt der Kurve auf den Würfecken frei wählen kann.

**Beispiel 3.18.** In Abb. 9 ist die Jordankurve  $J = 234142413141$  entlang der Kanten eines vierdimensionalen Würfels auf zwei Weisen abgebildet. Die verschiedenen Darstellungen kommen durch die unterschiedliche Wahl der Startpunkte  $q_1$  und  $q_2$  zustande. Natürlich ist es möglich viele weitere Bilder von  $J$  zu erzeugen, indem andere Eckpunkte von  $W$  als Startpunkte festgelegt werden.

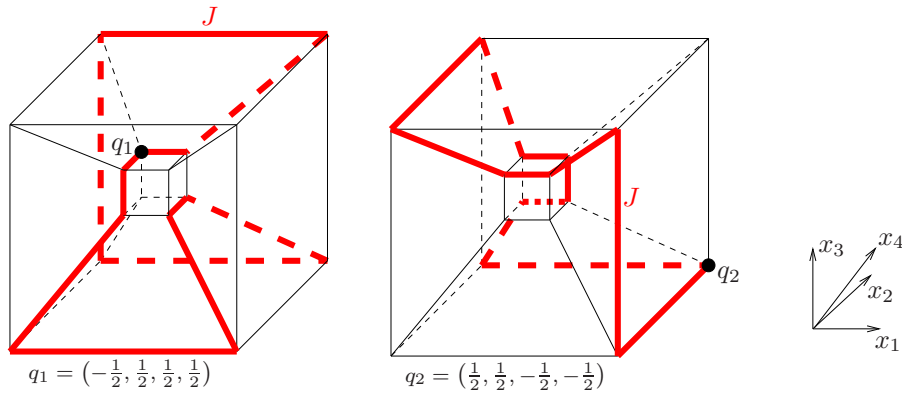


Abbildung 9: Zwei Darstellungen der Jordankurve  $J = 234142413141$ .

Außerdem ist bekannt, dass die Jordankurve  $143231324232$  (vgl. Abb. 10) bis auf Symmetrie gleich  $J$  ist, denn sie entsteht durch die Anwendung der Permutation  $\sigma = (12)(34)$  auf  $J$ . Natürlich gibt es noch viele weitere Zahlenfolgen, welche  $J$  beschreiben.

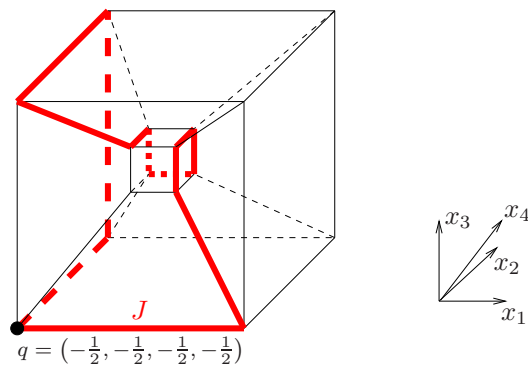


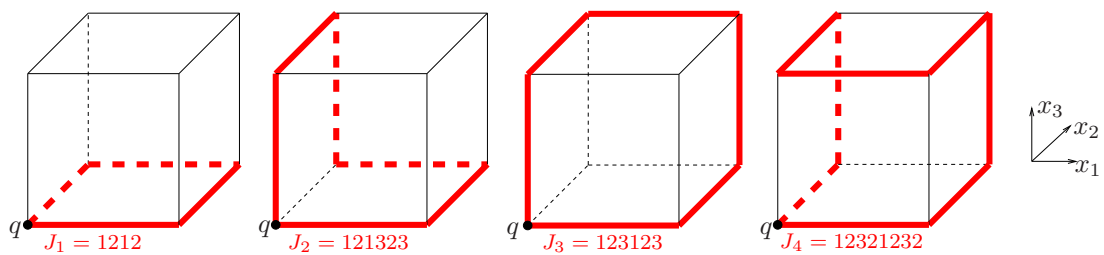
Abbildung 10: Eine mögliche Darstellung der Jordankurve  $143231324232$ .

Abb. 9 und Abb. 10 veranschaulichen, dass es im vierdimensionalen Raum sehr schwierig sein kann festzustellen, ob zwei graphische Darstellungen zu derselben Jordankurve gehören oder nicht. Deswegen ist es insbesondere in Dimensionen größer als drei nützlich, die Darstellung der Jordankurven als Zahlenfolge (inklusive der Charakterisierung gleicher Jordankurven aus Satz 3.16) heranziehen zu können.

### 3.6 Beispiele: Alle Jordankurven in $\mathbb{R}^3$

In  $\mathbb{R}^3$  gibt es nicht viele verschiedene Jordankurven, weswegen es möglich ist alle diese Kurven anzugeben. In höheren Dimensionen existieren sehr viel mehr Jordankurven, so dass man dort nicht so einfach alle benennen kann. Im Folgenden werden aber zumindest in Dimension vier alle Jordankurven mit bestimmten Eigenschaften angegeben. Dies ist wichtig, um später bestimmte Klassen von Kurven als Beispiele zur Verfügung zu haben.

**Satz 3.19.** *In  $\mathbb{R}^3$  gibt es genau vier (bis auf Symmetrie) verschiedene Jordankurven entlang der Kanten des Würfels  $W$ . Diese vier Jordankurven sind:*



**Beweis.**

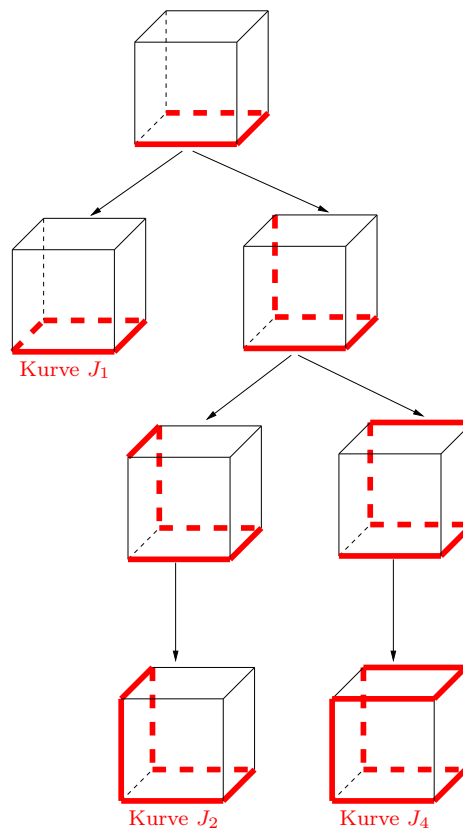


Abbildung 11: Alle Möglichkeiten für eine geschlossene Jordankurve, die mit 121 startet.

Um zu zeigen, dass nicht mehr als die vier in Satz 3.19 angegebenen Jordankurven existieren, werden alle Möglichkeiten für geschlossene Jordankurven in  $\mathbb{R}^3$  angegeben. Dies geht in Dimension drei sehr gut mit Hilfe von graphischen Darstellungen.

Aus dem letzten Abschnitt ist bekannt, dass man o.B.d.A. den Startpunkt  $q = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$  wählen kann. Außerdem kann man davon ausgehen, dass die Jordankurve mit 12 startet. Für die ersten drei Kanten gibt es also die Möglichkeiten 121 und 123. Davon ausgehend werden an die Kurve weitere Kanten angefügt. Dazu gibt es in jedem Schritt zwei Möglichkeiten, wobei einige Möglichkeiten ausgeschlossen sind, da sich aus ihnen keine geschlossene Jordankurve mehr bilden lässt. Dieses schrittweise Entwickeln aller möglichen Jordankurven sieht man in Abb. 11 und Abb. 12.

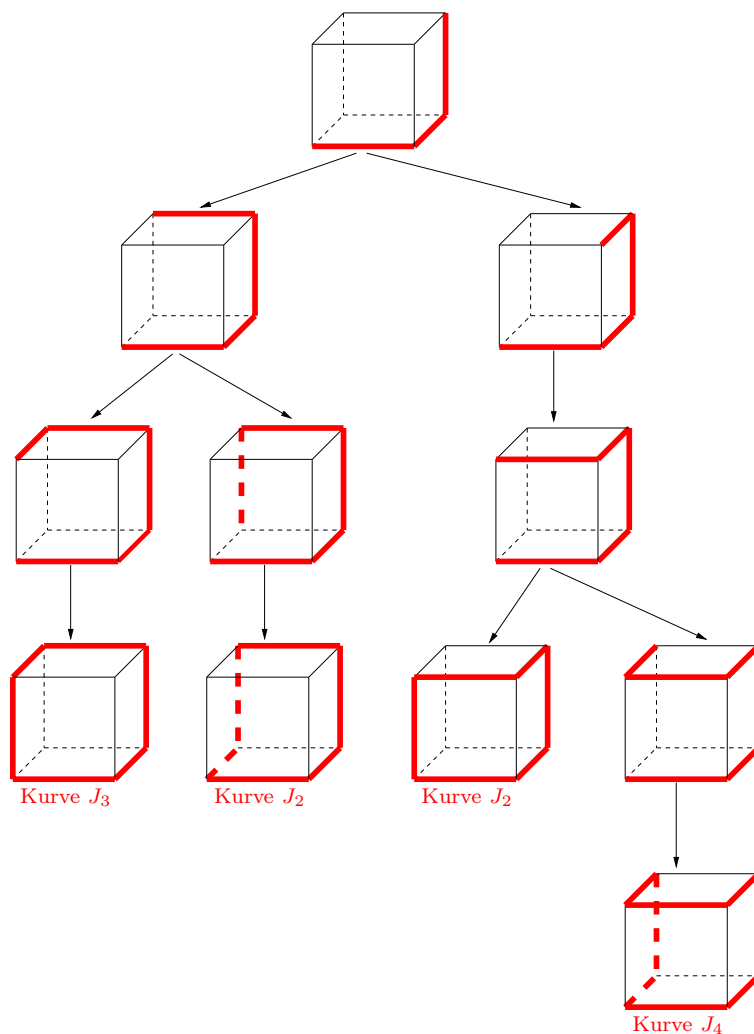


Abbildung 12: Alle Möglichkeiten für eine geschlossene Jordankurve, die mit 123 startet.

Insgesamt ergeben sich genau die vier im Satz angegebenen Jordankurven. Es wurde verwendet, dass man Kurven in den Abbildungen ansieht, ob sie gleich  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $J_3$  oder  $J_4$  sind. Man kann diese Aussagen natürlich auch formal beweisen. Zum Beispiel ist die letzte Kurve in Abb. 11 gleich 12131213. Wendet man darauf  $\sigma = (12)$  an, so erhält man 21232123. Durch zyklisches Verschieben dieser Folge um  $l = 1$  (vgl. Satz 3.16)

ergibt sich die Jordankurve  $12321232 = J_4$ . Analog kann man für jede geschlossene Jordankurve aus Abb. 11 bzw. Abb. 12 angeben, wie sie in  $J_1, J_2, J_3$  bzw.  $J_4$  überführt wird.

Nun muss nur noch gezeigt werden, dass die vier im Satz angegebenen Jordankurven nicht gleich sind. Wir wissen, dass zwei Jordankurven nicht gleich sein können, wenn sie eine verschiedene Anzahl von Kanten durchlaufen. Also reicht es  $J_2 \neq J_3$  zu zeigen. Dies sieht man den Kurven direkt an. **w. z. b. w.**

Insbesondere den letzten Schritt kann man in höheren Dimensionen so nicht machen. Um zu zeigen, dass zwei Jordankurven in Dimension  $n > 3$  verschieden sind, wird also eine weitere Idee benötigt.

### 3.7 Hinreichendes Kriterium für die Verschiedenheit von Jordankurven

Die Grundidee dieses Abschnittes ist es, "Abstände" zwischen den Kanten einer Jordankurve in dieselbe Koordinatenrichtung, zu betrachten. Der Abstand zweier Kanten soll dabei die Anzahl der Kanten von  $J$  sein, die zwischen den beiden Kanten durchlaufen werden. Es wird sich herausstellen, dass eine gewisse Menge solcher Abstände invariant unter Würfelsymmetrien ist. Diese Aussage hilft dabei festzustellen, dass zwei Jordankurven verschieden sind.

Zunächst benötigt man eine formale Definition der hier beschriebenen Abstände.

**Definition 3.20.** *Es seien  $J = (c_i)_{1 \leq i \leq m}$  eine Jordankurve und  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Weiter seien  $i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}$  mit  $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq m$  alle Zahlen, für die  $c_{i_l} = j$  gilt. Dann bezeichnet*

$$d_{J,j} := (i_2 - i_1 - 1, \dots, i_k - i_{k-1} - 1, m - i_k + i_1 - 1)$$

die Abstände zwischen Kanten von  $J$  in  $x_j$ -Richtung.

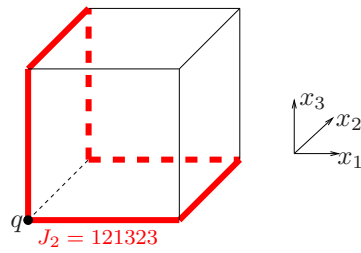
Außerdem sei

$$A_J = (d_{J,1}, \dots, d_{J,n})$$

die Kollektion dieser Abstände.

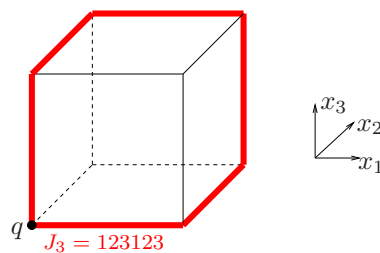
Anschaulich wird  $d_{J,j}$  bestimmt, indem man die Kanten von  $J$  zählt, welche sich zwischen den Kanten von  $J$  in  $x_j$ -Richtung befinden.

**Beispiel 3.21.**



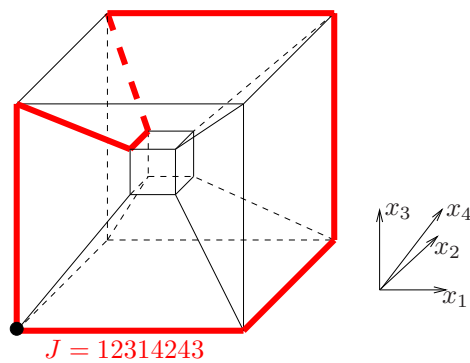
Betrachtet man die Kurve  $J_2 = 121323$  aus dem letzten Abschnitt, so ergibt sich

$$d_{J_2,1} = (1, 3), \quad d_{J_2,2} = (2, 2), \quad d_{J_2,3} = (1, 3) \quad \text{und} \quad A_{J_2} = ((1, 3), (2, 2), (1, 3)).$$



Für die Kurve  $J_3 = 123123$  erhält man hingegen

$$d_{J_3,1} = (2, 2), \quad d_{J_3,2} = (2, 2), \quad d_{J_3,3} = (2, 2) \quad \text{und} \quad A_{J_3} = ((2, 2), (2, 2), (2, 2)).$$



Ein mögliches Beispiel in  $\mathbb{R}^4$  wäre die Kurve  $J = 12314243$ , für welche sich

$$d_{J,1} = (2, 4), \quad d_{J,2} = (3, 3), \quad d_{J,3} = (4, 2), \quad d_{J,4} = (1, 5)$$

und

$$A_J = ((2, 4), (3, 3), (4, 2), (1, 5))$$

ergibt.

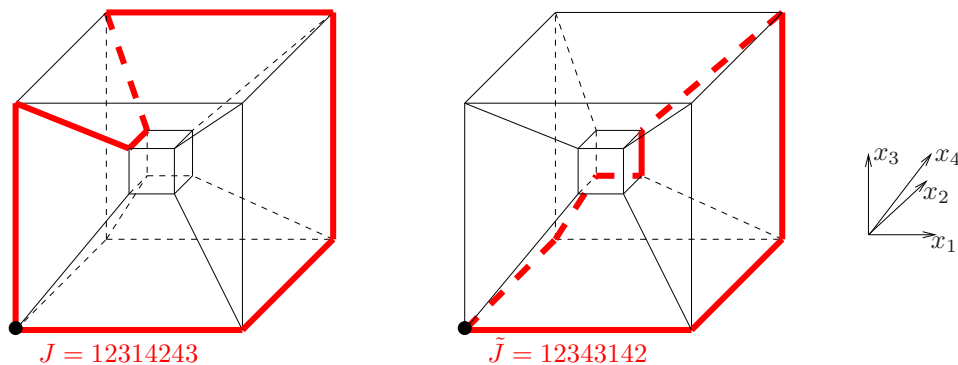
Man kann feststellen, dass sich das Tupel  $A_J$  bei gleichen Jordankurven nur wenig unterscheidet.

**Lemma 3.22.** *Es seien zwei (bis auf Symmetrie) gleiche Jordankurven  $J$  und  $\tilde{J}$  gegeben. Dann erhält man  $A_{\tilde{J}}$  aus  $A_J$ , indem man zunächst die Reihenfolge der Zahlen im Tupel  $d_{J,j}$  ändert (für jedes  $j \in \{1, \dots, n\}$  einzeln) und dann die Reihenfolge dieser Tupel in  $A_J$  verändert.*

Die Veränderung der Reihenfolge von Zahlen in  $d_{J,j}$  (für ein festes  $1 \leq j \leq n$ ), welche in Lemma 3.22 auftritt, ist dabei immer eine zyklische Verschiebung evtl. zusammengesetzt mit der Umkehr der Reihenfolge. Diese spezielle Gestalt wird für die folgenden Anwendungen allerdings nicht benötigt.

Es ist nicht klar, ob die Umkehrung von Lemma 3.22 gilt. Damit liefert dieses Lemma nur ein notwendiges Kriterium für die Gleichheit zweier Jordankurven, bzw. ein hinreichendes Kriterium für die Verschiedenheit von zwei Jordankurven. Es folgt, dass zwei Jordankurven  $J$  und  $\tilde{J}$  verschieden sind, wenn man  $A_J$  nicht auf die beschriebene Weise in  $A_{\tilde{J}}$  überführen kann. Dies ist ein Kriterium, dass man bei konkreten Beispielen (auch in Dimensionen größer als drei) leicht überprüfen kann.

**Beispiel 3.23.**



Betrachtet man die beiden Jordankurven  $J = 12314243$  und  $\tilde{J} = 12343142$ , so ergibt sich

$$A_J = ((2, 4), (3, 3), (4, 2), (1, 5)) \quad \text{und} \quad A_{\tilde{J}} = ((4, 2), (5, 1), (1, 5), (2, 4)).$$

Man erkennt sofort, dass sich  $A_J$  nicht wie in Lemma 3.22 beschrieben in  $A_{\tilde{J}}$  überführen lässt. Um das zu sehen reicht die Feststellung, dass das Tupel  $(3, 3)$  in  $A_J$  vorkommt, in  $A_{\tilde{J}}$  aber nicht. Das bedeutet, die Kurven  $J$  und  $\tilde{J}$  sind nicht gleich.

**Beweis von Lemma 3.22.** Sind  $J$  und  $\tilde{J}$  bis auf Symmetrie gleich sind, so lassen sich die zugehörigen Zahlenfolgen durch eine Hintereinanderausführung der drei Operationen aus Satz 3.16 ineinander überführen. Beachtet man die Definition von  $d_{J,j}$  und  $A_J$ , so ergibt sich:

- Die erste und zweite Operation aus Satz 3.16 verändern  $J = (c_i)_{1 \leq i \leq m}$  durch zyklisches Vertauschen bzw. durch Umkehr der Reihenfolge. Dabei bleibt die

Menge der Abstände zwischen Kanten von  $J$  in  $x_j$ -Richtung unverändert. Also verändern diese beiden Operationen nur die Reihenfolge der Zahlen innerhalb der Tupel  $d_{J,j}$ .

- Die dritte Operation aus Satz 3.16 permutiert Koordinatenrichtungen. Sie verändert also nur die Reihenfolge der Tupel in  $A_J$ .

Die Aussage des Lemmas folgt, da es egal ist welche der beiden genannten Veränderungen von  $A_J$  zuerst durchgeführt wird. **w. z. b. w.**

### 3.8 Beispiele: Jordankurven mit acht Kanten in $\mathbb{R}^4$

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit einer wichtigen Klasse von Jordankurven in  $\mathbb{R}^4$ , welche vollständig charakterisiert wird. Die in diesem Abschnitt beschriebenen Jordankurven werden auch in den folgenden Kapiteln eine wesentliche Rolle spielen.

Zunächst soll erklärt werden, warum die Jordankurven mit acht Kanten in  $\mathbb{R}^4$  besonders interessant sind. Wir wissen bereits, dass jede (geschlossene) Jordankurve in jede Koordinatenrichtung eine gerade Anzahl von Kanten besitzt (siehe Lemma 3.5). Für die späteren Anwendungen ist es sinnvoll zu verlangen, dass die Jordankurve in jede Koordinatenrichtung mindestens eine Kante enthält. Also besitzt jede relevante Jordankurve  $J$  in jede Koordinatenrichtung mindestens zwei Kanten. Das ergibt insgesamt mindestens acht Kanten in  $J$ . Also sind Jordankurven mit acht Kanten in  $\mathbb{R}^4$  die kürzesten und damit einfachsten Beispiele für Jordankurven, aus denen man durch wiederholtes Schwarz-Spiegeln einer Fläche  $f$  in  $W$  mit Rand  $J$  eine vierfach periodische Fläche erhält. Deswegen sind diese Kurven besonders gut als Beispiele in den folgenden Kapiteln geeignet.

Die Voraussetzung, dass  $J$  in jede Koordinatenrichtung mindestens eine Kante enthält, führt dazu, dass die gespiegelte Fläche vierfach periodisch ist (dies wird in Abschnitt 4.6.1 bewiesen). Jordankurven, die diese Voraussetzung nicht erfüllen, führen zu Flächen, die in einer Hyperebene des  $\mathbb{R}^4$  enthalten sind, die also auch in einem Raum kleinerer Dimension konstruiert werden können. Deswegen ist es nicht sinnvoll sie in den höheren Dimensionen nochmal getrennt zu betrachten.

Mit Hilfe der Aussagen aus den letzten Abschnitten kann man die Jordankurven mit acht Kanten in  $\mathbb{R}^4$  vollständig charakterisieren:

**Satz 3.24.** *In  $\mathbb{R}^4$  gibt es genau sechs (bis auf Symmetrie) verschiedene Jordankurven mit acht Kanten, welche in jede Koordinatenrichtung mindestens eine Kante enthalten. Diese acht Jordankurven sind*

$$\begin{aligned} J_1 &:= 12314243, & J_2 &:= 12314342, & J_3 &:= 12314234, \\ J_4 &:= 12314324, & J_5 &:= 12341234 \text{ und } J_6 &:= 12321434. \end{aligned}$$

*Sie werden in Abb. 13 graphisch dargestellt.*



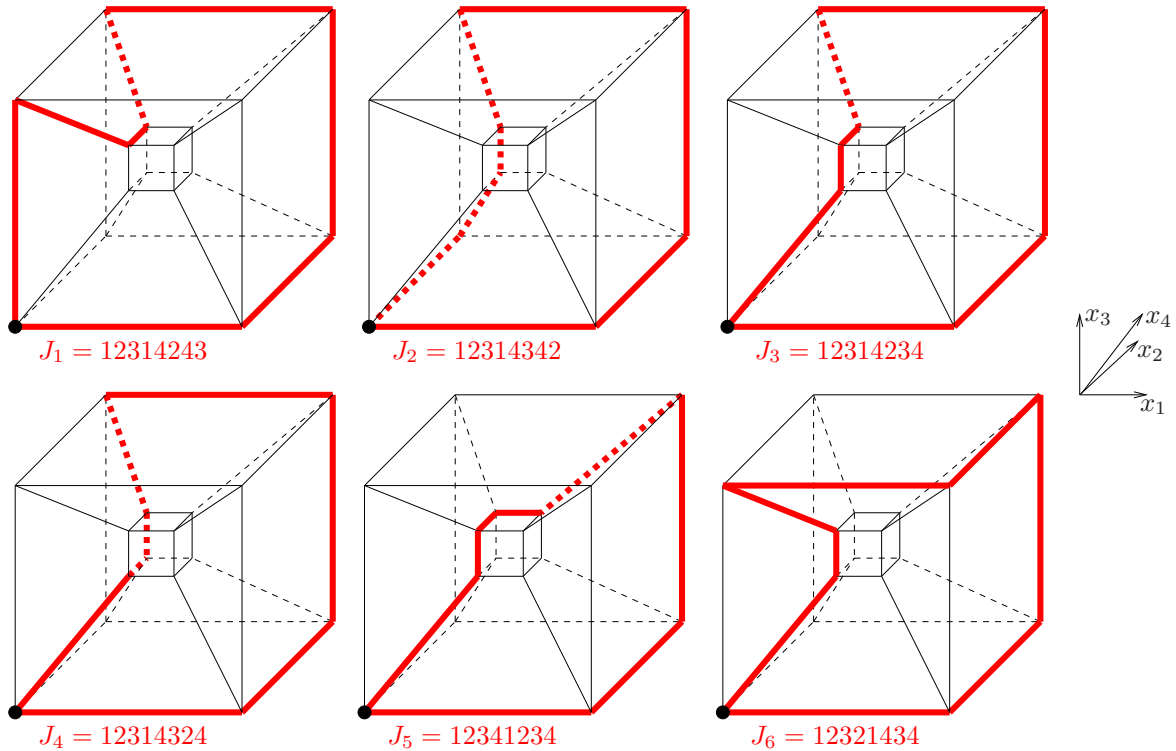


Abbildung 13: Alle Jordankurven mit acht Kanten in  $\mathbb{R}^4$ . Zur graphischen Darstellung wurde der Startpunkt  $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$  gewählt.

**Beweis.** Jede Jordankurve, welche die gegebenen Bedingungen erfüllt, durchläuft acht Kanten und zwar genau zwei in jede Koordinatenrichtung. Das bedeutet, eine solche Jordankurve hat die Gestalt  $(c_i)_{1 \leq i \leq 8}$ , wobei  $c_i = j$  für genau zwei der  $1 \leq i \leq 8$  gilt (für jedes  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ ). Der erste Teil des Beweises erfolgt, indem man alle Möglichkeiten für so eine Jordankurve betrachtet und zeigt, dass jede dieser Möglichkeiten eine der sechs Kurven  $J_1, \dots, J_6$  ist.

Dazu muss man wissen, wann zwei Jordankurven gleich sind. Aus Satz 3.16 zusammen mit der verbesserten Notation einer Jordankurve (siehe Abschnitt 3.5) ergibt sich, dass eine Jordankurve  $(c_i)_{1 \leq i \leq 8}$  dieselbe Kurve ist wie:

- (i) Die Kurve, welche durch Umkehrung der Reihenfolge entsteht, also die Kurve  $(c_{9-i})_{1 \leq i \leq 8}$ .
- (ii) Die Kurve, welche durch zyklisches Verschieben der Zahlenfolge um ein  $l \in \mathbb{N}$  entsteht, also die Kurve  $(c_{1+((i+l-1) \bmod 8)})_{1 \leq i \leq 8}$ .
- (iii) Die Kurve, welche durch Anwenden einer Symmetrie  $\sigma \in S_4$  entsteht, also die Kurve  $(\sigma(c_i))_{1 \leq i \leq 8}$ .

O. B. d. A. reicht es alle Jordankurven zu betrachten, die mit 121 oder 123 beginnen, da sich alle anderen Kurven durch eine Operation der Gestalt (iii) in eine solche Kurve überführen lassen. Dabei wurde verwendet, dass eine Folge, die mit 122 beginnt keine

Jordankurve ist. Das folgt aus Lemma 3.5. Dort wurde unter anderem festgestellt, dass eine Zahlenfolge  $(c_i)_{1 \leq i \leq 8}$

- (iv) keine Jordankurve repräsentiert, wenn Zahlen  $m_1$  und  $m_2$  mit  $1 \leq m_1 < m_2 \leq 8$  und  $(m_1, m_2) \neq (1, 8)$  existieren, so dass für alle  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$  die Identität  $c_i = j$  für eine gerade Anzahl von Elementen  $i$  mit  $m_1 \leq i \leq m_2$  gilt. Insbesondere handelt es sich nicht um eine Jordankurve, wenn zwei benachbarte Folgenglieder gleich sind.

Nun kann man o. B. d. A. annehmen, dass die ersten vier Ziffern der Jordankurve gleich 1231, 1232, 1234 oder 1213 sind. Dabei wurde verwendet, dass die Möglichkeiten 1233, 1211 und 1212 durch (iv) ausgeschlossen sind, und die Möglichkeit 1214 durch eine Anwendung von (iii) mit  $\sigma = (34)$  in die betrachtete Möglichkeit 1213 überführt werden kann.

Im Folgenden werden alle verbleibenden Möglichkeiten für die Zahlenfolge  $(c_i)_{1 \leq i \leq 8}$  angegeben. Weiter wird für jede dieser Möglichkeiten entweder mit Hilfe der Punkte (i), (ii) und (iii) beschrieben, wieso sie gleich einer der Kurven  $J_1, \dots, J_6$  ist oder mit Hilfe von Punkt (iv) gezeigt, dass sie keine Jordankurve ist. Der Bereich von  $J$  welcher (iv) widerspricht ist dabei fett gedruckt. Möglichkeiten, bei denen zwei benachbarte Folgenglieder gleich sind, werden direkt weggelassen, denn diese beschreiben wegen (iv) nie eine Jordankurve.

Alle noch zu betrachtenden Möglichkeiten für  $(c_i)_{1 \leq i \leq 8}$  sind:

- 12314243 =  $J_1$
- 12314342 =  $J_2$
- 12314234 =  $J_3$
- 12314324 =  $J_4$
- 12312434  $\xrightarrow{(iii) \text{ mit } \sigma=(23)}$  13213424  $\xrightarrow{(i)}$  42431231  $\xrightarrow{(ii) \text{ mit } l=4}$  12314243 =  $J_1$
- 12313424  $\xrightarrow{(iii) \text{ mit } \sigma=(23)}$  13212434  $\xrightarrow{(i)}$  43421231  $\xrightarrow{(ii) \text{ mit } l=4}$  12314342 =  $J_2$
- 12321434 =  $J_6$
- **12323414** ist wegen (iv) keine Jordankurve
- 12324143  $\xrightarrow{(iii) \text{ mit } \sigma=(13)}$  32124341  $\xrightarrow{(i)}$  14342123  $\xrightarrow{(ii) \text{ mit } l=5}$  12314342 =  $J_2$
- **12324341** ist wegen (iv) keine Jordankurve
- 12324134  $\xrightarrow{(iii) \text{ mit } \sigma=(243)}$  14243123  $\xrightarrow{(ii) \text{ mit } l=5}$  12314243 =  $J_1$

- $12324314 \xrightarrow{(iii) \text{ mit } \sigma=(1\ 4\ 3)} 42123143 \xrightarrow{(ii) \text{ mit } l=2} 12314342 = J_2$
- $12341234 = J_5$
- $12341243 \xrightarrow{(iii) \text{ mit } \sigma=(1\ 3)} 32143241 \xrightarrow{(i)} 14234123 \xrightarrow{(ii) \text{ mit } l=5} 12314234 = J_3$
- $12341324 \xrightarrow{(iii) \text{ mit } \sigma=(1\ 2) \circ (3\ 4)} 21432413 \xrightarrow{(i)} 31423412 \xrightarrow{(ii) \text{ mit } l=6} 12314234 = J_3$
- $12341342 \xrightarrow{(iii) \text{ mit } \sigma=(1\ 2\ 4)} 24312314 \xrightarrow{(ii) \text{ mit } l=3} 12314243 = J_1$
- $12341423 \xrightarrow{(iii) \text{ mit } \sigma=(1\ 2)} 21342413 \xrightarrow{(i)} 31424312 \xrightarrow{(ii) \text{ mit } l=6} 12314243 = J_1$
- $12341432 \xrightarrow{(iii) \text{ mit } \sigma=(1\ 3)} 32143412 \xrightarrow{(i)} 21434123 \xrightarrow{(ii) \text{ mit } l=5} 12321434 = J_6$
- $12342134 \xrightarrow{(iii) \text{ mit } \sigma=(2\ 4)} 14324132 \xrightarrow{(i)} 23142341 \xrightarrow{(ii) \text{ mit } l=7} 12314234 = J_3$
- $12342143 \xrightarrow{(iii) \text{ mit } \sigma=(2\ 4)} 14324123 \xrightarrow{(ii) \text{ mit } l=5} 12314324 = J_4$
- $12342314 \xrightarrow{(iii) \text{ mit } \sigma=(1\ 4\ 2)} 41321342 \xrightarrow{(i)} 24312314 \xrightarrow{(ii) \text{ mit } l=3} 12314243 = J_1$
- **12342341** ist wegen (iv) keine Jordankurve
- $12342413 \xrightarrow{(iii) \text{ mit } \sigma=(1\ 2\ 3)} 23143421 \xrightarrow{(ii) \text{ mit } l=7} 12314342 = J_2$
- **12342431** ist wegen (iv) keine Jordankurve
- $12343124 \xrightarrow{(iii) \text{ mit } \sigma=(2\ 3\ 4)} 13424132 \xrightarrow{(i)} 23142431 \xrightarrow{(ii) \text{ mit } l=7} 12314243 = J_1$
- $12343142 \xrightarrow{(iii) \text{ mit } \sigma=(3\ 4)} 12434132 \xrightarrow{(i)} 23143421 \xrightarrow{(ii) \text{ mit } l=7} 12314342 = J_2$
- $12343214 \xrightarrow{(iii) \text{ mit } \sigma=(1\ 2) \circ (3\ 4)} 21434123 \xrightarrow{(ii) \text{ mit } l=5} 12321434 = J_6$
- **12343241** ist wegen (iv) keine Jordankurve
- **12343412** ist wegen (iv) keine Jordankurve
- **12343421** ist wegen (iv) keine Jordankurve
- $12132434 \xrightarrow{(iii) \text{ mit } \sigma=(1\ 2)} 21231434 \xrightarrow{(ii) \text{ mit } l=1} 12314342 = J_2$
- $12134234 \xrightarrow{(iii) \text{ mit } \sigma=(1\ 4)} 42431231 \xrightarrow{(ii) \text{ mit } l=4} 12314243 = J_1$
- $12134243 \xrightarrow{(iii) \text{ mit } \sigma=(1\ 2\ 3)} 23214341 \xrightarrow{(i)} 14341232 \xrightarrow{(ii) \text{ mit } l=4} 12321434 = J_6$

- $12134324 \xrightarrow{(iii) \text{ mit } \sigma=(1\ 2)\circ(3\ 4)} 21243413 \xrightarrow{(i)} 31434212 \xrightarrow{(ii) \text{ mit } l=6} 12314342 = J_2$
- $121\mathbf{343}42$  ist wegen (iv) keine Jordankurve

Das bedeutet, neben den sechs Kurven  $J_1, \dots, J_6$  existieren keine weiteren Jordankurven, welche die gegebenen Bedingungen erfüllen. Es bleibt zu zeigen dass diese sechs Kurven paarweise verschieden sind.

Dazu bestimmen wir die zugehörigen  $A_{J_i}$ :

$$\begin{aligned} A_{J_1} &= ((2, 4), (3, 3), (4, 2), (1, 5)), & A_{J_2} &= ((2, 4), (5, 1), (2, 4), (1, 5)), \\ A_{J_3} &= ((2, 4), (3, 3), (3, 3), (2, 4)), & A_{J_4} &= ((2, 4), (4, 2), (2, 4), (2, 4)), \\ A_{J_5} &= ((3, 3), (3, 3), (3, 3), (3, 3)) \quad \text{und} & A_{J_6} &= ((3, 3), (1, 5), (3, 3), (1, 5)). \end{aligned}$$

Wir müssen noch prüfen, ob einige dieser Tupel durch Vertauschungen ihrer Elemente (wie in Lemma 3.22 beschrieben) ineinander überführt werden können. Dies ist nicht der Fall. Das kann gezeigt werden, indem man die Anzahl der in den Tupeln enthaltenen  $(3, 3)$  betrachtet:

- Nur  $A_{J_2}$  und  $A_{J_4}$  enthalten  $(3, 3)$  gar nicht, diese beiden lassen sich aber nicht ineinander überführen, da  $A_{J_2}$  das Tupel  $(1, 5)$  bzw.  $(5, 1)$  enthält,  $A_{J_4}$  aber nicht.
- Nur  $A_{J_1}$  enthält  $(3, 3)$  genau einmal.
- Nur  $A_{J_3}$  und  $A_{J_6}$  enthalten  $(3, 3)$  genau zweimal, diese beiden lassen sich aber nicht ineinander überführen, da  $A_{J_6}$  das Tupel  $(1, 5)$  bzw.  $(5, 1)$  enthält,  $A_{J_3}$  aber nicht.
- Kein Tupel enthält  $(3, 3)$  genau dreimal.
- Nur  $A_{J_5}$  enthält  $(3, 3)$  genau viermal.

Aus Lemma 3.22 folgt damit, dass die sechs Kurven  $J_1, \dots, J_6$  paarweise verschieden sind. **w. z. b. w.**

## 4 Das Einbettungsproblem

Wie bereits erwähnt ist das Ziel dieser Arbeit, die Konstruktion der Schwarz-D-Fläche (siehe Kapitel 2) auf höhere Dimensionen zu verallgemeinern und so die Existenz eingebetteter periodischer Flächen in  $\mathbb{R}^n$  zu zeigen. Auf die spezielle Konstruktion von Minimalflächen in  $\mathbb{R}^n$  wird erst in Kapitel 5 näher eingegangen. In diesem Kapitel wollen wir uns zunächst mit der durch Schwarz-Spiegelungen entstehenden Fläche  $F$  beschäftigen und klären, wann  $F$  eingebettet ist. Diese Diskussion entspricht den Schritten (vii) und (viii) aus Kapitel 2. Interessanterweise hängt die Lösung der Einbettungsfrage nicht davon ab, ob  $f$  eine Minimalfläche ist. Es werden in diesem Kapitel auch kaum geometrische, sondern eher kombinatorische Argumente verwendet.

Das Einbettungsproblem wird aus zwei Gründen unabhängig von Minimalflächen behandelt.

Der erste Grund ist natürlich, dass man die Frage nach der Einbettung in einem wesentlich allgemeineren Kontext stellen und beantworten kann. Das bedeutet, die Ergebnisse dieses Kapitels lassen sich nicht nur auf Minimalflächen, sondern z. B. auch auf kombinatorische Flächen anwenden.

Der Zweite Grund ist, dass es bei der Einbettungsfrage auch im Fall von Minimalflächen große Unterschiede zwischen Flächen in Dimension drei und Flächen in höheren Dimensionen gibt. Diese Unterschiede betreffen sowohl das Vorgehen, als auch das Ergebnis. Alle anderen Schritte, die man zur Konstruktion einer periodischen Minimalfläche in Dimensionen größer drei benötigt, ergeben sich hingegen weitgehend analog zum dreidimensionalen Fall.

Im Folgenden werden alle Aussagen in einem möglichst allgemeinen Kontext formuliert.

### 4.1 Definitionen

Unter einer allgemeinen Fläche wird Folgendes verstanden:

**Definition 4.1.** *Es sei  $X$  ein Hausdorff-Raum, welcher das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Dann heißt  $X$  eine topologische 2-Mannigfaltigkeit mit Rand, wenn jeder Punkt  $x \in X$  eine Umgebung besitzt, die homöomorph zu einer offenen Menge in  $\mathbb{R}^2$  oder in der oberen Halbebene  $H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$  ist.*

*Der Rand  $\partial X$  von  $X$  ist die Menge der Elemente  $x \in X$ , die keine Umgebung besitzen, welche homöomorph zu einer offenen Menge in  $\mathbb{R}^2$  ist. Das sind gerade diejenigen Punkte  $x \in X$ , für die es eine Umgebung  $U \ni x$  und einen Homöomorphismus  $h: U \rightarrow H$  mit  $h(x) \in \partial H$  gibt.*

*Weiter nennt man eine stetige Abbildung  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Fläche, falls  $X$  eine topologische 2-Mannigfaltigkeit mit Rand ist und  $f$  folgende Eigenschaft besitzt:*

*Für jedes  $x \in X$  gibt es eine offene Umgebung  $U$  von  $x$ , sodass  $f|_U: U \rightarrow f(U) \subset \mathbb{R}^n$*

ein Homöomorphismus ist.

Für jede Fläche  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt  $f(\partial X)$  der Rand der Fläche  $f$ .

Es wird sich herausstellen, dass für den größten Teil dieser Arbeit die Urbildmenge  $X$  einer Fläche keine Rolle spielt. Das heißt, an vielen Stellen ist nur das Bild  $f(X) \subset \mathbb{R}^n$  von Bedeutung, weswegen oft auch dieses Bild als Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  als Fläche  $f$  bezeichnet wird.

Da dieses Kapitel eine Einbettungsfrage behandelt, soll an die Definition einer eingebetteten Fläche erinnert werden.

**Definition 4.2.** Eine Fläche  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt eingebettet, wenn  $f$  injektiv und die Abbildung  $f: X \rightarrow f(X)$  ein Homöomorphismus ist.

Es wird sich herausstellen, dass alle Flächen, die im folgenden betrachtet werden, genau dann eingebettet sind, wenn die zugehörige Abbildung injektiv ist. Insbesondere ist es sinnvoll Punkte zu betrachten, in denen diese Injektivität verletzt wird.

**Definition 4.3.** Man sagt, dass eine Fläche  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$  Selbstschnitte besitzt, wenn  $f$  nicht injektiv ist. Außerdem heißt ein Punkt  $y \in \mathbb{R}^n$  Selbstschnitt von  $f$ , wenn es zwei verschiedene Elemente  $x_1, x_2 \in X$  mit  $f(x_1) = f(x_2) = y$  gibt.

Im Folgenden wird es darum gehen festzustellen, ob eine Fläche  $F$  Selbstschnitte hat oder nicht. Dabei soll  $F$ , wie in Kapitel 2 im Spezialfall der Schwarz-D-Fläche beschrieben, durch wiederholtes Schwarz-Spiegeln aus einer Fläche  $f$  entstehen.

Insbesondere muss man also Schwarz-Spiegelungen definieren. Dazu wird zunächst erklärt, was eine Schwarz-Spiegelung als Abbildung des  $\mathbb{R}^n$  in sich ist, um im nächsten Schritt die Schwarz-Spiegelung einer Fläche  $f$  zu definieren.

Wie bereits in Kapitel 2 beschrieben, ist eine Schwarz-Spiegelung an einer Gerade  $g$  in  $\mathbb{R}^3$  eine Drehung um  $180^\circ$  an  $g$ . Das entspricht einer Punktspiegelung in jeder Ebene (also jedem 2-dimensionalen Unterraum des  $\mathbb{R}^3$ ), die senkrecht auf  $g$  steht. Die letzte Definition kann man direkt auf den Fall  $n > 3$  übertragen. Also ist eine Schwarz-Spiegelung an einer Gerade  $g$  in  $\mathbb{R}^n$  eine Punktspiegelung in allen  $(n-1)$ -dimensionalen Unterräumen des  $\mathbb{R}^n$ , die senkrecht auf  $g$  stehen. Für Geraden  $g$ , die in eine der Koordinatenrichtungen verlaufen, kann man das leicht in Formeln ausdrücken.

**Definition 4.4.** Es sei  $g := \{(t, x_2, \dots, x_n) \mid t \in \mathbb{R}\}$  mit  $x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  eine Gerade in die erste Koordinatenrichtung. Dann heißt die Abbildung

$$s_g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad y = (y_1, \dots, y_n) \mapsto (y_1, x_2 + (x_2 - y_2), \dots, x_n + (x_n - y_n))$$

die Schwarz-Spiegelung an der Gerade  $g$ .

Analog definiert man eine Schwarz-Spiegelung an einer Geraden in die  $i$ -te Koordinatenrichtung. Außerdem sei die Schwarz-Spiegelung  $s_k$  an einer Kante  $k$  gleich der Schwarz-Spiegelung  $s_g$  an der Geraden  $g$ , in der  $k$  enthalten ist.

**Bemerkung 4.5.** Wie man leicht sieht, ist jede Schwarz-Spiegelung eine selbstinverse Abbildung.

Um Schwarz-Spiegelungen einer Fläche  $f$  über ihren Rand bzw. über eine Randkante zu definieren, kann man für das Bild von  $f$  die Definition 4.4 verwenden. Es bleibt also nur noch zu beschreiben, wie das Urbild behandelt wird.

**Definition 4.6.** *Es sei  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Fläche mit Rand. Weiterhin sei  $g$  eine Gerade des  $\mathbb{R}^n$  und  $\kappa := \{x \in \partial X \mid f(x) \in g\}$ , sodass  $f(\kappa)$  die Vereinigung von abgeschlossenen Intervallen auf  $g$  ist, von denen keines eine Punktmenge ist.*

*Außerdem sei  $\widehat{X}$  derjenige topologische Raum, welcher aus der Vereinigung zweier disjunkter Kopien  $X_1$  und  $X_2$  von  $X$  besteht, wobei die Elemente aus  $\kappa$  in  $X_1$  mit den entsprechenden Elementen von  $\kappa$  in  $X_2$  identifiziert werden.*

*Die Fläche  $\tilde{f}$ , welche aus  $f$  durch Schwarz-Spiegelung an der Geraden  $g$  entsteht, wird dann definiert als*

$$\tilde{f}: \widehat{X} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in X_1, \\ s_g(f(x)) & \text{für } x \in X_2. \end{cases}$$

*Auf analoge Weise kann man auch Teile von  $f$  an  $g$  spiegeln, wobei der zu spiegelnde Teil von  $f$  selbst eine Fläche ist. In diesem Fall wird nur die Kopie einer Teilmenge von  $X$  an den Definitionsbereich angeheftet, wobei die Elemente von  $\kappa$  zum Rand dieser Teilmenge und zum Rand von  $X$  gehören.*

Offensichtlich ist die so definierte Abbildung  $\tilde{f}$  eine Fläche im Sinne von Definition 4.1.

Mit Hilfe dieser Definitionen kann man nun beschreiben, wie aus einer gegebenen Fläche  $f$  durch wiederholtes Schwarz-Spiegeln die Fläche  $F$  entsteht.

## 4.2 Die allgemeine Situation

Im gesamten Kapitel 4 wird die im Folgenden beschriebene Situation betrachtet.

Ausgangspunkt ist eine beliebige Jordankurve  $J$  entlang der Kanten des Würfels

$$W = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid -\frac{1}{2} \leq x_i \leq \frac{1}{2} \quad \forall 1 \leq i \leq n \right\},$$

wobei  $J$  in jede Koordinatenrichtung mindestens eine Kante durchläuft und  $n$  eine natürliche Zahl größer oder gleich drei ist.

Außerdem sei  $X$  ein **kompakter** topologischer Raum und  $f: X \rightarrow W \subset \mathbb{R}^n$  eine Fläche mit Rand  $J$ , deren Inneres im Inneren von  $W$  liegt. Weiterhin sei die Abbildung  $f: X \rightarrow W$  **injektiv**.

Außerdem sei  $F: \widetilde{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$  die Fläche, welche aus  $f$  durch wiederholtes Schwarz-Spiegeln an Randkanten entsteht. Die iterative Konstruktion von  $F$  wird im Folgenden genauer erläutert.

Nach jedem Konstruktionsschritt gilt: Der Rand des bereits konstruierten Definitionsbereichs wird von  $F$  auf eine Vereinigung von Kanten der Länge eins in  $\mathbb{R}^n$  abgebildet, wobei je zwei solche Kanten höchstens einen gemeinsamen Punkt haben.

In jedem Schritt der Konstruktion von  $F$  wird eine solche Randkante  $k$  und eine Kopie  $f_1$  des Flächenstücks  $f$  gewählt, deren Rand  $k$  enthält. Weiter sei  $g$  die Gerade, in der  $k$  enthalten ist. Dann gibt es zwei Fälle:

- Die Schwarz-Spiegelung  $s_g$  an  $g$  bildet  $f_1$  nicht auf eine Teilmenge des schon konstruierten Teils der Fläche  $F$  ab. In diesem Fall besteht der Konstruktionsschritt daraus, dass die Schwarz-Spiegelung von  $f_1$  an  $g$  durchgeführt wird. Entsprechend vergrößert sich der Definitions- und Bildbereich von  $F$ .
- Die Schwarz-Spiegelung  $s_g$  an  $g$  bildet  $f_1$  auf eine Teilmenge des schon konstruierten Teils der Fläche  $F$  ab. In diesem Fall besteht der Konstruktionsschritt daraus, dass die Urbilder der beiden beteiligten Kopien  $k$  und  $k = s_g(k) \subseteq s_g(f_1)$  unter  $F$  identifiziert werden.

Dieser Konstruktionsschritt wird so lange iteriert, bis das Urbild der entstandenen Fläche keinen Rand mehr besitzt. Da die vorkommenden Randkanten  $k$  auf den Kanten einer Würfelpflasterung des  $\mathbb{R}^n$  liegen, und da während der Konstruktion an jeder Kanten  $k$  höchstens endlich oft gespiegelt wird, endet die Konstruktion von  $F$  nach abzählbar unendlich vielen Schritten.

Es entsteht auf diese Weise eine Fläche  $F: \tilde{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$  ohne Rand. Der topologische Raum  $\tilde{X}$  ist dabei eine Vereinigung von abzählbar unendlich vielen Kopien von  $X$ , wobei einige Randpunkte dieser Kopien miteinander identifiziert sind. Man beachte, dass die Verklebungen in  $\tilde{X}$  so gewählt sind, dass jeder Punkt  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  eine Umgebung besitzt, die homöomorph zu einer offenen Menge in  $\mathbb{R}^2$  ist. Weiterhin soll erwähnt werden, dass diese Konstruktion von der Reihenfolge der Kanten, an denen gespiegelt wird, unabhängig ist. Eine Veränderung dieser Reihenfolge ändert nur die "Nummerierung" der Kopien von  $X$  in  $\tilde{X}$ .

Außerdem stellt diese Definition sicher, dass keine zwei Kopien von  $f$  in  $\mathbb{R}^n$  exakt übereinander liegen und in der Fläche  $F$  enthalten sind. Damit wird die Injektivität von  $F$  nicht bereits durch die Parametrisierung verletzt.

In diesem Kapitel ist  $f$  eine beliebige kompakte Fläche.

Man kann natürlich noch weitere Eigenschaften von  $f$  verlangen. Das ist allerdings nur sinnvoll, wenn diese Eigenschaften bei jeder Schwarz-Spiegelung erhalten bleiben. Dann hat natürlich auch  $F$  die verlangten Eigenschaften und  $f$  und  $F$  liegen in derselben Klasse von Flächen.

Es gibt einige Klassen von Flächen, die diese Voraussetzung erfüllen. Zum Beispiel gilt das für  $C^1$ -Mannigfaltigkeiten, diskrete Flächen oder diskrete Minimalflächen.

Selbstverständlich kann man auch mit einer Minimalfläche  $f$  starten. In diesem Fall muss gelten: Durch Schwarz-Spiegelung einer Minimalfläche an einer Geraden entsteht wieder eine Minimalfläche. Diese Eigenschaft ist erfüllt (siehe Kapitel 5).



Die erwähnte Voraussetzung an  $f$ , nach der das Innere von  $f$  im Inneren von  $W$  liegt, muss bei Minimalflächen nicht zusätzlich verlangt werden, denn aus dem Maximumprinzip folgt, dass dies für jede Minimalfläche mit Rand  $J$  gilt (siehe Kapitel 5).

### 4.3 Struktur einer Schwarz-Spiegelung

Für die nächsten Abschnitte ist es nützlich eine weitere Darstellung der Schwarz-Spiegelung zur Verfügung zu haben. Deswegen wird im Folgenden gezeigt, dass man eine Schwarz-Spiegelung an gewissen Geraden als Zusammensetzung von einer Symmetrie des Würfels  $W$  und einer Verschiebung ausdrücken kann.

Zur Erinnerung (siehe Abschnitt 3.3) : Die Symmetriegruppe des  $n$ -dimensionalen Würfels  $W$  ist  $S = \mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n$ , wobei ein Element  $(a, \sigma) \in S$  (mit  $a \in \mathbb{Z}_2^n$  und  $\sigma \in S_n$ ) für die lineare Abbildung  $d: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $d(e_i) = (-1)^{a_{\sigma(i)}} \cdot e_{\sigma(i)}$  steht.

Für die Beschreibung der Schwarz-Spiegelung werden einige spezielle Elemente der Symmetriegruppe benötigt. Diese Elemente spielen auch im Rest von Kapitel 4 eine wichtige Rolle, weswegen sie an dieser Stelle eigene Bezeichnungen bekommen.

**Definition 4.7.** Für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  sei

$$p_i := (b_i, \text{id}) \in S,$$

wobei die  $i$ -te Koordinate von  $b_i$  Null ist, während alle anderen Koordinaten von  $b_i$  Einsen sind.

Im vierdimensionalen Fall definiert das die Elemente

$$\begin{aligned} p_1 &:= ((0, 1, 1, 1), \text{id}), & p_2 &:= ((1, 0, 1, 1), \text{id}), \\ p_3 &:= ((1, 1, 0, 1), \text{id}) & \text{und} & p_4 := ((1, 1, 1, 0), \text{id}). \end{aligned}$$

Interpretiert man diese Elemente als Abbildungen, so ist  $p_i$  die Abbildung, welche in jeder Koordinate außer der  $i$ -ten einen Vorzeichenwechsel bewirkt. Also gilt z. B.  $p_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, -x_2, \dots, -x_n)$ . Somit ist  $p_1$  die Schwarz-Spiegelung an der Geraden in  $x_1$ -Richtung durch den Koordinaten-Ursprung. Die analoge Aussage gilt auch für die anderen  $p_i$ .

An dieser Stelle soll außerdem eine abkürzende Schreibweise für Verschiebungen eingeführt werden. Dies vereinfacht im Folgenden die Notation.

**Definition 4.8.** Für jeden Vektor  $v \in \mathbb{R}^n$  sei

$$\varphi_v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto x + v$$

die Verschiebung um  $v$ .

Nach diesen Vorbereitungen ist es möglich eine Schwarz-Spiegelung wie folgt zu beschreiben.

**Satz 4.9.** *Es sei  $g := \{(t, x_2, \dots, x_n) \mid t \in \mathbb{R}\}$  mit  $x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$  eine Gerade in  $x_1$ -Richtung. Dann ist die Schwarz-Spiegelung  $s_g$  an  $g$  gleich der Abbildung*

$$\varphi_{(0, 2x_2, \dots, 2x_n)} \circ p_1.$$

*Die analoge Aussage gilt auch für Geraden in andere Koordinatenrichtungen.*

Also lässt sich jede Schwarz-Spiegelung an einer Gerade in  $x_i$ -Richtung als Zusammensetzung der Schwarz-Spiegelung an der Gerade in  $x_i$ -Richtung durch den Koordinatenursprung und einer Verschiebung darstellen.

**Bemerkung 4.10.** Später werden insbesondere Schwarz-Spiegelungen an Geraden mit  $x_2 - \frac{1}{2}, \dots, x_n - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$  interessant sein, denn diese Geraden enthalten genau die Kanten der zu  $W$  gehörigen Würfelpflasterung des  $\mathbb{R}^n$ . In diesem Fall ist die Verschiebung  $\varphi_{(0, 2x_2, \dots, 2x_n)}$  eine Verschiebung um einen Vektor aus  $\mathbb{Z}^n$ .

**Beweis von Satz 4.9.** Ein Punkt  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  wird durch die Schwarz-Spiegelung an  $g$  auf den Punkt

$$\begin{aligned} s_g(y) &\stackrel{\text{Def. 4.4}}{=} (y_1, x_2 + (x_2 - y_2), \dots, x_n + (x_n - y_n)) = (y_1, 2x_2 - y_2, \dots, 2x_n - y_n) \\ &= \varphi_{(0, 2x_2, \dots, 2x_n)}((y_1, -y_2, \dots, -y_n)) = (\varphi_{(0, 2x_2, \dots, 2x_n)} \circ p_1)(y) \end{aligned}$$

abgebildet.

**w. z. b. w.**

Da später verschiedene Schwarz-Spiegelungen zusammengesetzt werden, ist es sinnvoll zu wissen, inwiefern man Symmetrien und Verschiebungen miteinander vertauschen kann. Die zugehörige Rechenregel ist:

**Lemma 4.11.** *Für alle  $a \in \mathbb{Z}_2^n, v \in \mathbb{Z}^n$  und  $d = (a, \text{id}) \in S$  gilt*

$$d \circ \varphi_v = \varphi_{(-1)^{a_v} v} \circ d = \varphi_{d(v)} \circ d.$$

*Dabei sei hier und im Folgenden  $(-1)^{a_v} := ((-1)^{a_i} v_i)_{1 \leq i \leq n}$ .*

**Beweis.** Da die zweite Komponente von  $d$  die Identität ist, gilt  $d(e_i) = (-1)^{a_i} \cdot e_i$ . Daraus ergibt sich  $d(x) = ((-1)^{a_i} x_i)_{1 \leq i \leq n}$  für jedes  $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ . Insbesondere ist  $d(v) = (-1)^{a_v} v$ . Es folgt

$$\begin{aligned} (d \circ \varphi_v)(x) &= d((v_i + x_i)_{1 \leq i \leq n}) = ((-1)^{a_i} (v_i + x_i))_{1 \leq i \leq n} \quad \text{und} \\ (\varphi_{d(v)} \circ d)(x) &= \varphi_{d(v)}((( -1)^{a_i} x_i)_{1 \leq i \leq n}) = ((-1)^{a_i} v_i + (-1)^{a_i} x_i)_{1 \leq i \leq n} \\ &= ((-1)^{a_i} (v_i + x_i))_{1 \leq i \leq n} = (d \circ \varphi_v)(x). \end{aligned}$$

**w. z. b. w.**

Die Einschränkung auf Elemente aus  $\{(a, \text{id}) \mid a \in \mathbb{Z}_2^n\} \subset S$  ist im letzten Lemma wesentlich. Auch im späteren Verlauf dieser Arbeit wird die Teilmenge  $\{(a, \text{id}) \mid a \in \mathbb{Z}_2^n\} \subset S$  eine wichtige Rolle spielen. Hier bemerkt man über diese Menge:

**Lemma 4.12.** *Für zwei Elemente  $d = (a, \text{id})$  und  $\tilde{d} = (\tilde{a}, \text{id})$  aus  $S$  gilt*

$$d \circ \tilde{d} = \tilde{d} \circ d.$$

**Beweis.** Zum Beweis werden  $d$  und  $\tilde{d}$  als Abbildungen aufgefasst. Dann gilt für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ :

$$\begin{aligned} (d \circ \tilde{d})(x) &= d((-1)^{\tilde{a}}x) = (-1)^a(-1)^{\tilde{a}}x = (-1)^{a+\tilde{a}}x = (-1)^{\tilde{a}+a}x = (-1)^{\tilde{a}}(-1)^ax \\ &= \tilde{d}((-1)^ax) = (\tilde{d} \circ d)(x). \end{aligned}$$

**w. z. b. w.**

Eine nützliche Eigenschaft von Schwarz-Spiegelungen ist, dass sie mit gewissen Isometrien des  $\mathbb{R}^n$  vertauschen:

**Lemma 4.13.** *Es sei  $d = (a, \text{id}) \in S$  und  $v \in \mathbb{R}^n$ . Ist  $g$  eine Gerade in eine Koordinatenrichtung, so gilt:*

$$(4.1) \quad s_{d(g)} \circ d = d \circ s_g$$

$$(4.2) \quad s_{\varphi_v(g)} \circ \varphi_v = \varphi_v \circ s_g \text{ und}$$

$$(4.3) \quad s_{(\varphi_v \circ d)(g)} \circ \varphi_v \circ d = \varphi_v \circ d \circ s_g$$

**Beweis.** O. B. d. A. sei  $g := \{(t, x_2, \dots, x_n) \mid t \in \mathbb{R}\}$  mit  $x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$  eine Gerade in  $x_1$ -Richtung. Zum Beweis des Lemmas werden nun die letzten beiden Lemmata und Satz 4.9 verwendet.

Zunächst stellt man fest, dass  $d(g) = \{(t, (-1)^{a_2}x_2, \dots, (-1)^{a_n}x_n) \mid t \in \mathbb{R}\}$  und damit

$$s_{d(g)} \stackrel{\text{Satz 4.9}}{=} \varphi_{(0, 2 \cdot (-1)^{a_2}x_2, \dots, 2 \cdot (-1)^{a_n}x_n)} \circ p_1 = \varphi_{d(0, 2x_2, \dots, 2x_n)} \circ p_1$$

gilt. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} s_{d(g)} \circ d &= \varphi_{d(0, 2x_2, \dots, 2x_n)} \circ p_1 \circ d \stackrel{\text{Lemma 4.12}}{=} \varphi_{d(0, 2x_2, \dots, 2x_n)} \circ d \circ p_1 \\ &\stackrel{\text{Lemma 4.11}}{=} d \circ \varphi_{(0, 2x_2, \dots, 2x_n)} \circ p_1 \stackrel{\text{Satz 4.9}}{=} d \circ s_g. \end{aligned}$$

Damit ist (4.1) gezeigt.

Auf ähnliche Weise erhält man

$$\begin{aligned} s_{\varphi_v(g)} \circ \varphi_v &\stackrel{\text{Satz 4.9}}{=} \varphi_{(0, 2(x_2+v_2), \dots, 2(x_n+v_n))} \circ p_1 \circ \varphi_v \\ &\stackrel{\text{Lemma 4.11}}{=} \varphi_{(0, 2(x_2+v_2), \dots, 2(x_n+v_n))} \circ \varphi_{p_1(v)} \circ p_1 \\ &= \varphi_{(0, 2(x_2+v_2), \dots, 2(x_n+v_n)) + (v_1, -v_2, -v_3, \dots, -v_n)} \circ p_1 \\ &= \varphi_{(v_1, 2x_2+v_2, \dots, 2x_n+v_n)} \circ p_1 \\ &= \varphi_v \circ \varphi_{(0, 2x_2, \dots, 2x_n)} \circ p_1 \stackrel{\text{Satz 4.9}}{=} \varphi_v \circ s_g \end{aligned}$$

und damit (4.2).

Aus (4.1) und (4.2) ergibt sich nun (4.3) durch:

$$s_{(\varphi_v \circ d)(g)} \circ \varphi_v \circ d = s_{\varphi_v(d(g))} \circ \varphi_v \circ d \stackrel{(4.2)}{=} \varphi_v \circ s_{d(g)} \circ d \stackrel{(4.1)}{=} \varphi_v \circ d \circ s_g .$$

**w. z. b. w.**

Auch in diesem Lemma ist es entscheidend, dass die zweite Komponente von  $d$  die Identität ist. Für allgemeine  $d \in S$  sind die Gleichungen (4.1), (4.2) und (4.3) nicht immer erfüllt.

Da jede Schwarz-Spiegelung wegen Satz 4.9 die Gestalt  $\varphi_v \circ d$  mit  $v \in \mathbb{R}^n$  und  $d = (a, \text{id}) \in S$  hat, folgt aus (4.3) direkt:

**Korollar 4.14.** *Für zwei Geraden  $g_1$  und  $g_2$  in Koordinatenrichtungen gilt*

$$(4.4) \quad s_{s_{g_1}(g_2)} \circ s_{g_1} = s_{g_1} \circ s_{g_2} .$$

## 4.4 Einbettung von $f$ und $F$

Dieser Abschnitt erläutert, unter welchen Umständen  $F$  nicht eingebettet ist. Dazu wird als Erstes gezeigt, dass in der Situation aus Abschnitt 4.2 die Fläche  $f$  eingebettet ist und  $F$  genau dann eingebettet ist, wenn  $F$  eine injektive Abbildungen ist. Für die Fläche  $f$  folgt dies aus dem bekannten topologischen Satz (siehe z. B. [Mun00, S. 167]):

**Satz 4.15.** *Ist  $Y$  ein kompakter topologischer Raum,  $Z$  ein Hausdorff-Raum und  $g: Y \rightarrow Z$  eine bijektive stetige Abbildung, dann ist  $g$  ein Homöomorphismus.*

Damit ist jede Fläche  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit kompaktem Definitionsbereich  $X$  genau dann eingebettet, wenn  $f$  injektiv ist (vgl. Definition 4.2). Da die in diesem Kapitel betrachtete Fläche  $f$  injektiv und ihr Definitionsbereich  $X$  kompakt ist (vgl. Abschnitt 4.2), folgt:

**Satz 4.16.** *Die betrachtete Fläche  $f: X \rightarrow W$  ist eingebettet.*

Um zu zeigen, dass auch die durch Schwarz-Spiegelungen entstandene Fläche  $F$  genau dann eingebettet ist, wenn  $F$  injektiv ist, benötigt man etwas mehr Vorbereitung. Zunächst muss die Struktur von  $F$  besser verstanden werden. Dazu führt man Bezeichnungen für die Würfel in der zu  $W$  gehörigen Würfelplasterung ein.

**Definition 4.17.** Für jedes Element  $v \in \mathbb{Z}^n$  sei

$$W^v := \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mid -\frac{1}{2} + v_i \leq x_i \leq \frac{1}{2} + v_i \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n\} \right\} = \varphi_v(W)$$

der um den Vektor  $v$  verschobene Würfel  $W$ . Insbesondere ist  $W^v$  der Würfel mit Kantenlänge Eins, dessen Mittelpunkt in  $v$  liegt. Die zu  $W$  gehörige Würfelpflasterung ist nun die Pflasterung des  $\mathbb{R}^n$  durch alle  $W^v$  mit  $v \in \mathbb{Z}^n$ .

Diese Würfel werden im Folgenden immer wieder auftreten. An dieser Stelle benötigt man allerdings nur das folgende Korollar, welches direkt aus Definition 4.17 zusammen mit der Struktur der Schwarz-Spiegelung aus Satz 4.9 und Bemerkung 4.10 folgt.

**Korollar 4.18.** Es sei  $g$  eine Gerade entlang von Kanten der zu  $W$  gehörigen Würfelpflasterung. Dann bildet die Schwarz-Spiegelung an  $g$  jeden Würfel der zu  $W$  gehörigen Würfelpflasterung wieder auf einen Würfel dieser Pflasterung ab. Dabei wird das Innere des Würfels auf das Innere des Bildwürfels abgebildet und das Bild von Kanten des Würfels sind Kanten des Bildwürfels.

Beachtet man die Definition von  $F$ , so folgt, dass  $F$  aus Kopien von  $f$  besteht, wobei jede Kopie in einem der Würfel  $W^v$  mit  $v \in \mathbb{Z}^n$  liegt. Wie bereits erwähnt, können zwei dieser Kopien von  $f$  in einem Würfel nicht identisch sein. Sie können aber durch die Anwendung einer Isometrie des  $\mathbb{R}^n$ , die  $W^v$  bijektiv auf sich abbildet, ineinander überführt werden. Da nur endlich viele solche Isometrien existieren, ergibt sich, dass  $F \cap W^v$  für jedes  $v \in \mathbb{Z}^n$  die Vereinigung von endlich vielen Kopien von  $f$  ist. Diese Aussage kann man verwenden, um zu zeigen, dass  $F$  eingebettet ist, falls  $F$  injektiv ist.

**Satz 4.19.** Die durch wiederholtes Schwarz-Spiegeln entstandene Fläche  $F$  ist genau dann eingebettet, wenn sie keine Selbstschnitte besitzt.

**Beweis.** Angenommen  $F$  besitzt keine Selbstschnitte und ist somit injektiv. Dann ist zu zeigen, dass  $F: \tilde{X} \rightarrow F(\tilde{X})$  ein Homöomorphismus ist. Da  $F$  eine Fläche und somit stetig ist, reicht es also zu zeigen, dass  $F$  jede offene Menge von  $\tilde{X}$  auf eine offene Menge von  $F(\tilde{X})$  abbildet.

Sei also  $U \subseteq \tilde{X}$  eine beliebige offene Menge. Weiterhin sei  $R > 0$  eine reelle Zahl und  $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$  wie gewöhnlich der offene Ball mit Radius  $R$  um Null. Da  $B_R(0) \cap W^v$  nur für endlich viele  $v \in \mathbb{Z}^n$  nicht leer ist und jeder dieser Würfel  $W^v$  nur endlich viele Kopien von  $f$  enthält, gibt es endlich viele Kopien  $X_1, \dots, X_k$  von  $X$ , sodass  $F^{-1}(B_R(0)) \subset \cup_{i=1}^k X_i$  gilt. Durch eine geeignete Wahl der  $X_i$  kann man sogar erreichen, dass  $F^{-1}(B_R(0))$  im Inneren von  $\cup_{i=1}^k X_i$  liegt. Als endliche Vereinigung kompakter Mengen ist auch  $\cup_{i=1}^k X_i$  kompakt. Insbesondere folgt aus Satz 4.15, dass  $F|_{\cup_{i=1}^k X_i}$  ein Homöomorphismus ist.

Da  $U \cap F^{-1}(B_R(0))$  offen ist, ergibt sich, dass  $F(U) \cap B_R(0) = F(U \cap F^{-1}(B_R(0)))$  eine offene Menge in  $F(\cup_{i=1}^k X_i)$  und damit auch offen in  $F(\tilde{X})$  ist.

Insgesamt ergibt sich, dass  $F(U) = \cup_{R>0} (F(U) \cap B_R(0))$  als Vereinigung offener Mengen auch offen in  $F(\tilde{X})$  ist. **w. z. b. w.**

Im Folgenden wird es also darum gehen festzustellen, ob  $F$  Selbstschnitte besitzt.

**Bemerkung 4.20.** Es gibt zwei verschiedene Arten von möglichen Selbstschnitten von  $F$ . Die erste Art sind Selbstschnitte im Inneren eines Würfels  $W^v$  (mit  $v \in \mathbb{Z}^n$ ). Die zweite Art sind Selbstschnitte auf Kanten eines solchen Würfels.

Ein Selbstschnitt  $y$  von  $F$  im Rand eines der Würfel  $W^v$ , wobei  $y$  nicht auf einer Kante von  $W^v$  liegt, kann nicht existieren, denn:

Die Fläche  $f$  schneidet den Rand von  $W$  nur in  $J$ , also nur in Kanten von  $W$ . Das heißt, auch jede Kopie von  $f$ , die in  $F$  enthalten ist, schneidet den Rand des Würfels  $W^v$  mit  $v \in \mathbb{Z}^n$  höchstens in Kanten von  $W^v$  (siehe Korollar 4.18). Also ist in  $F$  kein Punkt enthalten, der auf dem Rand eines Würfels  $W^v$  mit  $v \in \mathbb{Z}^n$ , aber nicht auf den Kanten dieses Würfels liegt.

Wegen der Struktur von  $F$  kann es Selbstschnitte im Inneren eines Würfels  $W^v$  mit  $v \in \mathbb{Z}^n$  nur geben, wenn zwei verschiedene Kopien von  $f$  in unterschiedlicher Lage innerhalb von  $W^v$  liegen. Später wird gezeigt, dass dies nicht vorkommt.

Sei nun  $y$  ein Selbstschnitt von  $F$  auf einer Kante  $k$  von  $W^v$  mit  $v \in \mathbb{Z}^n$ , wobei  $y$  keine Ecke von  $W^v$  ist. Dann enthält jede Kopie  $\tilde{f} \subset F$  von  $f$  mit  $y \in \tilde{f}$  auch die gesamte Kante  $k$ . Damit ist jeder Punkt dieser Kante  $k$  ein Selbstschnitt von  $F$ . Dies gilt insbesondere für die beiden Ecken von  $k$ . Das bedeutet, wenn es Selbstschnitte von  $F$  auf den Kanten eines Würfels  $W^v$  mit  $v \in \mathbb{Z}^n$  gibt, dann existiert auch eine Ecke der zu  $W$  gehörigen Würfelplasterung, die ein Selbstschnitt von  $F$  ist.

Zusammengefasst ergibt sich:

**Korollar 4.21.** *Die Fläche  $F$  ist genau dann nicht eingebettet, wenn es einen Würfel  $W^v$  mit  $v \in \mathbb{Z}^n$  und einen Selbstschnitt  $y$  von  $F$  gibt, der im Inneren von  $W^v$  oder in einer Ecke von  $W^v$  liegt.*

Es soll nun beschrieben werden, wie  $F$  aussehen muss, damit Selbstschnitte in Ecken der Würfelplasterung auftreten.

**Satz 4.22.** *Es sei  $y \in F$  eine Ecke von  $W^v$  mit  $v \in \mathbb{Z}^n$ .*

*Dann ist  $y$  ein Selbstschnitt von  $F$  genau dann, wenn  $y$  Randpunkt von mindestens acht paarweise verschiedenen Kopien von  $f$  ist, die in  $F$  enthalten sind.*

**Beweis.** Damit  $y$  ein Punkt von  $F$  ist, muss es eine Kopie  $f_1 \subset F$  von  $f$  geben, welche  $y$  als Randpunkt enthält. Da  $f_1$  durch mehrfaches Schwarz-Spiegeln aus  $f$  hervorgeht, ist der Rand  $\partial f_1$  eine Jordankurve entlang der Kanten eines Würfels der zu  $W$  gehörigen Würfelplasterung. Insbesondere gehören zu  $\partial f_1$  zwei Kanten  $k_1$  und  $k_2$  dieses Würfels, mit  $y \in k_1$  und  $y \in k_2$ . Nun betrachtet man drei weitere Kopien  $f_2, f_3$  und  $f_4$  von  $f$ , die durch Schwarz-Spiegeln aus  $f_1$  auf folgende Weise hervorgehen (vgl. Abb. 14):

- $f_2$  entsteht aus  $f_1$  durch Schwarz-Spiegelung an  $k_1$ . Dabei wird  $k_2$  auf eine Kante  $k_3$  abgebildet.
- $f_3$  entsteht aus  $f_1$  durch Schwarz-Spiegelung an  $k_2$ . Dabei wird  $k_1$  auf eine Kante  $k_4$  abgebildet.

- $f_4$  entsteht aus  $f_2$  durch Schwarz-Spiegelung an  $k_3$ .

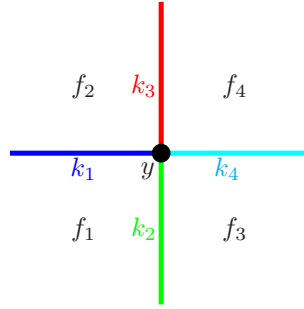


Abbildung 14: Vier Kopien  $f_1, f_2, f_3, f_4 \subset F$  von  $f$ , die  $y$  als Randpunkt enthalten.

Eine Schwarz-Spiegelung an  $k_2$  ist gerade eine Punktspiegelung in allen zu  $k_2$  senkrechten  $n - 1$ -dimensionalen Unterräumen. Außerdem stehen  $k_1$  und  $k_2$  senkrecht aufeinander. Das bedeutet,  $k_1$  und  $s_{k_2}(k_1) = k_4$  liegen auf einer Geraden  $g$ . Damit ergibt sich:

$$f_4 = (s_{k_3} \circ s_{k_1})(f_1) = (s_{s_{k_1}(k_2)} \circ s_{k_1})(f_1) \stackrel{(4.4)}{=} (s_{k_1} \circ s_{k_2})(f_1) = (s_g \circ s_{k_2})(f_1) = (s_{k_4} \circ s_{k_2})(f_1).$$

Folglich entsteht  $f_4$  auch aus  $f_3$  durch Schwarz-Spiegelung an  $k_4$ .

Die Fläche  $F$  ist so konstruiert, dass in dieser Situation

$$f_1, f_2, f_3, f_4 \subset F \text{ in } \mathbb{R}^n \text{ und } f_1^{-1}(y) = f_2^{-1}(y) = f_3^{-1}(y) = f_4^{-1}(y) \text{ in } \tilde{X}$$

gilt. Außerdem ist für jede weitere, von  $f_1, f_2, f_3$  und  $f_4$  verschiedene Kopie  $f_5 \subset F$ , die  $y$  als Randpunkt enthält, das Urbild  $f_5^{-1}(y) \neq f_1^{-1}(y)$ .

Das bedeutet,  $y$  ist genau dann ein Selbstschnitt von  $F$ , wenn es eine solche Kopie  $f_5 \subset F$  von  $f$  gibt. Damit ist gezeigt:

Wenn  $y \in F$  kein Selbstschnitt von  $F$  ist, dann ist  $y$  Randpunkt von genau vier (und damit weniger als acht) Kopien von  $f$ , die in  $F$  enthalten sind.

Es muss also nur noch die zweite Implikation des Satzes bewiesen werden.

Sei dazu  $y$  ein Selbstschnitt von  $F$ . Wie bereits erläutert gibt es dann die Kopien  $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 \subset F$  von  $f$ , welche  $y$  als Randpunkt enthalten.

Analog zum Vorgehen bei  $f_1$  erhält man aus  $f_5$  Flächenstücke  $f_6, f_7$  und  $f_8$ , die alle Kopien von  $f$  sind und in  $F$  enthalten sind und  $y$  als Randpunkt enthalten. Damit sind die acht Flächen gefunden, deren Existenz im Satz behauptet wird. Es bleibt zu zeigen, dass alle acht Flächenstücke paarweise verschieden sind.

Es wurde bereits gezeigt, dass  $k_1$  und  $k_4$  auf einer Geraden  $g$  liegen. Analog liegen auch  $k_2$  und  $k_3$  auf einer Geraden  $\tilde{g}$ . Also befinden sich  $k_1, k_2, k_3$  und  $k_4$  in einer Ebene und bilden ein Kreuz (mit rechten Winkeln), wie man es in Abb. 14 sieht.

Da die  $f_i$  als Kopie von  $f$  eingebettet sind, kann jedes dieser  $f_i$  nur genau zwei Randkanten besitzen, die durch  $y$  gehen. Diese zwei Kanten sind (siehe Abb. 14):

- Für  $f_1$  die Kanten  $k_1$  und  $k_2$ .

- Für  $f_2$  die Kanten  $k_1$  und  $k_3$ .
- Für  $f_3$  die Kanten  $k_2$  und  $k_4$ .
- Für  $f_4$  die Kanten  $k_3$  und  $k_4$ .

Insbesondere sind sie für keine dieser vier Flächen gleich. Damit ergibt sich, dass  $f_1, f_2, f_3$  und  $f_4$  paarweise verschieden sind. Analog erhält man, dass  $f_5, f_6, f_7$  und  $f_8$  paarweise verschiedene Flächenstücke sind.

Weiterhin ist bekannt, dass  $f_5$  nicht mit einer der Flächen  $f_1, f_2, f_3$  oder  $f_4$  übereinstimmt. Aus der Konstruktion der Flächen  $f_i$  folgt dann, dass auch  $f_6, f_7$  und  $f_8$  von den Flächen  $f_1, f_2, f_3$  und  $f_4$  verschieden sind.

Damit sind die Flächen  $f_i$  mit  $1 \leq i \leq 8$  paarweise verschieden. Insbesondere ist  $y$  Randpunkt von mindestens acht paarweise verschiedenen Kopien von  $f$ , die in  $F$  enthalten sind.

**w. z. b. w.**

Aus dem Beweis dieses Satzes ergibt sich außerdem direkt:

**Korollar 4.23.** *Es sei  $p \in F$  eine Ecke eines Würfels der zu  $W$  gehörigen Würfelplatzierung. Dann ist  $p$  Randpunkt von mindestens vier paarweise verschiedenen Kopien von  $f$ , die in  $F$  enthalten sind.*

**Bemerkung 4.24.** Wären  $f$  und  $F$  sogar differenzierbare Mannigfaltigkeiten (z. B. Minimalflächen), so hätten Satz 4.22 und Korollar 4.23 noch eine weitere Interpretation. In dieser Situation weiß man, dass es in jedem Punkt von  $F$  mindestens einen Tangentialraum und in jedem Selbstschnitt  $y$  von  $F$  mindestens zwei volle Tangentialräume gibt. Weiterhin enthält jede Kopie von  $f$  in  $F$ , welche  $y$  als Randpunkt enthält, auch genau zwei Kanten eines Würfels, die sich in  $y$  im rechten Winkel schneiden. Diese beiden Kanten gehören dann zum Tangentialraum von  $F$  in  $y$ . Um in  $y$  einen vollen Tangentialraum zu erzeugen benötigt man also vier Kopien von  $f$ , deren Tangentialräume in  $y$  jeweils einen Winkel von  $90^\circ$  einschließen. Analog braucht man für zwei volle Tangentialräume acht Flächenstücke.

Mit dieser Argumentation erhält man, dass jede Ecke  $p$  des Würfelgitters Randpunkt von genau  $4 \cdot m_p$  verschiedenen Kopien von  $f$  ist, die alle in  $F$  enthalten sind. Dabei ist  $m_p$  eine nicht-negative ganze Zahl, die für verschiedene Ecken natürlich verschiedene sein kann. Diese Aussage kann man mit Hilfe der Argumentation aus dem letzten Beweis auch für Flächen ohne Tangentialraum zeigen.

Die in diesem Abschnitt gezeigten Tatsachen werden es möglich machen die Einbettung bzw. Nicht-Einbettung von  $F$  zu zeigen, indem man die Anzahl von Kopien von  $f$  zählt, die in gewissen Würfeln vorkommen. Für Aussagen dieser Art benötigt man die Urbildräume  $X$  und  $\tilde{X}$  von  $f$  und  $F$  nicht. Sie werden deswegen im Folgenden auch nicht mehr betrachtet. Also betrachten wir  $f$  und  $F$  ab jetzt nur noch als Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ , wobei Selbstschnitte von  $F$  durch die in Bemerkung 4.20, Korollar 4.21 und Satz 4.22 aufgeführten Aussagen über Selbstschnitte charakterisiert werden.



Bevor das weitere Vorgehen erläutert wird, soll an dieser Stelle noch auf einige Eigenschaften der Fläche  $F$  eingegangen werden.

Aus der Definition von  $F$  folgt direkt:

**Bemerkung 4.25.** Wenn  $f_1 \subset F$  eine Kopie von  $f$  in einem Würfel  $W^v$  mit  $v \in \mathbb{Z}^n$  ist, dann kann man auch  $f_1$  als Ausgangspunkt für die Konstruktion der Fläche  $F$  wählen. Das heißt, wenn man  $f_1$  wiederholt über seine Randkanten Schwarz-Spiegelt (analog zu der Konstruktion der Fläche  $F$  aus  $f$ ), so erhält man wieder  $F$ .

Diese Bemerkung und die Art, wie Schwarz-Spiegelungen miteinander vertauschen, kann verwendet werden, um die folgende geometrische Aussage über  $F$  zu zeigen.

**Lemma 4.26.** *Es sei  $k$  eine Kante der zu  $W$  gehörigen Würfelpflasterung mit  $k \subset F$ . Dann bildet die Schwarz-Spiegelung  $s_k$  an  $k$  die Fläche  $F$  auf sich selbst ab. Es gilt sogar, dass die Abbildung*

$$s_k: F \rightarrow F$$

*bijektiv ist.*

**Beweis.** Wegen  $k \subset F$  gibt es eine Kopie  $f_0 \subset F$  von  $f$ , deren Rand  $k$  enthält. Sei nun  $x \in F$  beliebig. Da  $F$  durch wiederholtes Schwarz-Spiegeln aus  $f_0$  entsteht (siehe Bemerkung 4.25), gibt es eine Folge  $s_{k_1}, s_{k_2}, \dots, s_{k_l}$  von Schwarz-Spiegelungen an Kanten  $k_1, k_2, \dots, k_l$  der zu  $W$  gehörigen Würfelpflasterung mit

$$(4.5) \quad x \in (s_{k_l} \circ \dots \circ s_{k_1})(f_0) =: f_l,$$

$$(4.6) \quad k_1 \subset f_0 \text{ und}$$

$$(4.7) \quad k_{i+1} \subset (s_{k_i} \circ \dots \circ s_{k_1})(f_0) =: f_i \text{ für alle } 1 \leq i \leq l-1.$$

Im Fall  $x \in f_0$  ist diese Folge von Schwarz-Spiegelungen leer, d. h. es gilt  $l = 0$  und  $s_k(x) \in s_k(f_0) \subset F$ . In allen anderen Fällen ergibt sich aus (4.5)

$$s_k(x) \in s_k((s_{k_l} \circ \dots \circ s_{k_1})(f_0)) = s_k(f_l).$$

Nun soll gezeigt werden, dass  $s_k(f_l) \subset F$  gilt. Dazu wird die Aussage  $s_k(f_i) \subset F$  für alle  $0 \leq i \leq l$  induktiv bewiesen.

Induktionsanfang: Da  $F$  durch wiederholtes Schwarz-Spiegeln aus  $f_0$  entsteht, gilt  $s_k(f_0) \subset F$ .

Induktionsschritt: Es gelte  $s_k(f_i) \subset F$  für ein  $0 \leq i \leq l-1$ . Zu zeigen ist nun  $s_k(f_{i+1}) \subset F$ .

Dazu verwendet man zunächst die Art, wie zwei Schwarz-Spiegelungen miteinander vertauschen (siehe (4.4)), und erhält:

$$s_k(f_{i+1}) = (s_k \circ s_{k_{i+1}} \circ \dots \circ s_{k_1})(f_0) = (s_{s_k(k_{i+1})} \circ s_k \circ s_{k_i} \circ \dots \circ s_{k_1})(f_0) = s_{s_k(k_{i+1})}(s_k(f_i)).$$

Dabei ist  $s_k(f_i)$  nach Induktionsvoraussetzung eine Kopie von  $f$ , welche in  $F$  enthalten ist. Außerdem erhält man aus (4.6) und (4.7) die Aussage

$$s_k(k_{i+1}) \subset s_k(f_i).$$

Zusammengenommen ergibt sich, dass  $s_k(f_{i+1})$  aus dem Flächenstück  $s_k(f_i)$  von  $F$  durch eine Schwarz-Spiegelung an einer der Kanten dieses Flächenstücks entsteht. Insbesondere ist also auch  $s_k(f_{i+1})$  in  $F$  enthalten. Dies beendet die Induktion.

Insgesamt wurde

$$s_k(x) \in s_k(f_l) \subset F \text{ für jedes } x \in F$$

gezeigt. Also bildet  $s_k$  die Fläche  $F$  auf sich selbst ab.

Außerdem ist  $s_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  bijektiv mit Umkehrabbildung  $s_k$ .

Damit ist auch  $s_k: F \rightarrow F$  bijektiv und selbstinvers.

**w. z. b. w.**

**Bemerkung 4.27.** Das letzte Lemma ist für das Verständnis von  $F$  sehr hilfreich. Bisher wurde die Fläche  $F$  nur durch wiederholtes Schwarz-Spiegeln von Kopien von  $f$  konstruiert. Lemma 4.26 sagt nun, dass man in jedem Schritt der Konstruktion von  $F$  anstelle einer Kopie von  $f$  auch die gesamte bisher konstruierte Fläche Schwarz-Spiegeln kann und dadurch dasselbe  $F$  erhält.

## 4.5 Gefüllte Würfel und die zugehörige Gruppenstruktur

Wie bereits erwähnt ist es für die Einbettungsfrage entscheidend, wie viele Kopien von  $f$  gewisse Punkte von  $F$  treffen. Deshalb wird in diesem Abschnitt der Begriff eines gefüllten Würfels definiert. An sich sollte man einen Würfel  $W^v$  mit  $v \in \mathbb{Z}^n$  gefüllt nennen, wenn das Innere von  $W^v \cap F$  nicht leer ist. Das bedeutet, dass  $W^v \cap F$  aus mindestens einer Kopie von  $f$  besteht.

Um mit gefüllten Würfeln arbeiten zu können, wird eine Gruppenstruktur auf ihnen benötigt. Um diese sinnvoll zu definieren, werden die gefüllten Würfel mit Abbildungen identifiziert. Dies geschieht so, dass das Bild von  $f$  unter der Abbildung ein Flächenstück von  $F \cap W^v$  ist.

Diese Darstellung hat den Vorteil, dass ein Gruppenelement für einen Würfel  $W^v$  zusammen mit einer Kopie von  $f$  in  $W^v$  steht. Man erkennt an der Gruppe also unter anderem, ob in  $W^v$  mehr als eine Kopie von  $f$  liegt, denn dann gibt es entsprechend auch mehr als ein Gruppenelement. Tatsächlich kann man nach der Einführung der Gruppenstruktur sehr schön zeigen, dass dieser Fall nie auftritt. Das heißt, Selbstschnitte von  $F$  im Inneren von  $W^v$  existieren nicht. Man beachte, dass diese Behauptung nicht von der Wahl der Jordankurve  $J$  (oder der Fläche  $f$ ) abhängt.

Die Gruppe der gefüllten Würfel lässt sich schwer beschreiben, da diese von der konkreten Jordankurve  $J$  abhängt. Deswegen wird zunächst eine Gruppe  $G$  definiert, die alle gefüllten Würfel als Untergruppe enthält und die nicht von  $J$  abhängt. Auch hier sollen die Elemente von  $G$  mit Abbildungen des  $\mathbb{R}^n$  identifiziert werden.

Das bedeutet, die Gruppe  $G$  operiert auf  $\mathbb{R}^n$ . Es werden also  $G$  und ein Gruppenhomomorphismus  $\chi: G \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{R}^n)$  angegeben. Dabei soll das Bild von  $W$  unter einer

Abbildung  $\chi(g)$  mit  $g \in G$  ein Würfel  $W^v$  mit  $v \in \mathbb{Z}^n$  sein. Dieser Würfel  $W^v$  bzw. das Gruppenelement  $g$  heißen dann gefüllt, wenn die Abbildung  $\chi(g)$  die Fläche  $f$  auf ein Flächenstück von  $F$  abbildet.

Jedes Element  $g \in G$  beschreibt auf diese Weise einen Würfel  $W^v = \chi(g)(W)$  und ein Flächenstück  $\tilde{f} = \chi(g)(f)$ . Aber nur wenn das Gruppenelement  $g$  einen gefüllten Würfel beschreibt, ist  $\tilde{f} = \chi(g)(f)$  tatsächlich ein Flächenstück von  $F$ .

Diese Beschreibung ist natürlich nur sinnvoll, wenn im Bild von  $\chi$  alle Abbildungen enthalten sind, die  $f$  auf ein Flächenstück von  $F$  abbilden. Wegen der Gestalt von  $F$  ist das der Fall, wenn das Bild von  $\chi$  aus allen Zusammensetzungen von Schwarz-Spiegelungen an Kanten der zu  $W$  gehörigen Würfelpflasterung besteht. Als nächstes soll deshalb die Gestalt dieser Zusammensetzungen bestimmt werden. Dazu wird zunächst eine Hilfsaussage über die Symmetriegruppe  $S$  von  $W$  benötigt.

**Lemma 4.28.** *Die von den  $p_i$  in  $S$  erzeugte Untergruppe  $\langle p_1, \dots, p_n \rangle_S$  ist in der Untergruppe  $\{(a, \text{id}) \mid a \in \mathbb{Z}_2^n\}$  von  $S$  enthalten.*

*Außerdem beschreibt  $\{(a, \text{id}) \mid a \in \mathbb{Z}_2^n\} \rightarrow \mathbb{Z}_2^n, (a, \text{id}) \mapsto a$  einen Gruppenisomorphismus.*

**Beweis.** Für alle  $a, b \in \mathbb{Z}_2^n$  gilt:

$$(4.8) \quad (a, \text{id}) \circ_S (b, \text{id}) \stackrel{(3.1)}{=} (a +_{\mathbb{Z}_2^n} \theta(\text{id})(b), \text{id} \circ_{S_n} \text{id}) = (a +_{\mathbb{Z}_2^n} b, \text{id}).$$

Aus (4.8) ergibt sich auch  $(a, \text{id})^{-1} = (-a, \text{id})$ . Damit folgt, dass  $\{(a, \text{id}) \mid a \in \mathbb{Z}_2^n\}$  eine Untergruppe von  $S$  ist, welche alle  $p_i$  enthält. Außerdem entspricht Gleichung (4.8) gerade der Tatsache, dass die gegebene Abbildung ein Gruppenhomomorphismus ist. Nach Definition ist diese Abbildung auch bijektiv. **w. z. b. w.**

Nun lässt sich die Gestalt von hintereinander ausgeführten Schwarz-Spiegelungen bestimmen.

**Lemma 4.29.** *Jede beliebige Zusammensetzung von Schwarz-Spiegelungen an Kanten der zu  $W$  gehörigen Würfelpflasterung hat die Gestalt  $\varphi_v \circ d$  mit  $v \in \mathbb{Z}^n$  und  $d \in \langle p_1, \dots, p_n \rangle$ .*

**Beweis.** Dieses Lemma folgt aus den Aussagen von Abschnitt 4.3 über die Schwarz-Spiegelungen.

Zum Beweis seien  $m$  Schwarz-Spiegelungen an Kanten der zu  $W$  gehörigen Würfelpflasterung gegeben. Nach Satz 4.9 und Bemerkung 4.10 hat jede dieser Spiegelungen die Form  $\varphi_w \circ p_i$  mit  $w \in \mathbb{Z}^n$  und  $1 \leq i \leq n$ . Das heißt, die Zusammensetzung der  $m$  Schwarz-Spiegelungen hat die Gestalt

$$\varphi_{v_1} \circ p_{i_1} \circ \varphi_{v_2} \circ p_{i_2} \circ \dots \circ \varphi_{v_m} \circ p_{i_m} \quad \text{mit } v_1, v_2, \dots, v_m \in \mathbb{Z}^n \text{ und } i_1, i_2, \dots, i_m \in \{1, \dots, n\}.$$

Da  $p_i \circ \varphi_v = \varphi_{p_i(v)} \circ p_i$  für alle  $v \in \mathbb{Z}^n$  und  $1 \leq i \leq n$  gilt (siehe Lemma 4.11), erhält die zu betrachtende Zusammensetzung die Gestalt

$$\varphi_{v_1} \circ \varphi_{w_2} \circ \dots \circ \varphi_{w_m} \circ p_{i_1} \circ p_{i_2} \circ \dots \circ p_{i_m} = \varphi_{v_1+w_2+\dots+w_m} \circ p_{i_1} \circ p_{i_2} \circ \dots \circ p_{i_m},$$

wobei die  $w_i$  in  $\mathbb{Z}^n$  liegen. Setzt man nun  $v = v_1 + w_2 + \dots + w_m$  und  $d = p_{i_1} \circ p_{i_2} \circ \dots \circ p_{i_m}$ , so ist die betrachtete Abbildung von der behaupteten Form  $\varphi_v \circ d$ . **w. z. b. w.**

Dieses Lemma legt nahe, dass die Elemente aus  $\langle p_1, \dots, p_n \rangle$  für die Beschreibung der Abbildungen  $\chi(g)$  wichtig sind. Tatsächlich spielen die Elemente aus  $S - \langle p_1, \dots, p_n \rangle$  im Folgenden keine Rolle mehr. Um mit den Elementen aus  $\langle p_1, \dots, p_n \rangle$  besser umgehen zu können, werden diese von nun an mit einer Untergruppe von  $\mathbb{Z}_2^n$  identifiziert. Dies geschieht mit Hilfe des in Lemma 4.28 angegebenen Gruppenisomorphismus.

**Definition 4.30.** *Ab jetzt bezeichnen*

$$p_1 := (0, 1, \dots, 1), p_2 := (1, 0, 1, \dots, 1), \dots, p_n := (1, \dots, 1, 0)$$

Elemente von  $\mathbb{Z}_2^n$ . Weiter sei

$$H := \langle p_1, \dots, p_n \rangle$$

die von den  $p_i$  in  $\mathbb{Z}_2^n$  erzeugte Untergruppe.

Man beachte, dass die Elemente von  $H$  nach wie vor für Elemente der Symmetriegruppe  $S$  von  $W$  stehen, wobei  $S$  auf  $\mathbb{R}^n$  operiert. So entspricht  $d = (d_1, \dots, d_n) \in H$  der Abbildung

$$d: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \mapsto ((-1)^{d_i} x_i)_{1 \leq i \leq n} = (-1)^d x.$$

Aus Lemma 4.29 ergibt sich, dass zumindest einige der Abbildungen  $\varphi_v \circ d$  mit  $v \in \mathbb{Z}^n$  und  $d \in H$  im Bild von  $\chi$  enthalten sind. Tatsächlich ist es sinnvoll, wenn alle Abbildungen  $\varphi_v \circ d$  mit  $v \in \mathbb{Z}^n$  und  $d \in H$  das Bild von  $\chi$  bilden. Dann ist auch schnell klar, wie Gruppenelemente von  $G$  aussehen sollen. Da eine Abbildung  $\varphi_v \circ d$  durch  $v$  und  $d$  eindeutig bestimmt ist, kann man ihr das Gruppenelement  $(v, d)$  zuordnen.

Damit erhält man eine sinnvolle Definition der Elemente von  $G$ :

$$G := \{(v, d) \mid v \in \mathbb{Z}^n, d \in H\},$$

und die Abbildung  $\chi$  ist gegeben durch

$$\chi: G \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{R}^n), \quad (v, d) \mapsto \varphi_v \circ d.$$

Außerdem soll die Gruppenoperation auf  $G$  so definiert werden, dass  $\chi$  ein Gruppenhomomorphismus ist. Also muss für alle  $(v, d), (\tilde{v}, \tilde{d}) \in G$

$$\begin{aligned} \chi\left((v, d) \circ_G (\tilde{v}, \tilde{d})\right) &= \chi((v, d)) \circ_{\text{Aut}(\mathbb{R}^n)} \chi((\tilde{v}, \tilde{d})) = \varphi_v \circ d \circ \varphi_{\tilde{v}} \circ \tilde{d} \\ &\stackrel{\text{Lemma 4.11}}{=} \varphi_v \circ \varphi_{(-1)^{d\tilde{v}}} \circ d \circ \tilde{d} = \varphi_{v+(-1)^{d\tilde{v}}} \circ d \circ \tilde{d} \\ &= \chi\left((v + (-1)^{d\tilde{v}}, d \circ \tilde{d})\right) \end{aligned}$$

gelten. Das ist insbesondere der Fall, wenn die Gruppenoperation von  $G$  durch

$$(4.9) \quad (v, d) \circ_G (\tilde{v}, \tilde{d}) := (v + (-1)^{d\tilde{v}}, d \circ \tilde{d}) \text{ für alle } (v, d), (\tilde{v}, \tilde{d}) \in G$$

definiert wird. Damit hat  $G$  die Struktur des semidirekten Produkts

$$G = \mathbb{Z}^n \rtimes H$$

und es gilt:

**Satz 4.31.** Die Gruppe  $G = \mathbb{Z}^n \rtimes H$  operiert durch

$$\chi: G \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{R}^n), \quad (v, d) \mapsto \varphi_v \circ d.$$

auf  $\mathbb{R}^n$ .

Inbesondere ist  $(0, 0)$  das neutrale Element von  $G$  und es gilt  $(v, d)^{-1} = (-(-1)^d v, d)$ .

Die Gruppe  $G$  beschreibt also Abbildungen des  $\mathbb{R}^n$  in sich, die durch wiederholtes Schwarz-Spiegeln an Geraden der zu  $W$  gehörigen Würfelpflasterung entstehen. Dies passt genau zu der Struktur von  $F$ .

Es bleibt noch zu erwähnen, dass ein Element von  $G$  wahlweise auch als die zugehörige Abbildung (also das Bild unter  $\chi$ ) oder als Bild von  $W$  unter dieser Abbildung aufgefasst wird. Das ist allerdings nur möglich, wenn die Zuordnung von  $g$  auf  $\chi(g)$  bzw.  $\chi(g)|_W$  eineindeutig ist.

**Lemma 4.32.** Die Abbildung  $\chi$  ist injektiv.

Außerdem ist jedes Element  $g \in G$  sowohl durch die Einschränkung  $\chi(g)|_W$  als auch durch die Einschränkung  $\chi(g)|_f$  eindeutig bestimmt.

**Beweis.** Es seien  $g = (v, d)$  und  $\tilde{g} = (\tilde{v}, \tilde{d})$  Elemente von  $G$  mit  $\chi(g) = \chi(\tilde{g})$ .

Das heißt, es gilt  $\varphi_v \circ d = \varphi_{\tilde{v}} \circ \tilde{d}$  und damit auch

$$(\varphi_v \circ d)(0) = (\varphi_{\tilde{v}} \circ \tilde{d})(0) \implies \varphi_v(0) = \varphi_{\tilde{v}}(0) \implies v = \tilde{v}.$$

Sei weiter  $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$  mit  $x_i \neq 0$  für alle  $1 \leq i \leq n$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} (\varphi_v \circ d)(x) &= (\varphi_{\tilde{v}} \circ \tilde{d})(x) = (\varphi_v \circ \tilde{d})(x) \implies d(x) = \tilde{d}(x) \\ \implies (-1)^{d_i} x_i &= (-1)^{\tilde{d}_i} x_i \quad \forall 1 \leq i \leq n \xrightarrow{x_i \neq 0} d = \tilde{d}. \end{aligned}$$

Also folgt  $g = \tilde{g}$  und  $\chi$  ist injektiv.

Da für diesen Beweis nur verwendet wurde, dass  $\chi(g)$  und  $\chi(\tilde{g})$  im Koordinatenursprung und einem weiteren Punkt übereinstimmen, ergibt sich analog, dass  $g \in G$  sowohl durch  $\chi(g)|_W$  als auch durch  $\chi(g)|_f$  eindeutig bestimmt ist. **w. z. b. w.**

Besonders die Darstellung von Gruppenelementen  $g \in G$  als Bild  $\chi(g)(W)$  wird im Folgenden oft verwendet.

Nach dieser Vorarbeit ist es nun möglich, gefüllte Würfel formal zu definieren.

**Definition 4.33.** Ein gefüllter Würfel ist ein Element  $(v, d) \in G$ , für das

$$\chi((v, d))(f) \subset F$$

gilt. In diesem Fall sagt man auch  $(v, d)$  ist gefüllt.

**Bemerkung 4.34.** Wenn  $(v, d) \in G$  ein gefüllter Würfel ist, dann bildet  $\varphi_v \circ d$  die Fläche  $f$  in  $W$  auf ein Flächenstück von  $F$  ab. Dieses Flächenstück von  $F$  liegt im Würfel  $W^v$  und das Element  $d$  gibt die Lage des Flächenstücks in  $W^v$  an.

Im Folgenden identifizieren wir den gefüllten Würfel  $(v, d)$  auch mit dem Würfel  $W^v$  zusammen mit dem in  $W^v$  enthaltenen Flächenstück von  $F$ , dessen Lage durch  $d$  angegeben wird.

Die Struktur der gefüllten Würfel wird eine wichtige Rolle spielen. Zunächst muss gezeigt werden, dass die gefüllten Würfel eine Untergruppe von  $G$  bilden. Dazu definiert man als Erstes spezielle Untergruppen von  $G$ . Es wird sich herausstellen, dass eine dieser Untergruppen bereits die Gruppe der gefüllten Würfel ist.

**Definition 4.35.** *Es sei  $k$  eine Kante der zu  $W$  gehörigen Würfelpflasterung.*

*Man nennt  $(v, p_i) \in G$  das zu  $k$  gehörige Element von  $G$ , wenn die Schwarz-Spiegelung an  $k$  gleich  $\varphi_v \circ p_i = \chi((v, p_i))$  ist.*

*Weiter sei  $\tilde{U} \subseteq G$  die Untergruppe von  $G$ , welche von den zu Kanten von  $W$  gehörigen Elementen von  $G$  erzeugt wird.*

*Außerdem sei  $U \subseteq G$  die Untergruppe von  $G$ , welche von den zu Kanten aus  $J$  gehörigen Elementen von  $G$  erzeugt wird.*

Man beachte: Wegen Satz 4.9 und Bemerkung 4.10 gibt es für jede Kante  $k$  der Würfelpflasterung genau ein zugehöriges Element von  $G$ .

**Bemerkung 4.36.** Aus Definition 4.35 ergibt sich sofort

$$U \subseteq \tilde{U} .$$

**Satz 4.37.** *Die Menge der gefüllten Würfel ist gleich der Menge der Elemente von  $U$ . Insbesondere bilden die gefüllten Würfel eine Untergruppe von  $\tilde{U}$  und  $G$ .*

Aus diesem Grund wird  $U$  auch als die *Gruppe der gefüllten Würfel* bezeichnet.

**Beweis von Satz 4.37.** Sei zunächst  $(v, d) \in U$ . Dann gibt es Kanten  $k_1, \dots, k_l \in J$  und zugehörige Gruppenelemente  $(w_1, p_{i_1}), \dots, (w_l, p_{i_l}) \in \mathbb{Z}^n \rtimes H = G$ , sodass

$$(v, d) = (w_l, p_{i_l}) \circ \dots \circ (w_1, p_{i_1})$$

gilt. Aus den Eigenschaften des Gruppenhomomorphismus  $\chi$  folgt dann

$$\chi((v, d))(f) = \left( \chi((w_l, p_{i_l})) \circ \dots \circ \chi((w_1, p_{i_1})) \right)(f) = (s_{k_l} \circ \dots \circ s_{k_1})(f) .$$

Da  $s_{k_j}$  die Fläche  $F$  auf sich abbildet (siehe Lemma 4.26), ergibt sich damit:

$$\chi((v, d))(f) = (s_{k_l} \circ \dots \circ s_{k_1})(f) \subset F .$$

Also ist  $(v, d)$  ein gefüllter Würfel.

Sei nun umgekehrt  $(v, d)$  ein gefüllter Würfel. Dann gibt es Kanten  $k_1, \dots, k_l$  der zu  $W$  gehörigen Würfelplasterung mit

$$(4.10) \quad \chi((v, d))(f) = (s_{k_l} \circ \dots \circ s_{k_1})(f),$$

$$(4.11) \quad k_1 \subset J \text{ und}$$

$$(4.12) \quad k_{i+1} \subset (s_{k_i} \circ \dots \circ s_{k_1})(J) \quad \forall 1 \leq i \leq l-1.$$

Aus (4.12) und der Tatsache, dass Schwarz-Spiegelungen selbstinvers sind, ergibt sich sofort:

$$(4.13) \quad (s_{k_1} \circ \dots \circ s_{k_i})(k_{i+1}) \subset J \quad \forall 1 \leq i \leq l-1.$$

Durch wiederholtes Vertauschen von Schwarz-Spiegelungen (siehe (4.4)) ergibt sich außerdem

$$\begin{aligned} \chi((v, d))(f) &\stackrel{(4.10)}{=} (s_{k_l} \circ \dots \circ s_{k_1})(f) = (s_{k_1} \circ s_{s_{k_1}(k_l)} \circ \dots \circ s_{s_{k_1}(k_2)})(f) \\ &= (s_{k_1} \circ s_{s_{k_1}(k_2)} \circ s_{s_{s_{k_1}(k_2)}(s_{k_1}(k_l))} \circ \dots \circ s_{s_{s_{k_1}(k_2)}(s_{k_1}(k_3))})(f) \\ &= (s_{k_1} \circ s_{s_{k_1}(k_2)} \circ s_{(s_{k_1} \circ s_{k_2})(k_l)} \circ \dots \circ s_{(s_{k_1} \circ s_{k_2})(k_3)})(f) \\ &= \dots \\ &= (s_{k_1} \circ s_{s_{k_1}(k_2)} \circ s_{(s_{k_1} \circ s_{k_2})(k_3)} \circ \dots \circ s_{(s_{k_1} \circ \dots \circ s_{k_{l-1}})(k_l)})(f). \end{aligned}$$

Wegen (4.11) und (4.13) ist der letzte Term dieser Gleichungskette eine Zusammensetzung von Schwarz-Spiegelungen an Kanten von  $J$ , welche auf  $f$  angewendet wird. Aus der Definition von  $U$  ergibt sich damit, dass es ein  $u \in U$  mit

$$\chi((v, d))(f) = \chi(u)(f)$$

gibt. Wegen Lemma 4.32 folgt:  $(v, d) = u \in U$ .

**w. z. b. w.**

Wir interessieren uns für die Gruppe  $U$ . Wegen  $U \subseteq \tilde{U}$  reicht es aus, die Gruppe  $\tilde{U}$  zu studieren, um wesentliche Eigenschaften von  $U$  zu zeigen. Insbesondere werden Elemente aus  $G - \tilde{U}$  im Folgenden keine Rolle mehr spielen.

**Satz 4.38.** *Es gilt*

$$\tilde{U} = \{(v, v \bmod 2) \mid v \in \mathbb{Z}^n, v \bmod 2 \in H\},$$

wobei  $v \bmod 2$  die komponentenweise Wahl der Restklassen modulo zwei ist.

**Beweis.** Da die Erzeugenden von  $\tilde{U}$  zu Kanten von  $W$  gehören, folgt aus der Gestalt der Schwarz-Spiegelung (siehe Satz 4.9):

$$(4.14) \quad \tilde{U} = \langle \{(v, p_i) \mid v \in \mathbb{Z}^n, 1 \leq i \leq n, v_i = 0, v_j \in \{\pm 1\} \quad \forall j \neq i\} \rangle.$$

Das bedeutet, jedes Element  $(v, d)$  aus  $\tilde{U}$  hat die Gestalt  $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_n$ , wobei die  $\sigma_i$  Erzeuger wie in (4.14) sind. Insbesondere gilt  $\sigma_i = (w_i, q_i)$  mit  $w_i \bmod 2 = q_i \bmod 2$ .

Da die Zusammensetzung von  $G$  in der ersten Komponente eine koordinatenweise Addition oder Subtraktion ist (vgl. (4.9)), und da modulo 2 Addition und Subtraktion übereinstimmen, gilt

$$\begin{aligned} v &\equiv w_1 + \cdots + w_n \pmod{2} \\ &\equiv q_1 + \cdots + q_n \pmod{2} \\ &\stackrel{(4.9)}{\equiv} d \pmod{2}. \end{aligned}$$

Da die  $\sigma_i$  Erzeuger wie in (4.14) sind, gilt  $d \in \langle p_1, \dots, p_n \rangle = H \subset \mathbb{Z}_2^n$  und es folgt:

$$d = v \pmod{2}.$$

Somit gilt

$$(v, d) \in \{(v, v \pmod{2}) \mid v \in \mathbb{Z}^n, v \pmod{2} \in H\}.$$

Damit ist

$$\tilde{U} \subseteq \{(v, v \pmod{2}) \mid v \in \mathbb{Z}^n, v \pmod{2} \in H\}$$

bewiesen.

Um die andere Inklusion zu zeigen, überlegt man sich zunächst, dass gilt:

$$(4.15) \quad \{(v, 0) \mid v \in (2\mathbb{Z})^n\} \subseteq \tilde{U}.$$

Da die Identitäten  $(v, 0) \circ_G (w, 0) \stackrel{(4.9)}{=} (v + w, 0)$  und  $(v, 0)^{-1} \stackrel{(4.9)}{=} (-v, 0)$  für alle  $v, w \in (2\mathbb{Z})^n$  gelten, ist  $\{(v, 0) \mid v \in (2\mathbb{Z})^n\}$  eine Untergruppe von  $G$ . Um (4.15) zu zeigen, muss also nur  $(2e_i, 0) \in \tilde{U}$  für alle  $1 \leq i \leq n$  bewiesen werden. Dies erreicht man durch geeignetes Zusammensetzen der Erzeuger aus (4.14). So gilt zum Beispiel:

$$(2e_1, 0) = ((1, 0, 1, \dots, 1), p_2) \circ ((-1, 0, 1, \dots, 1), p_2) \in \tilde{U}.$$

Analog ergibt sich  $(2e_i, 0) \in \tilde{U}$  für jedes  $1 \leq i \leq n$ .

Sei nun  $(v, v \pmod{2})$  beliebig mit  $v \in \mathbb{Z}^n$  und  $v \pmod{2} \in H$ . In der zweiten Komponente der Erzeugenden von  $\tilde{U}$  kommt jedes der  $p_i$  mit  $1 \leq i \leq n$  vor. Da die Zusammensetzung in  $\tilde{U}$  in der zweiten Komponente einer Addition in  $\mathbb{Z}_2^n$  bzw. in  $H = \langle p_1, \dots, p_n \rangle$  entspricht (vgl. (4.9)), gibt es mindestens ein Element der Form  $(w, v \pmod{2}) \in \tilde{U}$ .

Wegen der bereits gezeigten Inklusion  $\tilde{U} \subseteq \{(v, v \pmod{2}) \mid v \in \mathbb{Z}^n, v \pmod{2} \in H\}$  muss hier  $v \pmod{2} = w \pmod{2}$  und somit  $v - w \in (2\mathbb{Z})^n$  gelten.

Aus (4.15) folgt  $(v - w, 0) \in \tilde{U}$  und damit auch  $(v - w, 0) \circ (w, v \pmod{2}) \in \tilde{U}$ . Also gilt:

$$(v - w, 0) \circ (w, v \pmod{2}) = (v - w + w, v \pmod{2}) = (v, v \pmod{2}) \in \tilde{U}.$$

Dies zeigt die zweite Inklusion

$$\{(v, v \pmod{2}) \mid v \in \mathbb{Z}^n, v \pmod{2} \in H\} \subseteq \tilde{U}.$$

**w. z. b. w.**



**Bemerkung 4.39.** Aus Satz 4.38 folgt insbesondere

$$U \subseteq \tilde{U} = \{(v, v \bmod 2) \mid v \in \mathbb{Z}^n, v \bmod 2 \in H\} .$$

Das bedeutet:

In einem gefüllten Würfel  $(v, d)$  ist das Element  $d$  bereits durch  $v$  eindeutig festgelegt. Oder anders formuliert: Enthält ein Würfel  $W^v$  (mit  $v \in \mathbb{Z}^n$ ) eine Kopie  $f_1 \subset F$  von  $f$ , dann ist die Lage von  $f_1$  bereits durch  $v$  bzw.  $W^v$  eindeutig festgelegt. Insbesondere kann es keine zwei verschiedenen Kopien von  $f$  geben, die in  $W^v \cap F$  enthalten sind. Ab jetzt wird auch der Würfel  $W^v$  gefüllt genannt, falls  $(v, v \bmod 2)$  gefüllt ist. Das ist nur sinnvoll, da  $W^v$  genau eine oder keine Kopie  $f_1 \subset F$  von  $f$  enthält.

Selbstschnitte von  $F$  im Inneren eines Würfels  $W^v$  mit  $v \in \mathbb{Z}^n$  können nur entstehen, wenn zwei verschiedene Kopien von  $f$  in  $W^v \cap F$  enthalten sind (siehe Bemerkung 4.20). Das ist wegen Bemerkung 4.39 nie der Fall. Unter Verwendung von Korollar 4.21 und Satz 4.22 folgt daraus direkt:

**Korollar 4.40.** *Die Fläche  $F$  ist genau dann nicht eingebettet, wenn es einen Selbstschnitt  $p$  von  $F$  gibt, der auf einer Ecke der zu  $W$  gehörigen Würfelplasterung liegt. Dies wiederum kann nur der Fall sein, wenn mindestens acht Würfel, die  $p$  als Ecke enthalten, gefüllt sind.*

Die Aussage des letzten Korollars und insbesondere die Nicht-Existenz von Selbstschnitten von  $F$  im Inneren der Würfel  $W^v$  ist dabei vollkommen unabhängig von der gegebenen Jordankurve  $J$ .

Im Folgenden wird es darum gehen zu charakterisieren, für welche Jordankurven  $J$  sich Selbstschnitte in Ecken der Würfel  $W^v$  ausschließen lassen. Auch dafür spielt die Gruppenstruktur der gefüllten Würfel eine entscheidende Rolle.

Die Gruppe  $U$  hängt nach Definition zwar von der Jordankurve  $J$ , nicht aber von der konkreten Fläche  $f$  ab. Dasselbe wird also auch für die Existenz von Selbstschnitten von  $F$  gelten.

Es bleibt noch die Menge  $H$  zu bestimmen.

**Satz 4.41.** *Es gilt:*

$$H = \begin{cases} \mathbb{Z}_2^n & \text{für } n \text{ gerade,} \\ \{a \in \mathbb{Z}_2^n \mid \sum_{i=1}^n a_i =_{\mathbb{Z}_2} 0\} & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

**Beweis.** Für gerade  $n$  ist

$$p_1 + \dots + p_n = (1, \dots, 1)$$

und damit

$$p_1 + \dots + p_{i-1} + \widehat{p}_i + p_{i+1} + \dots + p_n = (\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1 \text{ Nullen}}, 1, 0, \dots, 0) .$$

Da das die Erzeugenden von  $\mathbb{Z}_2^n$  sind, folgt in diesem Fall

$$H = \langle p_1, \dots, p_n \rangle_{\mathbb{Z}_2^n} = \mathbb{Z}_2^n.$$

Sei nun  $n$  ungerade. In diesem Fall enthält jedes  $p_i$  eine gerade Anzahl von Einsen. Diese Eigenschaft bleibt bei Addition modulo zwei erhalten, weshalb

$$H = \langle p_1, \dots, p_n \rangle_{\mathbb{Z}_2^n} \subseteq \left\{ a \in \mathbb{Z}_2^n \mid \sum_{i=1}^n a_i =_{\mathbb{Z}_2} 0 \right\}$$

gelten muss.

Außerdem besteht  $p_i + p_j$  offensichtlich aus zwei Einsen an den Stellen  $i$  und  $j$ , während alle anderen Stellen gleich Null sind. Diese Elemente erzeugen  $\{a \in \mathbb{Z}_2^n \mid \sum_{i=1}^n a_i =_{\mathbb{Z}_2} 0\}$ , d. h. es gilt auch

$$H \supseteq \left\{ a \in \mathbb{Z}_2^n \mid \sum_{i=1}^n a_i =_{\mathbb{Z}_2} 0 \right\}.$$

**w. z. b. w.**

In geraden Dimensionen kann also jeder Würfel  $W^v$  gefüllt sein, während in ungeraden Dimensionen höchstens jeder zweite Würfel gefüllt ist. Mit Hilfe einer Schwarz-Weiß-Färbung der Würfel kann man diese Aussage noch präzisieren.

**Definition 4.42.** Ein Würfel  $W^v$  mit  $v \in \mathbb{Z}^n$  heißt weiß, wenn die Summe der Koordinaten von  $v$  gerade ist. Der Würfel  $W^v$  heißt schwarz, wenn die Summe der Koordinaten von  $v$  ungerade ist.

Das entspricht einer Schachbrettmusterung in beliebiger Dimension. Die Definition ist so gewählt, dass Würfel, die einen  $n - 1$ -dimensionalen Randwürfel gemeinsam haben, verschiedene Farben besitzen.

Weiterhin passt die Definition genau zum letzten Satz. Denn wenn  $W^v$  ein schwarzer Würfel in einer ungeraden Dimension ist, dann liegt  $v \bmod 2$  nicht in  $H$ . Entsprechend kann in diesem Fall  $(v, v \bmod 2)$  nicht in  $U \subseteq \bar{U}$  liegen (siehe Satz 4.38) und der Würfel  $W^v$  nicht gefüllt sein.

**Korollar 4.43.** Wenn die Raumdimension  $n$  ungerade ist, kann kein schwarzer Würfel  $W^v$  mit  $v \in \mathbb{Z}^n$  gefüllt sein.

### 4.5.1 Einbettung von Flächen $F$ in Dimension drei

Es soll gezeigt werden, dass in  $\mathbb{R}^3$  alle betrachteten Flächen  $F$  eingebettet sind (unabhängig von der gewählten Jordankurve  $J$ ). Außerdem wird erläutert, warum ein analoges Argument in höheren Dimensionen nicht funktioniert.

Vor der Behandlung dieser allgemeinen Aussagen, sollen die bisher eingeführten Objekte und einige grundsätzliche Ideen anhand eines Beispiels erklärt werden.

**Beispiel 4.44.** Es wird die Jordankurve  $J = 123123$  entlang von Kanten des dreidimensionalen Würfels  $W$  betrachtet (siehe Abb. 15).

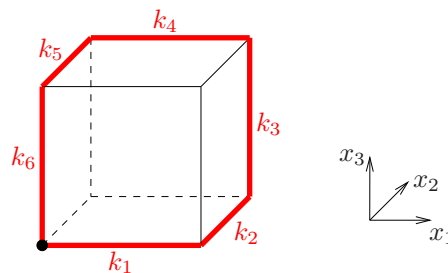


Abbildung 15: Jordankurve  $J = 123123$ . Zur Graphischen Darstellung wurde der Startpunkt  $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$  gewählt.

Wenn  $f$  eine Minimalfläche mit Rand  $J$  wäre, dann ergäbe sich durch wiederholtes Schwarz-Spiegeln die Schwarz-D-Fläche aus Kapitel 2. Diese Fläche ist eingebettet.

Da  $f$  aber keine Minimalfläche sein muss, befindet man sich hier in einer etwas allgemeineren Situation. Es wird sich allerdings herausstellen, dass dieser Unterschied bei der Frage nach der Einbettung von  $F$  keine Rolle spielt.

Als Erstes sollen die Gruppen  $\tilde{U}$ ,  $H$  und  $U$  bestimmt werden.

Wegen Satz 4.38 und Satz 4.41 gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= \{(v, v \bmod 2) \mid v \in \mathbb{Z}^3, v \bmod 2 \in H\} \text{ mit} \\ H &= \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{Z}_2^3 \mid v_1 +_{\mathbb{Z}_2} v_2 +_{\mathbb{Z}_2} v_3 = 0\} = \{(0, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}. \end{aligned}$$

Zusammengefasst ist

$$\tilde{U} = \{(v, v \bmod 2) \mid v \in \mathbb{Z}^3, (v_1 + v_2 + v_3) \bmod 2 = 0\} .$$

Insbesondere ist jeder zu  $(v, v \bmod 2) \in U \subseteq \tilde{U}$  gehörige gefüllte Würfel  $W^v$  ein weißer Würfel. Somit sind schwarze Würfel nicht gefüllt.

Die Gruppe  $U$  hängt im Gegensatz zu  $\tilde{U}$  von der gegebenen Jordankurve  $J$  ab. Das heißt, um  $U$  zu bestimmen, muss man zunächst die Erzeuger von  $U$  in  $G$  angeben. Diese Erzeuger gehören zu den Kanten von  $J$ .

Die Kanten von  $J$  sind

$$\begin{aligned} k_1 &= \left\{ \left( t, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \mid t \in \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \right\}, & k_2 &= \left\{ \left( \frac{1}{2}, t, -\frac{1}{2} \right) \mid t \in \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \right\}, \\ k_3 &= \left\{ \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, t \right) \mid t \in \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \right\}, & k_4 &= \left\{ \left( t, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \mid t \in \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \right\}, \\ k_5 &= \left\{ \left( -\frac{1}{2}, t, \frac{1}{2} \right) \mid t \in \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \right\} & \text{und} & k_6 = \left\{ \left( -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, t \right) \mid t \in \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Für die Schwarz-Spiegelungen an diesen Kanten ergibt sich aus Satz 4.9:

$$\begin{aligned} s_{k_1} &= \varphi_{(0,-1,-1)} \circ p_1, & s_{k_2} &= \varphi_{(1,0,-1)} \circ p_2, & s_{k_3} &= \varphi_{(1,1,0)} \circ p_3, \\ s_{k_4} &= \varphi_{(0,1,1)} \circ p_1, & s_{k_5} &= \varphi_{(-1,0,1)} \circ p_2 & \text{und} & s_{k_6} = \varphi_{(-1,-1,0)} \circ p_3. \end{aligned}$$

Wegen der Definition von  $U$  erzeugen also die Elemente

$$\begin{aligned} \sigma_{k_1} &= ((0, -1, -1), p_1) = ((0, -1, -1), (0, 1, 1)), \\ \sigma_{k_2} &= ((1, 0, -1), p_2) = ((1, 0, -1), (1, 0, 1)), \\ \sigma_{k_3} &= ((1, 1, 0), p_3) = ((1, 1, 0), (1, 1, 0)), \\ \sigma_{k_4} &= ((0, 1, 1), p_1) = ((0, 1, 1), (0, 1, 1)), \\ \sigma_{k_5} &= ((-1, 0, 1), p_2) = ((-1, 0, 1), (1, 0, 1)) \quad \text{und} \\ \sigma_{k_6} &= ((-1, -1, 0), p_3) = ((-1, -1, 0), (1, 1, 0)) \end{aligned}$$

die Gruppe  $U$ . Durch Zusammensetzen dieser Erzeuger ergeben sich wie folgt weitere Elemente  $u_1, u_2, u_3, u_4 \in U$  (man beachte die Definition der Gruppenoperation in  $G$  aus (4.9)).

$$\begin{aligned} u_1 &:= \sigma_{k_2} \circ \sigma_{k_1} \circ \sigma_{k_6} = ((1, 0, -1) + (-1)^{(1,0,1)}(0, -1, -1), (1, 1, 0)) \circ \sigma_{k_6} \\ &= ((1, -1, 0) + (-1)^{(1,1,0)}(-1, -1, 0), 0) = ((2, 0, 0), 0) \\ u_2 &:= \sigma_{k_3} \circ \sigma_{k_2} \circ \sigma_{k_1} = ((1, 1, 0) + (-1)^{(1,1,0)}(1, 0, -1), (0, 1, 1)) \circ \sigma_{k_1} \\ &= ((0, 1, -1) + (-1)^{(0,1,1)}(0, -1, -1), 0) = ((0, 2, 0), 0) \\ u_3 &:= \sigma_{k_4} \circ \sigma_{k_3} \circ \sigma_{k_2} = ((0, 1, 1) + (-1)^{(0,1,1)}(1, 1, 0), (1, 0, 1)) \circ \sigma_{k_2} \\ &= ((1, 0, 1) + (-1)^{(1,0,1)}(1, 0, -1), 0) = ((0, 0, 2), 0) \\ u_4 &:= \sigma_{k_3} \circ \sigma_{k_4} = ((1, 1, 0) + (-1)^{(1,1,0)}(0, 1, 1), p_3 + p_1) = ((1, 0, 1), (1, 0, 1)) \end{aligned}$$

Setzt man  $u_4$  mehrfach mit Elementen aus  $\{u_1, u_2, u_3, u_1^{-1}, u_2^{-1}, u_3^{-1}\}$  zusammen, so ergibt sich, dass alle Elemente der Gestalt  $((1, 0, 1) + (2z_1, 2z_2, 2z_3), (1, 0, 1))$  (mit  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{Z}$ ) in  $U$  enthalten sind. Also gilt

$$\{(v, v \bmod 2) \mid v \in \mathbb{Z}^3, v \bmod 2 = (1, 0, 1)\} \subseteq U.$$

Analog erhält man durch Zusammensetzen von  $\sigma_{k_3}, \sigma_{k_4}$  bzw.  $(0, 0) \in U$  mit Elementen aus  $\{u_1, u_2, u_3, u_1^{-1}, u_2^{-1}, u_3^{-1}\}$ , dass alle Elemente  $(v, v \bmod 2)$  mit  $v \bmod 2 = (1, 1, 0)$ ,  $v \bmod 2 = (0, 1, 1)$  bzw.  $v \bmod 2 = (0, 0, 0)$  in  $U$  enthalten sind. Insgesamt ergibt sich

$$\tilde{U} = \{(v, v \bmod 2) \mid v \in \mathbb{Z}^3, v \bmod 2 \in \{(0, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}\} \subseteq U$$

und wegen  $U \subseteq \tilde{U}$  (siehe Bemerkung 4.36) auch

$$U = \tilde{U}.$$

Die gefüllten Würfel sind also genau die weißen Würfel. Das bedeutet auch: In jedem weißen Würfel befindet sich genau eine Kopie von  $f$ .

Die gerade durchgeführte Konstruktion von  $U$  hat auch eine geometrische Bedeutung. Ausgangspunkt sind die vier gefüllten Würfel:

$((0, 0, 0), (0, 0, 0))$ ,  $((1, 1, 0), (1, 1, 0))$ ,  $((1, 0, 1), (1, 0, 1))$  und  $((0, 1, 1), (0, 1, 1))$ .

Die zugehörigen Flächenstücke entstehen durch dreimaliges Spiegeln von  $f$  und liegen innerhalb eines Würfels der Kantenlänge zwei. Die Randkanten dieser vier Flächenstücke von  $F$  sind in Abb. 16 dargestellt.

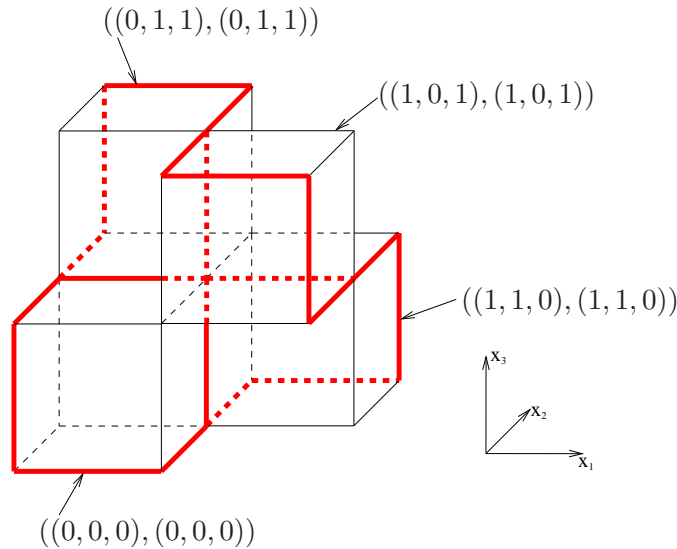


Abbildung 16: Randkanten von vier Kopien von  $f$ , die in  $F$  enthalten sind.

Die Gruppe  $U$  entsteht aus diesen vier gefüllten Würfeln durch Zusammensetzung mit Elementen der Gestalt  $(v, 0)$  mit  $v \in (2\mathbb{Z})^3$ . Eine solche Zusammensetzung ändert die zweite Komponente des Gruppenelements nicht und ist in der ersten Komponente eine Addition mit einem Vektor aus  $(2\mathbb{Z})^3$ .

Man beachte: Ein Element  $(v, v \bmod 2) \in U$  steht für einen gefüllten Würfel, wobei  $v$  die Lage des Würfels und  $v \bmod 2$  die Lage der Jordankurve und damit auch des Flächenstücks von  $F$  in diesem Würfel angibt.

Also entstehen alle gefüllten Würfel (bzw. alle Flächenstücke von  $F$ ) durch Verschiebung der vier angegebenen Würfel (bzw. Flächenstücke) um Vektoren aus  $(2\mathbb{Z})^3$ .

Die gesamte Fläche  $F$  entsteht somit aus den vier Flächenstücken in Abb. 16 durch Verschiebung um Vektoren aus  $(2\mathbb{Z})^3$ .

In diesem Beispiel erkennt man auch leicht, dass  $F$  eingebettet ist.

Wäre dies nicht der Fall, so müsste wegen Korollar 4.40 eine Ecke  $p$  der Würfelplasterung existieren, welche Ecke von mindestens acht gefüllten Würfeln ist. Das ist nicht möglich, da an jede Ecke nur vier weiße Würfel grenzen (vgl. Abb. 16) und schwarze Würfel nicht gefüllt sind.

Die letzte Argumentation lässt sich auf andere Jordankurven entlang von Kanten des dreidimensionalen Würfels  $W$  verallgemeinern.

**Satz 4.45.** *In Raumdimension drei ist  $F$  immer eingebettet.*

Diese Aussage ist von der gewählten Jordankurve  $J$  unabhängig. Die konkrete Wahl von  $f$  mit Rand  $J$  spielt sowieso keine Rolle.

**Beweis von Satz 4.45.** Angenommen die Behauptung ist falsch. Nach Korollar 4.40 gibt es dann eine Ecke  $p = (q_1 + \frac{1}{2}, q_2 + \frac{1}{2}, q_3 + \frac{1}{2})$  mit  $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{Z}$ , die Selbstschnitt von  $F$  ist, und mindestens acht gefüllte Würfel  $W^v$  (mit  $v \in \mathbb{Z}^n$ ), die  $p$  als Ecke enthalten. Der Würfel  $W^v$  enthält genau dann den Punkt  $p$ , wenn  $v_1 - q_1, v_2 - q_2, v_3 - q_3 \in \{0, 1\}$  gilt (vgl. Abb. 17).

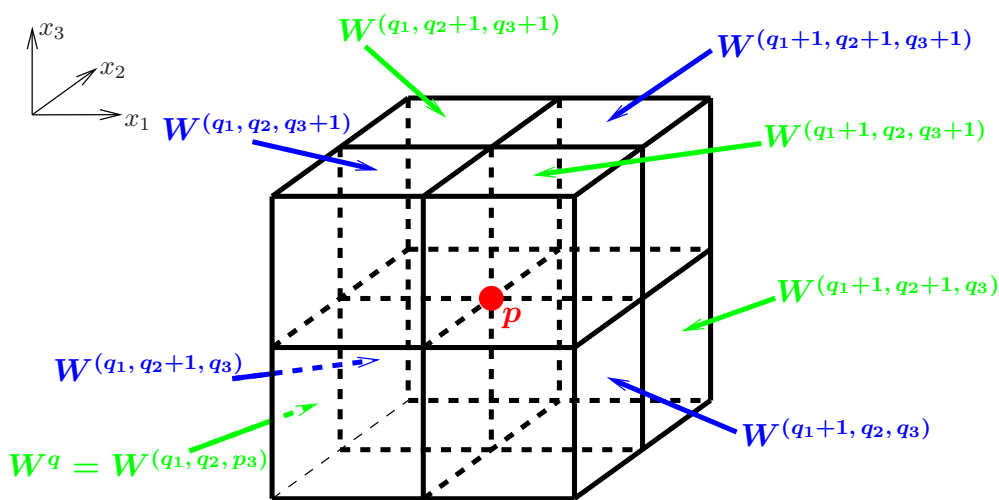


Abbildung 17: Die acht Würfel mit Ecke  $p$ .

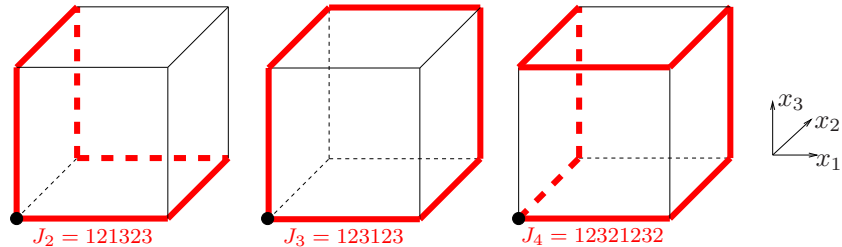
Damit ist  $p$  in genau acht Würfeln  $W^v$  (mit  $v \in \mathbb{Z}^n$ ) enthalten. Diese acht Würfel müssen also gefüllt sein.

Andererseits sind nur die Hälfte dieser acht Würfel weiß, während die andere Hälfte aus schwarzen Würfeln besteht. In Abb. 17 haben die vier blau gekennzeichneten Würfel eine Farbe und die vier grün gekennzeichneten Würfel die andere Farbe.

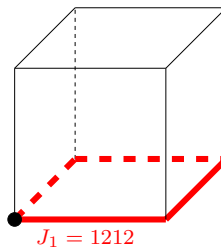
Wegen Korollar 4.43 sind die schwarzen Würfel aber nicht gefüllt. Dies bildet einen Widerspruch. w. z. b. w.

Da wir aus Abschnitt 3.6 bereits alle Jordankurven  $J$  in  $\mathbb{R}^3$  kennen, ergibt sich:

**Korollar 4.46.** *In  $\mathbb{R}^3$  erhält man durch das in diesem Kapitel beschriebene Vorgehen genau drei (bis auf Isometrie) verschiedene Flächen  $F$ , die alle eingebettet sind. Die zugehörigen Jordankurven entlang der Kanten von  $J$  sind:*



In Satz 3.19 taucht noch eine vierte Kurve  $J_1$  auf:



Diese enthält allerdings keine Kante in  $x_3$ -Richtung, weswegen sie in diesem Kapitel als Möglichkeit für  $J$  ausgeschlossen wurde.

Den Beweis von Satz 4.45 kann man nicht auf höhere Dimensionen verallgemeinern. Das liegt daran, dass sich für  $n > 3$  in der Nachbarschaft einer Ecke deutlich mehr gefüllte Würfel befinden können. In Dimension vier ist z. B. jede Ecke  $p$  in genau 16 Würfeln enthalten. Da vier eine gerade Dimension ist, könnten im schlechtesten Fall alle diese 16 Würfel gefüllt sein.

Tatsächlich wird sich herausstellen, dass die Existenz von Selbstschnitten in  $\mathbb{R}^n$  mit  $n > 3$  von der gewählten Jordankurve  $J$  abhängt. Es gibt also sowohl Jordankurven, die zu eingebetteten Flächen  $F$  führen, als auch Jordankurven, die zu nicht eingebetteten Flächen  $F$  führen.

Wegen Korollar 4.40 liegt nahe, dass sich die Wahrscheinlichkeit für Selbstschnitte erhöht, wenn mehr Würfel gefüllt sind. Um dieses Kriterium klar zu formulieren, würde man gern von der Anzahl gefüllter Würfel sprechen. Im Moment ergibt das allerdings noch keinen Sinn, da immer abzählbar unendlich viele gefüllte Würfel existieren. Deswegen will man von der Gruppe  $U$  zu einer Faktorgruppe  $U'$  übergehen, welche endlich ist. Die Anzahl der Elemente in  $U'$  wird dann eine "Dichte" der gefüllten Würfel, bzw. die Anzahl von gefüllten Würfeln innerhalb eines größeren Würfels der Kantenlänge

vier, beschreiben. Es stellt sich heraus, dass man von der Anzahl  $|U'|$  direkt auf die Existenz/Nicht-Existenz von Selbstschnitten von  $F$  schließen kann.

Der Übergang zu einer Faktorgruppe sollte natürlich so gestaltet sein, dass er mit der Struktur von  $F$  in  $\mathbb{R}^n$  zusammenpasst. Dort kann man aus  $F$  das Gitter von  $F$  herausfaktorisieren.

## 4.6 Das Gitter $\Lambda(F)$ der Fläche $F$

Normalerweise bezeichnet man als Gitter einer Fläche in  $\mathbb{R}^n$  alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^n$ , für die  $\varphi_v$  die Fläche bijektiv auf sich selbst abbildet. Zusätzlich kann verlangt werden, dass  $\varphi_v$  die Orientierung der Fläche  $F$  erhält. Da die Orientierung für die Einbettungsfrage keine Rolle spielt, soll die letzte Eigenschaft hier nicht verlangt werden.

Wegen der Struktur von  $F$  als Menge von Kopien von  $f$ , die alle in einem der Würfel  $W^v$  mit  $v \in \mathbb{Z}^n$  liegen, ist es sinnvoll nur Gittervektoren aus  $\mathbb{Z}^n$  zu betrachten. Dies führt zu einer leicht veränderten Definition des Gitters.

**Definition 4.47.** Das Gitter  $\Lambda(F)$  von  $F$  ist definiert durch

$$\Lambda(F) := \{v \in \mathbb{Z}^n \mid \varphi_v \text{ bildet } F \text{ bijektiv auf sich selbst ab}\}.$$

In Beispiel 4.44 wurde bereits erwähnt, dass die dortige Fläche invariant unter Verschiebungen aus  $(2\mathbb{Z})^3$  ist. Für dieses Beispiel gilt tatsächlich  $\Lambda(F) = (2\mathbb{Z})^3$ .

**Bemerkung 4.48.** Da jede Verschiebung um einen Vektor aus  $\mathbb{Z}^n$  bereits eine Bijektion des  $\mathbb{R}^n$  ist, ergibt sich für alle  $v \in \mathbb{Z}^n$ :

$$v \in \Lambda(F) \iff \varphi_v(F) = F.$$

Außerdem ist klar, dass  $\Lambda(F)$  eine additive Untergruppe von  $\mathbb{Z}^n$  ist.

Als diskrete additive Untergruppe des  $\mathbb{R}^n$  ist  $\Lambda(F)$  ein Gitter in dem Sinne, dass es  $\mathbb{R}$ -linear unabhängige Vektoren  $b_1, \dots, b_k \in \mathbb{Z}^n$  gibt, mit

$$\Lambda(F) = \left\{ \sum_{i=1}^k t_i b_i \mid t_i \in \mathbb{Z} \right\} = \langle \{b_1, \dots, b_k\} \rangle_{\mathbb{Z}^n}.$$

Die Zahl  $k \leq n$  hängt dabei nur von  $\Lambda(F)$  und nicht von der konkreten Wahl der  $b_i$  ab. Sie heißt der *Rang des Gitters*  $\Lambda(F)$ .

**Definition 4.49.** Die Fläche  $F$  heißt  $k$ -fach periodisch, wenn der Rang von  $\Lambda(F)$  gleich  $k$  ist.



Das Ziel dieses Abschnitts ist es zu zeigen, dass für jede Jordankurve  $J$ , die Gruppe  $(4\mathbb{Z})^n$  im Gitter von  $F$  enthalten ist. Damit sind die betrachteten Flächen  $F$  immer  $n$ -fach periodisch.

Ist diese Aussage gezeigt, kann man zu Faktorgruppen übergehen. Dadurch wird die Gruppenstruktur stark vereinfacht. Am Ende soll ein allgemeines Kriterium stehen, das Selbstschnitte von  $F$  mit der Dichte gefüllter Würfel bzw. der Gestalt des Gitters  $\Lambda(F)$  in Verbindung bringt.

An dieser Stelle soll eine erste Beziehung zwischen gefüllten Würfeln und dem Gitter der Fläche  $F$  gezeigt werden. Motiviert wird diese Aussage durch folgende Überlegungen:

Wenn zwei Kopien  $f_1, f_2 \subset F$  von  $f$  durch eine Verschiebung  $\varphi_v$  aufeinander abgebildet werden, dann gilt  $v \in \Lambda(F)$ . Der Grund hierfür ist, dass man die Fläche  $F$  aus  $f_1$  bzw.  $f_2$  durch Schwarz-Spiegelungen genauso konstruieren kann wie aus  $f$ .

In dieser Situation gehört zu  $f_1$  und  $f_2$  jeweils ein Element von  $U$ . Diese beiden Elemente von  $U$  haben die gleiche zweite Komponente, denn diese zweite Komponente kodiert die Lage des Flächenstücks in einem Würfel, ist also wegen  $\varphi_v(f_1) = f_2$  für beide Flächenstücke gleich.

Beachtet man weiterhin, dass die erste Komponente der Elemente von  $U$  die Lage der Würfel (mit Flächenstück) in  $\mathbb{R}^n$  angibt, so erhält man die Behauptung:

**Satz 4.50.** *Es seien  $(v_1, d), (v_2, d) \in U$  zwei Elemente, deren zweite Komponente übereinstimmt. Dann gilt*

$$v_1 - v_2 \in \Lambda(F).$$

**Beweis.** Da  $(v_1, d)$  bzw.  $(v_2, d)$  als Elemente von  $U$  gefüllte Würfel sind, gibt es zwei Flächenstücke  $f_1 := \chi((v_1, d))(f)$  und  $f_2 := \chi((v_2, d))(f)$ , die in  $F$  enthalten sind. Für diese gilt:

$$(4.16) \quad \varphi_{v_1 - v_2}(f_2) \stackrel{\text{Def. } \chi}{=} (\varphi_{v_1 - v_2} \circ \varphi_{v_2} \circ d)(f) = (\varphi_{v_1} \circ d)(f) \stackrel{\text{Def. } \chi}{=} f_1.$$

Also entsteht die Fläche  $F$  sowohl aus  $f_1$  als auch aus  $f_2$  durch wiederholtes Schwarz-Spiegeln (siehe Bemerkung 4.25) und die Verschiebung  $\varphi_{v_1 - v_2}$  bildet  $f_1$  auf  $f_2$  ab. Die Anschauung besagt, dass daraus  $v_1 - v_2 \in \Lambda(F)$  folgt. Dies soll hier noch formal bewiesen werden. Dazu wird zunächst  $\varphi_{v_1 - v_2}(F) \subseteq F$  gezeigt.

Es sei  $x \in F$  beliebig. Da  $F$  aus  $f_2$  durch wiederholtes Schwarz-Spiegeln entsteht, gibt es Kanten  $k_1, \dots, k_m$  der zu  $W$  gehörigen Würfelplasterung, mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} x &\in (s_{k_m} \circ \dots \circ s_{k_1})(f_2) \\ k_1 &\subset f_2 \text{ und} \\ k_i &\subset (s_{k_{i-1}} \circ \dots \circ s_{k_1})(f_2) \text{ für alle } 2 \leq i \leq m. \end{aligned}$$

Durch Anwenden der Abbildung  $\varphi_{v_1-v_2}$  ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}
 \varphi_{v_1-v_2}(x) &\in (\varphi_{v_1-v_2} \circ s_{k_m} \circ \dots \circ s_{k_1})(f_2) \\
 &\stackrel{(4.2)}{=} (s_{\varphi_{v_1-v_2}(k_m)} \circ \dots \circ s_{\varphi_{v_1-v_2}(k_1)} \circ \varphi_{v_1-v_2})(f_2) \\
 &\stackrel{(4.16)}{=} (s_{\varphi_{v_1-v_2}(k_m)} \circ \dots \circ s_{\varphi_{v_1-v_2}(k_1)})(f_1), \\
 \varphi_{v_1-v_2}(k_1) &\subset \varphi_{v_1-v_2}(f_2) \stackrel{(4.16)}{=} f_1 \text{ und} \\
 \varphi_{v_1-v_2}(k_i) &\subset (\varphi_{v_1-v_2} \circ s_{k_{i-1}} \circ \dots \circ s_{k_1})(f_2) \\
 &\stackrel{(4.2)}{=} (s_{\varphi_{v_1-v_2}(k_{i-1})} \circ \dots \circ s_{\varphi_{v_1-v_2}(k_1)} \circ \varphi_{v_1-v_2})(f_2) \\
 &\stackrel{(4.16)}{=} (s_{\varphi_{v_1-v_2}(k_{i-1})} \circ \dots \circ s_{\varphi_{v_1-v_2}(k_1)})(f_1) \text{ f\"ur alle } 2 \leq i \leq m.
 \end{aligned}$$

Da  $F$  aus  $f_1$  durch wiederholtes Schwarz-Spiegeln entsteht, folgt aus diesen drei Aussagen:  $\varphi_{v_1-v_2}(x) \in F$ .

Damit ist  $\varphi_{v_1-v_2}(F) \subseteq F$  gezeigt. Durch Vertauschen der Rollen von  $f_1$  und  $f_2$  bzw.  $v_1$  und  $v_2$  erhält man  $\varphi_{v_2-v_1}(F) \subseteq F$ , woraus sich durch Anwendung von  $\varphi_{v_1-v_2}$  die Aussage  $F \subseteq \varphi_{v_1-v_2}(F)$  ergibt.

Es ist also  $\varphi_{v_1-v_2}(F) = F$  gezeigt. Damit gilt auch  $v_1 - v_2 \in \Lambda(F)$  (siehe Bemerkung 4.48). **w. z. b. w.**

**Bemerkung 4.51.** Wegen  $U \subseteq \tilde{U} = \{(v, v \bmod 2) \mid v \in \mathbb{Z}^n, v \bmod 2 \in H\}$ , gilt in der Situation von Satz 4.50:  $v_1 \bmod 2 = v_2 \bmod 2$ . Insbesondere ist

$$v_1 - v_2 \in (2\mathbb{Z})^n.$$

In diesem Sinne sind Elemente aus  $(2\mathbb{Z})^n$  kanonische Kandidaten für Gittervektoren. Im Folgenden werden nur Gittervektoren aus  $(2\mathbb{Z})^n$  eine Rolle spielen.

Welche dieser kanonischen Vektoren tatsächlich Gittervektoren sind, erkennt man an der Gruppe  $U$ .

**Korollar 4.52.** *Für jeden Vektor  $v \in (2\mathbb{Z})^n$  gilt*

$$v \in \Lambda(F) \iff (v, 0) \in U.$$

*Ist eine dieser Bedingungen erfüllt, so ist  $W^v$  ein gefüllter Würfel, d. h. in ihm liegt eine Kopie  $f_1 \subset F$  von  $f$  mit  $f_1 = \varphi_v(f)$ .*

Diese Aussage folgt aus Satz 4.50, wenn man beachtet, dass  $(0, 0) \in U$  immer ein gefüllter Würfel ist.

### 4.6.1 $(4\mathbb{Z})^n$ ist im Gitter $\Lambda(F)$ der Fläche $F$ enthalten

**Theorem 4.53.** *Es gilt*

$$(4\mathbb{Z})^n \subseteq \Lambda(F).$$

Diese Aussage ist sowohl von der Dimension  $n$  als auch von der Wahl der Jordankurve  $J$  unabhängig. Auch die konkrete Wahl einer Fläche  $f$  mit Rand  $J$  spielt hier (wie immer) keine Rolle.

Theorem 4.53 wäre allerdings falsch, wenn man auch Jordankurven  $J$  zulassen würde, die nicht in jede Koordinatenrichtung eine Kante durchlaufen.

**Beweis von Theorem 4.53.** Im ersten Teil des Beweises wird beschrieben, wie man aus zwei beliebigen Erzeugern von  $U$  ein Element aus  $\Lambda(F)$  konstruieren kann. Dazu wird Satz 4.50 verwendet.

Danach zeigt man durch eine geeignete Wahl der beiden Erzeuger von  $U$ , dass  $4e_i \in \Lambda(F)$  für alle  $1 \leq i \leq n$  gilt. Dies beweist die Aussage des Theorems, da  $\Lambda(F)$  eine additive Untergruppe von  $\mathbb{Z}^n$  ist.

Es seien  $(v, v \bmod 2)$  und  $(\tilde{v}, \tilde{v} \bmod 2)$  zwei beliebige Erzeuger von  $U$ . Diese gehören zu zwei Kanten  $k_1$  und  $k_2$  aus  $J$  (siehe Definition 4.35). Damit gilt  $v_i, \tilde{v}_i \in \{0, \pm 1\}$  für alle  $1 \leq i \leq n$ , wobei genau eines der  $v_i$  und genau eines der  $\tilde{v}_i$  Null ist.

Durch Zusammensetzen der beiden Erzeuger von  $U$  erhält man

$$\begin{aligned} (v, v \bmod 2) \circ (\tilde{v}, \tilde{v} \bmod 2) &= (v + (-1)^{v \bmod 2} \tilde{v}, v \bmod 2 + \tilde{v} \bmod 2) \in U \text{ und} \\ (\tilde{v}, \tilde{v} \bmod 2) \circ (v, v \bmod 2) &= (\tilde{v} + (-1)^{\tilde{v} \bmod 2} v, \tilde{v} \bmod 2 + v \bmod 2) \in U. \end{aligned}$$

Da die zweiten Komponenten dieser beiden gefüllten Würfel übereinstimmen, folgt aus Satz 4.50:

$$(4.17) \quad w := v + (-1)^{v \bmod 2} \tilde{v} - \tilde{v} - (-1)^{\tilde{v} \bmod 2} v \in \Lambda(F).$$

Durch eine Fallunterscheidung ergeben sich die Koordinaten dieses Vektors zu

$$(4.18) \quad w_i = \begin{cases} 0 & \text{für } v_i = 0 \text{ oder } \tilde{v}_i = 0 \text{ oder } v_i = \tilde{v}_i \\ \pm 4 & \text{für } v_i = -\tilde{v}_i \in \{\pm 1\}. \end{cases}$$

Nun werden die Kanten  $k_1$  und  $k_2$  so gewählt, dass sich  $w = \pm 4e_i \in \Lambda(F)$  ergibt. Zunächst behandelt man den Fall  $i = 1$ .

Dazu sei  $k$  eine Kante von  $J$  in  $x_1$ -Richtung. Die Kante  $k$  hat also die Gestalt

$$k = \left\{ (t, x_2, x_3, \dots, x_n) \mid t \in \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \right\} \text{ mit } x_i \in \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\} \text{ für alle } 2 \leq i \leq n.$$

Weiter seien  $k_1$  und  $k_2$  die Kanten, welche  $J$  direkt vor und direkt nach  $k$  durchläuft. Für die Richtungen, in die  $k_1$  und  $k_2$  verlaufen, gibt es zwei Fälle.

1.Fall:  $k_1$  und  $k_2$  verlaufen in die gleiche Koordinatenrichtung. O. B. d. A. sei dies die  $x_2$ -Richtung.

Da  $k_1$  und  $k_2$  in den Endpunkten von  $k$  beginnen, gilt:

$$k_1 = \left\{ \left( -\frac{1}{2}, t, x_3, \dots, x_n \right) \mid t \in \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \right\} \text{ und } k_2 = \left\{ \left( \frac{1}{2}, t, x_3, \dots, x_n \right) \mid t \in \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \right\}.$$

Für die zugehörigen Elemente  $(v, v \bmod 2)$  und  $(\tilde{v}, \tilde{v} \bmod 2)$  von  $U$  ergibt sich

$$v = (-1, 0, 2x_3, \dots, 2x_n) \text{ und } \tilde{v} = (1, 0, 2x_3, \dots, 2x_n).$$

Aus (4.18) folgt somit  $w \in \{\pm 4e_1\}$ . Da  $\Lambda(F)$  eine additive Gruppe ist und (4.17) gilt, ergibt sich

$$4e_1 \in \Lambda(F).$$

In diesem ersten Fall gilt sogar noch mehr. Wegen  $v \bmod 2 = \tilde{v} \bmod 2$  kann man Satz 4.50 auch direkt auf die Elemente  $(\tilde{v}, \tilde{v} \bmod 2)$  und  $(v, v \bmod 2)$  aus  $U$  anwenden. Es folgt

$$\tilde{v} - v = 2e_1 \in \Lambda(F).$$

2.Fall:  $k_1$  und  $k_2$  verlaufen in verschiedene Koordinatenrichtung. O. B. d. A. verlaufe  $k_1$  in  $x_2$ -Richtung und  $k_2$  in  $x_3$ -Richtung.

In diesem Fall gilt:

$$k_1 = \left\{ \left( -\frac{1}{2}, t, x_3, \dots, x_n \right) \mid t \in \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \right\} \text{ und } k_2 = \left\{ \left( \frac{1}{2}, x_2, t, \dots, x_n \right) \mid t \in \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \right\}.$$

Für die zugehörigen Elemente  $(v, v \bmod 2)$  und  $(\tilde{v}, \tilde{v} \bmod 2)$  von  $U$  ergibt sich

$$v = (-1, 0, 2x_3, \dots, 2x_n) \text{ und } \tilde{v} = (1, 2x_2, 0, 2x_4, \dots, 2x_n).$$

Aus (4.18) folgt somit  $w \in \{\pm 4e_1\}$ . Da  $\Lambda(F)$  eine additive Gruppe ist und (4.17) gilt, ergibt sich

$$4e_1 \in \Lambda(F).$$

Wählt man für  $k$  eine Kante in eine andere Koordinatenrichtung, so folgt auf analoge Weise

$$4e_i \in \Lambda(F) \text{ für alle } 1 \leq i \leq n.$$

**w. z. b. w.**

Das Gitter  $(4\mathbb{Z})^n$  hat den Rang  $n$ . Wegen Theorem 4.53 ist der Rang von  $\Lambda(F)$  also mindestens  $n$ . Da der Rang nicht größer als die Raumdimension sein kann, folgt damit:

**Korollar 4.54.** *Die Fläche  $F$  ist  $n$ -fach periodisch.*

Theorem 4.53 bedeutet, dass es für alle geometrischen Eigenschaften ausreicht, die Fläche  $F$  in einem Würfel der Kantenlänge vier zu betrachten. Die gesamte Fläche ergibt sich aus einem solchen Teilstück durch Verschiebung um Vektoren aus  $(4\mathbb{Z})^n$ . Alternativ kann man auch  $F/(4\mathbb{Z})^n$  betrachten und erhält eine Fläche im Torus  $\mathbb{R}^n/(4\mathbb{Z})^n$  (wobei nicht klar ist, ob diese Fläche orientierbar ist).

Auf ähnliche Weise soll auch mit der Gruppe  $U$  verfahren werden. Das heißt, man will zu einer Faktorgruppe  $U'$  übergehen, deren anschauliche Bedeutung ist, dass nur noch gefüllte Würfel innerhalb eines Würfels der Kantenlänge vier betrachtet werden.

## 4.7 Übergang zu Faktorgruppen

Es sei

$$W_4 := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid -\frac{1}{2} \leq x_i \leq \frac{7}{2} \quad \forall 1 \leq i \leq n \right\} = \bigcup_{\substack{v \in \mathbb{Z}^n \\ 0 \leq v_i \leq 3}} W^v .$$

Dann ist die gesamte Fläche  $F$  durch das Teilstück  $F \cap W_4$  eindeutig festgelegt. Außerdem ergeben sich alle gefüllten Würfel aus den gefüllten Würfeln innerhalb von  $W_4$  durch Verschiebung um Vektoren aus  $(4\mathbb{Z})^n$ . Weiterhin ist die Existenz von Selbstschnitten von  $F$  nur davon abhängig, welche Würfel gefüllt sind. Kennt man alle gefüllten Würfel innerhalb von  $W_4$ , kann man also angeben, ob  $F$  eingebettet ist oder nicht.

Deswegen soll eine Faktorgruppe  $U'$  von  $U$  so definiert werden, dass Elemente von  $U'$  gefüllte Würfel innerhalb von  $W_4$  repräsentieren. Wegen Theorem 4.53 ist es sinnvoll beim Übergang von  $U$  zu  $U'$  Elemente  $(v, v \bmod 2) \in U$  und  $(\tilde{v}, \tilde{v} \bmod 2) \in U$  genau dann zu identifizieren, wenn  $v - \tilde{v} \in (4\mathbb{Z})^n$  gilt. Das zugehörige Gruppenelement von  $U'$  sollte dann  $(v \bmod 4, v \bmod 2)$  sein, denn der gefüllte Würfel  $W^{v \bmod 4}$  liegt in  $W_4$ .

Im Folgenden soll beschrieben werden, wie man diese Gruppe  $U'$  formal erhält.

**Definition 4.55.** *Es sei*

$$N := \{(v, 0) \mid v \in (4\mathbb{Z})^n\} \subseteq G$$

und

$$G' := \mathbb{Z}_4^n \rtimes H ,$$

wobei die Zusammensetzung in  $G'$  analog zu der in  $G$  definiert ist. Für zwei Elemente  $(v, d), (\tilde{v}, \tilde{d}) \in G'$  gilt also

$$(v, d) \circ_{G'} (\tilde{v}, \tilde{d}) = (v +_{\mathbb{Z}_4^n} (-1)^d \tilde{v}, d +_{\mathbb{Z}_2^n} \tilde{d}) .$$

Wenn  $N$  aus  $G$  herausfaktorisiert wird, erwartet man die Gruppe  $G'$  als Ergebnis. Diese Aussage wird nun verifiziert.

Zunächst stellt man fest:

Wegen  $(v, 0) \circ_G (w, 0) = (v + w, 0)$  und  $(v, 0)^{-1} = (-v, 0)$  (für alle  $v, w \in \mathbb{Z}^n$ ) ist  $N$  ein Normalteiler von  $G$  und die Faktorgruppe

$$G/N := \{gN \mid g \in G\}$$

existiert. Aus  $(4\mathbb{Z})^n \subseteq \Lambda(F)$  zusammen mit Korollar 4.52 folgt außerdem

$$N \subset U \subseteq \tilde{U} .$$

Damit sind auch die Gruppen  $U/N$  und  $\tilde{U}/N$  wohldefiniert. Diese Gruppen kann man auf natürliche Weise als Untergruppen von  $G/N$  auffassen. Also gilt:

$$U/N \subseteq \tilde{U}/N \subset G/N .$$

**Satz 4.56.** *Die Abbildung*

$$\Psi: G/N \rightarrow G', \quad (v, d)N \mapsto (v \bmod 4, d)$$

*ist ein Gruppenisomorphismus.*

**Beweis.** Zu zeigen ist, dass  $\Psi$  wohldefiniert, injektiv, surjektiv und ein Gruppenhomomorphismus ist. Die Surjektivität von  $\Psi$  folgt aus den Definitionen von  $G$  und  $G'$ . Die anderen Eigenschaften müssen nachgerechnet werden.

Zur Wohldefiniertheit:

Für alle  $(v, d), (\tilde{v}, \tilde{d}) \in G$  mit  $(v, d)N = (\tilde{v}, \tilde{d})N$  gilt:

$$\begin{aligned} N \ni (\tilde{v}, \tilde{d})^{-1} \circ (v, d) &= ( -(-1)^{\tilde{d}} \tilde{v}, \tilde{d} ) \circ (v, d) \\ &= ( -(-1)^{\tilde{d}} \tilde{v} + (-1)^{\tilde{d}} v, d + \tilde{d} ) \\ &= ( (-1)^{\tilde{d}} (v - \tilde{v}), d + \tilde{d} ). \end{aligned}$$

Um dies zu erfüllen, muss  $d = \tilde{d}$  und  $v - \tilde{v} \in (4\mathbb{Z})^n$  gelten. Daraus ergibt sich:

$$\Psi((v, d)N) = (v \bmod 4, d) = (\tilde{v} \bmod 4, \tilde{d}) = \Psi((\tilde{v}, \tilde{d})N).$$

Also ist  $\Psi$  wohldefiniert.

Zur Injektivität:

Für alle  $(v, d), (\tilde{v}, \tilde{d}) \in G$  mit  $\Psi((v, d)N) = \Psi((\tilde{v}, \tilde{d})N)$  gilt:

$$\begin{aligned} (v \bmod 4, d) &= (\tilde{v} \bmod 4, \tilde{d}) \\ \implies v - \tilde{v} &\in (4\mathbb{Z})^4 \text{ und } d = \tilde{d} \\ \implies (\tilde{v}, \tilde{d})^{-1} \circ (v, d) &= ( -(-1)^{\tilde{d}} \tilde{v}, \tilde{d} ) \circ (v, d) \\ &= ( -(-1)^{\tilde{d}} \tilde{v} + (-1)^{\tilde{d}} v, d + \tilde{d} ) = ( (-1)^{\tilde{d}} (v - \tilde{v}), 0 ) \in N \\ \implies (v, d)N &= (\tilde{v}, \tilde{d})N. \end{aligned}$$

Also ist  $\Psi$  injektiv.

Außerdem ist  $\Psi$  ein Gruppenhomomorphismus, denn für alle  $(v, d), (\tilde{v}, \tilde{d}) \in G$  gilt:

$$\begin{aligned} \Psi((v, d)N \circ_{G/N} (\tilde{v}, \tilde{d})N) &= \Psi(((v, d) \circ_G (\tilde{v}, \tilde{d}))N) \\ &= \Psi((v +_{\mathbb{Z}^n} (-1)^{\tilde{d}} \tilde{v}, d +_{\mathbb{Z}_2^n} \tilde{d})N) \\ &= (v \bmod 4 +_{\mathbb{Z}_4^n} (-1)^{\tilde{d}} \tilde{v} \bmod 4, d +_{\mathbb{Z}_2^n} \tilde{d}) \\ &= (v \bmod 4, d) \circ_{G'} (\tilde{v} \bmod 4, \tilde{d}) \\ &= \Psi((v, d)N) \circ_{G'} \Psi((\tilde{v}, \tilde{d})N) \end{aligned}$$

**w. z. b. w.**

**Definition 4.57.** Es seien  $\tilde{U}' := \Psi(\tilde{U}/N)$  und  $U' := \Psi(U/N)$ .

Aus den bereits gezeigten Eigenschaften von  $U, \tilde{U}$  und  $G$  folgt:

**Korollar 4.58.**  $U'$  und  $\tilde{U}'$  sind Untergruppen von  $G'$  mit  $U' \subseteq \tilde{U}'$ , wobei

$$\tilde{U}' = \{(v \bmod 4, v \bmod 2) \mid v \in \mathbb{Z}^n, v \bmod 2 \in H\} = \{(v, v \bmod 2) \mid v \in \mathbb{Z}_4^n, v \bmod 2 \in H\}$$

gilt.

Für die geometrische Interpretation der Elemente aus  $U'$  (bzw.  $\tilde{U}'$ ) werden Vektoren  $v \in \mathbb{Z}_4^n$  durch den Übergang zu ihren Repräsentanten aus  $\{0, 1, 2, 3\}^n$  als Elemente von  $\mathbb{Z}^n$  aufgefasst. Dadurch kann man (analog zur Gruppe  $\tilde{U}$ ) jedem Element  $(v, v \bmod 2) \in \tilde{U}'$  den Würfel  $W^v \subset W_4$  zuordnen.

**Bemerkung 4.59.** Für jedes Element  $(v, v \bmod 2) \in \tilde{U}'$  gilt:

$$W^v \text{ ist gefüllt} \iff (v, v \bmod 2) \in U'.$$

Aus  $(v, v \bmod 2) \in U'$  folgt außerdem:  $(v + z, v \bmod 2) \in U$  für alle  $z \in (4\mathbb{Z})^n$ . In der letzten Relation wurde  $v$  als Element von  $\mathbb{Z}^n$  aufgefasst. Für  $z = 0$  erhält man das zum gefüllten Würfel  $W^v$  gehörige Element  $(v, v \bmod 2) \in U$ .

Die Elemente von  $U'$  beschreiben also genau die gefüllten Würfel in  $W_4$ . Wie in der Gruppe  $U$  steht die erste Komponente eines Elements von  $U'$  für die Lage des Würfels in  $\mathbb{R}^n$  und die zweite Komponente für die Lage des Flächenstücks von  $F$  in diesem Würfel. Dabei ist die zweite Komponente durch die erste eindeutig bestimmt.

Im Folgenden wird auch  $U'$  als die *Gruppe der gefüllten Würfel* bezeichnet.

Die Erzeuger von  $U'$  erhält man als Bilder der Erzeuger von  $U$  unter  $\Psi$ . Das heißt, jeder Kante von  $J$  wird ein Erzeuger von  $U'$  zugeordnet. Diese Erzeuger haben die Gestalt  $(v, p_i)$ , wobei die  $i$ -te Koordinate von  $v$  Null ist, während alle anderen Koordinaten gleich Eins oder Drei sind. Außerdem gehören zu verschiedenen Kanten von  $J$  auch verschiedene Erzeuger von  $U'$ .

Durch den Übergang zur Faktorgruppe werden alle betrachteten Gruppen endlich. Insbesondere ist die Anzahl  $|U'|$  der gefüllten Würfel eine natürliche Zahl. Es wird sich herausstellen, dass  $F$  genau dann Selbstschnitte hat, wenn  $|U'|$  groß genug ist. Um  $|U'|$  aus  $J$  zu bestimmen, muss man allerdings einen Zusammenhang dieser Anzahl zum Gitter  $\Lambda(F)$  herstellen.

Für diesen Zusammenhang spielen die Gitterelemente aus  $(4\mathbb{Z})^n$ , welche ja unabhängig von  $J$  in  $\Lambda(F)$  liegen, keine Rolle. Deswegen betrachtet man auch auf Ebene des Gitters eine Faktorgruppe.

**Definition 4.60.** Es sei

$$\Lambda'(F) := \Lambda/(4\mathbb{Z})^n = \{v \bmod 4 \mid v \in \Lambda\} \subseteq \mathbb{Z}_4^n.$$

Diese Definition ist möglich, da aus Theorem 4.53 folgt, dass  $(4\mathbb{Z})^n$  ein Normalteiler von  $\Lambda(F)$  ist.

Es wurde bereits erwähnt, dass Elemente aus  $(2\mathbb{Z})^n$  kanonische Gittervektoren sind (siehe Bemerkung 4.51). Auch nach dem Übergang zur Faktorgruppe spielen die Elemente aus  $\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n$  die entscheidende Rolle.

Die Gruppe  $\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n$  hat offensichtlich folgende Eigenschaften.

**Satz 4.61.**  $\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n$  ist eine Untergruppe der abelschen Gruppe  $(2\mathbb{Z}_4)^n$ . Außerdem ist jedes Element aus  $\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n$  selbstinvers. Damit ist  $|\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n|$  eine Zweierpotenz und es gilt  $|\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n| \leq |(2\mathbb{Z}_4)^n| = 2^n$ .

Durch den Übergang zur Faktorgruppe erhält  $U' \subseteq \tilde{U}'$  ähnliche Eigenschaften.

**Satz 4.62.**  $\tilde{U}'$  ist eine endliche abelsche Gruppe. Außerdem ist jedes Element aus  $\tilde{U}'$  selbstinvers. Die Anzahl  $|\tilde{U}'|$  ist in geraden Dimensionen gleich  $2^{2n}$  und in ungeraden Dimensionen gleich  $2^{2n-1}$ .

Ohne den Übergang zur Faktorgruppe hat man diese Eigenschaften nicht zur Verfügung. Dass die Gruppe  $\tilde{U}$  nicht abelsch ist, erkennt man z. B. am Beweis von Theorem 4.53. Dort wurde die Existenz von Elementen  $\sigma_1, \sigma_2 \in U \subset \tilde{U}$  mit  $(\sigma_1 \circ \sigma_2)_1 - (\sigma_2 \circ \sigma_1)_1 = 4e_i$  gezeigt. Diese Elemente  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  vertauschen also in  $\tilde{U}$  nicht miteinander, in  $\tilde{U}'$  vertauschen sie aber.

Da Schwarz-Spiegelungen selbstinvers sind, wird die Gruppe  $\tilde{U}$  von selbstinversen Elementen erzeugt. Wegen der fehlenden Kommutativität kann  $\tilde{U}$  dennoch Elemente enthalten, die nicht selbstinvers sind. Tatsächlich existieren solche Elemente. Zum Beispiel ist das Inverse von

$$\sigma = ((0, 1, \dots, 1), p_1) \circ_{\tilde{U}} ((1, 0, -1, \dots, -1), p_2) = ((1, 1, 2, \dots, 2), p_1 + p_2)$$

gleich

$$\sigma^{-1} = (-(-1)^{p_1+p_2}(1, 1, 2, \dots, 2), p_1 + p_2) = ((1, 1, -2, \dots, -2), p_1 + p_2) \neq \sigma.$$

**Beweis von Satz 4.62.** Aus Korollar 4.58 ist

$$\tilde{U}' = \{(v, v \bmod 2) \mid v \in \mathbb{Z}_4^n, v \bmod 2 \in H\}$$

bekannt. In geraden Dimensionen ist weiterhin  $H = \mathbb{Z}_2^n$  (siehe Satz 4.41). In diesem Fall gilt also

$$|\tilde{U}'| = |\{(v, v \bmod 2) \mid v \in \mathbb{Z}_4^n\}| = 4^n = 2^{2n}.$$

In ungeraden Dimensionen ist  $H = \{a \in \mathbb{Z}_2^n \mid \sum_{i=1}^n a_i =_{\mathbb{Z}_2} 0\}$  (siehe Satz 4.41). In diesem Fall ergibt sich also

$$|\tilde{U}'| = \left| \left\{ (v, v \bmod 2) \mid v \in \mathbb{Z}_4^n, \left( \sum_{i=1}^n v_i \right) \bmod 2 = 0 \right\} \right| = \frac{1}{2} \cdot 4^n = 2^{2n-1}.$$



Zum Beweis der Kommutativität seien  $(v, v \bmod 2)$  und  $(\tilde{v}, \tilde{v} \bmod 2)$  zwei beliebige Elemente von  $\tilde{U}'$ . Für diese gilt

$$\begin{aligned} (v, v \bmod 2) \circ (\tilde{v}, \tilde{v} \bmod 2) &= (v +_{\mathbb{Z}_4^n} (-1)^{v \bmod 2} \tilde{v}, v \bmod 2 + \tilde{v} \bmod 2) \text{ und} \\ (\tilde{v}, \tilde{v} \bmod 2) \circ (v, v \bmod 2) &= (\tilde{v} +_{\mathbb{Z}_4^n} (-1)^{\tilde{v} \bmod 2} v, v \bmod 2 + \tilde{v} \bmod 2). \end{aligned}$$

Somit ist zu zeigen:

$$(4.19) \quad v + (-1)^{v \bmod 2} \tilde{v} - \tilde{v} - (-1)^{\tilde{v} \bmod 2} v = v - (-1)^{\tilde{v} \bmod 2} v - (\tilde{v} - (-1)^{v \bmod 2} \tilde{v}) = 0 \text{ in } \mathbb{Z}_4^n.$$

Für die  $i$ -te Koordinate von  $v - (-1)^{\tilde{v} \bmod 2} v$  (in  $\mathbb{Z}_4$ ) errechnet man

$$(v - (-1)^{\tilde{v} \bmod 2} v)_i = \begin{cases} 0 & \text{für } v_i \bmod 2 = 0 \text{ oder } \tilde{v}_i \bmod 2 = 0, \\ 2v_i = 2 & \text{für } v_i \bmod 2 = \tilde{v}_i \bmod 2 = 1. \end{cases}$$

Die rechte Seite der Gleichung ist symmetrisch in  $v$  und  $\tilde{v}$ , woraus sich ergibt:

$$(v - (-1)^{\tilde{v} \bmod 2} v)_i = (\tilde{v} - (-1)^{v \bmod 2} \tilde{v})_i.$$

Das zeigt (4.19) und damit die Kommutativität von  $\tilde{U}'$ .

Jedes Element  $(v, v \bmod 2) \in \tilde{U}'$  ist selbstinvers, denn es gilt

$$\begin{aligned} (v, v \bmod 2) \circ (v, v \bmod 2) &= (v +_{\mathbb{Z}_4^n} (-1)^{v \bmod 2} v, v \bmod 2 + v \bmod 2) \\ &= (v +_{\mathbb{Z}_4^n} (-1)^{v \bmod 2} v, 0) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (v +_{\mathbb{Z}_4^n} (-1)^{v \bmod 2} v)_i &= \begin{cases} v_i - v_i = 0 & \text{für } v_i \bmod 2 = 1 \\ v_i + v_i = 0 + 0 = 0 & \text{für } v_i = 0 \\ v_i +_{\mathbb{Z}_4^n} v_i = 2 +_{\mathbb{Z}_4^n} 2 = 0 & \text{für } v_i = 2 \end{cases} \\ &= 0. \end{aligned}$$

**w. z. b. w.**

Da  $U'$  eine Untergruppe von  $\tilde{U}'$  ist, ergibt sich aus Satz 4.62:

**Korollar 4.63.** *Die Gruppe  $U'$  ist abelsch und jedes Element von  $U'$  ist selbstinvers. Weiter ist die Anzahl  $|U'|$  der gefüllten Würfel eine Zweierpotenz  $2^k$ , wobei in geraden Dimensionen  $k \leq 2n$  und in ungeraden Dimensionen  $k \leq 2n - 1$  gilt.*

## 4.8 Die Anzahl gefüllter Würfel und die Einbettungsfrage für $F$

Um die Beziehung zwischen  $|U'|$  und der Einbettung von  $F$  zu motivieren, betrachtet man nochmals die Situation in Dimension drei:

Für  $n = 3$  beträgt die Anzahl  $|U'|$  höchstens  $2^{2n-1} = 2^5$ . Ist diese Maximalzahl erreicht, dann sind alle weißen Würfel gefüllt. Das wiederum bedeutet: In jedem Würfel der Kantenlänge zwei liegen genau vier gefüllte Würfel. Außerdem ist bekannt, dass in Dimension drei keine Selbstschnitte von  $F$  auftreten (vgl. Satz 4.45).

Das führt zu der Vermutung, dass  $F$  auch in höheren Dimensionen genau dann eingebettet ist, wenn in einem Würfel der Kantenlänge zwei durchschnittlich vier gefüllte Würfel liegen. Diese Vermutung gründet sich weiterhin auf die Tatsachen:

- Die Würfel  $W^v$  (mit  $v \in \mathbb{Z}^n$ ), welche einen Punkt  $p$  als Ecke enthalten, bilden zusammen einen Würfel der Kantenlänge zwei.
- Ist  $p \in F$  eine Ecke der zu  $W$  gehörigen Würfelpflasterung, so sind  $4 \cdot m_p$  Nachbarwürfel von  $p$  so gefüllt, dass  $p$  Randpunkt der entsprechenden Flächenstücke ist. Dabei ist  $m_p$  eine natürliche Zahl (siehe Bemerkung 4.24 und Korollar 4.23). Für Selbstschnitte  $p$  gilt weiterhin  $m_p \geq 2$  (vgl. Satz 4.22). Die Fläche  $F$  kann also nur eingebettet sein, wenn  $m_p = 1$  für alle Ecken  $p \in F$  der zu  $W$  gehörigen Würfelpflasterung gilt.

Der Würfel  $W_4$  besteht aus  $2^n$  Würfeln der Kantenlänge zwei. Wenn in Würfeln der Kantenlänge zwei durchschnittlich vier gefüllte Würfel enthalten sind, ergibt sich daraus  $|U'| = 4 \cdot 2^n = 2^{n+2}$ .

Das Ziel dieses Abschnittes ist es also das folgende Theorem zu zeigen.

**Theorem 4.64.** *Die Fläche  $F$  ist genau dann eingebettet, wenn  $|U'| = 2^{n+2}$  gilt. Außerdem ist die Fläche  $F$  genau dann nicht eingebettet, wenn  $|U'| \geq 2^{n+3}$  gilt.*

In Dimension drei ist  $|U'| \leq 2^5 = 2^{n+2}$ , sodass auch aus Theorem 4.64 folgt, dass die Fläche  $F$  im dreidimensionalen Raum (unabhängig von  $J$ ) eingebettet ist.

In höheren Dimensionen ist die maximale Zahl gefüllter Würfel größer als  $2^{n+2}$ . In Dimension vier gilt beispielsweise  $|U'| \leq 2^{2n} = 2^8$  (vgl. Korollar 4.63), die Fläche ist aber nur für  $|U'| = 2^{n+2} = 2^6$  eingebettet. Diese Beobachtung legt nahe, dass die Einbettungsfrage von  $F$  in Dimensionen  $n \geq 4$  von der konkreten Wahl der Jordankurve  $J$  abhängt.

Aus den bisherigen Erläuterungen ergibt sich folgende Beweisidee für Theorem 4.64. Zunächst unterteilt man  $W_4$  in Würfel der Kantenlänge zwei. Dann ist zu zeigen:

- In jedem dieser Würfel der Kantenlänge zwei liegen gleichviele gefüllte Würfel.
- Die Fläche  $F$  ist genau dann eingebettet, wenn in einem dieser Würfel der Kantenlänge zwei genau vier gefüllte Würfel liegen.

Es wird sich herausstellen, dass diese Aussagen nur wahr sind, wenn die gegebene Jordankurve  $J$  den Punkt  $(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$  enthält. Man beachte, dass  $(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$  der Mittelpunkt von einem der betrachteten Würfel mit Kantenlänge zwei ist. Im Fall  $(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}) \in J$  ordnen sich die gefüllten Würfel innerhalb der betrachteten Würfel der Kantenlänge zwei um den Mittelpunkt an (siehe Abb. 18 für den Fall  $n = 3$ ).

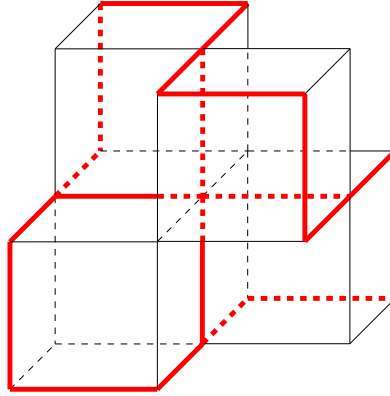


Abbildung 18: Die Flächenstücke in den vier abgebildeten gefüllten Würfeln enthalten alle den Mittelpunkt des dargestellten Würfels der Kantenlänge zwei.

Es muss also zunächst gezeigt werden, dass man o. B. d. A. von  $(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}) \in J$  ausgehen kann. Das folgt aus der Anwendung einer geeigneten Isometrie des  $\mathbb{R}^n$  zusammen mit folgendem Lemma.

**Lemma 4.65.** *Es seien  $v \in \mathbb{Z}^n$  und  $d \in \mathbb{Z}_2^n \subset S$ . Außerdem sei  $f_1 \subset F$  eine Kopie von  $f$ , die von der Abbildung  $\varphi_v \circ d$  in den Würfel  $W$  abgebildet wird. Weiter sei  $\tilde{F}$  die Fläche, welche aus  $(\varphi_v \circ d)(f_1)$  durch wiederholtes Schwarz-Spiegeln entsteht. Dann gilt*

$$\tilde{F} = (\varphi_v \circ d)(F).$$

Außerdem ist die Anzahl  $|U'|$  der gefüllten Würfel für  $F$  und  $\tilde{F}$  gleich.

Weiterhin gilt:

$$F \text{ ist eingebettet} \iff \tilde{F} \text{ ist eingebettet.}$$

**Beweis.** Die Fläche  $F$  entsteht aus  $f_1$  durch wiederholtes Schwarz-Spiegeln (siehe Bemerkung 4.25).

Also gilt  $x \in (\varphi_v \circ d)(F)$  genau dann, wenn es Kanten  $k_1, \dots, k_m$  der zu  $W$  gehörigen Würfelpflasterung gibt, die

$$(4.20) \quad x \in (\varphi_v \circ d)((s_{k_m} \circ \dots \circ s_{k_1})(f_1))$$

$$(4.21) \quad k_1 \subset f_1 \text{ und}$$

$$(4.22) \quad k_i \subset (s_{k_{i-1}} \circ \dots \circ s_{k_1})(f_1) \text{ für alle } 2 \leq i \leq m$$

erfüllen.

Durch Vertauschen von  $\varphi_v \circ d$  mit den vorkommenden Schwarz-Spiegelungen (siehe Gleichung (4.3)), erhält man die Äquivalenz von (4.20)-(4.22) mit

$$(4.23) \quad x \in (s_{(\varphi_v \circ d)(k_m)} \circ \dots \circ s_{(\varphi_v \circ d)(k_1)})((\varphi_v \circ d)(f_1))$$

$$(4.24) \quad (\varphi_v \circ d)(k_1) \subset (\varphi_v \circ d)(f_1) \text{ und}$$

$$(4.25) \quad (\varphi_v \circ d)(k_i) \subset (\varphi_v \circ d)((s_{k_{i-1}} \circ \dots \circ s_{k_1})(f_1)) \\ = (s_{(\varphi_v \circ d)(k_{i-1})} \circ \dots \circ s_{(\varphi_v \circ d)(k_1)})((\varphi_v \circ d)(f_1)) \quad \forall 2 \leq i \leq m .$$

Nach Definition von  $\tilde{F}$  gilt  $x \in \tilde{F}$  genau dann, wenn es Kanten  $\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_m$  der zu  $W$  gehörigen Würfelpflasterung gibt, die

$$(4.26) \quad x \in (s_{\tilde{k}_m} \circ \dots \circ s_{\tilde{k}_1})((\varphi_v \circ d)(f_1))$$

$$(4.27) \quad \tilde{k}_1 \subset (\varphi_v \circ d)(f_1) \text{ und}$$

$$(4.28) \quad \tilde{k}_i \subset (s_{\tilde{k}_{i-1}} \circ \dots \circ s_{\tilde{k}_1})((\varphi_v \circ d)(f_1)) \text{ für alle } 2 \leq i \leq m$$

erfüllen.

Setzt man  $\tilde{k}_i = (\varphi_v \circ d)(k_i)$  (bzw. andersherum  $k_i = (d \circ \varphi_{-v})(\tilde{k}_i)$ ), so stimmen die Aussagen (4.23)-(4.25) mit den Aussagen (4.26)-(4.28) überein. Das bedeutet, die Existenz der  $k_i$  mit den Eigenschaften (4.20)-(4.22) ist äquivalent zu der Existenz der  $\tilde{k}_i$  mit den Eigenschaften (4.26)-(4.28). Daraus folgt

$$x \in (\varphi_v \circ d)(F) \iff x \in \tilde{F} ,$$

und damit auch

$$\tilde{F} = (\varphi_v \circ d)(F) .$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich weiterhin

$$\tilde{F} \cap W_4 = (\varphi_v \circ d)(F) \cap W_4 = (\varphi_v \circ d)(F \cap (d \circ \varphi_{-v})(W_4)) .$$

Also ist die Anzahl  $|U'|$  der gefüllten Würfel von  $\tilde{F}$  in  $W_4$  gleich der Anzahl der gefüllten Würfel von  $F$  in  $(d \circ \varphi_{-v})(W_4)$ . Wegen  $(4\mathbb{Z})^n \subseteq \Lambda(F)$  (siehe Theorem 4.53) ist die Anzahl der gefüllten Würfel von  $F$  in  $(d \circ \varphi_{-v})(W_4)$  gleich der Anzahl  $|U'|$  der gefüllten Würfel von  $F$  in  $W_4$ .

Es folgt, dass die Anzahl  $|U'|$  der gefüllten Würfel für  $F$  und  $\tilde{F}$  gleich ist.

Da die Abbildung  $\varphi_v \circ d: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  bijektiv ist, hat  $F$  genau dann Selbstschnitte, wenn  $(\varphi_v \circ d)(F) = \tilde{F}$  Selbstschnitte besitzt. Wegen Satz 4.19 ergibt sich daraus:

$$F \text{ ist eingebettet} \iff \tilde{F} \text{ ist eingebettet.}$$

**w. z. b. w.**

Es sei  $p \in F$  eine Ecke der zu  $W$  gehörigen Würfelpflasterung. Dann gibt es ein Flächenstück  $f_1 \subset F$ , das  $p$  als Randpunkt enthält und ein  $v \in \mathbb{R}^n$ , sodass  $\varphi_v(f_1)$  in  $W$  liegt. Insbesondere ist  $\varphi_v(p)$  ein Eckpunkt von  $W$ . In dieser Situation gibt es eine Würfelsymmetrie  $d \in \mathbb{Z}_2^n \subset S$ , die  $\varphi_v(p)$  auf  $(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$  abbildet (siehe Beweis von Lemma 3.14). Damit bildet

$$d \circ \varphi_v \stackrel{\text{Lemma 4.11}}{=} \varphi_{d(v)} \circ d$$

$f_1$  auf ein Flächenstück in  $W$  und  $p$  auf  $(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$  ab. Lemma 4.65 sagt dann, dass sich beim Übergang von  $F$  zu  $\tilde{F} = (\varphi_{d(v)} \circ d)(F)$  weder die Anzahl  $|U'|$  noch die Existenz von Selbstschnitten ändert. Für den Beweis von Theorem 4.64 kann man also auch  $\tilde{F}$  anstelle von  $F$  betrachten. Außerdem enthält die zu  $\tilde{F}$  gehörige Jordankurve  $J \subset W$  den Punkt  $(\varphi_{d(v)} \circ d)(p) = (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$ .

Ist  $F$  nicht eingebettet, so gibt es einen Selbstschnitt  $p$  von  $F$ , der auf einer Ecke der zu  $W$  gehörigen Würfelpflasterung liegt (siehe Korollar 4.40). In diesem Fall ist  $(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$  ein Selbstschnitt der gerade beschriebenen Fläche  $\tilde{F}$ .

Zusammengefasst ergibt sich:

**Lemma 4.66.** *Für den Beweis von Theorem 4.64 kann man o. B. d. A.  $(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}) \in J$  annehmen. Wenn  $F$  nicht eingebettet ist, kann man zusätzlich annehmen, dass  $(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}) \in J$  ein Selbstschnitt von  $F$  ist.*

Wenn  $p$  und  $q$  zwei Ecken von  $W$  sind, dann gibt es eine Würfelsymmetrie  $d \in \mathbb{Z}_2^n \subset S$  mit  $d(p) = q$  (siehe Beweis von Lemma 3.14). Aus Theorem 4.64 und Lemma 4.65 erhält man also auch:

**Korollar 4.67.** *Eine als Zahlenfolge gegebene Jordankurve  $J$  führt entweder für alle möglichen Startpunkte zu eingebetteten Flächen  $F$ , oder sie führt für keinen Startpunkt zu einer eingebetteten Fläche  $F$ .*

Theorem 4.64 benötigt man dabei, um festzustellen, dass die konkrete Wahl einer Fläche  $f$  mit Rand  $J$  für die Einbettungsfrage von  $F$  keine Rolle spielt.

Der Beweisidee von Theorem 4.64 entsprechend, unterteilt man jetzt den Würfel  $W_4$  in Würfel der Kantenlänge zwei. Natürlich sind wieder die gefüllten Würfel innerhalb dieser Würfel der Kantenlänge zwei von besonderer Bedeutung.

**Definition 4.68.** *Für jedes  $b \in (2\mathbb{Z}_4)^n$  definiert man*

$$L^b := \{(v, v \bmod 2) \in U' \mid (v - b) \in \{0, 1\}^n\}.$$

*Außerdem setzt man*

$$L' := L^0 = \{(v, v \bmod 2) \in U' \mid v \in \{0, 1\}^n\}.$$

*Damit sind  $L'$  bzw.  $L^b$  zunächst Teilmengen von  $U'$ .*

Betrachtet man den Würfel

$$W_2 := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid -\frac{1}{2} \leq x_i \leq \frac{3}{2} \quad \forall 1 \leq i \leq n \right\}$$

der Kantenlänge zwei, so ist

$$(4.29) \quad W_4 := \bigcup_{b \in \{0,2\}^n} \varphi_b(W_2)$$

eine natürliche Unterteilung von  $W_4$  in  $2^n$  Würfel der Kantenlänge zwei. Definition 4.68 ist so gewählt, dass  $L^b$  aus allen gefüllten Würfeln innerhalb von  $\varphi_b(W)$  besteht. Insbesondere ist  $L'$  die Menge der gefüllten Würfel in  $W_2$ .

Da  $U'$  die Menge der gefüllten Würfel innerhalb von  $W_4$  ist, ergibt sich aus (4.29):

$$(4.30) \quad U' = \bigcup_{b \in (2\mathbb{Z}_4)^n} L^b.$$

Wie bereits erwähnt, soll  $|L^b| = |L'|$  für alle  $b \in (2\mathbb{Z}_4)^n$  gezeigt werden. Dazu muss man zunächst die Struktur von  $L'$  und  $L^b$  besser verstehen.

**Lemma 4.69.** *Es seien  $b, \tilde{b} \in (2\mathbb{Z}_4)^n$ ,  $u \in L^b$  und  $\tilde{u} \in L^{\tilde{b}}$ . Dann gilt*

$$u \circ_{U'} \tilde{u} \in L^{b+\tilde{b}}.$$

**Beweis.** Aus den Voraussetzungen folgt die Existenz von Elementen  $v, \tilde{v} \in \mathbb{Z}_4^n$  mit  $u = (v, v \bmod 2) \in U'$ ,  $\tilde{u} = (\tilde{v}, \tilde{v} \bmod 2) \in U'$  und

$$(4.31) \quad v - b, \tilde{v} - \tilde{b} \in \{0, 1\}^n.$$

Für die betrachtete Zusammensetzung gilt

$$U' \ni u \circ_{U'} \tilde{u} = (v, v \bmod 2) \circ_{U'} (\tilde{v}, \tilde{v} \bmod 2) = (v + (-1)^{v \bmod 2} \tilde{v}, v \bmod 2 + \tilde{v} \bmod 2).$$

Zu zeigen ist also

$$(4.32) \quad v + (-1)^{v \bmod 2} \tilde{v} - (b + \tilde{b}) \in \{0, 1\}^n.$$

Diese Aussage beweist man koordinatenweise. Dazu sei  $1 \leq i \leq n$ . Dann folgt aus (4.31), dass  $(v - b)_i \in \{0, 1\}$  gilt. Das führt zu einer Fallunterscheidung.

Fall 1:  $(v - b)_i = 0$ .

Wegen  $b \in (2\mathbb{Z}_4)^n$  folgt daraus  $v_i \bmod 2 = 0$  und es ergibt sich

$$(v + (-1)^{v \bmod 2} \tilde{v} - (b + \tilde{b}))_i = v_i - b_i + \tilde{v}_i - \tilde{b}_i = 0 + \tilde{v}_i - \tilde{b}_i \stackrel{(4.31)}{\in} \{0, 1\}.$$

Fall 2:  $(v - b)_i = 1$ .

Wegen  $b \in (2\mathbb{Z}_4)^n$  folgt daraus  $v_i \bmod 2 = 1$ . Außerdem ist  $\tilde{b} \in (2\mathbb{Z}_4)^n$ , woraus sich  $2\tilde{b}_i =_{\mathbb{Z}_4} 0$  ergibt. Damit gilt in  $\mathbb{Z}_4$ :

$$(v + (-1)^{v \bmod 2} \tilde{v} - (b + \tilde{b}))_i = v_i - b_i - \tilde{v}_i - \tilde{b}_i = 1 - (\tilde{v}_i - \tilde{b}_i) - 2\tilde{b}_i = 1 - (\tilde{v}_i - \tilde{b}_i) \stackrel{(4.31)}{\in} \{0, 1\}.$$

Beide Fälle zusammen zeigen (4.32).

**w. z. b. w.**

**Korollar 4.70.**  $L'$  ist eine Untergruppe von  $U'$ .

**Beweis.** Das neutrale Element  $(0, 0)$  von  $U'$  liegt nach Definition in  $L'$ . Außerdem ist  $L' = L'^0$  abgeschlossen bzgl. der Zusammensetzung in  $U'$  (wegen Lemma 4.69) und bzgl. Inversenbildung (da jedes Element von  $U'$  selbstinvers ist, vgl. Korollar 4.63).

**w. z. b. w.**

Eine erste Aussage über  $|L^b|$  kann gezeigt werden, indem man Nebenklassen von  $L'$  in  $U'$  betrachtet.

**Satz 4.71.** Für jedes  $b \in (2\mathbb{Z}_4)^n$  gilt entweder  $|L^b| = |L'|$  oder  $|L^b| = 0$ .

**Beweis.** Im Fall  $L^b = \emptyset$  ist nichts zu zeigen. Es sei also  $L^b \neq \emptyset$ .

Nach Lemma 4.69 ist für jedes  $u \in L^b$  die Nebenklasse  $uL' = \{u \circ l \mid l \in L'\}$  in  $L^b$  enthalten. Damit ergibt sich

$$L^b = \bigcup_{u \in L^b} uL'.$$

Zwei Nebenklassen sind bekanntlich gleich oder disjunkt und haben die gleiche Anzahl von Elementen. Die Anzahl der Elemente einer Nebenklasse  $uL'$  ist also gleich  $|(0, 0)L'| = |L'|$ . Da  $L^b$  nicht leer ist, ergibt sich

$$|L^b| = k \cdot |L'| \text{ mit einem } k \in \mathbb{N}.$$

Insbesondere ist

$$|L^b| \geq |L'|.$$

Zum Beweis der umgekehrten Ungleichung betrachtet man die Abbildung

$$\psi: L^b \rightarrow U', \quad u \mapsto \bar{u} \circ u$$

mit einem fest gewählten Element  $\bar{u} \in L^b$ .

Die Abbildung  $\psi$  bildet  $L^b$  bijektiv auf  $\psi(L^b)$  ab (denn die Multiplikation mit  $\bar{u}^{-1} = \bar{u}$  ist die Umkehrung von  $\psi$ ). Außerdem gilt wegen Lemma 4.69:  $\psi(L^b) \subseteq L^{b+b} = L'$ . Daraus folgt

$$|L^b| = |\psi(L^b)| \leq |L'|$$

und damit auch

$$|L^b| = |L'|.$$

**w. z. b. w.**

Um zu zeigen, dass sich die gefüllten Würfel gleichmäßig auf die betrachteten Würfel der Kantenlänge zwei verteilen, muss nur noch der Fall  $|L^b| = 0$  ausgeschlossen werden. Das benötigt etwas Vorarbeit und einige konkrete Rechnungen.

**Definition 4.72.** *Es sei*

$$M := \{b \in (2\mathbb{Z}_4)^n \mid L^b \neq \emptyset\}.$$

Es soll  $M = (2\mathbb{Z}_4)^n$  gezeigt werden. Nach Definition ist  $M$  zunächst eine Teilmenge von  $(2\mathbb{Z}_4)^n$ . Mit Hilfe von Lemma 4.69 erhält man zusätzlich:

**Lemma 4.73.**  *$M$  ist eine Untergruppe von  $(2\mathbb{Z}_4)^n$ .*

**Beweis.** Da  $W$  gefüllt ist, gilt  $L' \neq \emptyset$  und damit  $0 \in M$ .

Aus  $b, \tilde{b} \in M$  folgt die Existenz von Elementen  $u \in L^b$  und  $\tilde{u} \in L^{\tilde{b}}$ . Nach Lemma 4.69 ist dann  $u \circ \tilde{u} \in L^{b+\tilde{b}}$ . Somit gilt  $L^{b+\tilde{b}} \neq \emptyset$  und  $b + \tilde{b} \in M$ . Also ist  $M$  abgeschlossen bezüglich der Addition.

Außerdem ist  $M$  abgeschlossen bzgl. Inversenbildung, da jedes Element von  $(2\mathbb{Z}_4)^n$ , und damit auch jedes Element von  $M$ , selbstinvers ist. **w. z. b. w.**

**Satz 4.74.** *Wenn  $(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$  in  $J$  enthalten ist, gilt*

$$M = (2\mathbb{Z}_4)^n.$$

Hieraus folgt wegen Satz 4.71 und Definition 4.72:

**Korollar 4.75.** *Wenn  $(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$  in  $J$  enthalten ist, gilt für jedes  $b \in (2\mathbb{Z}_4)^n$ :*

$$|L^b| = |L'|.$$

Diese Aussage ist wesentlicher Bestandteil des Beweises von Theorem 4.64.

**Beweis von Satz 4.74.** Wegen Lemma 4.73 reicht es,  $2e_i \in M$  für jedes  $1 \leq i \leq n$  zu zeigen. Die Idee ist folgende:

Für jeden gefüllten Würfel  $u \in U'$  gibt es genau ein  $b \in (2\mathbb{Z}_4)^n$  mit  $u \in L^b$  (man beachte (4.30)). Damit ist dieses  $b$  ein Element von  $M$ . Das heißt, aus  $u \in U'$  folgt die Existenz eines Elements aus  $M$ .

Um  $2e_i \in M$  zu zeigen, muss also die Existenz eines geeigneten  $u \in U'$  bewiesen werden. Dies geschieht durch geschicktes Zusammensetzen von Erzeugern von  $U'$ .

Es ist bekannt, dass man die Erzeugenden von  $U'$  aus den Erzeugenden von  $U$  erhält, indem man die erste Komponente modulo vier betrachtet. Das heißt, die Erzeuger von  $U'$  haben die Gestalt  $(v, v \bmod 2)$  mit  $v \in \mathbb{Z}_4^n$  und  $v_i \in \{0, 1, 3\}$  für alle  $1 \leq i \leq n$ . Dabei hängen die  $v_i$  wie folgt von der zum Erzeuger  $(v, v \bmod 2)$  gehörenden Kante  $k$  von  $J$  ab:



- $v_i = 0$  genau dann, wenn  $k$  eine Kante in  $x_i$ -Richtung ist.
- $v_i = 1$  genau dann, wenn die  $i$ -te Koordinate von  $k$  konstant gleich  $\frac{1}{2}$  ist.
- $v_i = 3$  genau dann, wenn die  $i$ -te Koordinate von  $k$  konstant gleich  $-\frac{1}{2}$  ist.

Betrachtet man zwei Erzeuger  $(v, v \bmod 2)$  und  $(\tilde{v}, \tilde{v} \bmod 2)$  von  $U'$ , so ergibt sich

$$U' \ni (w, w \bmod 2) := (v, v \bmod 2) \circ (\tilde{v}, \tilde{v} \bmod 2) = (v + (-1)^{v \bmod 2} \tilde{v}, v \bmod 2 + \tilde{v} \bmod 2).$$

Wie bereits erwähnt, folgt aus  $(w, w \bmod 2) \in U'$  die Existenz eines Elements  $b \in M$ , welches sich leicht aus  $v$  und  $\tilde{v}$  berechnet. Koordinatenweise erhält man folgende Abhängigkeit (für jedes  $1 \leq i \leq n$ ):

$$(4.33) \quad \begin{array}{c|ccccccc} & v_i & & & & & & & & & & & \\ \hline & & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & & \\ & \tilde{v}_i & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 3 & & \\ \hline & w_i = v_i + (-1)^{v_i \bmod 2} \tilde{v}_i & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 2 & 3 & 2 & 0 & & \\ & b_i = \begin{cases} 0 & \text{für } w_i \in \{0, 1\} \\ 2 & \text{für } w_i \in \{2, 3\} \end{cases} & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & & \end{array}$$

Somit ist  $b_i$  genau dann gleich zwei, wenn entweder  $v_i$  oder  $\tilde{v}_i$  gleich drei ist.

Zusammengefasst ergibt sich: Aus zwei Kanten  $k$  und  $\tilde{k}$  von  $J$  erhält man nacheinander zwei Erzeuger von  $U'$ , ein weiteres Element  $(w, w \bmod 2)$  von  $U'$  und ein Element  $b$  von  $M$ , wobei  $b_i$  genau dann gleich zwei ist, wenn entweder die  $i$ -te Koordinate von  $k$  oder die  $i$ -te Koordinate von  $\tilde{k}$  konstant gleich  $-\frac{1}{2}$  ist.

Um die richtigen Elemente  $b \in M$  zu erhalten, müssen also geeignete Kanten  $k$  und  $\tilde{k}$  von  $J$  gewählt werden. Dazu nummeriert man die Kanten von  $J$ . Nach Voraussetzung ist  $p := (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}) \in J$ . Von  $p$  aus durchlaufe  $J$  die Kanten  $k_1, k_2, k_3, \dots$  (in dieser Reihenfolge). Dabei verlaufe die Kante  $k_j$  in  $x_{l_j}$ -Richtung (mit  $1 \leq l_j \leq n$ ).

Startet man in  $p$  und durchläuft  $J$ , so bleibt die  $i$ -te Koordinate konstant gleich  $\frac{1}{2}$ , solange keine Kante in  $x_i$ -Richtung durchlaufen wird. Nach dem Durchlauf der ersten Kante in  $x_i$ -Richtung folgt in  $J$  mindestens eine Kante, deren  $i$ -te Koordinate konstant gleich  $-\frac{1}{2}$  ist.

Wir betrachten nun für jedes  $m \in \mathbb{N}$  die Kanten  $k_1$  und  $k_{m+1}$ . Wie bereits beschrieben ergibt sich aus diesen beiden Kanten ein Element  $b \in M$ . Man beachte, dass es keine Koordinate gibt, die entlang der Kante  $k_1$  konstant gleich  $-\frac{1}{2}$  ist. Wenn zusätzlich keine der Kanten  $k_1, \dots, k_m$  in  $x_i$ -Richtung verläuft, ist auch die  $i$ -te Koordinate von  $k_{m+1}$  nicht konstant gleich  $-\frac{1}{2}$ . Aus der Erläuterung nach (4.33) folgt, dass in diesem Fall  $b_i = 0$  gilt. Also ist

$$(4.34) \quad b \in \langle \{2e_i \mid i \in \{l_1, \dots, l_m\}\} \rangle_{(2\mathbb{Z}_4)^n}.$$

Verläuft keine der Kanten  $k_1, \dots, k_{m-1}$  in  $x_{l_m}$ -Richtung, so ist die  $l_m$ -te Koordinate von  $k_{m+1}$  konstant gleich  $-\frac{1}{2}$  und es folgt (wiederum aus (4.33)):

$$(4.35) \quad b_{l_m} = 2.$$

Durch eine Induktion über  $m$  soll im Folgenden mit Hilfe von (4.34) und (4.35) gezeigt werden:

$$2e_{l_m} \in M \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Induktionsanfang:  $m = 1$ .

Aus den Kanten  $k_1$  und  $k_2$  erhält man wie zuvor ein Element  $b$  aus  $M$  mit

$$b \in \langle 2e_{l_1} \rangle \quad (\text{vgl. (4.34)}) \quad \text{und} \quad b_{l_1} = 2 \quad (\text{vgl. (4.35)}).$$

Also ist

$$b = 2e_{l_1} \in M.$$

Induktionsschritt:  $m - 1 \mapsto m$ .

Unter der Voraussetzung  $2e_{l_1}, \dots, 2e_{l_{m-1}} \in M$  soll  $2e_{l_m} \in M$  gezeigt werden.

Wenn bereits eine der Kanten  $k_1, \dots, k_{m-1}$  in  $x_{l_m}$ -Richtung verläuft, gilt  $2e_{l_m} \in M$  nach Voraussetzung.

Ist das nicht der Fall, so erhält man aus den Kanten  $k_1$  und  $k_{m+1}$  wie zuvor ein Element  $b \in M$  mit

$$b \in \langle \{2e_i \mid i \in \{l_1, \dots, l_m\}\} \rangle \quad (\text{vgl. (4.34)}) \quad \text{und} \quad b_{l_m} = 2 \quad (\text{vgl. (4.35)}).$$

Der Vektor  $2e_{l_m}$  ergibt sich also aus  $b$  durch Subtraktion von Elementen aus  $\{2e_{l_1}, \dots, 2e_{l_{m-1}}\} \subseteq M$ . Da  $M$  eine additive Gruppe ist (siehe Lemma 4.73), folgt daraus:  $2e_{l_m} \in M$ .

Das beendet die Induktion.

Da  $J$  in jede Koordinatenrichtung mindestens eine Kante enthält, ergibt sich:

$$2e_i \in M \quad \text{für jedes } 1 \leq i \leq n. \quad \text{w. z. b. w.}$$

Jetzt ist es möglich das Hauptresultat dieses Abschnitts zu beweisen.

**Theorem 4.64.** *Die Fläche  $F$  ist genau dann eingebettet, wenn  $|U'| = 2^{n+2}$  gilt. Außerdem ist die Fläche  $F$  genau dann nicht eingebettet, wenn  $|U'| \geq 2^{n+3}$  gilt.*

**Beweis.** Der Beweis ist in zwei Schritte unterteilt.

Im ersten Schritt wird  $|U'| \geq 2^{n+2}$  gezeigt.

Im zweiten Schritt wird bewiesen, dass  $F$  genau dann nicht eingebettet ist, wenn  $|U'| \geq 2^{n+3}$  gilt.

Da  $|U'|$  eine Zweierpotenz ist, ergibt sich daraus die Aussage des Theorems.

Schritt 1: Nach Lemma 4.66 kann man o. B. d. A. annehmen, dass  $p := (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}) \in J$  gilt. Insbesondere ist  $p \in F$  und es gibt wegen Korollar 4.23 mindestens vier gefüllte Würfel, die  $p$  als Ecke enthalten.

Ein Würfel  $W^v$  (mit  $v \in \mathbb{Z}^n$ ) enthält  $p$  genau dann, wenn  $W^v \subset W_2$  gilt. In  $W_2$  liegen also mindestens vier gefüllte Würfel, d. h. es ist

$$|L'| \geq 4.$$

Aus (4.30) zusammen mit Korollar 4.75 ergibt sich damit

$$(4.36) \quad |U'| = \sum_{b \in (2\mathbb{Z}_4)^n} |L^b| = \sum_{b \in (2\mathbb{Z}_4)^n} |L'| = 2^n \cdot |L'| \geq 2^n \cdot 4 = 2^{n+2}.$$

Schritt 2:

Angenommen die Fläche  $F$  ist nicht eingebettet.

Dann besitzt  $F$  mindestens einen Selbstschnitt (siehe Satz 4.19). Wegen Lemma 4.66 kann man o. B. d. A. annehmen, dass  $p = (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}) \in J$  ein solcher Selbstschnitt von  $F$  ist. Nach Satz 4.22 gibt es also mindestens acht gefüllte Würfel, die  $p$  als Ecke enthalten. Analog zum ersten Schritt ergibt sich daraus

$$|L'| \geq 8.$$

Wie in (4.36) erhält man nun:

$$|U'| = 2^n \cdot |L'| \geq 2^n \cdot 8 = 2^{n+3}.$$

Sei umgekehrt  $|U'| \geq 2^{n+3}$ .

Wegen Lemma 4.66 kann man o. B. d. A. annehmen, dass  $p = (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}) \in J$  gilt. Außerdem ergibt sich wie in (4.36) die Identität  $|U'| = 2^n \cdot |L'|$  und damit

$$(4.37) \quad |L'| = 2^{-n} |U'| \geq 2^{-n} \cdot 2^{n+3} = 2^3 = 8.$$

Jedes Element von  $L'$  steht für eine Kopie  $f_l \subset F$  von  $f$  innerhalb von  $W_2$ . Es soll nun gezeigt werden, dass jedes dieser Flächenstücke  $f_l$  den Punkt  $p$  als Randpunkt enthält. Sei also  $(v, v \bmod 2)$  ein Element von  $L'$ . Wegen der Definition von  $L'$  gilt  $v \in \{0, 1\}^n$ . Außerdem erhält man das zu  $(v, v \bmod 2)$  gehörige Flächenstück  $f_l$  durch

$$f_l = \chi((v, v \bmod 2))(f).$$

Da  $p$  ein Randpunkt von  $f$  ist, folgt, dass  $\chi((v, v \bmod 2))(p)$  ein Randpunkt von  $f_l$  ist. Für diesen Punkt gilt koordinatenweise:

$$\begin{aligned} (\chi((v, v \bmod 2))(p))_i &= ((\varphi_v \circ v \bmod 2)(p))_i = v_i + (-1)^{v_i \bmod 2} p_i \\ &\stackrel{v_i \in \{0,1\}}{=} \begin{cases} 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} & \text{für } v_i = 0 \\ 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} & \text{für } v_i = 1 \end{cases} \\ &= p_i. \end{aligned}$$

Also ist  $p = \chi((v, v \bmod 2))(p)$  ein Randpunkt von  $f_l$ .

Insgesamt wurde gezeigt:

Es gibt mindestens acht Elemente von  $L'$  (siehe (4.37)) und jedes Element von  $L'$  steht für eine Kopie  $f_l \subset F$  von  $f$ , die  $p$  als Randpunkt enthält.

Daraus folgt wegen Satz 4.22, dass  $p$  ein Selbstschnitt von  $F$  ist. Die Fläche  $F$  ist also nicht eingebettet. **w. z. b. w.**

**Bemerkung 4.76.** Die Gruppe  $U$  (und damit auch die Gruppe  $U'$ ) hängt nur von der Jordankurve  $J$  ab. Insbesondere ist die konkrete Wahl der Fläche  $f$  mit Rand  $J$  für die Anzahl  $|U'|$  nicht von Bedeutung. Das heißt, aus Theorem 4.64 ergibt sich:

- Ob die Fläche  $F$  eingebettet ist oder nicht, hängt nur von  $J = \partial f$ , aber nicht von der Fläche  $f$  selbst ab.

Außerdem zeigt Theorem 4.64 eine untere Schranke für die Anzahl der Elemente von  $U'$ :

$$(4.38) \quad |U'| \geq 2^{n+2}.$$

## 4.9 Beziehung zwischen der Anzahl gefüllter Würfel und dem Gitter von $F$

Um mit Hilfe von Theorem 4.64 festzustellen, ob eine gegebene Jordankurve  $J$  zu einer eingebetteten Fläche  $F$  führt, muss die Anzahl  $|U'|$  aus  $J$  bestimmt werden. Das geschieht durch Betrachtung des Gitters  $\Lambda(F)$ .

In diesem Abschnitt wird zunächst ein Zusammenhang zwischen  $U'$  und den Gittervektoren  $\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n$  hergestellt. Anschließend wird erläutert, wie man die Gruppe  $\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n$  für eine gegebene Jordankurve  $J$  errechnen kann.

Das führt zu einem allgemeinen Vorgehen, mit dem aus  $J$  bestimmt wird, ob  $F$  eingebettet ist oder nicht.

**Theorem 4.77.** *Es gilt*

$$|U'| = \begin{cases} 2^n \cdot |\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n| & \text{für } n \text{ gerade} \\ 2^{n-1} \cdot |\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n| & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

**Beweis.** Um  $|U'|$  zu berechnen, schreibt man  $U'$  zunächst als disjunkte Vereinigung geeigneter Teilmengen. Dazu sei  $\Omega^d$  für jedes  $d \in H = \langle p_1, \dots, p_n \rangle_{\mathbb{Z}_2^n}$  die Teilmenge von  $U'$ , deren Elemente die zweite Komponente  $d$  besitzen. Also:

$$\Omega^d := \{(v, d) \mid (v, d) \in U'\}.$$

Mit Hilfe von Korollar 4.58 erkennt man

$$U' = \dot{\bigcup}_{d \in H} \Omega^d,$$

woraus sich

$$(4.39) \quad |U'| = \sum_{d \in H} |\Omega^d|$$

ergibt.

Nun soll

$$(4.40) \quad |\Omega^d| = |\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n| \text{ für alle } d \in H$$

gezeigt werden. Aus (4.39) und (4.40) errechnet sich  $|U'|$  leicht.

Der erste Schritt zum Beweis von (4.40) ist es zu zeigen, dass  $\Omega^d$  für jedes  $d \in H$  mindestens ein Element enthält.

Da  $J$  in jede Koordinatenrichtung mindestens eine Kante durchläuft, gibt es für jedes  $1 \leq i \leq n$  einen Erzeuger von  $U'$ , der in  $\Omega^{p_i}$  liegt. Die Zusammensetzung von  $U'$  bewirkt in der zweiten Komponente eine Addition in  $\mathbb{Z}_2^n$ . Damit erhält man durch Zusammen setzen von Elementen aus den  $\Omega^{p_i}$  für jedes  $d \in \langle p_1, \dots, p_n \rangle_{\mathbb{Z}_2^n} = H$  mindestens ein Element aus  $\Omega^d$ . Insbesondere ist keines der  $\Omega^d$  mit  $d \in H$  leer.

Es sei  $(v, d) \in \Omega^d$  ein ausgezeichnetes Element. Weiter sei  $\tilde{v} \in \mathbb{Z}_4^n$ . Dann soll gezeigt werden:

$$(4.41) \quad (\tilde{v}, d) \in \Omega^d \iff \tilde{v} - v \in \Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n .$$

Dies zeigt eine Eins-zu-Eins-Beziehung zwischen Elementen aus  $\Omega^d$  und Elementen aus  $\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n$  und beweist somit (4.40).

Beweis der Hin-Richtung von (4.41):

Aus  $(v, d), (\tilde{v}, d) \in \Omega^d \subset U'$  folgt, dass  $W^v$  und  $W^{\tilde{v}}$  gefüllte Würfel sind. Entsprechend kann man die Elemente  $(v, d)$  und  $(\tilde{v}, d)$  als gefüllte Würfel in  $U$  auffassen. Mit Hilfe von Satz 4.50 ergibt sich dann

$$\tilde{v} - v \in \Lambda(F) \implies \tilde{v} -_{\mathbb{Z}_4^n} v = \tilde{v} \bmod 4 -_{\mathbb{Z}_4^n} v \bmod 4 \in \Lambda'(F) .$$

Außerdem folgt aus  $(v, d), (\tilde{v}, d) \in \Omega^d \subset U'$  die Identität  $v \bmod 2 = \tilde{v} \bmod 2 = d$  (siehe Korollar 4.58). Also gilt  $\tilde{v} - v \in (2\mathbb{Z}_4)^n$  und damit auch

$$\tilde{v} - v \in \Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n .$$

Beweis der Rückrichtung von (4.41):

Wegen  $(v, d) \in \Omega^d \subset U'$  ist  $W^v$  ein gefüllter Würfel.

Aus  $\tilde{v} - v \in \Lambda'(F)$  folgt somit, dass auch  $W^{v+\tilde{v}-v} = W^{\tilde{v}}$  ein gefüllter Würfel ist. Also gilt

$$(\tilde{v}, \tilde{v} \bmod 2) \in U' .$$

Aus  $\tilde{v} - v \in (2\mathbb{Z}_4)^n$  ergibt sich  $d = v \bmod 2 = (v + \tilde{v} - v) \bmod 2 = \tilde{v} \bmod 2$  und damit auch

$$(\tilde{v}, d) = (\tilde{v}, \tilde{v} \bmod 2) \in \Omega^d \subset U' .$$

Insgesamt wurde (4.41) und somit auch (4.40) gezeigt.

Es ergibt sich

$$|U'| \stackrel{(4.39)}{=} \sum_{d \in H} |\Omega^d| \stackrel{(4.40)}{=} |H| \cdot |\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n|$$

$$\stackrel{\text{Satz 4.41}}{=} \begin{cases} 2^n \cdot |\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n| & \text{für } n \text{ gerade} \\ 2^{n-1} \cdot |\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n| & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

**w. z. b. w.**

Wegen  $|U'| \geq 2^{n+2}$  (siehe (4.38)) und

$$|U'| \leq \begin{cases} 2^{2n} & \text{für } n \text{ gerade} \\ 2^{2n-1} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

(siehe Korollar 4.63) folgt aus Theorem 4.77 eine Abschätzung für  $|\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n|$ .

**Korollar 4.78.** *Für gerade  $n$  gilt:*

$$4 = 2^2 \leq |\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n| \leq 2^n .$$

*Für ungerade  $n$  gilt:*

$$8 = 2^3 \leq |\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n| \leq 2^n .$$

Insbesondere ist die Gruppe  $|\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n|$  nicht leer. Dies bedeutet unter anderem, dass

$$(4\mathbb{Z})^n \subsetneq \Lambda(F)$$

gilt.

#### 4.9.1 Berechnung relevanter Gitterelemente

Ist die Anzahl  $|\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n|$  bekannt, so kann man wegen Theorem 4.77 die Anzahl  $|U'|$  bestimmen. Aus dieser lässt sich wiederum mit Hilfe von Theorem 4.64 schließen, ob  $F$  eingebettet ist oder nicht.

Es bleibt also die Frage zu beantworten, wie man  $|\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n|$  aus einer gegebenen Jordankurve  $J$  erhält.

Deswegen wird im Folgenden beschrieben, wie die Erzeuger von  $\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n$  berechnet werden.

Zunächst stellt man fest, dass aus Korollar 4.52 die Identität

$$\Lambda(F) \cap (2\mathbb{Z})^n = \{v \in (2\mathbb{Z})^n \mid (v, 0) \in U\}$$

folgt. Durch Übergang zu den Faktorgruppen  $\Lambda'(F)$  und  $U'$  ergibt sich daraus

$$(4.42) \quad \Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n = \{v \in (2\mathbb{Z}_4)^n \mid (v, 0) \in U'\} \\ \stackrel{\text{Kor. 4.58}}{=} \{v \in \mathbb{Z}_4^n \mid (v, 0) \in U'\}.$$

Diese Gleichung legt nahe, dass es einen Zusammenhang zwischen Erzeugern von  $U'$  und Erzeugern von  $\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n$  gibt.

Zur Erinnerung: Die Erzeuger von  $U'$  ergeben sich (analog zu den Erzeugern von  $U$ ) aus den einzelnen Kanten der Jordankurve  $J$ . Deswegen bezeichnen wir ein Element von  $U'$ , das zu einer Kante  $k$  von  $J$  in  $x_i$ -Richtung gehört, als einen *Erzeuger von  $U'$  in  $x_i$ -Richtung*.

**Lemma 4.79.** *Für gerade  $n$  gilt: Jedes Element  $(v, 0) \in U'$  erhält man als Zusammensetzung von Erzeugenden aus  $U'$ , wobei diese Zusammensetzung für jedes  $1 \leq i \leq n$  eine gerade Anzahl Erzeuger von  $U'$  in  $x_i$ -Richtung enthält.*

*Für ungerade  $n$  gilt: Jedes Element  $(v, 0) \in U'$  erhält man als Zusammensetzung von Erzeugenden aus  $U'$ , wobei diese Zusammensetzung entweder für jedes  $1 \leq i \leq n$  eine gerade Anzahl Erzeuger von  $U'$  in  $x_i$ -Richtung enthält, oder für jedes  $1 \leq i \leq n$  eine ungerade Anzahl Erzeuger von  $U'$  in  $x_i$ -Richtung enthält.*

**Beweis.** Jedes Element  $(v, 0) \in U'$  erhält man als Zusammensetzung von Erzeugern aus  $U'$ .

Es sei eine Darstellung von  $(v, 0)$  als Zusammensetzung von Erzeugern aus  $U'$  gegeben. Diese Zusammensetzung enthalte  $m_i \in \mathbb{N}_0$  Erzeuger von  $U'$  in  $x_i$ -Richtung (für alle  $1 \leq i \leq n$ ). Es ist also zu zeigen, dass für gerade  $n$  alle  $m_i$  gerade und für ungerade  $n$  entweder alle  $m_i$  gerade oder alle  $m_i$  ungerade sind.

Die zweite Komponente eines Erzeugers von  $U'$  in  $x_i$ -Richtung ist gleich  $p_i$ . Aus der zweiten Komponente der gegebenen Darstellung von  $(v, 0)$  ergibt sich somit

$$(4.43) \quad 0 = m_1 p_1 + \dots + m_n p_n \text{ (in } \mathbb{Z}_2^n \text{)}.$$

Betrachtet man diese Gleichung koordinatenweise, so ergibt sich ein Gleichungssystem in  $\mathbb{Z}_2$ :

$$(4.44) \quad \begin{array}{rcccc} 0 & = & & m_2 & + & m_3 & + \dots & + & m_{n-1} & + & m_n \\ 0 & = & m_1 & & & + & m_3 & + \dots & + & m_{n-1} & + & m_n \\ & & \vdots & & & & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & = & m_1 & + & m_2 & + & m_3 & + \dots & + & m_{n-1} & & \end{array}$$

Durch Addition der  $i$ -ten und der  $j$ -ten Zeile von (4.44) erhält man:

$$0 = m_i +_{\mathbb{Z}_2} m_j \implies m_i =_{\mathbb{Z}_2} m_j.$$

Da dies für alle  $1 \leq i, j \leq n$  gilt, ergibt sich

$$m_1 = m_2 = \dots = m_n \text{ in } \mathbb{Z}_2.$$

Also sind entweder alle  $m_i$  gerade oder alle  $m_i$  ungerade.

Sind alle  $m_i$  ungerade und die Dimension  $n$  gerade, so erhält man durch Einsetzen in (4.44) die Identität  $0 =_{\mathbb{Z}_2} 1$  und damit einen Widerspruch.

Für gerade  $n$  sind also alle  $m_i$  gerade.

**w. z. b. w.**

**Bemerkung 4.80.** Es sei  $u \in U'$  gegeben als Zusammensetzung von Erzeugern aus  $U'$ , wobei diese Zusammensetzung für jedes  $1 \leq i \leq n$  eine gerade Anzahl  $m_i \in \mathbb{N}_0$  Erzeuger von  $U'$  in  $x_i$ -Richtung enthält. Dann ist das Gleichungssystem (4.44) und damit auch Gleichung (4.43) erfüllt. Daraus folgt, dass die zweite Komponente von  $u$  gleich Null ist. Die analogen Aussagen gelten, wenn sowohl  $n$  als auch alle  $m_i$  ungerade sind.

Da  $U'$  abelsch ist (siehe Korollar 4.63), kann man die Erzeuger innerhalb einer Zusammensetzung, wie in Lemma 4.79 beschrieben, umordnen. Dadurch wird erreicht, dass jedes Element  $(v, 0) \in U'$  die Gestalt

$$(v, 0) = u_1 \circ \dots \circ u_m$$

hat, wobei jedes der  $u_l$  mit  $1 \leq l \leq m-1$  die Zusammensetzung von zwei Erzeugern in dieselbe Koordinatenrichtung ist und für  $u_m$  entweder dasselbe gilt, oder  $u_m$  eine Zusammensetzung von  $n$  Erzeugern aus  $U'$  ist, welche in jede Koordinatenrichtung genau einen Erzeuger enthält. Außerdem ist für gerade  $n$  der letzte Fall für  $u_m$  ausgeschlossen. Wegen Bemerkung 4.80 ist die zweite Komponente aller  $u_l$  gleich Null. Weiter gilt

$$(w_1, 0) \circ_{U'} (w_2, 0) = (w_1 +_{\mathbb{Z}_4^n} (-1)^0 w_2, 0) = (w_1 +_{\mathbb{Z}_4^n} w_2, 0) \quad \forall w_1, w_2 \in \mathbb{Z}_4^n.$$

Das bedeutet, die erste Komponente  $v$  von  $(v, 0)$  ist die Summe (in  $\mathbb{Z}_4^n$ ) der ersten Komponenten von  $u_1, \dots, u_{m-1}$  und  $u_m$ .

Wird außerdem für jedes  $1 \leq i \leq n$  ein Erzeuger  $\sigma_i$  von  $U'$  in  $x_i$ -Richtung ausgezeichnet, so kann man durch Einfügen von Elementen  $0 = \sigma_i \circ \sigma_i$  die Gestalt der  $u_l$  verändern.

Beachtet man weiterhin (4.42), so ergibt sich:

**Satz 4.81.** *Für jedes  $1 \leq i \leq n$  sei  $\sigma_i$  ein ausgezeichneter Erzeuger von  $U'$  in  $x_i$ -Richtung. Dann gilt für gerade  $n$ :*

$$\begin{aligned} \Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n &= \langle \{v \in \mathbb{Z}_4^n \mid \exists \text{ Erzeuger } \tilde{\sigma}_i \text{ von } U' \text{ in } x_i\text{-Richtung mit } (v, 0) = \sigma_i \circ \tilde{\sigma}_i\} \rangle_{\mathbb{Z}_4^n} \\ &= \langle \{(\sigma_i \circ \tilde{\sigma}_i)_1 \mid \tilde{\sigma}_i \text{ ist ein Erzeuger von } U' \text{ in } x_i\text{-Richtung}\} \rangle_{\mathbb{Z}_4^n}, \end{aligned}$$

während für ungerade  $n$

$$\begin{aligned} \Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n &= \langle \{v \in \mathbb{Z}_4^n \mid \exists \text{ Erzeuger } \tilde{\sigma}_i \text{ von } U' \text{ in } x_i\text{-Richtung mit } (v, 0) = \sigma_i \circ \tilde{\sigma}_i\} \\ &\quad \cup \{v \in \mathbb{Z}_4^n \mid (v, 0) = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_n\} \rangle_{\mathbb{Z}_4^n} \\ &= \langle \{(\sigma_i \circ \tilde{\sigma}_i)_1 \mid \tilde{\sigma}_i \text{ ist ein Erzeuger von } U' \text{ in } x_i\text{-Richtung}\} \\ &\quad \cup \{(\sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_n)_1\} \rangle_{\mathbb{Z}_4^n} \end{aligned}$$

*gilt.*



Der einzelne Erzeuger  $(\sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_n)_1$  kann im konkreten Fall leicht errechnet werden. Zum Berechnen der anderen Erzeuger von  $\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n$  gibt es eine einfache Regel:

**Satz 4.82.** *Es seien  $\sigma_i$  und  $\tilde{\sigma}_i$  zwei Erzeuger von  $U'$  in die  $i$ -te Koordinatenrichtung. Die zugehörigen Kanten von  $J$  seien  $k$  und  $\tilde{k}$ . Dann gilt*

$$(\sigma_i \circ \tilde{\sigma}_i)_1 = v \in (2\mathbb{Z}_4)^n,$$

wobei  $v_i = 0$  ist und für alle  $j \neq i$  (mit  $1 \leq j \leq n$ ) gilt:

$$v_j = \begin{cases} 0, & \text{wenn } J \text{ zwischen } k \text{ und } \tilde{k} \text{ eine gerade Anzahl von} \\ & \text{Kanten in } x_j\text{-Richtung durchläuft} \\ 2, & \text{wenn } J \text{ zwischen } k \text{ und } \tilde{k} \text{ eine ungerade Anzahl von} \\ & \text{Kanten in } x_j\text{-Richtung durchläuft.} \end{cases}$$

Man beachte: Da  $J$  eine geschlossene Jordankurve ist, durchläuft sie in jede Koordinatenrichtung eine gerade Anzahl von Kanten. Somit ist der Ausdruck für  $v_j$  in Satz 4.82 von der Wahl einer Durchlaufrichtung von  $J$  unabhängig.

**Beweis von Satz 4.82.** O. B. d. A. sei  $i = 1$ .

Es gilt:

$$k = \left\{ (t, x_2, \dots, x_n) \mid -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \right\} \text{ und } \tilde{k} = \left\{ (t, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) \mid -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \right\}$$

mit  $x_2, \dots, x_n, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n \in \{\pm\frac{1}{2}\}$ .

Die zugehörigen Erzeuger von  $U'$  sind

$$\begin{aligned} \sigma_i &= ((0, (2x_2) \bmod 4, \dots, (2x_n) \bmod 4), (0, 1, \dots, 1)) \text{ und} \\ \tilde{\sigma}_i &= ((0, (2\tilde{x}_2) \bmod 4, \dots, (2\tilde{x}_n) \bmod 4), (0, 1, \dots, 1)), \end{aligned}$$

woraus sich

$$(4.45) \quad \sigma_i \circ \tilde{\sigma}_i = ((0, (2x_2 - 2\tilde{x}_2) \bmod 4, \dots, (2x_n - 2\tilde{x}_n) \bmod 4), 0)$$

ergibt.

Wird die Jordankurve  $J$  von  $k$  nach  $\tilde{k}$  durchlaufen, so gilt für jedes  $2 \leq j \leq n$ :

Die  $j$ -te Koordinate bleibt konstant gleich  $x_j \in \{\pm\frac{1}{2}\}$ , bis das erste Mal eine Kante in  $x_j$ -Richtung durchlaufen wird. Nach dem Durchlauf dieser Kante bleibt die  $j$ -te Koordinate konstant gleich  $-x_j$ , bis das nächste Mal eine Kante in  $x_j$ -Richtung durchlaufen wird. Und so weiter. Somit gilt

- $x_j = \tilde{x}_j$  genau dann, wenn  $J$  zwischen  $k$  und  $\tilde{k}$  eine gerade Anzahl von Kanten in  $x_j$ -Richtung durchläuft und
- $x_j = -\tilde{x}_j$  genau dann, wenn  $J$  zwischen  $k$  und  $\tilde{k}$  eine ungerade Anzahl von Kanten in  $x_j$ -Richtung durchläuft.

Daraus folgt (unter Beachtung von  $x_j, \tilde{x}_j \in \{\pm\frac{1}{2}\}$ ) für jedes  $2 \leq j \leq n$ :

$$(2x_j - 2\tilde{x}_j) \bmod 4 = \begin{cases} 0, & \text{wenn } J \text{ zwischen } k \text{ und } \tilde{k} \text{ eine gerade Anzahl von} \\ & \text{Kanten in } x_j\text{-Richtung durchläuft} \\ 2, & \text{wenn } J \text{ zwischen } k \text{ und } \tilde{k} \text{ eine ungerade Anzahl von} \\ & \text{Kanten in } x_j\text{-Richtung durchläuft.} \end{cases}$$

Wegen (4.45) beweist das Satz 4.82.

w. z. b. w.

### 4.9.2 Beispiele

Mit Hilfe der Sätze 4.81 und 4.82 kann man für eine gegebene Jordankurve  $J$  die Gruppe  $\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n$  bestimmen. Unter Verwendung der Theoreme 4.64 und 4.77 lässt sich dann schließen, ob  $F$  eingebettet ist oder nicht.

Dies soll hier für zwei konkrete Beispiele durchgeführt werden.

**Beispiel 4.83.** Es sei  $F$  eine Fläche in  $\mathbb{R}^4$ , welche aus einer Fläche  $f$  mit Rand  $\partial f = J = 1231413214$  durch wiederholtes Schwarz-Spiegeln hervorgeht. Es soll die Frage beantwortet werden, ob diese Fläche  $F$  eingebettet ist. Wegen Bemerkung 4.76 muss dafür nur die Jordankurve  $J$  betrachtet werden. Außerdem ist der gewählte Startpunkt von  $J$  nicht von Bedeutung (siehe Korollar 4.67). Die betrachtete Jordankurve  $J$  ist in Abb. 19 dargestellt.

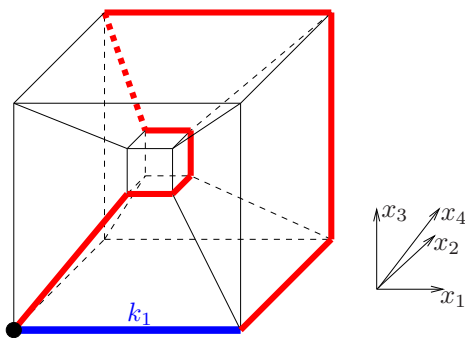


Abbildung 19: Jordankurve  $J = 1231413214$ . Zur graphischen Darstellung wurde  $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$  als Startpunkt gewählt.

Nach Satz 4.81 werden die Erzeugenden von  $\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^4$  durch Zusammensetzen von zwei Erzeugern aus  $U'$  in dieselbe Koordinatenrichtung bestimmt.

Die Anzahl der so zu bestimmenden Erzeuger von  $\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^4$  wurde in Satz 4.81 reduziert, indem in jede Koordinatenrichtung ein Erzeuger von  $U'$  ausgewählt wurde und nur dieser Erzeuger mit anderen kombiniert wird. Dieses Vorgehen führt natürlich nur dann zu einer Vereinfachung, wenn es in der entsprechenden Koordinatenrichtung mehr als zwei Kanten gibt.

Im hier betrachteten Beispiel trifft das nur auf die erste Koordinatenrichtung zu.

Es wird also in  $x_1$ -Richtung der Erzeuger von  $U'$  ausgewählt, welcher zu der blau markierten Kante  $k_1$  gehört.

Durch Anwenden der Sätze 4.82 und 4.81 erhält man somit folgende Erzeuger von  $\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^4$ .

- $(0, 2, 2, 0)$ ,  $(0, 2, 2, 2)$  und  $(0, 0, 0, 2)$  aus Erzeugern von  $U'$  in die erste Koordinatenrichtung,
- $(0, 0, 0, 2)$  aus Erzeugern von  $U'$  in die zweite Koordinatenrichtung,
- $(0, 0, 0, 2)$  aus Erzeugern von  $U'$  in die dritte Koordinatenrichtung und
- $(0, 2, 2, 0)$  aus Erzeugern von  $U'$  in die vierte Koordinatenrichtung.

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^4 &= \langle (0, 2, 2, 0), (0, 2, 2, 2), (0, 0, 0, 2), (0, 0, 0, 2), (0, 0, 0, 2), (0, 2, 2, 0) \rangle_{(2\mathbb{Z}_4)^4} \\ &= \langle (0, 2, 2, 0), (0, 0, 0, 2) \rangle_{(2\mathbb{Z}_4)^4} \\ &= \{(0, 0, 0, 0), (0, 2, 2, 0), (0, 0, 0, 2), (0, 2, 2, 2)\}. \end{aligned}$$

Es folgt

$$|\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^4| = 4.$$

Mit Hilfe von Theorem 4.77 erhält man daraus

$$|U'| = 2^4 \cdot |\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^4| = 2^4 \cdot 4 = 2^6.$$

Wegen Theorem 4.64 ist Fläche  $F$  also eingebettet.

**Beispiel 4.84.** Es soll nun ein Beispiel in ungerader Dimension  $n$  (ungleich drei) betrachtet werden. Dabei ist es nicht mehr gut möglich mit graphischen Darstellungen zu arbeiten. Um zu entscheiden, ob eine Fläche  $F$  eingebettet ist, hat man also nur die als Zahlenfolge gegebene Jordankurve  $J$  und die Ergebnisse dieses Kapitels zur Verfügung.

Es sei zum Beispiel die Jordankurve  $J = 1234543125$  in Dimension  $n = 5$  gegeben. Weiter sei  $F$  eine Fläche in  $\mathbb{R}^5$ , welche man aus einer Fläche  $f$  mit Rand  $\partial f = J$  durch wiederholtes Schwarz-Spiegeln erhält.

Aus Satz 4.81 ergibt sich, dass die Gruppe  $\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^5$  von sechs Elementen erzeugt wird. Fünf dieser Erzeuger haben die Gestalt  $(\sigma_i \circ \tilde{\sigma}_i)_1$  (wobei  $\sigma_i$  und  $\tilde{\sigma}_i$  zwei verschiedene Erzeuger von  $U'$  in  $x_i$ -Richtung sind). Der sechste Erzeuger von  $\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^5$  hat die Gestalt  $(\sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_5)_1$ , wobei jedes der  $\sigma_i$  ein ausgezeichneter Erzeuger von  $U'$  in  $x_i$ -Richtung ist.

Mit Hilfe von Satz 4.82 erhält man die ersten fünf Erzeuger von  $\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^5$ :

- $(0, 2, 0, 0, 2)$  aus Erzeugern von  $U'$  in die erste Koordinatenrichtung,
- $(2, 0, 0, 0, 2)$  aus Erzeugern von  $U'$  in die zweite Koordinatenrichtung,
- $(0, 0, 0, 0, 2)$  aus Erzeugern von  $U'$  in die dritte Koordinatenrichtung,
- $(0, 0, 0, 0, 2)$  aus Erzeugern von  $U'$  in die vierte Koordinatenrichtung und
- $(2, 2, 2, 2, 0)$  aus Erzeugern von  $U'$  in die fünfte Koordinatenrichtung.

Zum Berechnen des sechsten Erzeugers von  $\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^5$  zeichnet man zunächst die Erzeuger von  $U'$  aus, welche zu den in  $J$  blau markierten Kanten gehören.

Um daraus die Elemente  $\sigma_1, \dots, \sigma_5$  zu bestimmen, muss eine konkrete Lage von  $J$  ausgewählt werden. Wegen Korollar 4.67 ist der Startpunkt von  $J$  für die Einbettungsfrage von  $F$  egal, sodass man  $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$  als Startpunkt wählen kann, womit die Lage von  $J$  festgelegt ist.

Die blau markierten Kanten sind dann

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \left\{ \left( t, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \mid -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \right\}, \\
 k_2 &= \left\{ \left( \frac{1}{2}, t, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \mid -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \right\}, \\
 k_3 &= \left\{ \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, t, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \mid -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \right\}, \\
 k_4 &= \left\{ \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, t, \frac{1}{2} \right) \mid -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \right\} \text{ und} \\
 k_5 &= \left\{ \left( -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, t \right) \mid -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \right\}.
 \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die ausgezeichneten Erzeuger von  $U'$ :

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= ((0, 3, 3, 3, 3), (0, 1, 1, 1, 1)) \\
 \sigma_2 &= ((1, 0, 3, 3, 3), (1, 0, 1, 1, 1)) \\
 \sigma_3 &= ((1, 1, 0, 3, 3), (1, 1, 0, 1, 1)) \\
 \sigma_4 &= ((1, 1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0, 1)) \\
 \sigma_5 &= ((3, 3, 3, 3, 0), (1, 1, 1, 1, 0)).
 \end{aligned}$$

Für die Zusammensetzung dieser Elemente gilt

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3 \circ \sigma_4 \circ \sigma_5 &= ((0, 3, 3, 3, 3), (0, 1, 1, 1, 1)) \circ ((1, 0, 3, 3, 3), (1, 0, 1, 1, 1)) \\
 &\quad \circ ((1, 1, 0, 3, 3), (1, 1, 0, 1, 1)) \circ ((1, 1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0, 1)) \\
 &\quad \circ ((3, 3, 3, 3, 0), (1, 1, 1, 1, 0)) \\
 &= ((0, 3, 3, 3, 3) + (1, 0, 1, 1, 1), (1, 1, 0, 0, 0)) \\
 &\quad \circ ((1, 1, 0, 3, 3) + (3, 3, 1, 0, 3), (0, 0, 1, 1, 0)) \\
 &\quad \circ ((3, 3, 3, 3, 0), (1, 1, 1, 1, 0)) \\
 &= ((1, 3, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0, 0)) \circ ((0, 0, 1, 3, 2), (0, 0, 1, 1, 0)) \\
 &\quad \circ ((3, 3, 3, 3, 0), (1, 1, 1, 1, 0)) \\
 &= ((1, 3, 0, 0, 0) + (0, 0, 1, 3, 2), (1, 1, 1, 1, 0)) \\
 &\quad \circ ((3, 3, 3, 3, 0), (1, 1, 1, 1, 0)) \\
 &= ((1, 3, 1, 3, 2) + (1, 1, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 0)) \\
 &= ((2, 0, 2, 0, 2), 0).
 \end{aligned}$$

Der sechste Erzeuger von  $\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^5$  ist also  $(2, 0, 2, 0, 2)$ .

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
 \Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^5 &= \langle \{(0, 2, 0, 0, 2), (2, 0, 0, 0, 2), (0, 0, 0, 0, 2), (0, 0, 0, 0, 2), (2, 2, 2, 2, 0), \\
 &\quad (2, 0, 2, 0, 2)\}_{(2\mathbb{Z}_4)^5} \rangle \\
 &= \langle \{(2, 0, 0, 0, 0), (0, 2, 0, 0, 0), (0, 0, 2, 0, 0), (0, 0, 0, 2, 0), (0, 0, 0, 0, 2)\} \rangle
 \end{aligned}$$

Es ergibt sich also

$$|\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^5| = 2^5.$$

Aus Theorem 4.77 folgt damit

$$|U'| = 2^4 \cdot |\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^5| = 2^4 \cdot 2^5 = 2^9.$$

Wegen Theorem 4.64 ist die aus  $J$  erzeugte Fläche  $F$  somit nicht eingebettet.

In diesem Beispiel könnte man sogar auf die Berechnung des letzten Erzeugers  $(\sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_5)_1$  verzichten, denn die von den ersten fünf Erzeugern von  $\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^5$  erzeugte Untergruppe von  $\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^5$  hat bereits  $2^4$  Elemente. Daraus ergibt sich mit Hilfe der Theoreme 4.77 und 4.64, dass  $|U'| \geq 2^8$  gilt und die Fläche  $F$  nicht eingebettet ist.

## 4.10 Kriterium für die Einbettung von $F$

Fasst man die bisherigen Ergebnisse dieses Kapitels zusammen, so erhält man folgendes Kriterium für die Einbettung von  $F$ .

**Theorem 4.85.** *In geraden Dimensionen  $n$  gilt:*

- $F$  ist eingebettet  $\iff |U'| = 2^{n+2} \iff |\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n| = 2^2 = 4$  und
- $F$  ist nicht eingebettet  $\iff |U'| \geq 2^{n+3} \iff |\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n| \geq 2^3 = 8$ .

*In ungeraden Dimensionen  $n$  gilt:*

- $F$  ist eingebettet  $\iff |U'| = 2^{n+2} \iff |\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n| = 2^3 = 8$  und
- $F$  ist nicht eingebettet  $\iff |U'| \geq 2^{n+3} \iff |\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n| \geq 2^4 = 16$ .

**Beweis.** Theorem 4.85 folgt direkt aus den Theoremen 4.64 und 4.77. **w. z. b. w.**

Mit Hilfe dieses Kriteriums (und den Aussagen aus Abschnitt 4.9.1) kann man für jede konkret gegebene Jordankurve  $J$  feststellen, ob eine zugehörige Fläche  $F$  eingebettet ist oder nicht. Diese Tatsache ist von der Dimension unabhängig (auch wenn die nötigen Rechnungen in höheren Dimensionen aufwändiger sind).

Außerdem ermöglicht Theorem 4.85 folgende Überlegung:

Erhöht man die Anzahl der Kanten in einer Jordankurve  $J$  (während man die Dimension  $n$  nicht ändert), so erhöht sich die Anzahl der Erzeuger von  $U'$ . Tendenziell erhöht sich dadurch auch die Anzahl  $|U'|$ .

Aus Theorem 4.85 erhält man somit folgende quantitative Aussage.

- Je mehr Kanten  $J$  durchläuft, um so wahrscheinlicher sind Selbstschnitte von  $F$ .

Tatsächlich wird sich im weiteren Verlauf dieses Kapitels herausstellen, dass ab einer gewissen (von  $n$  abhängigen) Kantenanzahl von  $J$  keine eingebetteten Flächen  $F$  mehr entstehen können.

Diese Aussage wird später verwendet, um im Spezialfall  $n = 4$  alle eingebetteten Flächen zu charakterisieren.

4.10.1 Beispiele: Jordankurven mit acht Kanten in  $\mathbb{R}^4$ 

Im Folgenden sollen alle eingebetteten Flächen  $F$  in  $\mathbb{R}^4$  über die zugehörige Jordankurve  $J = \partial f$  charakterisiert werden. Da Selbstschnitte wahrscheinlicher werden, wenn sich die Kantenanzahl von  $J$  erhöht, sind die besten Kandidaten für eine Einbettung die Jordankurven  $J$  mit  $2n = 8$  Kanten. Aus Satz 3.24 ist bekannt, dass es (bis auf Symmetrie) genau sechs solche Jordankurven gibt (diese sind in Abb. 13 graphisch dargestellt). Davon führen genau drei Jordankurven zu eingebetteten Flächen  $F$ , während bei den anderen drei Jordankurven Selbstschnitte von  $F$  entstehen.

**Satz 4.86.** *Es gibt genau drei (bis auf Symmetrie) verschiedene Jordankurven mit acht Kanten in  $\mathbb{R}^4$ , für die  $F$  eingebettet ist. Diese drei Kurven sind (vgl. Abb.20):*

$$J_3 = 12314234, \quad J_4 = 12314324 \quad \text{und} \quad J_6 = 12321434.$$

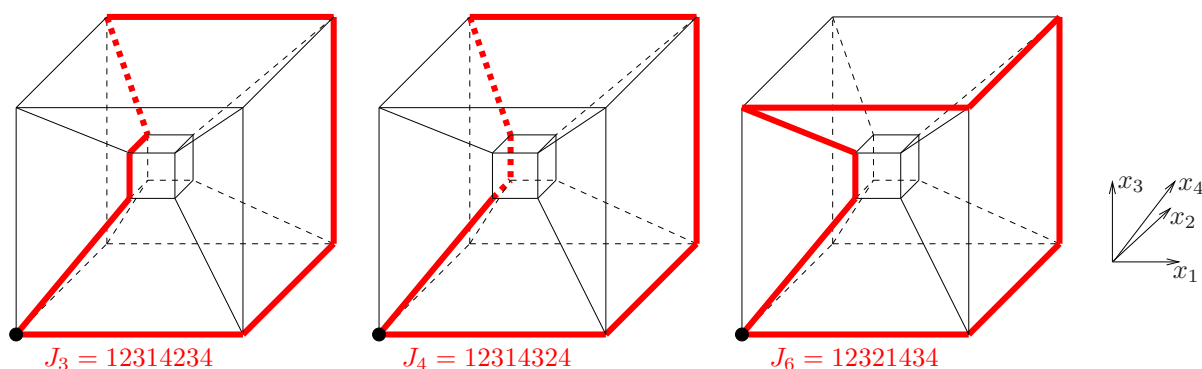


Abbildung 20: Alle Jordankurven  $J$  mit acht Kanten, die zu eingebetteten Flächen  $F$  führen.

**Bemerkung 4.87.** Um zu bestimmen, ob  $F$  eingebettet ist oder nicht, reicht es, die zugehörige Jordankurve  $J = \partial f$  bis auf Symmetrie zu betrachten.

Das kann folgendermaßen begründet werden:

Stehen zwei Zahlenfolgen  $J$  und  $\tilde{J}$  für bis auf Symmetrie gleiche Jordankurven, dann lassen sich  $J$  und  $\tilde{J}$  durch Hintereinanderausführung der drei Operationen aus Satz 3.16 ineinander überführen.

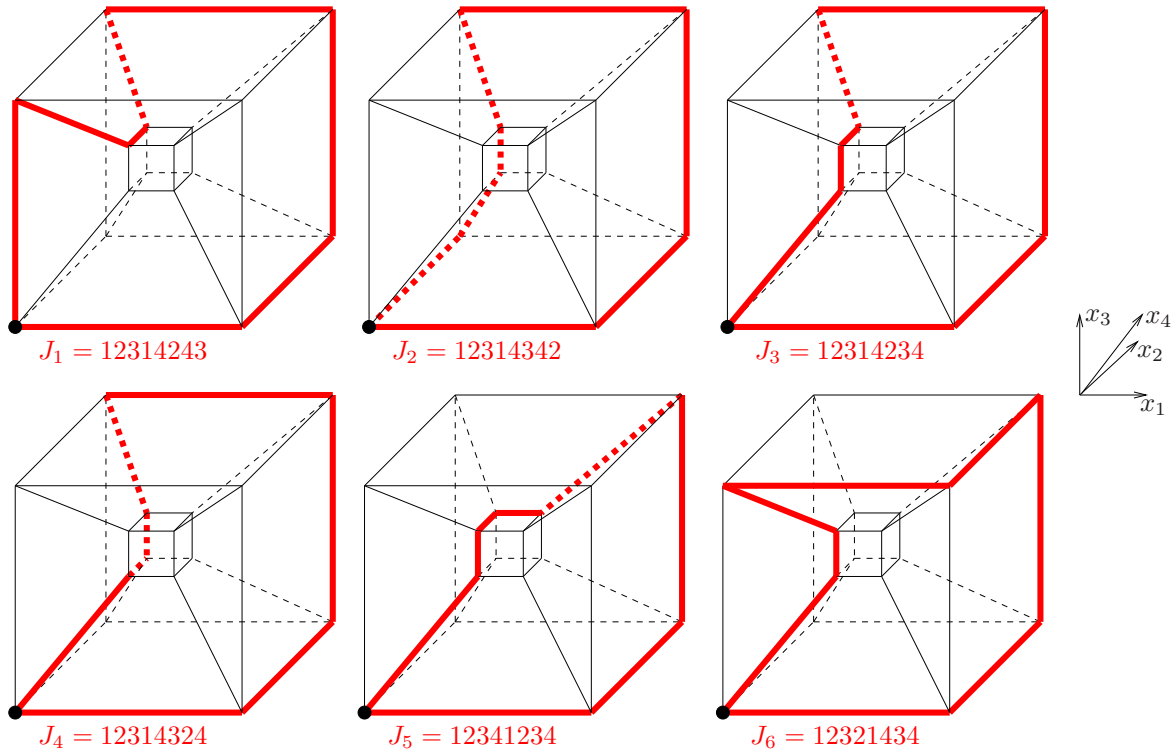
Durch diese drei Operationen ändert sich die Einbettung von  $F$  nicht:

- Das Umkehren der Reihenfolge der Zahlen in der Zahlenfolge ändert die Kurve  $J$  als Teilmenge des  $\mathbb{R}^4$  nicht.
- Ein zyklisches Verschieben der Zahlen in der Zahlenfolge kann als Änderung des Startpunktes der Jordankurve  $J$  aufgefasst werden. Wegen Korollar 4.67 verändert das die Einbettungseigenschaft von  $F$  nicht.
- Die Anwendung einer Permutation auf die Zahlenfolge führt sowohl in jeder Komponente der Elemente von  $U'$ , als auch bei den Gitterelementen aus  $\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n$

zu einer entsprechenden Permutation der Einträge. Insbesondere ändert sich dadurch nichts an den Zahlen  $|U'|$  und  $|\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n|$  und damit wegen Theorem 4.85 auch nichts an der Einbettung/Nicht-Einbettung von  $F$ .

Diese Ausführungen gelten analog in beliebigen Dimensionen.

**Beweis von Satz 4.86.** Nach Satz 3.24 gibt es in  $\mathbb{R}^4$  genau sechs (bis auf Symmetrie) verschiedene Jordankurven  $J$  mit acht Kanten, und zwar:



Für jede dieser sechs Kurven wird nun zunächst mit Hilfe der Sätze 4.81 und 4.82 die Gruppe  $\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^4$  bestimmt. Anschließend verwendet man Theorem 4.85, um festzustellen, ob  $F$  eingebettet ist oder nicht.

$J_1 = 12314243$ :

Für diese Kurve ergibt sich

$$\begin{aligned} \Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^4 &= \langle \{(0, 2, 2, 0), (2, 0, 2, 2), (2, 2, 0, 0), (0, 2, 0, 0)\} \rangle_{(2\mathbb{Z}_4)^4} \\ &= \langle \{(2, 0, 0, 0), (0, 2, 0, 0), (0, 0, 2, 0), (0, 0, 0, 2)\} \rangle_{(2\mathbb{Z}_4)^4} \\ &= (2\mathbb{Z}_4)^4. \end{aligned}$$

Also gilt

$$|\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^4| = 2^4 = 16$$

und wegen Theorem 4.85 ist die Fläche  $F$  in diesem Fall nicht eingebettet.



$J_2 = 12314342$ :

Für diese Kurve ergibt sich

$$\begin{aligned}\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^4 &= \langle \{(0, 2, 2, 0), (2, 0, 0, 0), (2, 0, 0, 2), (0, 0, 2, 0)\} \rangle_{(2\mathbb{Z}_4)^4} \\ &= \langle \{(2, 0, 0, 0), (0, 2, 0, 0), (0, 0, 2, 0), (0, 0, 0, 2)\} \rangle_{(2\mathbb{Z}_4)^4} \\ &= (2\mathbb{Z}_4)^4.\end{aligned}$$

Also gilt

$$|\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^4| = 2^4 = 16$$

und wegen Theorem 4.85 ist die Fläche  $F$  in diesem Fall nicht eingebettet.

$J_3 = 12314234$ :

Für diese Kurve ergibt sich

$$\begin{aligned}\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^4 &= \langle \{(0, 2, 2, 0), (2, 0, 2, 2), (2, 2, 0, 2), (0, 2, 2, 0)\} \rangle_{(2\mathbb{Z}_4)^4} \\ &= \langle \{(0, 2, 2, 0), (2, 0, 2, 2)\} \rangle_{(2\mathbb{Z}_4)^4}.\end{aligned}$$

Also gilt

$$|\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^4| = 2^2 = 4$$

und wegen Theorem 4.85 ist die Fläche  $F$  in diesem Fall eingebettet.

$J_4 = 12314324$ :

Für diese Kurve ergibt sich

$$\begin{aligned}\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^4 &= \langle \{(0, 2, 2, 0), (2, 0, 0, 2), (2, 0, 0, 2), (0, 2, 2, 0)\} \rangle_{(2\mathbb{Z}_4)^4} \\ &= \langle \{(2, 0, 0, 2), (0, 2, 2, 0)\} \rangle_{(2\mathbb{Z}_4)^4}.\end{aligned}$$

Also gilt

$$|\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^4| = 2^2 = 4$$

und wegen Theorem 4.85 ist die Fläche  $F$  in diesem Fall eingebettet.

$J_5 = 12341234$ :

Für diese Kurve ergibt sich

$$\begin{aligned}\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^4 &= \langle \{(0, 2, 2, 2), (2, 0, 2, 2), (2, 2, 0, 2), (2, 2, 2, 0)\} \rangle_{(2\mathbb{Z}_4)^4} \\ &= \langle \{(2, 2, 0, 0), (0, 2, 2, 2), (0, 0, 2, 2), (2, 2, 0, 2)\} \rangle_{(2\mathbb{Z}_4)^4} \\ &= \langle \{(2, 2, 0, 0), (0, 2, 0, 0), (0, 0, 2, 2), (0, 0, 0, 2)\} \rangle_{(2\mathbb{Z}_4)^4} \\ &= (2\mathbb{Z}_4)^4.\end{aligned}$$

Also gilt

$$|\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^4| = 2^4 = 16$$

und wegen Theorem 4.85 ist die Fläche  $F$  in diesem Fall nicht eingebettet.

$J_6 = 12321434$ :

Für diese Kurve ergibt sich

$$\begin{aligned} \Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^4 &= \langle \{(0, 0, 2, 0), (0, 0, 2, 0), (2, 2, 0, 2), (0, 0, 2, 0)\} \rangle_{(2\mathbb{Z}_4)^4} \\ &= \langle \{(0, 0, 2, 0), (2, 2, 0, 2)\} \rangle_{(2\mathbb{Z}_4)^4} . \end{aligned}$$

Also gilt

$$|\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^4| = 2^2 = 4$$

und wegen Theorem 4.85 ist die Fläche  $F$  in diesem Fall eingebettet. **w. z. b. w.**

An diesem Beweis erkennt man unter anderem einen Unterschied zwischen den Dimensionen drei und vier. Während in Dimension drei jede Jordankurve zu einer eingebetteten Fläche  $F$  führt, gibt es in Dimension vier sowohl Jordankurven, die zu einer eingebetteten Fläche  $F$  führen, als auch Jordankurven, die zu einer Fläche  $F$  mit Selbstschnitten führen.

In den bisherigen vierdimensionalen Beispielen ergab sich entweder  $|\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^4| = 2^2$  oder  $|\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^4| = 2^4$ .

Wegen Korollar 4.78 könnte es noch die dritte Möglichkeit  $|\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^4| = 2^3 = 8$  geben. Diese Möglichkeit tritt tatsächlich auf, wie folgendes Beispiel zeigt.

**Beispiel 4.88.** Es sei  $J = 1213141312131413$  eine Jordankurve in  $\mathbb{R}^4$  mit 16 Kanten (siehe Abb. 21). Das ist die maximal mögliche Kantenanzahl von  $J$ , da  $W$  genau 16 Ecken besitzt und eine Jordankurve jede Ecke höchstens einmal durchläuft.

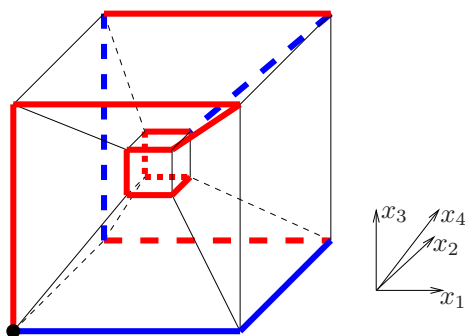


Abbildung 21: Jordankurve  $J = 1213141312131413$ . Zur graphischen Darstellung wurde der Startpunkt  $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$  gewählt.

Aus der gegebenen Jordankurve  $J$  berechnet man mit Hilfe der Sätze 4.81 und 4.82 die Erzeuger von  $\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^4$ . Dazu seien die Erzeuger von  $U'$  ausgezeichnet, welche zu den blau markierten Kanten gehören.

Es ergeben sich folgende Erzeuger von  $\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^4$ :

- $(0, 2, 0, 0), (0, 2, 2, 0), (0, 2, 2, 2), (0, 2, 0, 2), (0, 0, 0, 2), (0, 0, 2, 2)$  und  $(0, 0, 2, 0)$  aus Erzeugern von  $U'$  in die erste Koordinatenrichtung,
- $(0, 0, 0, 2)$  aus Erzeugern von  $U'$  in die zweite Koordinatenrichtung,

- $(0, 0, 0, 2), (0, 2, 0, 2)$  und  $(0, 2, 0, 0)$  aus Erzeugern von  $U'$  in die dritte Koordinatenrichtung und
- $(0, 2, 0, 0)$  aus Erzeugern von  $U'$  in die vierte Koordinatenrichtung.

Die von diesen Elementen erzeugte Gruppe ist

$$\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^4 = \langle \{(0, 2, 0, 0), (0, 0, 2, 0), (0, 0, 0, 2)\} \rangle_{(2\mathbb{Z}_4)^4} .$$

Also ist  $J$  ein Beispiel für

$$|\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^4| = 2^3 = 8 .$$

Aus Theorem 4.85 ergibt sich auch in diesem Fall, dass jede Fläche  $F$ , die durch wiederholtes Schwarz-Spiegeln einer Fläche  $f$  mit Rand  $\partial f = J = 1213141312131413$  entsteht, nicht eingebettet ist.

## 4.11 Beispiele in beliebigen Dimensionen

Alle bisherigen Beispiele für Jordankurven  $J$ , die zu eingebetteten Flächen  $F$  führen, befinden sich in  $\mathbb{R}^4$ . Es stellt sich die Frage, ob auch in höheren Raumdimensionen solche Beispiele existieren. Außerdem ist interessant, wie sich die Anzahl von Jordankurven  $J$ , zu eingebetteten Flächen  $F$ , bei steigender Raumdimension verhält.

Zur Beantwortung dieser Fragen wird zunächst festgestellt, dass es Serien von Beispielen gibt, welche für jede Dimension  $n$  eine Jordankurve  $J$  (zu eingebetteten Flächen  $F \subset \mathbb{R}^n$ ) enthalten.

**Beispiel 4.89.** Für jede Dimension  $n \geq 3$  kann man die Jordankurve  $J = 1\ 2\ 3\ 4\ \dots\ (n-1)\ n\ 1\ 2\ n\ (n-1)\ \dots\ 4\ 3$  als Ausgangspunkt für die Konstruktion der Fläche  $F$  in  $\mathbb{R}^n$  betrachten.

Mit Hilfe der Sätze 4.81 und 4.82 ergeben sich aus  $J$  Erzeuger von  $\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n$ :

- $(0, 2, 2, \dots, 2)$  aus Erzeugern von  $U'$  in die erste Koordinatenrichtung,
- $(2, 0, 2, \dots, 2)$  aus Erzeugern von  $U'$  in die zweite Koordinatenrichtung und
- $(2, 2, 0, \dots, 0)$  aus Erzeugern von  $U'$  in  $x_3, \dots, x_{n-1}$ - und  $x_n$ -Richtung.

Diese drei Elemente erzeugen eine Untergruppen von  $\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^4$  mit vier Elementen. In geraden Dimensionen ist diese Untergruppe gerade gleich  $\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^4$ . In ungeraden Dimensionen kommt ein weiterer Erzeuger hinzu. Da die Anzahl der Elemente von  $\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^4$  in ungeraden Dimensionen immer mindestens acht ist (siehe Korollar 4.78), ergibt sich:

$$|\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n| = \begin{cases} 4 & \text{für } n \text{ gerade} \\ 8 & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Mit Hilfe von Theorem 4.85 erhält man daraus, dass die Fläche  $F$  für jede Dimension  $n$  eingebettet ist.

**Bemerkung 4.90.** Beispiel 4.89 entsteht aus der Jordankurve  $J = 1\ 2\ 3\ 1\ 2\ 3$  in  $\mathbb{R}^3$ , indem die Dreien abwechselnd durch die Folge  $3\ 4 \dots (n-1)\ n$  und  $n\ (n-1) \dots 4\ 3$  ersetzt werden. Durch diese Ersetzung ändert sich die Anzahl der Elemente von

$$\tilde{\Lambda}(F) := \langle \{(\sigma_{i1} \circ \sigma_{i2})_1 \mid \sigma_{i1} \text{ und } \sigma_{i2} \text{ sind Erzeuger von } U' \text{ in } x_i\text{-Richtung}\} \rangle$$

nicht. Um das einzusehen, vergleicht man die neuen und die alten Erzeuger dieser Gruppe. Zur Bestimmung des Unterschieds wird wiederum Satz 4.82 verwendet. Es ergibt sich:

- Die neuen Erzeuger von  $\tilde{\Lambda}(F)$ , die aus Erzeugern von  $U'$  in  $x_i$ -Richtung mit  $i \leq 3$  entstehen, erhält man aus den entsprechenden alten Erzeugern von  $\tilde{\Lambda}(F)$  durch Ergänzen von  $n-3$  Koordinaten, die alle gleich der dritten Koordinate sind.
- Die neuen Erzeuger von  $\tilde{\Lambda}(F)$ , die aus Erzeugern von  $U'$  in  $x_i$ -Richtung mit  $i > 3$  entstehen, sind gleich den neuen Erzeugern von  $\tilde{\Lambda}(F)$ , die aus Erzeugern von  $U'$  in  $x_3$ -Richtung entstehen.

Um die Anzahl  $|\tilde{\Lambda}(F)|$  bzgl. der neuen Erzeuger zu bestimmen, reicht es also die ersten drei Koordinaten der Erzeuger zu betrachten (alle anderen Koordinaten sind gleich der Dritten). Diese ersten drei Koordinaten entsprechen den alten Erzeugern. Also ändert sich die Anzahl  $|\tilde{\Lambda}(F)|$  durch die angegebene Ersetzung tatsächlich nicht. Für die Kurve  $J = 1\ 2\ 3\ 1\ 2\ 3$  berechnet man mit Hilfe von Satz 4.82, dass

$$|\tilde{\Lambda}(F)| = 4$$

gilt. Daraus wird wie in Beispiel 4.89 geschlossen, dass jede Fläche  $F$  (zur hier gegebenen Jordankurve  $J$ ) in jeder Dimension eingebettet ist.

**Bemerkung 4.91.** Das Vorgehen aus Bemerkung 4.90 lässt sich verallgemeinern. Dadurch erhält man:

Sei  $J = (c_i)_{1 \leq i \leq m}$  eine Jordankurve in Dimension  $k$ , für die  $|\tilde{\Lambda}(F)| = 4$  gilt. Weiter sei  $\tilde{J}$  die Jordankurve in Dimension  $n > k$ , welche aus  $J = (c_i)_{1 \leq i \leq m}$  entsteht, indem alle  $c_i = j$  (für ein festes  $1 \leq j \leq k$ ) abwechselnd durch  $j\ (k+1) \dots n$  und  $n \dots (k+1)\ j$  ersetzt werden.

Betrachtet man nun  $\tilde{J}$  als Ausgangspunkt für die Konstruktion von  $F$  in  $\mathbb{R}^n$ , so ist die entstehende Fläche  $F$  eingebettet.

Die angegebene Ersetzung kann natürlich auch mehrfach hintereinander durchgeführt werden, ohne dass sich an der Einbettung von  $F$  etwas ändert.

Man beachte, dass die Bedingung  $|\tilde{\Lambda}(F)| = 4$  wegen Theorem 4.85 und Satz 4.81 nur dann erfüllt sein kann, wenn  $F$  eingebettet ist.

**Bemerkung 4.92.** Wie in Bemerkung 4.91 beschrieben, entstehen weitere Beispiele für Jordankurven in beliebigen Dimensionen, die zu eingebetteten Flächen  $F$  gehören:

- Startet man z. B. mit der Jordankurve 1 2 1 2 in Dimension zwei (bzw. äquivalent mit der Kurve 1 2 3 1 3 2 in Dimension drei) so erhält man (nach eventueller Permutation der Koordinatenrichtungen), dass die Jordankurve

$$J^1 = 1 \dots l (l+1) \dots n l \dots 1 n \dots (l+1) \text{ mit } 1 \leq l < n$$

für jede Dimension  $n$  zu eingebetteten Flächen  $F$  führt.

- Beginnt man mit der Jordankurve 1 2 3 1 2 3 in Dimension drei, so ergibt sich (nach eventueller Permutation der Koordinatenrichtungen), dass die Jordankurve

$$J^2 = 1 \dots l (l+1) \dots k (k+1) \dots n l \dots 1 k \dots (l+1) n \dots (k+1) \text{ mit } 1 \leq l < k < n$$

für jede Dimension  $n$  zu eingebetteten Flächen  $F$  führt.

- Startet man mit der Jordankurve 1 2 3 2 1 2 3 2 in Dimension drei, so erhält man (nach eventueller Permutation der Koordinatenrichtungen), dass die Jordankurve

$$J^3 = 1 \dots l (k+1) \dots n (l+1) \dots k n \dots (k+1) l \dots 1 (k+1) \dots n k \dots (l+1) n \dots (k+1)$$

mit  $1 \leq l < k < n$  für jede Dimension  $n$  zu eingebetteten Flächen  $F$  führt.

Aus den bisher bekannten Beispielen für eingebettete Flächen (siehe Korollar 4.46 und Satz 4.86) lassen sich mit Hilfe von Bemerkung 4.91 keine weiteren Beispiele für eingebettete Flächen in beliebigen Dimensionen konstruieren.

Um das einzusehen, stellt man fest, dass die Kurve  $J_3 = 12314234$  in  $\mathbb{R}^4$  bis auf Symmetrie von der Gestalt  $J^2$  ist, während die Kurven  $J_4 = 12314324$ ,  $J_6 = 12321434$  in  $\mathbb{R}^4$  und die Kurve  $121323$  in  $\mathbb{R}^3$  von der Gestalt  $J^1$  sind. Aus diesen Kurven ergeben sich also keine zusätzlichen Beispiele für eingebettete Flächen.

**Bemerkung 4.93.** Man betrachte die Beispielkurven aus Bemerkung 4.92 mit

- $l \leq \frac{n}{2}$  für Kurven der Gestalt  $J^1$ ,
- $l \leq \frac{k}{2}$  und  $k \leq l + \frac{n-l}{2} = \frac{n+l}{2}$  für Kurven der Gestalt  $J^2$  und
- $l \leq \frac{k}{2}$  für Kurven der Gestalt  $J^3$ .

Es kann gezeigt werden, dass diese Kurven paarweise verschieden sind. Insbesondere erhält man aus einer Jordankurve  $J$  (zu eingebetteten Flächen  $F$ ) in Dimension drei mehrere verschiedene Jordankurven in  $\mathbb{R}^n$ , welche auch zu eingebetteten Flächen gehören. Dies legt die Vermutung nahe, dass die Anzahl der Jordankurven zu eingebetteten Flächen  $F$  größer wird, wenn sich die Dimension  $n$  erhöht.

Außerdem lässt sich die Anzahl der in dieser Bemerkung betrachteten Jordankurven in Abhängigkeit von der Dimension  $n$  angeben. Zum Beispiel ergibt sich, dass die Anzahl

von Kurven der Gestalt  $J^3$  mit  $l \leq \frac{k}{2}$  in  $\mathbb{R}^n$  gleich  $\frac{n^2-2n}{4}$  für gerade  $n$  und  $\frac{(n-1)^2}{4}$  für ungerade  $n$  ist.

Es ist also zu vermuten, dass die Anzahl der Jordankurven  $J$  zu eingebetteten Flächen  $F$  mindestens quadratisch in der Dimension  $n$  wächst.

Betrachtet man die Anzahl von Kanten in den angegebenen Beispielen für Jordankurven  $J$  zu eingebetteten Flächen  $F$ , so kann festgestellt werden:

Die Jordankurven  $J^1$  und  $J^2$  haben jeweils  $2n$  Kanten, während die Kurven der Gestalt  $J^3$  genau  $2(l+(k-l))+4(n-k) = 2k+4(n-k) = 4n-2k$  Kanten besitzen. Wegen der Bedingung  $1 \leq l < k$  für Kurven der Gestalt  $J^3$  ist  $k$  für diese Kurven mindestens zwei. Also haben Jordankurven der Gestalt  $J^1, J^2$  oder  $J^3$  höchstens  $4n-2 \cdot 2 = 4(n-1)$  Kanten.

Daraus ergibt sich die Frage, ob es Jordankurven  $J$  mit mehr als  $4(n-1)$  Kanten geben kann, die zu eingebetteten Flächen  $F$  gehören. Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, dass solche Jordankurven zumindest in geraden Dimensionen  $n$  nicht existieren.

## 4.12 Notwendiges Kriterium für die Einbettung von $F$

Es soll ein notwendiges Kriterium für die Einbettung von  $F$  bewiesen werden, welches eine Aussage über die Anzahl der Kanten in  $J$  macht. Dazu muss man zwischen geraden und ungeraden Dimensionen unterscheiden.

**Satz 4.94.** *Es sei  $n \geq 4$  gerade,  $J$  eine Jordankurve entlang der Kanten des  $n$ -dimensionalen Würfels  $W$  und  $F$  eine zu  $J$  gehörige Fläche. Dann gilt: Hat  $J$  mehr als  $4(n-1)$  Kanten, so ist die Fläche  $F$  nicht eingebettet.*

Die Schranke für die Kantenanzahl von  $J$  aus Satz 4.94 ist scharf, d. h. es gibt in jeder geraden Dimension mindestens eine Jordankurve mit  $4(n-1)$  Kanten, für welche die Flächen  $F$  eingebettet sind. Eine solche Kurve ist  $J^3$  aus Bemerkung 4.92 mit  $l = 1$  und  $k = 2$ . Diese Jordankurve hat die Form

$$13\dots n2n\dots 313\dots n2n\dots 3.$$

**Beweis von Satz 4.94.** Sei  $J$  eine Jordankurve mit mehr als  $4(n-1) = 2+2+4(n-2)$  Kanten. Dann gibt es entweder eine Koordinatenrichtung, in die  $J$  mindestens sechs Kanten durchläuft, oder es gibt mindestens  $n-1$  Koordinatenrichtungen, in die  $J$  genau vier Kanten durchläuft. Entsprechend wird eine Fallunterscheidung durchgeführt:

Fall 1: Es gibt eine Koordinatenrichtung, in die  $J$  mindestens sechs Kanten durchläuft. O. B. d. A. gilt das für die  $x_1$ -Richtung.

Dann gibt es sechs verschiedene Erzeuger  $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{14}, \sigma_{15}$  und  $\sigma_{16}$  von  $U'$ , die zu Kanten von  $J$  in  $x_1$ -Richtung gehören. Also sind die sechs Elemente

$$\sigma_{11} \circ \sigma_{11}, \quad \sigma_{11} \circ \sigma_{12}, \quad \sigma_{11} \circ \sigma_{13}, \quad \sigma_{11} \circ \sigma_{14}, \quad \sigma_{11} \circ \sigma_{15} \quad \text{und} \quad \sigma_{11} \circ \sigma_{16}$$

verschieden und haben dieselbe zweite Komponente (und zwar  $p_1 + p_1 = 0$ ). Insbesondere sind die ersten Komponenten dieser sechs Elemente verschieden. Nach Satz 4.81 sind

$$(\sigma_{11} \circ \sigma_{11})_1, (\sigma_{11} \circ \sigma_{12})_1, (\sigma_{11} \circ \sigma_{13})_1, (\sigma_{11} \circ \sigma_{14})_1, (\sigma_{11} \circ \sigma_{15})_1 \text{ und } (\sigma_{11} \circ \sigma_{16})_1$$

außerdem Erzeuger von  $\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n$ . Also gilt:

$$|\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n| \geq 6 > 4$$

und  $F$  ist wegen Theorem 4.85 nicht eingebettet.

Fall 2: Es gibt mindestens  $n - 1$  Koordinatenrichtungen, in die  $J$  genau vier Kanten durchläuft. O. B. d. A. sind das die Richtungen  $x_1, \dots, x_{n-1}$ .

Wie im ersten Fall ergeben sich aus den Erzeugern von  $U'$  in  $x_i$ -Richtung (mit  $1 \leq i \leq n - 1$ ) mindestens vier verschiedene Elemente von  $\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n$ . Die  $i$ -te Koordinate dieser vier Elemente ist dabei Null (siehe Satz 4.82).

Angenommen eine zu  $J$  gehörige Fläche  $F$  wäre eingebettet. Dann gilt wegen Theorem 4.85:

$$|\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n| = 4.$$

Das bedeutet, die vier Elemente von  $\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n$ , welche aus den Erzeugern von  $U'$  in  $x_1$ -Richtung entstehen, müssen dieselben sein wie die, welche aus den Erzeugern von  $U'$  in  $x_i$ -Richtung (für jedes  $2 \leq i \leq n - 1$ ) entstehen. Da bei den letzteren die  $i$ -te Koordinate Null ist, muss das auch für die ersteren gelten.

Also gibt es vier verschiedene Elemente von  $\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n$ , deren  $i$ -te Koordinate für alle  $1 \leq i \leq n - 1$  Null ist. Das ist nicht möglich, da nur zwei solche Elemente existieren (nämlich Null und  $(0, 0, \dots, 0, 2)$ ). Dieser Widerspruch zeigt, dass die Fläche  $F$  nicht eingebettet ist. **w. z. b. w.**

**Bemerkung 4.95.** Analog kann man auch für ungerade Dimensionen  $n$  vorgehen. Dort ergibt sich, dass  $F$  Selbstschnitte hat, wenn  $J$  in eine Koordinatenrichtung mehr als zehn Kanten enthält oder wenn  $J$  in mindestens  $n - 2$  Koordinatenrichtungen acht Kanten durchläuft. Damit ergibt sich für ungerade Dimensionen  $n$ :

Wenn  $J$  mehr als  $8(n - 3) + 3 \cdot 6$  Kanten besitzt, so ist die Fläche  $F$  nicht eingebettet. Hier ist allerdings nicht klar, ob diese Schranke scharf ist. Das heißt, mir ist nicht bekannt, ob es eine Jordankurve  $J$  mit genau  $8(n - 3) + 3 \cdot 6$  Kanten gibt, für die  $F$  eingebettet ist.

Aus dem Beweis von Satz 4.94 ergibt sich auch:

**Korollar 4.96.** *Es sei  $n$  gerade und  $J$  eine Jordankurve entlang der Kanten des  $n$ -dimensionalen Würfels  $W$ , sodass die zugehörigen Flächen  $F$  eingebettet sind. Weiterhin durchlaufe  $J$  vier Kanten in  $x_i$ -Richtung (mit  $1 \leq i \leq n$ ).*

*Dann ist die  $i$ -te Koordinate von jedem Element aus  $\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n$  gleich Null.*

**Beweis.** Da  $F$  eingebettet ist, folgt aus Theorem 4.85:

$$(4.46) \quad |\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n| = 4.$$

Wie im Beweis von Satz 4.94 ergeben sich aus den vier Kanten von  $J$  in  $x_i$ -Richtung vier verschiedene Elemente von  $\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n$ , deren  $i$ -te Koordinate Null ist. Wegen (4.46) gibt es keine weiteren Elemente von  $\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n$ . w. z. b. w.

### 4.13 Charakterisierung eingebetteter Flächen $F$ in $\mathbb{R}^4$

Mit Hilfe von Satz 4.94 ist es möglich alle Jordankurven  $J$  entlang der Kanten des vierdimensionalen Würfels  $W$  anzugeben, die zu eingebetteten Flächen  $F$  führen.

**Theorem 4.97.** *Es gibt genau fünf (bis auf Symmetrie) verschiedene Jordankurven  $J$  in  $\mathbb{R}^4$ , für die  $F$  eingebettet ist. Diese fünf Kurven sind:*

$$J_3 = 12314234, \quad J_4 = 12314324, \quad J_6 = 12321434, \\ J_7 := 1231413214 \quad \text{und} \quad J_8 := 123214123214.$$

Sie werden in Abb. 22 dargestellt.

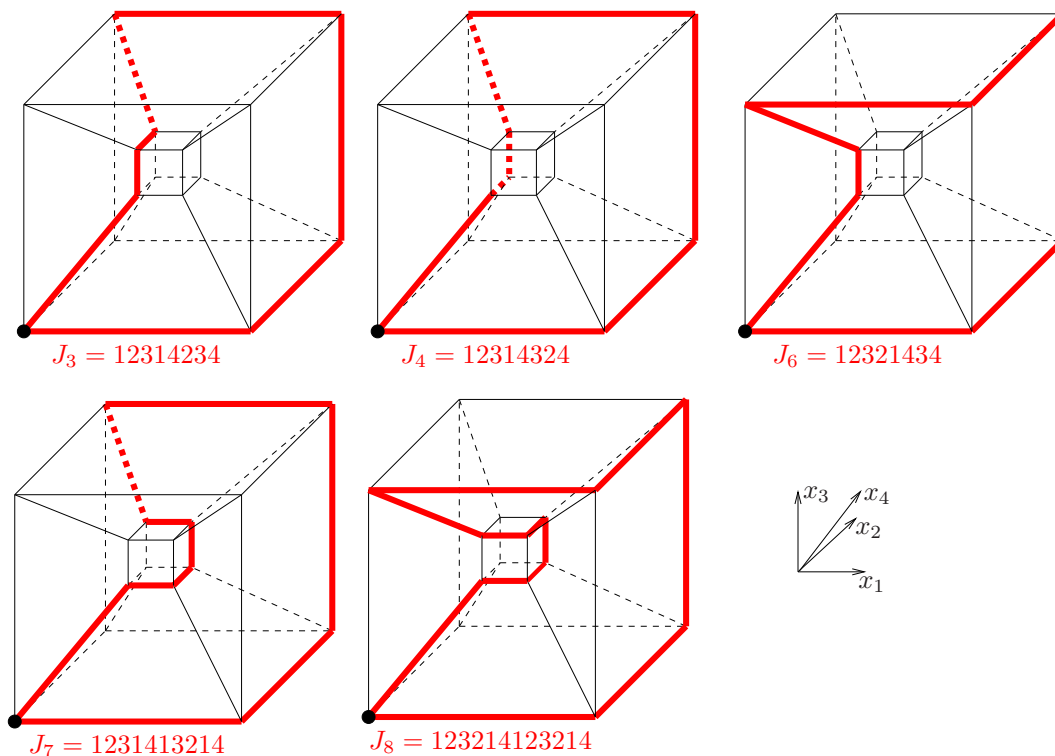


Abbildung 22: Alle Jordankurven entlang der Kanten des vierdimensionalen Würfels  $W$ , die zu eingebetteten Flächen  $F$  führen.

**Beweis.** Es sei  $J$  eine Jordankurve in  $\mathbb{R}^4$ , für die  $F$  eingebettet ist. Mit Hilfe einer Fallunterscheidung bzgl. der Anzahl von Kanten in  $J$  wird gezeigt, dass  $J$  eine der Kurven  $J_3, J_4, J_6, J_7$  oder  $J_8$  ist.

Bekanntlich hat  $J$  in Dimension vier mindestens  $2n = 8$  Kanten. Aus Satz 4.94 ergibt



sich außerdem, dass  $J$  höchstens  $4(n-1) = 12$  Kanten besitzt. Da die Jordankurve  $J$  eine gerade Anzahl von Kanten durchläuft, hat  $J$  somit 8, 10 oder 12 Kanten.

Fall 1: Die Jordankurve  $J$  hat genau 8 Kanten.

Aus Satz 4.86 ist bekannt, dass es in diesem Fall genau drei Möglichkeiten für  $J$  gibt, und zwar

$$J = J_3 = 12314234, \quad J = J_4 = 12314324 \quad \text{oder} \quad J = J_6 = 12321434.$$

Fall 2: Die Jordankurve  $J$  hat genau 10 Kanten.

In diesem Fall gibt es genau eine Koordinatenrichtung, in die  $J$  genau vier Kanten durchläuft. O. B. d. A. ist das die  $x_1$ -Richtung. In alle anderen Koordinatenrichtungen gehören genau zwei Kanten zu  $J$ . Damit hat die Jordankurve  $J$  die Gestalt

$$(4.47) \quad J = 1 \dots 1 \dots 1 \dots 1 \dots ,$$

wobei jede Lücke gefüllt ist.

Um alle Möglichkeiten für  $J$  zu bestimmen, benötigt man eine weitere Fallunterscheidung:

Fall 2a: In einem der Zwischenräume von (4.47) stehen zwei gleiche Zahlen.

Dann hat  $J$  (nach eventueller Anwendung einer Würfelsymmetrie) die Gestalt

$$(4.48) \quad J = 1 \dots 2 \dots 2 \dots 1 \dots 1 \dots 1 \dots$$

Damit  $J$  eine Jordankurve ist, muss jede der in (4.48) grün markierten Lücken mit mindestens einer Zahl gefüllt sein. Da die Jordankurve  $J$  insgesamt zehn Kanten besitzt, entsteht sie, indem man in (4.48) genau vier Zahlen einfügt. Diese Zahlen werden also genau an den grün markierten Stellen eingefügt. Somit hat  $J$  die Gestalt

$$1 \ 2 \dots 2 \ 1 \dots 1 \dots 1 \dots ,$$

wobei jede Lücke mit genau einer der Zahlen 3 oder 4 gefüllt ist.

Aus Korollar 4.96 zusammen mit den Sätzen 4.81 und 4.82 erhält man, dass sowohl zwischen den beiden Dreien, als auch zwischen den beiden Vieren in  $J$  eine gerade Anzahl von Einsen liegt. Damit ergibt sich (nach einer eventuellen Permutation der Koordinatenrichtungen):

$$J = 1232141314.$$

Mit Hilfe der Sätze 4.81 und 4.82 berechnet man für diese Kurve

$$\begin{aligned} |\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^4| &= |\{(0, 0, 2, 0), (0, 0, 2, 2), (0, 0, 0, 2), (0, 0, 2, 0), (0, 2, 0, 2), (0, 0, 2, 0)\}| \\ &= |\{(0, 2, 0, 0), (0, 0, 2, 0), (0, 0, 0, 2)\}| = 2^3 = 8. \end{aligned}$$

Wegen Theorem 4.85 ist  $F$  in diesem Fall nicht eingebettet. Das widerspricht der Voraussetzung an  $J$ , sodass aus Fall 2a keine Möglichkeit für die Jordankurve  $J$  entsteht.

Fall 2b: In keinem der Zwischenräume von (4.47) stehen zwei gleiche Zahlen.

Aus Korollar 4.96 zusammen mit den Sätzen 4.81 und 4.82 folgt, dass zwischen zwei

Zweien, zwei Dreien bzw. zwei Vieren in  $J$  eine gerade Anzahl von Einsen liegt. Das bedeutet, zwei gleiche Zahlen befinden sich entweder im ersten und dritten Zwischenraum von (4.47) oder im zweiten und vierten Zwischenraum von (4.47). Da jeder Zwischenraum von (4.47) gefüllt ist, gilt (nach eventueller Anwendung einer Würfelsymmetrie)

$$J = 1 \dots 2 \dots 141 \dots 2 \dots 14 .$$

Dabei steht in genau zwei der vorhandenen Lücken eine Drei, während alle anderen Lücken nicht gefüllt sind. Bis auf Symmetrie ergeben sich daraus die beiden Möglichkeiten

$$J = 1231412314 \quad \text{oder} \quad J = 1231413214 .$$

Für  $J = 1231412314$  erhält man aus den Sätzen 4.81 und 4.82:

$$\begin{aligned} |\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^4| &= |\langle \{(0, 2, 2, 0), (0, 2, 2, 2), (0, 0, 0, 2), (0, 0, 2, 2), (0, 2, 0, 2), (0, 2, 2, 0)\} \rangle| \\ &= |\langle \{(0, 2, 0, 0), (0, 0, 2, 0), (0, 0, 0, 2)\} \rangle| = 2^3 = 8 . \end{aligned}$$

Damit ist  $F$  wegen Theorem 4.85 nicht eingebettet, was der Voraussetzung an  $J$  widerspricht.

Für  $J = 1231413214$  berechnet man mit Hilfe der Sätze 4.81 und 4.82:

$$\begin{aligned} |\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^4| &= |\langle \{(0, 2, 2, 0), (0, 2, 2, 2), (0, 0, 0, 2), (0, 0, 0, 2), (0, 0, 0, 2), (0, 2, 2, 0)\} \rangle| \\ &= |\langle \{(0, 2, 2, 0), (0, 0, 0, 2)\} \rangle| = 2^2 = 4 . \end{aligned}$$

Wegen Theorem 4.85 ist  $F$  für diese Jordankurve tatsächlich eingebettet.

Also gibt es im Fall 2b genau eine Jordankurve, für die  $F$  eingebettet ist, und zwar:

$$J = J_7 = 1231413214 .$$

Fall 3: Die Jordankurve  $J$  hat genau 12 Kanten.

Da es keine Koordinatenrichtung gibt, in die  $J$  sechs oder mehr Kanten durchläuft (siehe Beweis von Satz 4.94), existieren genau zwei Koordinatenrichtungen, in die  $J$  genau vier Kanten durchläuft. O. B. d. A. sind das die  $x_1$ - und die  $x_2$ -Richtung. In die dritte und vierte Koordinatenrichtung gehören jeweils genau zwei Kanten zu  $J$ .

Zunächst hat die Jordankurve  $J$  also wieder die Gestalt

$$(4.47) \quad J = 1 \dots 1 \dots 1 \dots 1 \dots ,$$

wobei jede Lücke gefüllt ist.

Aus Korollar 4.96 zusammen mit den Sätzen 4.81 und 4.82 ergibt sich, dass zwischen je zwei Zweien, zwei Dreien bzw. zwei Vieren in  $J$  eine gerade Anzahl von Einsen liegt. Insbesondere kann man o. B. d. A. annehmen, dass sich die vier Zweien auf den ersten und den dritten Zwischenraum in (4.47) verteilen.

Wiederum wegen Korollar 4.96 zusammen mit den Sätzen 4.81 und 4.82 ist bekannt, dass zwischen zwei Einsen in  $J$  eine gerade Anzahl von Zweien liegt. Damit bleiben bis auf Symmetrie zwei Möglichkeiten für die Gestalt von  $J$ , und zwar

$$J = 12 \dots 2 \dots 2 \dots 21 \dots 1 \dots 1 \dots \quad \text{oder} \quad J = 12 \dots 21 \dots 12 \dots 21 \dots ,$$

wobei in beiden Fällen jeder Zwischenraum gefüllt ist. Damit hat die Jordankurve  $J$  im ersten Fall mindestens vierzehn und im zweiten Fall mindestens 12 Kanten. Da vorausgesetzt wurde, dass  $J$  genau 12 Kanten besitzt, ist der erste Fall ausgeschlossen und es ergibt sich:

$$(4.49) \quad J = 12 \dots 21 \dots 12 \dots 21 \dots ,$$

wobei in jedem Zwischenraum genau eine Zahl steht.

Die Jordankurve  $J$  entsteht aus (4.49) durch Einfügen von zwei Dreien und zwei Vieren in die Lücken, wobei darauf geachtet wird, dass zwischen den beiden Dreien bzw. zwischen den beiden Vieren eine gerade Anzahl von Einsen liegt. Bis auf Symmetrie entsteht auf diese Weise nur eine Jordankurve, und zwar

$$J = 123214123214 .$$

Aus den Sätzen 4.81 und 4.82 erhält man für diese Kurve

$$\begin{aligned} |\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^4| &= |\langle \{(0, 0, 2, 0), (0, 0, 2, 2), (0, 0, 0, 2), (0, 0, 2, 0), (0, 0, 2, 2), (0, 0, 0, 2), \\ &\quad (0, 0, 0, 2), (0, 0, 2, 0)\} \rangle| \\ &= |\langle \{(0, 0, 2, 0), (0, 0, 0, 2)\} \rangle| = 2^2 = 4 . \end{aligned}$$

Wegen Theorem 4.85 ist  $F$  also eingebettet. Das heißt, im Fall 3 gibt es genau eine Jordankurve, für die  $F$  eingebettet ist. Diese Jordankurve  $J$  ist:

$$J = J_8 = 123214123214 .$$

Abschließend bleibt festzustellen, dass die Kurven  $J_3, J_4, J_6, J_7$  und  $J_8$  paarweise verschieden sind. Für die ersten drei Kurven ist das bereits aus Satz 3.24 bekannt. Für die anderen Paarungen gilt es, da die Jordankurven eine verschiedene Anzahl von Kanten besitzen. **w. z. b. w.**

**Bemerkung 4.98.** Im vierdimensionalen Fall gehören alle Beispiele für eingebettete Flächen  $F$  zu den Serien  $J^1, J^2$  bzw.  $J^3$  aus Bemerkung 4.92. Für die Kurven  $J_3, J_4$  und  $J_6$  wurde das bereits in Bemerkung 4.92 festgestellt. Außerdem erkennt man leicht, dass die Kurven  $J_7$  und  $J_8$  von der Gestalt  $J^3$  sind.

Dies führt zu der offenen Frage, ob auch in höheren Dimensionen alle Jordankurven  $J$ , für die  $F$  eingebettet ist, von der Gestalt  $J^1, J^2$  oder  $J^3$  sind. Ich vermute, dass dies zumindest in allen geraden Dimensionen der Fall ist.

## 4.14 Zwischenfazit

Zusammenfassend kann Folgendes festgestellt werden:

Startet man mit einer eingebetteten Fläche  $f$  innerhalb eines  $n$ -dimensionalen Würfels  $W$ , deren Rand eine Jordankurve  $J$  entlang der Kanten von  $W$  ist, so ergibt sich durch wiederholtes Schwarz-Spiegeln an Randkanten der Fläche eine  $n$ -fach periodische Fläche  $F$  in  $\mathbb{R}^n$ . Das funktioniert unabhängig von  $f$  und  $J$ . Auf diese Weise werden  $n$ -fach periodische Flächen in beliebigen Dimensionen erzeugt. Da die Anzahl der möglichen Jordankurven  $J$  mit  $n$  stark wächst, findet man auf diese Weise in großen Dimensionen sehr viele periodische Flächen. Allerdings sind nur wenige dieser Flächen eingebettet.

Für eine gegebene Ausgangsfläche  $f$  mit Rand  $J$  kann man leicht feststellen, ob die durch Spiegelung entstandene Fläche  $F$  eingebettet ist. Dazu wird zunächst die Gruppe  $\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n$  berechnet und dann das Theorem 4.85 angewendet.

Zum Berechnen von  $\Lambda'(F) \cap (2\mathbb{Z}_4)^n$  benötigt man nur die Struktur von  $J$ . Insbesondere ist die Einbettungseigenschaft der gespiegelten Fläche  $F$  unabhängig von der konkreten Wahl einer Fläche  $f$  mit Rand  $J$ .

In den Dimensionen drei und vier wurden alle Jordankurven  $J$ , die zu eingebetteten Flächen führen, angegeben (vgl. Korollar 4.46 und Theorem 4.97). In Dimension drei sind das drei Kurven, in Dimension vier sind es fünf.

In Dimension vier wurde also festgestellt, dass nur relativ wenige Jordankurven (bzgl. der Gesamtzahl an Kurven) zu einer eingebetteten Fläche führen. Es ist zu vermuten, dass dies auch in höheren Dimensionen gilt. Dennoch konnten Serien von Jordankurven in beliebigen Dimensionen gefunden werden, die zu eingebetteten Flächen führen. Die Anzahl dieser Beispiele wächst quadratisch mit der Dimension  $n$ . Daraus ergibt sich die Vermutung, dass die absolute Anzahl eingebetteter Flächen  $F$  ebenfalls mit der Dimension  $n$  wächst.

## 5 Bemerkungen zur Konstruktion periodischer Minimalflächen in $\mathbb{R}^n$

Um  $n$ -fach periodische Minimalflächen in  $\mathbb{R}^n$  (mit  $n \geq 3$ ) zu konstruieren, kann man das Vorgehen aus Kapitel 2 verwenden. Als Ausgangspunkt betrachtet man eine beliebige Jordankurve  $J$  entlang der Kanten des  $n$ -dimensionalen Würfels  $W$ , wobei  $J$  in jede Koordinatenrichtung mindestens eine Kante durchläuft. Weiter wird (wie in Kapitel 3) davon ausgegangen, dass  $J$  durch eine stückweise stetig differenzierbare Abbildung von  $S^1$  nach  $\mathbb{R}^3$  parametrisiert ist.

Aus  $J$  erhält man eine  $n$ -fach periodische, eingebettete (reguläre) Minimalfläche  $F$ , wenn folgende Aussagen wahr sind.

- Es gibt eine Plateau-Lösung  $f: \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  zur Jordankurve  $J$ . Diese Fläche  $f$  ist eine verallgemeinerte Minimalfläche mit Rand  $J$ .
- Die Schwarz-Spiegelung einer verallgemeinerten Minimalfläche an einer ihrer Randkanten ergibt wiederum eine verallgemeinerte Minimalfläche.

Sind diese beiden Aussagen bewiesen, erhält man wie in Abschnitt 4.2 beschrieben eine Fläche  $F$ , welche aus  $f$  durch wiederholtes Schwarz-Spiegeln hervorgeht. Diese Fläche  $F$  ist ebenfalls eine verallgemeinerte Minimalfläche. Allerdings muss die Fläche  $f$  (und damit auch  $F$ ) durch die Jordankurve  $J$  nicht eindeutig bestimmt sein.

- Das Bild  $f(D)$  der offenen Kreisscheibe liegt im Inneren des Würfels  $W$ .
- Die Fläche  $F$  besitzt keine Verzweigungspunkte im Inneren der Würfel  $W^v$  mit  $v \in \mathbb{Z}^n$ .
- Die Fläche  $F$  besitzt keine Verzweigungspunkte auf den Rändern der Würfel  $W^v$  mit  $v \in \mathbb{Z}^n$ .

Sind diese Eigenschaften bestätigt, so ist  $F$  eine reguläre Minimalfläche.

Für die Einbettungseigenschaft von  $F$  benutzt man weitere Argumente.

- Das Bild der Fläche  $f|_D$  lässt sich als Graph über einer Koordinatenebene darstellen.

Daraus ergibt sich, dass  $f$  eingebettet ist. Also können alle Ergebnisse aus Kapitel 4 angewendet werden. Insbesondere gilt:

- Die Fläche  $F$  ist genau dann eingebettet, wenn die entsprechenden Bedingungen aus Theorem 4.85 erfüllt sind.

Im Folgenden wird erläutert, wie man die ersten sechs Punkte zeigt. Dabei werden an den meisten Stellen nur die Ideen genannt, ohne dass auf Details der Beweise eingegangen wird. Der Grund hierfür ist, dass die Beweise mit dem bereits bekannten dreidimensionalen Fall übereinstimmen. In höheren Dimensionen treten dabei zusätzliche Bedingungen an  $J$  auf.

### Existenz der Plateau-Lösung

Die Existenz einer Plateau-Lösung ist für alle betrachteten Jordankurven  $J$  in beliebigen Dimensionen bekannt (siehe [Oss86, S. 55ff.] oder [Str88, S. 1ff.]). Eine mögliche Formulierung dieser Existenzaussage ist:

**Satz 5.1** (Existenz der Plateau-Lösung).

*Es sei  $J$  eine stückweise stetig differenzierbare, geschlossene Jordankurve und  $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$  bzw.  $\overline{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  die offene bzw. abgeschlossene Einheitskreisscheibe in  $\mathbb{R}^2$ . Dann existiert eine Abbildung  $f: \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit*

- $f \in C^0(\overline{D}, \mathbb{R}^n) \cap C^2(D, \mathbb{R}^n)$ ,
- $f$  ist schwach konform in  $D$  (d. h.  $\|f_x\| = \|f_y\|$  und  $\langle f_x, f_y \rangle = 0$  in  $D$ ),
- $f$  ist harmonisch in  $D$  (d. h. alle Komponentenfunktionen  $f_i$  sind harmonisch in  $D$ , also gilt  $\Delta f_i(x) = 0$  für alle  $x \in D$ ), und
- $f|_{\partial D}$  parametrisiert  $J$  bijektiv.

Eine Abbildung, welche im Inneren schwach konform und harmonisch ist, heißt *verallgemeinerte Minimalfläche*. Insbesondere ist jede Plateau-Lösung  $f$  eine verallgemeinerte Minimalfläche.

Dabei kann es Punkte  $p$  geben, für die  $\text{rang } df_p < 2$  gilt. Das ist genau dann der Fall, wenn  $f_x(p) = f_y(p) = 0$  erfüllt ist. Ein Punkt  $p$  mit diesen Eigenschaften heißt *Verzweigungspunkt* von  $f$ .

Besitzt eine verallgemeinerte Minimalfläche  $f$  keine Verzweigungspunkte, so ist  $f$  im Inneren harmonisch und *konform*, d. h.  $\|f_x\| = \|f_y\| \neq 0$  und  $\langle f_x, f_y \rangle = 0$ .

Eine im Inneren harmonische und konforme Abbildung heißt *Minimalfläche*.

Damit ist jede verallgemeinerte Minimalfläche ohne Verzweigungspunkte eine (reguläre) Minimalfläche.

Man beachte, dass Satz 5.1 nichts über die Eindeutigkeit von Plateau-Lösungen aussagt. Es kann also mehrere verallgemeinerte Minimalflächen vom Kreisscheibentyp geben, die von  $J$  berandet werden.

## Das Schwarz-Spiegelungsprinzip

Das Schwarz-Spiegelungsprinzip für verallgemeinerte Minimalflächen geht auf das entsprechende Spiegelungsprinzip für harmonische Funktionen zurück. Dieses findet man z. B. in [Ahl79, S. 172f.]. Zur Formulierung verwendet man für jedes Gebiet  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  folgende Bezeichnungen:

$$U^+ := \{(x, y) \in U \mid y > 0\}, \quad U^- := \{(x, y) \in U \mid y < 0\} \quad \text{und} \quad I := \{(x, y) \in U \mid y = 0\}.$$

**Satz 5.2** (Schwarz-Spiegelungsprinzip für harmonische Funktionen).

Es sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  eine offene Menge, welche symmetrisch bzgl. der  $x$ -Achse ist. Wenn  $u \in C^2(U^+, \mathbb{R}) \cap C^0(U^+ \cup I, \mathbb{R})$  eine in  $U^+$  harmonische Funktion mit  $u|_I = 0$  ist, dann beschreibt die Fortsetzung

$$\tilde{u}(x, y) := \begin{cases} u(x, y) & \text{für } (x, y) \in U^+ \cup I \\ -u(x, -y) & \text{für } (x, y) \in U^- \end{cases}$$

von  $u$  eine harmonische Funktion auf ganz  $U$ .

Die entsprechende Aussage für Minimalflächen ist:

**Satz 5.3** (Schwarz-Spiegelungsprinzip für verallgemeinerte Minimalflächen).

Es sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  eine offene Menge, welche symmetrisch bzgl. der  $x$ -Achse ist. Weiter sei  $h \in C^2(U^+, \mathbb{R}^n) \cap C^0(U^+ \cup I, \mathbb{R}^n)$  eine verallgemeinerte Minimalfläche und  $h(I)$  ein Teil einer Geraden  $g \subset \mathbb{R}^n$ , wobei  $h(I)$  eine offene Teilmenge von  $g$  enthält. Dann kann  $h$  durch Schwarz-Spiegelung zu

$$\tilde{h}: U \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \tilde{h}(x, y) := \begin{cases} h(x, y) & \text{für } (x, y) \in U^+ \cup I \\ s_g(h(x, -y)) & \text{für } (x, y) \in U^- \end{cases}$$

fortgesetzt werden. Auch diese Fortsetzung  $\tilde{h}$  ist eine verallgemeinerte Minimalfläche.

Einen Beweis dieser Aussage findet man unter anderem in [Oss86, S. 54f.] (vergleiche auch [DHS10, S. 289ff.] für den Fall  $n = 3$ ). Die Beweisidee ist folgende:

Zunächst kann man o. B. d. A. annehmen, dass  $g$  die  $x_n$ -Achse ist. Weiter ist  $h$  in  $U^+ \cup U^-$  harmonisch und schwach konform. Es muss also nur  $\tilde{h} \in C^2(U)$  gezeigt werden, denn dann folgt aus Stetigkeitsgründen, dass  $h$  auch auf  $I$  (und damit auf ganz  $U$ ) harmonisch und schwach konform ist, was zeigt, dass  $h$  eine verallgemeinerte Minimalfläche ist.

Um  $\tilde{h} \in C^2(U)$  zu zeigen, betrachtet man  $h$  und  $\tilde{h}$  komponentenweise. Die Abbildungen  $h_1, \dots, h_{n-1}$  erfüllen die Voraussetzungen von Satz 5.2 und können somit harmonisch auf  $U$  fortgesetzt werden. Die Fortsetzungen, welche von Satz 5.2 geliefert werden, sind gerade  $\tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_{n-1}$ . Somit sind  $\tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_{n-1}$  als harmonische Funktionen von der Klasse  $C^\infty(U)$ .

Außerdem wird mit Hilfe der Konformität von  $h$  gezeigt, dass sich  $\frac{\partial h_n}{\partial y}$  durch Nullrandwerte stetig auf  $U^+ \cup I$  fortsetzen lässt. Also erfüllt  $\frac{\partial h_n}{\partial y}$  die Voraussetzungen von

Satz 5.2 und lässt sich zu einer harmonischen Funktion auf  $U$  fortsetzen. Durch Integration erhält man daraus eine Fortsetzung von  $h_n$ , welche mit  $\tilde{h}_n$  übereinstimmt. Da  $\frac{\partial h_n}{\partial y}$  als harmonische Funktion in  $C^\infty(U)$  liegt, gilt dasselbe für  $\tilde{h}_n$ . Das beendet den Beweis, denn damit ist auch  $\tilde{h} = (\tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_n)$  unendlich oft differenzierbar.

Wie bereits in Abschnitt 4.2 beschrieben, erhält man aus  $f$  durch wiederholtes Schwarz-Spiegeln eine parametrisierte Fläche  $F: \tilde{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Diese ist zunächst nicht mit einer differenzierbaren Struktur versehen. Zur Erinnerung: der topologische Raum  $\tilde{X}$  entsteht durch Verkleben abzählbar unendlich vieler Kopien der abgeschlossenen Kreisscheibe  $\overline{D}$  (also dem Definitionsbereich von  $f$ , aufgefasst als topologischer Raum). Dabei ist  $F$  eingeschränkt auf eine Kopie von  $\overline{D}$  eine Kopie von  $f$  (bis auf Bewegungen im Bildraum). An dieser Stelle ist  $f$  als Abbildung zwischen topologischen Räumen beschrieben, d. h. die Differenzierbarkeit von  $f$  ist hier nicht erklärt.

Im Folgenden wird eine differenzierbare Struktur auf  $\tilde{X}$  definiert. Dazu erklärt man zunächst biholomorph verträgliche Kartenabbildungen.

Für jede in  $\tilde{X}$  enthaltene Kopie von  $\overline{D}$  kann man  $F|_{\overline{D}}$  so homöomorph umparametrisieren, dass es sich hinterher um eine Kopie der Minimalfläche  $f$ , gegeben durch die harmonische und schwach konforme Plateau-Lösung  $f: \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , handelt (siehe Abb. 23). Der verwendete Homöomorphismus  $\psi$  definiert eine Karte von  $\tilde{X}$ . Er wird später auch als Ausgangspunkt für die Konstruktion weiterer Kartenabbildungen verwendet.

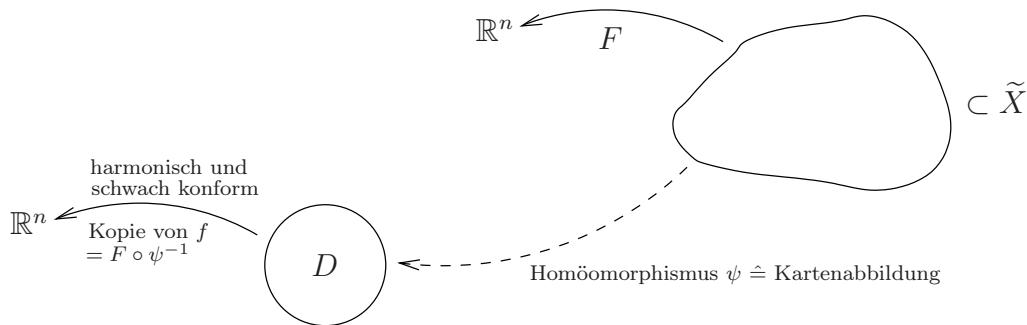
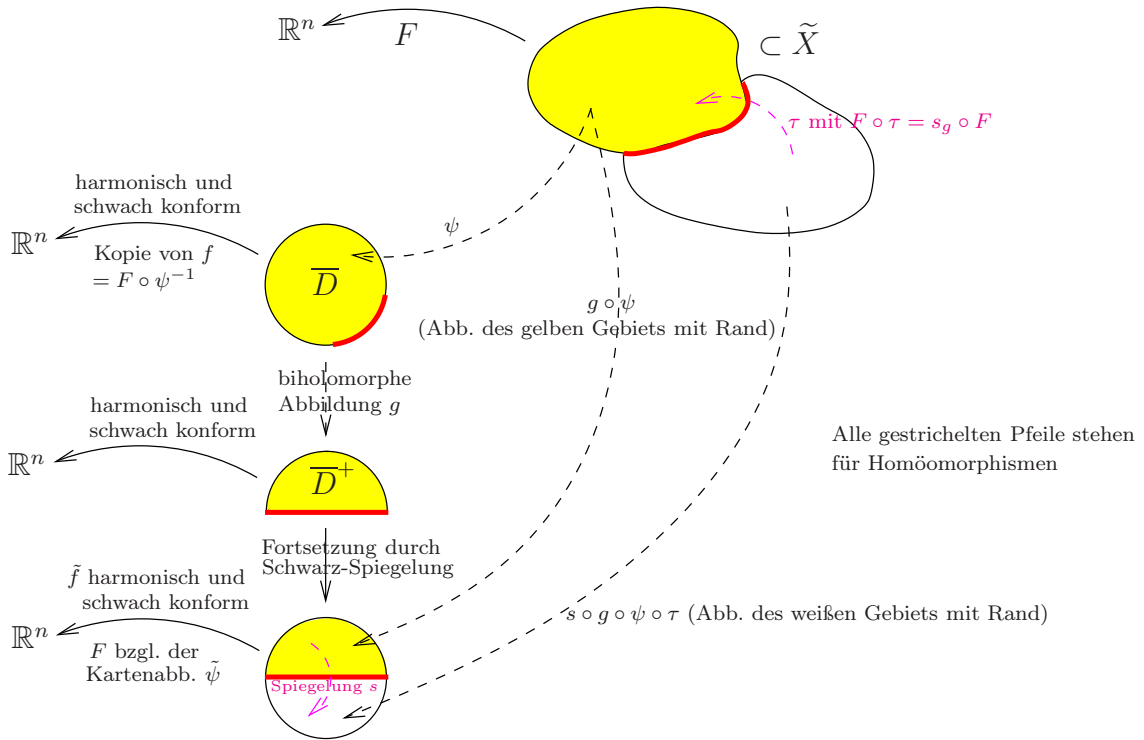


Abbildung 23: Definition einer Karte von  $\tilde{X}$ . Das Urbild der Kartenabbildung  $\psi$  ist eine Kopie von  $D$  in  $\tilde{X}$ , das Kartenbild ist  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Die Abbildung  $\psi$  ist auch auf dem Rand von  $D$  definiert und in ganz  $\overline{D}$  ein Homöomorphismus.

Der Raum  $\tilde{X}$  ist so aufgebaut, dass an Kurven, die von  $F$  auf eine Kante der Würfel-pflasterung abgebildet werden, genau zwei Kopien von  $\overline{D}$  zusammentreffen. Ein Punkt  $p \in \tilde{X}$ , der von  $F$  auf eine Ecke der Würfel-pflasterung abgebildet wird, liegt im Rand von genau vier Kopien von  $\overline{D}$ . Für das Innere der Vereinigung dieser zwei bzw. vier Kopien von  $\overline{D}$  sollen ebenfalls Karten definiert werden. Dazu wird unter anderem das Schwarz-Spiegelungsprinzip verwendet. Wir betrachten zuerst die Situation zweier Kopien von  $\overline{D}$  mit einer gemeinsamen Kurve (siehe Abb. 24).





Die Homöomorphismen des gelben und des weißen Gebiets bilden zusammen die gesuchte Kartenabbildung  $\tilde{\psi}$

$$\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} (g \circ \psi)(x) & \text{wenn } x \text{ im gelben Gebiet oder auf der roten Kurve liegt,} \\ (s \circ g \circ \psi \circ \tau)(x) & \text{wenn } x \text{ im weißen Gebiet oder auf der roten Kurve liegt.} \end{cases}$$

Abbildung 24: Definition einer Karte von  $\tilde{X}$ . Das Urbild der Kartenabbildung  $\tilde{\psi}$  sind die weiße und die gelbe Kopie von  $D \subset \tilde{X}$  zusammen mit der roten Kurve. Das Bild der Kartenabbildung  $\tilde{\psi}$  ist die Kreisscheibe  $D \subset \mathbb{R}^2$ , welche durch Spiegelung aus  $D^+$  hervorgegangen ist. Die rote Kurve wird von  $F$  auf eine Kante der Würfelpflasterung des  $\mathbb{R}^n$  abgebildet.

Man startet mit der Kartenabbildung  $\psi$  des gelben Gebiets (vgl. Abb. 23 und Abb. 24). In dieser Karte ist  $F$  als schwach konforme, harmonische Abbildung realisiert. Der Bildbereich  $\overline{D}$  von  $\psi$  kann (wegen des Riemannsches Abbildungssatzes) durch eine biholomorphe Abbildung  $g$  so auf  $\overline{D}^+$  abgebildet werden, dass die rot markierte Kurve auf die  $x$ -Achse abgebildet wird (vgl. Abb. 24). Die Abbildung  $F \circ \psi^{-1} \circ g^{-1}: \overline{D}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist nun als Zusammensetzung einer biholomorphen Abbildung mit einer harmonischen, schwach konformen Abbildung wiederum harmonisch und schwach konform. Weiter ist das Bild der roten Kante unter  $F \circ \psi^{-1} \circ g^{-1}$  eine Kante der Würfelpflasterung des  $\mathbb{R}^n$ . Durch Anwendung des Schwarz-Spiegelungsprinzips erhält man also eine harmonische und schwach konforme Abbildung  $\tilde{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Weiter werden die beiden in Abb. 24 magentafarben markierten Spiegelungen betrachtet. Die Abbildung  $\tau$  ist verträglich mit der Schwarz-Spiegelung in  $\mathbb{R}^n$  gewählt, d. h. es gilt  $F \circ \tau = s_g \circ F$ , wobei  $s_g$  die Schwarz-Spiegelung am Bild der roten Kurve in  $\mathbb{R}^n$  ist. Die Abbildung  $s$  beschreibt die Spiegelung an der  $x$ -Achse in  $\mathbb{R}^2$ . Damit ist  $g \circ \psi$  ein Homöomorphismus des gelben Gebietes mit Rand und  $s \circ g \circ \psi \circ \tau$  ein Homöomorphismus des weißen Gebietes mit Rand. Beide Homöomorphismen sind auf der roten Kurve gleich. Gemeinsam bilden sie einen Homöomorphismus des Inneren der abgebildeten Teilmenge von  $\tilde{X}$  auf  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Dieser Homöomorphismus  $\tilde{\psi}$  definiert eine Karte von  $\tilde{X}$ . Die Darstellung von  $F$  in dieser Karte ist die harmonische und schwach konforme Abbildung  $\tilde{f}$ .

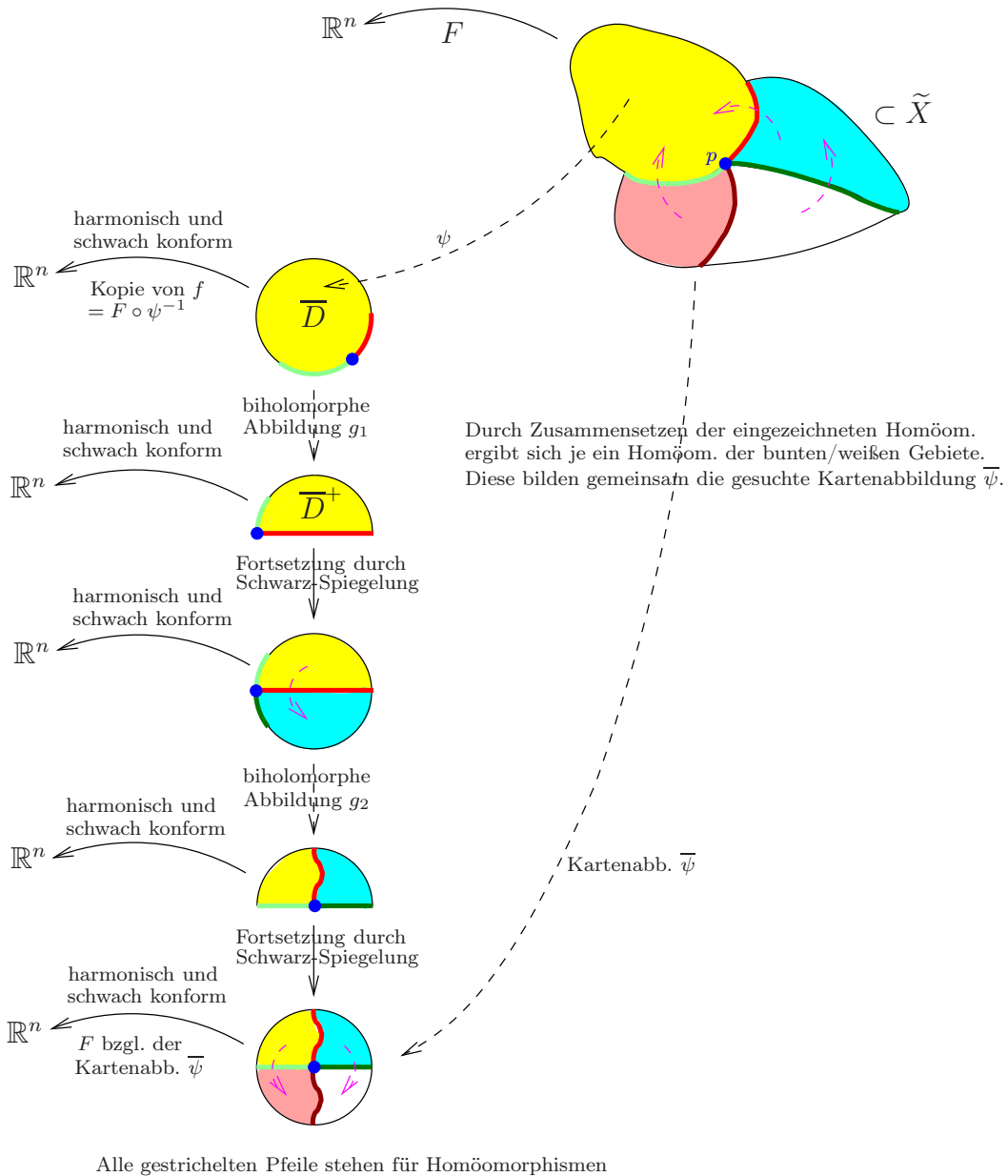


Abbildung 25: Definition einer Karte von  $\tilde{X}$ . Das Urbild der Kartenabbildung  $\overline{\psi}$  sind die vier farbigen/weißen Kopien von  $D \subset \tilde{X}$  zusammen mit den farbig markierten Randkurven. Das Bild der Kartenabbildung  $\overline{\psi}$  ist die Kreisscheibe  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Die farblich markierten Kurven werden von  $F$  jeweils auf eine Kante der Würfelplasterung des  $\mathbb{R}^n$  abgebildet. Das Bild von  $p$  unter  $F$  ist ein Eckpunkt dieser Pflasterung.

Zur Definition einer Karte auf vier in  $\tilde{X}$  enthaltenen Kopien von  $\overline{D}$ , die sich in einem Punkt berühren, geht man analog vor. In dieser Situation werden allerdings zwei biholomorphe Abbildungen und zwei Schwarz-Spiegelungen benötigt (siehe Abb. 25).

Im linken Teil von Abb. 24 und Abb. 25 wird das gelbe Gebiet nur durch Anwendung biholomorpher Abbildungen verändert. Damit sind auch alle Kartenwechselabbildungen (zu den bisher definierten Karten) aus biholomorphen Abbildungen zusammengesetzt. Also sind die angegebenen Karten biholomorph verträglich. Auf diese Weise ist

eine konforme Struktur auf  $\tilde{X}$  erklärt. Dies macht  $\tilde{X}$  zu einer Riemannschen Fläche, also zu einer eindimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit.

Außerdem ist  $F: \tilde{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$  harmonisch und schwach konform (d. h.  $F$  hat in den Karten diese Eigenschaften). In diesem Sinne ist die gespiegelte Fläche  $F$  eine verallgemeinerte Minimalfläche.

**Korollar 5.4.** *Für jede Jordankurve  $J$  entlang der Kanten eines  $n$ -dimensionalen Würfels entsteht durch wiederholtes Schwarz-Spiegeln einer Plateau-Lösung  $f$  eine verallgemeinerte Minimalfläche  $F$ .*

Es bleibt noch zu erwähnen, dass auch der Begriff von Verzweigungspunkten auf der Riemannschen Fläche  $F$  wohldefiniert ist. Das heißt, ein Punkt  $p \in \tilde{X}$  ist Verzweigungspunkt bzgl. einer Karte, genau dann wenn  $p$  Verzweigungspunkt bzgl. einer anderen Karte ist. Der Grund hierfür ist wiederum, dass die Kartenwechselabbildungen biholomorph sind und eine biholomorphe Abbildung den Rang von  $dF$  nicht verändert.

### Die Fläche $f(D)$ liegt im Inneren von $W$

Zum Beweis dieser Aussage betrachtet man die Plateau-Lösung  $f$  koordinatenweise. Da  $f(x)$  für jedes  $x \in \partial D$  auf dem Rand von  $W$  liegt, gilt

$$-\frac{1}{2} \leq f_i(x) \leq \frac{1}{2} \quad \forall 1 \leq i \leq n, x \in \partial D.$$

Da  $J$  in jede Koordinatenrichtung mindestens eine Kante durchläuft, kommen  $-\frac{1}{2}$  und  $\frac{1}{2}$  als Funktionswerte  $f_i(x)$  (mit  $x \in \partial D$ ) vor.

Angenommen es gibt einen Punkt  $y \in D$ , für den  $f(y)$  nicht im Inneren des Würfels  $W$  liegt. Dann existiert ein  $1 \leq i \leq n$ , für das  $f_i(y) \leq -\frac{1}{2}$  oder  $f_i(y) \geq \frac{1}{2}$  gilt. Daraus folgt

$$(5.1) \quad \min_{x \in D} f_i(x) \leq \min_{x \in \partial D} f_i(x) = -\frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad \max_{x \in D} f_i(x) \geq \max_{x \in \partial D} f_i(x) = \frac{1}{2}.$$

Wegen Satz 5.1 ist  $f_i$  eine harmonische Funktion. Nach dem Maximumprinzip für harmonische Funktionen kann (5.1) nur erfüllt sein, wenn die Funktion  $f_i$  konstant ist. Das ist nicht der Fall, da  $f_i$  die Werte  $-\frac{1}{2}$  und  $\frac{1}{2}$  annimmt. Damit ist gezeigt, dass  $f(D)$  im Inneren von  $W$  liegt.

Diese Eigenschaft von Plateau-Lösungen  $f$  wird im weiteren Verlauf verwendet. Außerdem ist sie eine der Voraussetzungen für die Aussagen aus Kapitel 4. Um die dortigen Ergebnisse über Selbstschnitte von  $F$  verwenden zu dürfen, muss nur noch gezeigt werden, dass  $f: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  injektiv ist. Bevor dies geschieht, sollen Verzweigungspunkte von  $F$  ausgeschlossen werden.

**Die Fläche  $F$  besitzt keine Verzweigungspunkte im Inneren eines Würfels  $W^v$  mit  $v \in \mathbb{Z}^n$**

Diese Art von Verzweigungspunkten kann nur auftreten, wenn bereits  $f$  Verzweigungspunkte im Inneren von  $D$  hat. Um diese auszuschließen verwendet man ein Lemma von Radó (siehe [Oss86, S. 59f.]):

**Lemma 5.5.** *Es sei  $h: \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung aus  $C^0(\overline{D}, \mathbb{R}) \cap C^2(D, \mathbb{R})$ , die in  $D$  harmonisch ist. Weiterhin sei  $p \in D$  ein Punkt mit  $\nabla h|_p = 0$ . Dann gibt es mindestens vier verschiedene Punkte aus  $\partial D$ , in denen die Abbildung  $h$  den Wert  $h(p) =: a$  annimmt.*

Die Aussage dieses Lemmas ist trivialerweise erfüllt, wenn  $h$  konstant ist. Für nicht-konstante Abbildungen  $h$  wird Lemma 5.5 bewiesen, indem Komponenten von  $h^{-1}((a, \infty))$  und  $h^{-1}((-\infty, a))$  betrachtet werden. Die Harmonizität von  $h$  ergibt, dass jede dieser Komponenten bis zum Rand von  $D$  geht. Aus  $\nabla h|_p = 0$  folgt, dass sowohl  $h^{-1}((a, \infty))$  als auch  $h^{-1}((-\infty, a))$  mindestens zwei Komponenten besitzt. Schränkt man  $h$  auf  $\partial D$  ein, so treten an den Rändern dieser Komponenten mindestens vier verschiedene Punkte  $p_i \in \partial D$  mit  $h(p_i) = a$  auf.

Aus Lemma 5.5 ergibt sich (siehe [Oss86, S. 60] angewendet auf eine Plateau-Lösung  $f$ ):

**Lemma 5.6.** *Eine Plateau-Lösung  $f$  zu einer gegebenen Jordankurve  $J$  ist regulär auf  $D$  oder es existiert ein Punkt  $q \in f(D)$  mit der Eigenschaft, dass jede Hyperebene durch  $q$  die Jordankurve  $J$  in mindestens vier verschiedenen Punkten schneidet.*

Der Beweis dieses Lemmas verläuft wie folgt: Wenn  $f|_D$  nicht regulär ist, gibt es einen Verzweigungspunkt  $p \in D$  von  $f$ . Sei  $L(x) = 0$  die Gleichung einer beliebigen Hyperebene durch  $f(p) =: q$ . Man überprüft leicht, dass die Voraussetzung von Lemma 5.5 für die Funktion  $h := L \circ f$  im Punkt  $p$  erfüllt sind. Aus Lemma 5.5 folgt somit, dass es vier Punkte von  $\partial D$  gibt, deren Bild unter  $f$  einerseits auf der gewählten Hyperebene und andererseits auf  $f(\partial D) = J$  liegt.

Mit Hilfe von Lemma 5.6 erhält man folgende Aussage über innere Verzweigungspunkte von  $f$ .

**Satz 5.7.** *Es sei  $J$  eine Jordankurve, für die es ein  $1 \leq i \leq n$  gibt, sodass  $J$  in  $x_i$ -Richtung genau zwei Kanten durchläuft. Dann ist jede zugehörige Plateau-Lösung  $f$  im Inneren eine reguläre Fläche, sie besitzt also keine inneren Verzweigungspunkte.*

**Beweis.** Sei  $q \in f(D)$  beliebig. Da  $f(D)$  im Inneren von  $W$  liegt, gilt dies auch für  $q$ . Damit schneidet die Hyperebene durch  $q$  mit Normalenrichtung  $e_i$  die Jordankurve  $J$  in genau zwei Punkten (ein Punkt pro Kante von  $J$  in  $x_i$ -Richtung). Nach Lemma 5.6 ist somit  $f|_D$  eine reguläre Fläche. **w. z. b. w.**

Satz 5.7 liefert ein hinreichendes Kriterium zum Ausschluss innerer Verzweigungspunkte von  $f$ . Es ist nicht klar, ob dies auch ein notwendiges Kriterium (für Jordankurven entlang der Kanten von  $W$ ) ist.

**Die Fläche  $F$  besitzt keine Verzweigungspunkte auf den Rändern der Würfel  $W^v$  mit  $v \in \mathbb{Z}^n$**

Sei  $p \in \tilde{X}$  ein Punkt, der von  $F$  auf den Rand von  $W^v$  mit  $v \in \mathbb{Z}^n$  abgebildet wird. Wie in Abb. 24 (wenn  $F(p)$  im Inneren einer Kante von  $W^v$  liegt) bzw. Abb. 25 (wenn  $F(p)$  eine Ecke von  $W^v$  ist) erhält man eine Karte von  $\tilde{X}$ , in deren Bild  $p$  der Koordinatenursprung ist. Wir betrachten  $p$  und  $F$  von nun an in dieser Karte, d. h. wir identifizieren  $p$  mit  $(0, 0)$  und betrachten  $F$  als Abbildung von  $D \subset \mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}^n$ .

Da  $F$  auf ganz  $D$  differenzierbar ist und  $p$  im Inneren von  $D$  liegt, existieren alle Richtungsableitungen  $\frac{\partial F}{\partial \nu}(p)$  mit  $\nu \in \mathbb{R}^2$ . Um zu beweisen, dass  $p$  kein Verzweigungspunkt von  $F$  ist, reicht es zu zeigen, dass eine Richtungsableitung  $\frac{\partial F}{\partial \nu}(p)$  ungleich Null ist, denn dann kann  $F_x(p) = F_y(p) = 0$  nicht gelten. Um zu beweisen, dass eine Richtungsableitung von  $F$  in  $p$  ungleich Null ist, wird das Hopf-Randpunkt-Lemma verwendet (siehe z. B. [Jos98, S. 37]). Formuliert man dieses Lemma direkt für den Laplace-Operator, so lautet es:

**Lemma 5.8.** *Es sei  $h: \Omega \cup \{p\} \rightarrow \mathbb{R}$  eine im offenen Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  harmonische Funktion, die im Randpunkt  $p \in \partial\Omega$  stetig ist. Gilt außerdem*

- $h(x) > h(p)$  für alle  $x \in \Omega$  und
- es gibt einen Ball  $B_r(y)$ , dessen Inneres in  $\Omega$  enthalten ist und dessen Rand den Punkt  $p$  enthält und
- die Ableitung von  $h$  in Richtung der inneren Normale  $\nu := y - p$  des Balls  $B_r(y)$  existiert,

dann gilt

$$\frac{\partial h}{\partial \nu}(p) > 0.$$

Im hier betrachteten Fall ist  $\Omega = D^+$  und  $p = (0, 0) \in \partial D^+$ .

Wenn  $F(p)$  ein Punkt im Inneren einer Kante der Würfelpflasterung ist, dann ist  $F(D^+)$  eine Kopie von  $f(D)$  und liegt damit im Inneren eines Würfels der Würfelpflasterung. Also liegt  $F(p)$  auf dem Rand eines Würfels  $W^v$ , während  $F(x)$  für alle  $x \in D^+$  im Inneren von  $W^v$  liegt, d. h. es gibt eine Koordinatenrichtung  $1 \leq i \leq n$  mit

$$F_i(x) > F_i(p) \quad \forall x \in D^+ \quad \text{oder} \quad F_i(x) < F_i(p) \quad \forall x \in D^+.$$

Wenn  $F(p)$  ein Eckpunkt der Würfelflasterung ist, dann besteht  $F(D^+)$  aus zwei Kopien von  $f(D)$ , die durch Spiegelung an einer Kante in  $x_i$ -Richtung auseinander hervorgehen. Auch in diesem Fall gilt

$$F_i(x) > F_i(p) \quad \forall x \in D^+ \quad \text{oder} \quad F_i(x) < F_i(p) \quad \forall x \in D^+.$$

Da  $F$  auf ganz  $D$  harmonisch ist und alle Richtungsableitungen von  $F$  im Punkt  $p$  existieren, sind die Voraussetzungen von Lemma 5.8 für die Funktion  $F_i$  oder  $-F_i$  erfüllt. Dabei kann man  $B_{\frac{1}{2}}(0, \frac{1}{2})$  als den geforderten Ball wählen.

Aus Lemma 5.8 folgt, dass für die zugehörige innere Normale  $\nu = (0, \frac{1}{2})$  entweder  $\frac{\partial F_i}{\partial \nu}(p) > 0$  oder  $\frac{\partial F_i}{\partial \nu}(p) < 0$  erfüllt ist. In beiden Fällen gilt  $\frac{\partial F_i}{\partial \nu}(p) \neq 0$  und damit auch

$$\frac{\partial F}{\partial \nu}(p) \neq 0.$$

Somit ist  $p$  kein Verzweigungspunkt von  $F$  und die Fläche  $F$  besitzt keine Verzweigungspunkte auf den Rändern der Würfel  $W^v$  mit  $v \in \mathbb{Z}^n$ .

Zusammen mit Satz 5.7 ergibt sich:

**Satz 5.9.** *Es sei  $J$  eine Jordankurve, für die es ein  $1 \leq i \leq n$  gibt, sodass  $J$  in  $x_i$ -Richtung genau zwei Kanten durchläuft. Dann erhält man aus  $J$  (durch wiederholtes Schwarz-Spiegeln einer Plateau-Lösung  $f$ ) mindestens eine (reguläre) Minimalfläche  $F$ .*

### Das Bild der Fläche $f|_D$ lässt sich als Graph darstellen

Folgender Satz soll bewiesen werden.

**Satz 5.10.** *Es sei  $\pi$  die Projektion von  $\mathbb{R}^n$  auf eine Koordinatenebene (die  $x_i$ - $x_j$ -Ebene). Wenn  $\pi$  die Jordankurve  $J$  auf monotone Weise auf den Rand eines Quadrates  $Q$  in der  $x_i$ - $x_j$ -Ebene abbildet, dann ist das Bild von  $f|_D$  als Graph über  $\overset{\circ}{Q}$  darstellbar.*

In diesem Zusammenhang bedeutet monoton, dass  $J$  vertikale Stücke enthalten darf, die von  $\pi$  auf einen Punkt abgebildet werden. Das sind die einzigen Stellen, an denen die Injektivität von  $\pi|_J$  verletzt sein darf.

Satz 5.10 bleibt wahr, wenn  $\pi$  eine beliebige Projektion auf einen zweidimensionalen Unterraum des  $\mathbb{R}^n$  ist und  $\pi$  die Jordankurve  $J$  monoton auf den Rand eines beschränkten, konvexen Gebiets in diesem Unterraum abbildet. Der in Satz 5.10 beschriebene Spezialfall ist bereits an die hier vorliegende Situation angepasst. Die Voraussetzungen sind erfüllt, wenn  $J$  in  $x_i$ - und  $x_j$ -Richtung je genau zwei Kanten durchläuft und zwar in der Reihenfolge  $i j i j$  oder  $j i j i$  (mit beliebigen Richtungen dazwischen). Diese Bedingung ist für eine gegebene Jordankurve  $J$  leicht zu überprüfen, es ist aber nicht klar, ob sie ein notwendiges Kriterium ist.

Einen Beweis der allgemeineren Version von Satz 5.10 im Fall  $n = 3$  findet man unter anderem in [Kuw98, S. 48ff]. In [Oss86, S. 61f.] wird die Grapheneigenschaft (für beliebige Dimensionen) unter der Voraussetzung bewiesen, dass  $J$  bereits Graph über dem Rand eines konvexen Gebiets ist, d. h. dass  $J$  keine senkrechten Stücke enthält.

In [Nit75] findet man ebenfalls einen Beweis dieser Version, aber nur im Fall  $n = 3$ . Dieser Beweis überträgt sich aber direkt auf den hier betrachteten Fall. Das zugehörige Vorgehen soll im Folgenden kurz erläutert werden.

In [Nit75, § 398] findet man folgende Aussage.

**Lemma 5.11.** *Es sei  $H: \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$  harmonisch in  $D$  und stetig in  $\overline{D}$ . Weiter bilde  $H$  den Rand von  $D$  in monotoner Weise auf den Rand eines konvexen Gebietes  $B \subset \mathbb{R}^2$  ab. Dann ist  $H|_D: D \rightarrow B$  ein Homöomorphismus.*

Im Beweis wird zunächst das Maximumprinzip verwendet, um  $H(D) \subseteq B$  zu zeigen. Dann wird bewiesen, dass die Funktionaldeterminante  $\det dH$  in jedem Punkt von  $D$  ungleich Null ist. Dies geschieht indirekt, indem für jeden Punkt  $p \in D$  mit  $\det dH|_p = 0$ , eine geeignete harmonische Funktion  $f: \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert wird. Diese Funktion erfüllt die Voraussetzungen von Lemma 5.5 mit  $f(p) = 0$ , während  $f$  höchstens auf zwei Kreisbögen von  $\partial D$  den Wert Null annimmt. Dies widerspricht der Beweisidee von Lemma 5.5.

Weiter sieht man, dass jeder Punkt von  $B$  ein Bildpunkt von  $H$  ist, da die Menge der Bildpunkte abgeschlossen und offen (wegen  $\det dH \neq 0$  und dem Satz über die Umkehrabbildung) ist.

Aus  $\det dH \neq 0$  ergibt sich weiter, dass  $H$  eine Überlagerung ist. Mit einem Liftungsargument kann gezeigt werden, dass jeder Punkt von  $B$  nur ein Urbild unter  $H$  hat. Dabei wird verwendet, dass der Urbildraum  $D$  zusammenhängend und der Bildraum  $B$  einfach zusammenhängend ist. Das beendet den Beweis von Lemma 5.11.

Zum Beweis von Satz 5.10 muss man nur noch feststellen, dass unter den gegebenen Voraussetzungen die Abbildung  $H := \pi \circ f: \overline{D} \rightarrow Q$  alle Voraussetzungen von Lemma 5.11 erfüllt. Somit bildet  $H = \pi \circ f$  die Kreisscheibe  $D$  homöomorph auf  $\overset{\circ}{Q}$  ab. Das bedeutet: Das Bild von  $f|_D$  ist als Graph über  $\overset{\circ}{Q}$  darstellbar.

Sind die Voraussetzungen von Satz 5.10 erfüllt, so folgt weiter, dass  $\pi \circ f|_D$  und damit auch  $f|_D$  und  $f$  injektiv sind. Weiterhin ist  $f$  auf dem kompakten Gebiet  $\overline{D}$  definiert. Wie in Kapitel 4 ergibt sich also aus Satz 4.15, dass  $f$  in diesem Fall eingebettet ist. Also gilt:

**Korollar 5.12.** *Es sei  $\pi$  die Projektion von  $\mathbb{R}^n$  auf eine Koordinatenebene (die  $x_i$ - $x_j$ -Ebene). Wenn  $\pi$  die Jordankurve  $J$  auf monotone Weise auf den Rand eines Quadrates  $Q$  in der  $x_i$ - $x_j$ -Ebene abbildet, dann ist jede Plateau-Lösung  $f: \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit Rand  $J$  injektiv und damit auch eingebettet.*

Sind die Voraussetzungen von Korollar 5.12 erfüllt, so können also alle Ergebnisse aus Kapitel 4 verwendet werden. Insbesondere handelt es sich bei der gespiegelten Fläche  $F$

um eine  $n$ -fach periodische Fläche (siehe Korollar 4.54), die genau dann eingebettet ist, wenn die entsprechende Bedingung aus Theorem 4.85 erfüllt ist.

## 5.1 Entstehung $n$ -fach periodischer, eingebetteter Minimalflächen aus einer gegebenen Jordankurve $J$

Bei den bisherigen Betrachtungen sind drei Bedingungen an die Jordankurve  $J$  aufgetreten:

- (i) Es gibt eine Koordinatenrichtung, in welcher die Jordankurve  $J$  genau zwei Kanten durchläuft.
- (ii) Es gibt eine Koordinatenebene, sodass die Projektion von  $J$  auf diese Ebene ein Quadrat monoton durchläuft. Das heißt, es gibt zwei Koordinatenrichtungen  $x_i$  und  $x_j$ , sodass  $J$  in beide Richtungen genau zwei Kanten durchläuft und zwar in der Reihenfolge  $i j i j$  oder  $j i j i$ .
- (iii) Die Bedingungen an  $J$  für die Einbettung von  $F$  aus Theorem 4.85 sind erfüllt.

Man erkennt sofort, dass (i) aus (ii) folgt.

Sind also die Bedingungen (ii) und (iii) für eine Jordankurve  $J$  erfüllt, so erhält man aus  $J$  durch die beschriebene Konstruktion mindestens eine  $n$ -fach periodische, eingebettete Minimalfläche  $F$ . Die beiden Bedingungen lassen sich dabei für eine konkrete Jordankurve leicht überprüfen. Man beachte, dass (iii) eine notwendige Bedingung für die Einbettung von  $F$  ist, während nicht klar ist, ob dasselbe für die Bedingung (ii) gilt.

Auch ist unklar, ob die Fläche  $F$  durch  $J$  eindeutig bestimmt ist. Der bekannte Beweis der Eindeutigkeit eines minimalen Graphen in Dimension drei überträgt sich nicht auf höhere Dimensionen. Es ist also möglich, dass mehrere Plateau-Lösungen zu einer Jordankurve  $J$  existieren. In diesem Fall würde man durch Spiegelung auch mehrere periodische Minimalflächen  $F$  erhalten.

In [LO77] wird gezeigt, dass es tatsächlich Jordankurven gibt, die mehrere minimale Graphen beranden. Die dort konstruierte Kurve verläuft aber nicht auf Kanten eines Würfels.

Es bleibt noch zu erwähnen, dass die zusätzliche Bedingung (ii), die man für Minimalflächen erhält, vermutlich keine große Rolle spielt. Die Kurven  $J^1$ ,  $J^2$  und  $J^3$  aus Bemerkung 4.92 sind alle bislang bekannten Beispiele, die (iii) erfüllen. Für diese Kurven ist aber auch (ii) erfüllt.

Insbesondere gibt es in jeder Dimension Jordankurven  $J$ , die (ii) und (iii) erfüllen. Für jedes  $n$  gibt es damit Beispiele für eingebettete,  $n$ -fach periodische Minimalflächen in  $\mathbb{R}^n$ , die durch wiederholtes Schwarz-Spiegeln einer Plateau-Lösung entstehen.



Erfüllt eine Jordankurve  $J$  die Bedingung (i), so entsteht aus ihr eine reguläre Minimalfläche  $F$ . Dabei ist nicht von Bedeutung, ob (ii) und (iii) erfüllt sind.

Ist (i) erfüllt, so ist  $F$  außerdem eine  $n$ -fach periodische Fläche, diese muss aber nicht eingebettet sein. Wiederum ist nicht klar, ob (i) eine notwendige Bedingung für die Entstehung einer Minimalfläche ist.

Die Bedingung (i) ist leicht zu überprüfen und für sehr viele Jordankurven  $J$  erfüllt. Damit sie verletzt ist, muss  $J$  mindestens  $4n$  Kanten durchlaufen. Für  $n = 3$  ist das nicht möglich. Für  $n = 4$  ist es nur möglich, wenn  $J$  die maximale Kantenzahl 16 erreicht. Tatsächlich kann bewiesen werden, dass es im vierdimensionalen Fall (bis auf Symmetrie) nur genau eine Kurve gibt, die Bedingung (i) verletzt. Diese ist in Abb. 26 dargestellt.

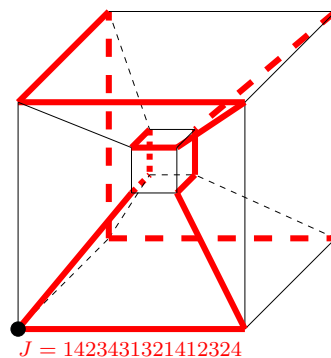


Abbildung 26: Die einzige Jordankurve in  $\mathbb{R}^4$ , welche in jede Koordinatenrichtung genau vier Kanten durchläuft.

Für  $n \leq 4$  entsteht also, abgesehen von einer Ausnahme, aus jeder Jordankurve mindestens eine reguläre  $n$ -fach periodische Minimalfläche. Erhöht man die Dimension weiter, so gibt es allerdings mehr Jordankurven mit mindestens  $4n$  Kanten.

Dennoch ist klar, dass in jeder Dimension aus jeder Jordankurve  $J$  mit einer Kantenzahl zwischen  $2n$  und  $4n - 1$  mindestens eine reguläre, periodische Minimalfläche entsteht. Das liefert eine große Anzahl von Beispielen.



## Literaturverzeichnis

- [Ahl79] AHLFORS, L.V.: *Complex analysis*. third edition. McGraw-Hill International Editions, 1979 (International Series in Pure and Applied Mathematics)
- [DHS10] DIERKES, U. ; HILDEBRANDT, S. ; SAUVIGNY, F.: *Minimal Surfaces*. Springer, 2010 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften)
- [GB07] GROSSE-BRAUCKMANN, K.: *Minimal surfaces*. Vorlesungsskript. 2006/2007 [www.mathematik.tu-darmstadt.de/Math-Net/Lehrveranstaltungen/Lehrmaterial/WS2005-2006/Minimal/mfl.pdf](http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/Math-Net/Lehrveranstaltungen/Lehrmaterial/WS2005-2006/Minimal/mfl.pdf)
- [Jos94] JOST, J.: *Differentialgeometrie und Minimalflächen*. Springer, 1994
- [Jos98] JOST, J.: *Partielle Differentialgleichungen: Elliptische (und parabolische) Gleichungen*. Springer, 1998
- [Kuw98] KUWERT, E.: *Einführung in die Theorie der Minimalflächen*. Vorlesungsskript. 1998 <http://home.mathematik.uni-freiburg.de/analysis/lehre/skripten/MinimalflaechenSS98/Minimalflaechen.pdf>
- [LO77] LAWSON, Jr. H.B. ; OSSERMAN, R.: Non-existence, non-uniqueness and irregularity of solutions to the minimal surface system. In: *Acta Mathematica* 139 (1977), Nr. 1, S. 1–17
- [Mun00] MUNKRES, J.R.: *Topology*. second edition. Prentice Hall, Incorporated, 2000 (Featured Titles for Topology Series)
- [Nit75] NITSCHKE, J.C.C.: *Vorlesungen über Minimalflächen*. Springer, 1975 (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften)
- [Oss86] OSSERMAN, R.: *A Survey of Minimal Surfaces*. Dover Publications, 1986
- [Str88] STRUWE, M.: *Plateau's problem and the calculus of variations*. Princeton University Press, 1988



# Wissenschaftlicher Werdegang

## Susanne Kürsten

01.08.1985	* in Leipzig
1991 – 2003	Schulbesuch
2003	Abitur am <i>Gymnasium Engelsdorf</i> in Leipzig/Sachsen
2003 – 2009	Studium der Mathematik an der Universität Leipzig
2009	Diplom in Mathematik mit Nebenfach Physik an der Universität Leipzig
	Titel der Diplomarbeit: <i>”Längenabschätzungen für geschlossene Geodäten in der Finslergeometrie”</i>
2010 – 2014	Promotionsstudium an der TU Darmstadt
seit 2010	Wissenschaftliche Mitarbeiterin an der TU Darmstadt